Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Florianópolis, 9 de abril de 2019.

Nome:____

Exame de Qualificação em Álgebra

Informações e instruções

I. Esta exame é composto por 2 páginas e 7 questões. Cada questão vale dois pontos e sua nota será dada pela soma das pontuações das 5 melhores questões. Coloque nome em todas as folhas de soluções e não utilize uma mesma folha para duas questões. O exame terá duração de 4 horas.

Bom exame!

Pontuação

Questão:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pontos:	2	2	2	2	2	2	2	14
Nota:								

1. [2 Pontos] Sejam

$$0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0 \quad \text{e} \quad 0 \to C \xrightarrow{g} D \to E \to 0$$

duas sequências exatas curtas de R-módulos.

(a) Prove que a sequência $0 \to A \to B \xrightarrow{g \circ f} D \to E \to 0$ é exata.

(b) Mostre que toda sequência exata de R-módulos

$$0 \to A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_1 \to 0$$

tal que $n \geq 4$ pode ser obtida "colando" várias sequências exatas curtas como no item anterior.

2. [2 Pontos] Sejam R um anel unital e $x, y \in R$.

(a) Mostre que se $Rx = Ry$, então existe um isomorfismo de R-módulos à direita $f : xR \to yR$ tal que $f(x) = y$.

(b) Suponha que R seja semissimples. Mostre que $Rx = Ry$ se, e somente se, existe $u \in R$ inversível tal que $x = uy$.

3. [2 Pontos] Prove que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre.

4. [2 Pontos] Prove que o centro de um anel simples é um corpo, e que o centro de um anel semissimples é um produto direto finito de corpos. *Sugestão.* Você é livre[1] para usar o seguinte fato: se A é um anel, o centro do anel $M_n(A)$ é o conjunto das matrizes diagonais em que todos os elementos da diagonal são iguais e pertencentes ao centro de A.

5. [2 Pontos] Sejam R um anel unital e M um R-módulo à direita.

Definição. Um R-módulo à direita E é dito ser uma *extensão essencial* de M se $E \supseteq M$ e, para qualquer submódulo $N \neq \{0\}$ de E, tem-se $N \cap M \neq \{0\}$.

Mostre que M é injetivo se, e somente se, a única extensão essencial de M é $E = M$. *Sugestão.* Para a ida, use que M é somando direto de E. Para a volta, escolha I injetivo extensão de M, utilize o lema de Zorn para criar $J \subseteq I$ maximal com relação à propriedade $J \cap M = \{0\}$. Mostre que I/J é uma extensão essencial da cópia de M em I/J e conclua que M é somando direto de I.

6. [2 Pontos]

(a) Mostre que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ e $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, em que n é um inteiro positivo.

(b) Se A é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado e $A \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0$, prove que $A = 0$.

7. [2 Pontos] Sejam p e q números primos distintos.

(a) Mostre que toda sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos (isto é, grupos abelianos) da forma

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

cinde.

(b) Se

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos, mostre que $M \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ e que a sequência cinde.

[1] e, portanto, projetivo!