Exame de Qualificação - Análise

Data: 22/03/2024

Escolha e **resolva somente 7** das 8 questões abaixo:

1. Seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, e seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, não negativa e tal que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f dm < \infty$. Demonstre que, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto Lebesgue mensurável $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $m(E) < \infty$ e

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f dm \leq \int\limits_{E} f dm + \varepsilon.$$

   Sugestão: use o Teorema da Convergência Monótona.

2. Seja $C[0,2]$ o espaço das funções contínuas de $[0,2]$ em $\mathbb{R}$ com a norma $\|f\| = \int\limits_0^2 |f(t)|dt$, sendo esta a integral de Lebesgue.

   (a) É verdade que com a norma acima, $C[0,2]$ é um espaço de Banach?

   (b) Em $C[0,2]$, com a norma acima, seja $V = \{f \in C[0,2] : f(0) = 0 = f(2) \text{ e } \int\limits_0^2 f(x)dx = 1\}$. É verdade que V é compacto?

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável e seja m a medida de Lebesgue. Demonstre que o conjunto $\{\varphi \in L^2(X,m) : \varphi \text{ é simples }\}$ é um conjunto denso em $L^2(X,m)$.

   Sugestão: Use o fato de que toda função mensurável não negativa pode ser aproximada por funções simples, e use o Teorema da Convergência Dominada.

4. Sejam X e Y espaços métricos. Demonstre que:

   (a) Se X é compacto e $A \subseteq X$ é fechado então A é compacto.

   (b) Se $f : X \to Y$ é contínua e $A \subseteq X$ é compacto então $f(A)$ é compacto.

   (c) Se $f : X \to Y$ é contínua, bijetora e X é compacto, então f é um homeomorfismo.

5. Classifique as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, prove-a, e se for falsa, apresente um contra-exemplo:

   (a) Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $(x_k) \subset X$ uma sequência. Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ convergente.}$$

(b) Sejam (M, d) um espaço métrico e A e B subconjuntos não vazios e fechados de M. Então, se A e B são disjuntos, a distância entre eles é positiva. Dito de outra forma:

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0.$$

6. Sejam X e Y espaços de Hilbert reais, $A\colon X \longrightarrow Y$ linear e contínuo, $\hat{x} \in X$ e $y \in Y$.

   (a) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

      i. $\|A\hat{x} - y\| \leq \|Ax - y\|$, para todo $x \in X$;

      ii. $A\hat{x} = P_{\overline{R(A)}}y$;

      iii. $A^*A\hat{x} = A^*y$.

   Aqui, $P_{\overline{R(A)}}\colon Y \longrightarrow Y$ denota a projeção ortogonal sobre o fecho da imagem de A e $A^*\colon Y \longrightarrow X$ é a adjunta de A;

   (b) Seja $S(y) = \{x \in X : A^*Ax = A^*y\}$. Mostre que

$$S(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in R(A) \oplus R(A)^{\perp}.$$

7. Prove a Desigualdade de Bessel: Seja (e_k) uma sequência ortonormal num espaço com produto interno X. Então, para todo $x \in X$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

   Sugestão: Defina $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ e $z_n = x - y_n$. Mostre que $y_n \perp z_n$ e aplique o Teorema de Pitágoras.

8. Sejam (M, d) um espaço métrico e $(A_k) \subset M$ uma sequência de conjuntos não vazios e compactos. Suponha que $A_{k+1} \subset A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Prove que $\cap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

   Sugestão: para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $x_k \in A_k$ e mostre que (x_k) admite uma subsequência convergente. Use um argumento por contradição para mostrar que o limite dessa subsequência pertence a $\cap_{k \in \mathbb{N}} A_k$.