Exame de Qualificação - Doutorado - Geometria - 2019/1

Questão 1: Seja M variedade C^∞ de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ (n>m).

a) Seja $p \in M$. Faça a construção do espaço tangente T_pM e do espaço cotangente (dual do espaço tangente) T_pM^*.

b) Faça construção do fibrado tangente TM e do fibrado cotangente TM^*.

c) O que é uma seção do fibrado tangente? E do fibrado cotangente?

Questão 2: Seja $\vec{F} = F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$ campo vetorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e defina as formas diferenciais

$$\omega_F = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \ ;$$

$$\eta_F = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy \ .$$

a) Mostre que $d\omega_F = \eta_{\mathrm{rot}\, F}$ e $d\eta_F = \mathrm{div}\ \vec{F}\, dx \wedge dy \wedge dz$.

b) Enuncie o Teorema de Stokes para variedades compactas com bordo.

c) Enuncie o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente em $\mathbb{R}^3$ e use os itens anteriores para demonstrá-los.

Questão 3: Sejam X, Y campos vetoriais e f, g funções sobre uma variedade diferenciável M.

a) Prove que $[fX, gY] = f \cdot (\mathcal{L}_X g) \cdot Y - g \cdot (\mathcal{L}_Y f) \cdot X + (fg) \cdot [X, Y]$;

b) Se $M = \mathbb{R}^3$, calcule $Z := [X, Y]$ para

$$X = z\partial_y - y\partial_z, \qquad Y = x\partial_z - z\partial_x.$$

X, Y, Z são independentes ?

Questão 4: Sejam $\mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$ o conjunto das $n \times n-$matrizes simétricas e F : $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$, dado por $A \mapsto A^t \cdot A$.

a) Usando a aplicação traço, F, e o Teorema de Heine-Borel, prove que $\mathbf{O}(n)$ é um subgrupo compacto de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$.

b) Prove que $\mathbf{SO}(n)$ é um subgrupo de índice 2, aberto e fechado em $\mathbf{O}(n)$.

c) Descreva $\mathbf{O}(2)$ e $\mathbf{SO}(2)$.