Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática

Exame de Qualificação de Análise (2019.1)

Nome: ____

Para uso do professor

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Nota									

Questão 1. Considere Λ um conjunto qualquer não-vazio e $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ o espaço de medida dos reais, com a medida de Lebesgue m e a σ-álgebra $\mathcal{L}$ dos conjuntos Lebesgue mensuráveis. Para $X = \Lambda \times \mathbb{R}$ e $E \subset X$ defina $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R} \colon (\lambda, x) \in E\} \subset \mathbb{R}$, assim $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\lambda\} \times E_\lambda$, para cada $E \subset X$. Em X considere a coleção

$$\mathcal{M} = \{E \subset X \colon E_\lambda \in \mathcal{L} \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Além disso, para $E \in \mathcal{M}$, defina

$$\mu(E) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m(E_\lambda).$$

(a) [1] Assuma que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e mostre que μ é uma medida sobre $\mathcal{M}$.

(b) [1] Mostre que μ é σ-finita se, e somente se, Λ é enumerável.

Dica (in)útil: Se $\{a_\lambda\}$ é uma coleção de números não-negativos indexada em Λ (Λ um conjunto infinito qualquer) e $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < \infty$ então $a_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, exceto possivelmente para uma quantidade enumerável de λ's.

. . . .

Questão 2. [2] Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ a reta com a medida de Lebesgue. Se $f \in L^1([a,b), m)$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{para } a \leqslant x < b$$

é contínua em $[a, b)$.

. . . .

Questão 3. Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida, com μ σ-finita, e considere $f \in L^+(X)$. Defina

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty) \colon y \leqslant f(x)\}.$$

(a) [1] Mostre que G_f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)}$ mensurável.

(b) [1] Mostre que $\mu \times m(G_f) = \int f d\mu$.

. . . .

Questão 4. [2] Mostre que se $0 < p < q < r \leqslant \infty$, então $L^p \cap L^r \subset L^q$ e que $\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$, onde $\lambda \in (0, 1)$ é definido por

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

. . . .

Questão 5. [2] Seja $T\colon X \to Y$ transformação linear e bijetora. Mostre que se $\{x \in X\colon \|x\| \leqslant 1\}$ é compacto então T^{-1} é contínua. Vale o mesmo se $\{x \in X\colon \|x\| \leqslant 1\}$ não for compacto?

. . . .

Questão 6. [2] Seja X um espaço normado. Seja Y um subespaço de X e seja

$$Z = \{x \in X\colon x \text{ é limite fraco de alguma sequência de } Y\}.$$

Mostre que $Z = \overline{Y}^{\|\cdot\|_X}$.

. . . .

Questão 7. Seja $\{y_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ uma ordenação de todos os números racionais em $[0,1]$. Defina $T\colon l^\infty \to l^\infty$ por $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) [1] Determine o espectro de T.

(b) [1] Existem auto-valores no espectro? Quais são? É possível que T seja compacto?

. . . .

Questão 8. [2] Seja X um espaço com produto interno e seja $T : X \to X'$ a função dada por $T(x) = f_x$, em que $f_x(y) = \langle y, x\rangle$ para cada $y \in X$. Mostre que se T for sobrejetora então X é um espaço de Hilbert.

. . . .