Exame de qualificação em Otimização 2019.1

1. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$.

   (a) Mostre que, se num dado ponto x as restrições são ativas, $\{\nabla g_i(x)\}_{j=1}^2$ é L.I., e

   $$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla g_j(x) = 0,$$

   com algum $\mu_j < 0$, então existe uma direção factível e de descida d a partir de x.

   (b) Se em (a) todos os multiplicadores são não negativos e $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva, podemos afirmar que x é mínimo local?

2. Considere o método de máxima descida $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, e assuma que f é convexa, tem pelo menos um minimizador, e possui gradiente Lipschitz de constante $L > 0$. Mostre que, se existe $\epsilon > 0$ tal que

   $$\epsilon \leq t_k \leq \frac{2 - \epsilon}{L}, \quad \forall k,$$

   então x_k converge para algum minimizador de f.

3. Sejam $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, com funções componentes $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuas, e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \geq 0\}$, com $\operatorname{int}(\Omega) \neq \emptyset$. Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, Ω limitado e defina a sequência $\{x_k\}$ gerada por

   $$x_k = \arg \min_{x \in \operatorname{int}(\Omega)} \left(f(x) - t_k \sum_{i=1}^{p} \log(c_i(x)) \right),$$

   em que $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ é uma sequência monótona decrescente e $\lim_{k \to \infty} t_k = 0$. Prove que (i) $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ e (ii) todo ponto limite de $\{x_k\}$ é solução de

   $$\min f(x), \quad \text{s.a} \quad x \in \Omega.$$

4. Defina $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\}$. Sejam $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tais que $\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ é simétrica definida positiva em $\ker(h'(x^*))$ e que $h'(x^*)$ tem posto completo e $\mathcal{L}$ denota a função Lagrangeana. Mostre que $\nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ é inversível. Explique como este resultado pode ser empregado em métodos computacionais para otimização com restrições.