Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise Numérica-2019/01

1. Considere um problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t,u), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

   - Apresente o método linear de passo múltiplo de ordem r para o problema de Cauchy.
   - Formule a condição de estabilidade absoluta do método de passo múltiplo.
   - Encontre a região de estabilidade absoluta para método de trapézio

$$u^{n+1} = u^n + \frac{k}{2}(f^n + f^{n+1})$$

     e método de ponto médio

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2kf^n.$$

2. Apresente a formulação do Método de Diferenças Finitas com estêncil de 5 pontos para equação de Poisson em um domínio retangular.
   - Prove o principio do máximo para problema discreto.
   - Qual é o erro de truncamento do método?
   - O que pode dizer sobre estabilidade do método?
   - Comente sobre o numero de condicionamento da matriz do método.

3. Sejam X, Y espaços de Hilbert, $T : X \to Y$ um operador linear limitado, e $T^\dagger$ a inversa generalizada de T. Mostre que, se $Rg(T)$ (a imagem de T) é fechada, então $Rg(T^\dagger) = Rg(T^*) = Rg(T^\dagger T)$.

4. Seja $A \in R^{n,n}$ uma matriz simetrica. Suponha que $Q^T AQ = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde $Q = [q_1, \ldots\ q_n] \in R^{n,n}$ eh ortogonal ($q_i \in R^n$) e $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Dado $q^{(0)} \in R^n$ unitário, sejam $(q^{(k)}, \lambda^{(k)}) \in R^n \times R$, $k = 1, 2, \ldots$ a sequência gerada pelo método de potência, e defina $\theta_k := \text{arccos}\,|q_1^T q^{(k)}| \in [0, \pi/2]$, $k = 0, 1, \ldots$ Mostre que, se $\cos(\theta_0) \neq 0$, então

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \;\leq\; |\lambda_1 - \lambda_n| \,\tan(\theta_0)^2\, |\lambda_2/\lambda_1|^{2k}, \; k = 0, 1, \ldots$$