UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Ado Raimundo Dalla Costa

TEOREMA DE UNICIDADE DAS ÁLGEBRAS DE LEAVITT VIA PRODUTOS CRUZADOS PARCIAIS

Florianópolis

2016

Ado Raimundo Dalla Costa

TEOREMA DE UNICIDADE DAS ÁLGEBRAS DE LEAVITT VIA PRODUTOS CRUZADOS PARCIAIS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer

Florianópolis

2016

Ado Raimundo Dalla Costa

TEOREMA DE UNICIDADE DAS ÁLGEBRAS DE LEAVITT VIA PRODUTOS CRUZADOS PARCIAIS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 25 de fevereiro 2016.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves - UFSC.
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Danilo Royer
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gonçalves - UFSC.

Prof. Dr. Dirceu Bagio - UFSM.

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro - UFSC.

Prof. Dr. Giuliano Boava - UFSC.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força e coragem em continuar a seguir o caminho da minha felicidade.

Aos meus familiares, principalmente aos meus pais, pelo apoio incondicional que me deram durante toda essa caminhada.

Sou grato de coração à minha companheira Graciela e aos meus amigos por todo o apoio e suporte que me proporcionaram.

Agradeço ao meu professor orientador Danilo Royer por toda a paciência e dedicação no desenvolvimento desse trabalho.

A todos os meus professores por toda a diferença que fizeram no desenvolvimento do meu conhecimento.

E por fim, minha gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) pelo apoio científico e financeiro.

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais, professores, colegas e amigos.

RESUMO

Neste trabalho estudamos inicialmente ações parciais de grupo sobre um conjunto qualquer e estendemos este conceito, de um modo geral, para ações parciais de grupo sobre uma álgebra.
Após isso, usufruímos dos resultados obtidos para construir um exemplo de uma ação parcial do grupo livre gerado pelas arestas de um grafo. A esta ação parcial, determinamos o produto cruzado parcial associado. Definimos a Álgebra de caminhos de Leavitt associada ao grafo e obtemos um isomorfismo entre a Álgebra de Leavitt e o produto cruzado parcial elaborado.
Por último, demonstramos o Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger para a Álgebra de Leavitt e conseguimos obter, através dos sistemas de ramificação E-algébricos, a recíproca do teorema.
Palavras-chave: Ação Parcial. Produto Cruzado Parcial. Álgebra de caminhos de Leavitt. Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger.

ABSTRACT

In this work, we study initially partial actions of group on arbitrary set and we extend this concept, in general, for partial actions of group on an algebra.
After that, we used the results obtained to build an example of a partial action of the free group generated by the edges of the graph. With this partial action, we determined the partial skew group ring associated to it. We define the Leavitt path algebras associated with the graph and we get an isomorphism between the Leavitt path algebra and the partial skew group ring produced.
Finally, we prove the Cuntz-Krieger uniqueness theorem for Leavitt path algebra and managed to get, through the E-algebraic branching systems, the reciprocal of the theorem.
Keywords: Partial Action. Partial Skew Group Ring. Leavitt Path Algebra. Cuntz-Krieger Uniqueness Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
2 AÇÃO PARCIAL DE GRUPO 19
3 A CONTRUÇÃO DA AÇÃO PARCIAL α 31
4 ÁLGEBRA DE LEAVITT 51
5 O ISOMORFISMO ENTRE $L_{\mathbb{K}}(E)$ E $D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ 57
6 TEOREMA DE UNICIDADE DE CUNTZ-KRIEGER 63
7 SISTEMAS DE RAMIFICAÇÃO E-ALGÉBRICOS . . 77
8 CONCLUSÃO 87
APÊNDICE A – Produto Cruzado Parcial 91
APÊNDICE B – $\mathbb{Z}$-graduação 95
REFERÊNCIAS 99

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra de caminhos de Leavitt foi introduzida por Gene Abrams e Gonzalo Aranda-Pino em 2005 como generalização da álgebra de Leavitt e sendo, do ponto de vista algébrico, análoga da C*-álgebra de Cuntz-Krieger como pode ser visto com mais detalhes nos artigos (ABRAMS; ARANDA-PINO, 2005) e (ABRAMS; ARANDA-PINO, 2008). Sua importância vem crescendo ao longo dos anos e muitos artigos vêm explorando suas propriedades, características e relações com outras áreas da matemática, como por exemplo na álgebra de operadores.

Nossa intenção neste trabalho é justamente demonstrar o Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger para a Álgebra de caminhos de Leavitt utilizando a teoria de produto cruzado parcial. A abordagem para a demonstração deste teorema é totalmente diferente das originais (ABRAMS; ARANDA-PINO, 2005) e (TOMFORDE, 2007) e tem como base o trabalho (GONÇALVES; ROYER, 2014). O leitor deve estar familiarizado com estruturas algébricas e teoria de grafos o qual é bastante utilizada em todo o trabalho.

Nosso trabalho inicia-se no capítulo 2 realizando um estudo sobre ações parciais de grupo sobre conjuntos. Trabalhos como (BOAVA, 2007) e (DOKUCHAEV; EXEL, 2005) foram de grande ajuda neste capítulo. Desse modo, procedemos uma análise de como obter, de modo geral, uma ação parcial de grupo sobre uma álgebra a partir da ação parcial de grupo sobre um conjunto prefixada.

O capítulo 3 serve como base para o procedimento de obtenção do produto cruzado parcial $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, o qual é de extrema importância para o restante do trabalho. Ou seja, construímos α uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}$ gerado pelas arestas de um grafo E, utilizando os resultados do capítulo 2.

No quarto capítulo introduzimos a Álgebra de caminhos de Leavitt associado ao grafo E com coeficientes em $\mathbb{K}$, denotada por $L_\mathbb{K}(E)$. Estudamos algumas propriedades e exemplos para que o leitor seja capaz de se familiarizar com a estrutura da álgebra apresentada. Vários artigos como (ABRAMS; ARANDA-PINO, 2005), (ABRAMS; ARANDA-PINO, 2008) e (ARA; GOODEARL, 2012) foram base para o estudo dessa estrutura algébrica.

Após isso, no capítulo 5, apresentamos o isomorfismo entre a Álgebra de caminhos de Leavitt $L_\mathbb{K}(E)$ e o produto cruzado parcial $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ apresentado no capítulo 3. Além da sua grande relevância no mundo acadêmico, essa conexão entre essas duas estruturas algébricas contribuirá na demonstração do teorema principal do trabalho.

No penúltimo capítulo apresentamos e demonstramos o Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger sobre a Álgebra de caminhos de Leavitt via o isomorfismo obtido no capítulo 5. Por último, no capítulo 7 apresentamos os sistemas de ramificação E-algébricos que auxiliam na demonstração da recíproca do teorema chave do trabalho. O principal artigo deste último capítulo foi (GONÇALVES; ROYER, 2010).

Além disso, produzimos dois apêndices que auxiliarão o leitor a rever algumas definições, construções e resultados auxiliares para o bom entendimento do trabalho.

2 AÇÃO PARCIAL DE GRUPO

Neste primeiro capítulo faremos uma introdução às ações parciais de grupo sobre um conjunto qualquer. Alguns exemplos serão abordados para o leitor se familiarizar com as definições e notações propostas. Em seguida, faremos uma extensão para ações parciais de grupo sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra, o qual possui sua importância para os próximos capítulos. As principais referências utilizadas foram (BOAVA, 2007) e (DOKUCHAEV; EXEL, 2005).

Definição 1. *Sejam G um grupo (com elemento neutro 0) e X um conjunto não vazio qualquer. Uma* ***ação parcial de G sobre X*** *é um par $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ em que, para cada $g \in G$, X_g é subconjunto de X e $\theta_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$ é bijeção que satisfazem, para todo $g, h \in G$, as seguintes condições:*

(i) $X_0 = X$ *e* $\theta_0 = Id_X$*;*

(ii) $\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$*;*

(iii) $\theta_g \circ \theta_h(x) = \theta_{gh}(x)$*,* $\forall x \in \theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}})$*.*

Observação 2. Quando não houver nenhum equívoco denotaremos a ação parcial $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ apenas por θ a fim de facilitar a notação.

Observação 3. Note que a igualdade (iii) está bem definida visto que se $x \in \theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}})$, então $\theta_h(x) \in X_h \cap X_{g^{-1}} \subseteq X_{g^{-1}}$ e portanto, $\theta_g \circ \theta_h(x)$ está bem definido. Por outro lado, pelo item (ii), $x \in X_{(gh)^{-1}}$ e dessa forma, faz sentido aplicarmos $\theta_{gh}(x)$, o qual fica bem definido.

Observação 4. A condição $\theta_0 = Id_X$ pertencente ao item (i) pode ser obtida aplicando o item (iii) com $g = h = 0$. Nesse caso obtemos que $\theta_0 \circ \theta_0(x) = \theta_0(x)$, para todo $x \in \theta_0^{-1}(X)$, desde que $X_0 = X$ por (i). Como θ_0 é bijeção, então segue que $\theta_0(x) = x$, para todo $x \in X$, ou seja, $\theta_0 = Id_X$. Em alguns casos, essa propriedade será omitida desde que o restante das condições da definição são válidas.

Proposição 5. *Seja θ uma ação parcial de G sobre um conjunto X. Então, para todo $g \in G$, $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$.*

Demonstração. De fato, para todo $g \in G$, aplicando (iii) com $h = g^{-1}$ temos que

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}(x) = \theta_0(x) \overset{(i)}{=} Id_X(x),$$

$\forall x \in \theta_{g^{-1}}^{-1}(X_{g^{-1}} \cap X_{g^{-1}}) = X_g$, isto é, $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}(x) = Id_X(x)$, $\forall x \in X_g$. Como θ_g é bijeção segue que $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$.

■

Observação 6. Podemos reescrever a condição (ii) da seguinte maneira:

$$\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) = X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}. \tag{2.1}$$

De fato, note que $\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{h^{-1}}$ e, pelo item (ii), $\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$, isto é, $\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$. Por outro lado, substituindo h por h^{-1} e g por gh na desigualdade $\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ obtida acima, podemos concluir que

$$\theta_{h^{-1}}^{-1}(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) \subseteq X_h \cap X_{g^{-1}}.$$

Pela proposição 5, $\theta_{h^{-1}} = \theta_h^{-1}$ e logo, $\theta_h(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) \subseteq X_h \cap X_{g^{-1}}$. Finalmente segue que $X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}} \subseteq \theta_{h^{-1}}(X_h \cap X_{g^{-1}})$, pois θ_h é bijeção. Portanto conclui-se a igualdade desejada. De maneira análoga, prova-se que a condição (2.1) é equivalente a equação (ii).

Observação 7. Podemos ainda reescrever a condição (ii) da seguinte forma:

$$\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}. \tag{2.2}$$

De fato, substituindo g por h^{-1} e h por g^{-1} na igualdade (2.1) da observação 6 obtemos que $\theta_{g^{-1}}^{-1}(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}$. Pela proposição 5 temos que $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$ e assim, obtemos $\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}$. De maneira análoga, prova-se que a condição (2.2) é equivalente a equação (ii).

Esta é uma maneira mais interessante do que a observação 6 e será útil em alguns contextos.

Observação 8. $\theta_g \circ \theta_h$ é bijeção de $X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ sobre $X_g \cap X_{gh}$.

De fato, utilizando a observação 7 com h no lugar de g e $(gh)^{-1}$ no lugar de h, obtemos $\theta_h(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) = X_h \cap X_{h(gh)^{-1}}$, ou seja, $\theta_h(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) = X_h \cap X_{g^{-1}}$. Portanto pela observação 7 e pela igualdade obtida acima segue que

$$\theta_g \circ \theta_h(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) = \theta_g(X_h \cap X_{g^{-1}}) = X_g \cap X_{gh}.$$

Como θ_g e θ_h são bijeções, então $\theta_g \circ \theta_h$ é bijeção de $X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ sobre $X_g \cap X_{gh}$.

Observação 9. Os itens (ii) e (iii) nos garantem que θ_{gh} é uma bijeção que estende $\theta_g \circ \theta_h$, para todo $g, h \in G$. A razão pela qual isso acontece é pelo fato que o

$$\mathrm{Dom}(\theta_g \circ \theta_h) = \theta_h^{-1}(X_h \cap X_g^{-1}) \subseteq X_{(gh)^{-1}} = \mathrm{Dom}(\theta_{gh}).$$

Pelas proposições e observações vistas até o momento podemos obter uma definição equivalente à anterior. Em alguns casos essa abordagem parece ser mais interessante e será utilizada, porém dependerá do contexto a ser tratado.

Proposição 10. *Sejam G um grupo (com elemento neutro 0) e X um conjunto não vazio qualquer. Sejam, para cada $g \in G$, X_g subconjunto de X e $\theta_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$ bijeção. Então $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ é ação parcial de G sobre X se, e somente se, satisfaz, para todo $g, h \in G$, as seguintes condições:*

(i) $X_0 = X$;

(ii) $\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}$;

(iii) $\theta_g \circ \theta_h(x) = \theta_{gh}(x)$, $\forall x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$.

Demonstração. Segue imediatamente das observações 4, 6 e 7.

■

Definição 11. *Seja $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X. Dizemos que:*

1) $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *é ação parcial de G sobre o espaço topológico X se X é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff, X_g são abertos de X e θ_g são homeomorfismos, para todo $g \in G$.*

2) $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *é ação parcial de G sobre a álgebra X se X é uma álgebra, X_g são ideais bilaterais de X e θ_g são isomorfismos, para todo $g \in G$.*

3) $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *é ação parcial de G sobre a $*$-álgebra X se X é uma $*$-álgebra, X_g são ideais bilaterais autoadjuntos de X e θ_g são isomorfismos, para todo $g \in G$.*

4) $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *é ação parcial de G sobre a C^*-álgebra X se X é uma C^*-álgebra, X_g são ideais bilaterais fechados de X e θ_g são isomorfismos, para todo $g \in G$.*

Definição 12. *Em qualquer um dos itens da definição 11, se $X_g = X$ para todo $g \in G$, a ação parcial será denominada uma ação.*

Exemplo 13. Sejam o grupo aditivo $G = (\mathbb{Z}, +)$ e $X = \mathbb{N}$. Vamos definir uma ação parcial de G sobre X.

Defina $X_z = \mathbb{N}$, se $z \leq 0$ e $X_z = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq z\}$, se $z > 0$. Também defina $\theta_z : X_{-z} \longrightarrow X_z$ por $\theta_z(n) = n + z$.

De fato, θ_z está bem definido pois caso $z > 0$ então temos que $X_z = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq z\}$ e $X_{-z} = \mathbb{N}$. Dessa forma, para todo $n \in X_{-z}$ temos que

$$\theta_z(n) = n + z \geq z,$$

e logo, $\theta_z(n) \in X_z$.

Caso $z \leq 0$ então $X_z = \mathbb{N}$ e $X_{-z} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq -z\}$. Dessa maneira, para todo $n \in X_{-z}$ temos que

$$\theta_z(n) = n + z \geq -z + z = 0,$$

e portanto, $\theta_z(n) \in X_{-z}$.

Para ver que θ_z é bijeção basta observar que $\forall z \in \mathbb{Z}$ e $\forall n \in X_{-z}$ temos que

$$\theta_z \circ \theta_{-z}(n) = \theta_z(\theta_{-z}(n)) = \theta_z(n+(-z)) = n+(-z)+z = n = Id_{X_z}(n).$$

Isto é, $\theta_z \circ \theta_{-z} = Id_{X_z}$.

Como z é arbitrário segue que $\theta_{-z} \circ \theta_z = Id_{X_{-z}}$ e portanto, θ_z é bijeção.

Agora basta verificar que θ é de fato ação parcial.

(i) Note que $X_0 = \mathbb{N} = X$.

(ii) Precisamos mostrar que $\theta_z^{-1}(X_z \cap X_{-w}) \subseteq X_{-z-w}$, $\forall z, w \in \mathbb{Z}$. Sabendo que $\theta_z^{-1} = \theta_{-z}$, para todo $z \in \mathbb{Z}$, basta verificar a condição $\theta_{-z}(X_z \cap X_{-w}) \subseteq X_{-z-w}$, $\forall z, w \in \mathbb{Z}$. Para isso precisamos dividir em alguns casos.

Caso 1: $z > 0$ e $w > 0$.

Neste caso temos que $X_z = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq z\}$ e $X_{-w} = \mathbb{N}$ e portanto, segue que $X_z \cap X_{-w} = X_z$. Como $-z-w \leq 0$ então $X_{-z-w} = \mathbb{N}$ e assim, podemos concluir que para todo $n \in X_z$

$$\theta_{-z}(n) = n + (-z) \geq z + (-z) = 0,$$

isto é, $\theta_{-z}(n) \in X_{-z-w}$.

Caso 2: $z \leq 0$ e $w > 0$.

Neste caso, temos que $X_z = \mathbb{N}$ e $X_{-w} = \mathbb{N}$ e portanto, segue que $X_z \cap X_{-w} = \mathbb{N}$. Por outro lado, $-z \geq -z-w$ então segue que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\theta_{-z}(n) = n + (-z) \geq n + (-z-w) \geq -z-w,$$

isto é, $\theta_{-z}(n) \in X_{-z-w}$.

Caso 3: $z \leq 0$ e $w \leq 0$.

Neste caso, $X_{-w} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq -w\}$ e $X_z = \mathbb{N}$ e portanto, segue que $X_z \cap X_{-w} = X_{-w}$. Por outro lado, $-z-w > 0$ e logo, $X_{-z-w} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq -z-w\}$. Então segue que para todo $n \in X_{-w}$

$$\theta_{-z}(n) = n + (-z) \geq -w-z,$$

isto é, $\theta_{-z}(n) \in X_{-z-w}$.

Caso 4: $z > 0$ e $w \leq 0$.

Neste caso, obtemos que $X_z = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq z\}$ e $X_{-w} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq -w\}$. Temos que considerar duas possibilidades.

Se $|w| > |z|$ então $-z-w > 0$ e, desse modo temos que $X_{-z-w} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq -z-w\}$. Mas $X_z \cap X_{-w} = X_{-w}$. Portanto, para todo $n \in X_{-w}$ temos que

$$\theta_{-z}(n) = n + (-z) \geq -w-z,$$

isto é, $\theta_{-z}(n) \in X_{-z-w}$.

Se $|w| \leq |z|$ então $-z-w < 0$ e, logo $X_{-z-w} = \mathbb{N}$. Mas, $X_z \cap X_{-w} = X_z$. Assim,

$$\theta_{-z}(X_z) = X_{-z} = X_{-z-w}.$$

Portanto mostramos que $\theta_{-z}(X_z \cap X_{-w}) \subseteq X_{-z-w}$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{Z}$.

(iii) Para quaisquer $z, w \in \mathbb{Z}$ mostraremos que $\theta_w \circ \theta_z(n) = \theta_{w+z}(n)$, $\forall n \in \theta_z^{-1}(X_z \cap X_{-w})$.

De fato,

$$\theta_w \circ \theta_z(n) = \theta_w(\theta_z(n)) = \theta_w(n+z) = n + z + w = \theta_{w+z}(n).$$

Logo, θ é ação parcial de G sobre X.

Exemplo 14. Sejam o grupo aditivo $G = (\mathbb{R}, +)$ e $X = [0, +\infty)$. Vamos definir uma ação parcial de G sobre o conjunto X.

Defina $X_r = X$, se $r \leq 0$ e $X_r = \{x \in X \mid x \geq r\}$, se $r > 0$. Defina $\theta_r : X_{-r} \longrightarrow X_r$ por $\theta_r(x) = x + r$.

De fato, θ_r está bem definido pois caso $r > 0$ então temos que $X_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq r\}$ e $X_{-r} = X$ e dessa forma, para todo $x \in X_{-r}$ temos que

$$\theta_r(x) = x + r \geq r,$$

e logo, $\theta_r(x) \in X_r$.

Caso $r \leq 0$ então $X_r = X$ e $X_{-r} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -r\}$. Desse modo, para todo $x \in X_{-r}$ temos que

$$\theta_r(x) = x + r \geq -r + r = 0,$$

e portanto, $\theta_r(x) \in X_{-r}$.

Para ver que θ_r é bijeção basta observar que $\forall r \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in X_{-r}$ temos que

$$\theta_{-r} \circ \theta_r(x) = \theta_{-r}(\theta_r(x)) = \theta_{-r}(x + r) = x + r + (-r) = x = Id_{X_{-r}}(x).$$

Isto é, $\theta_{-r} \circ \theta_r = Id_{X_{-r}}$.

Como r é arbitrário segue que $\theta_r \circ \theta_{-r} = Id_{X_r}$ e portanto, θ_r é bijeção.

A verificação de θ é de fato ação parcial procede de forma semelhante ao exemplo 13.

Exemplo 15. Sejam X um conjunto qualquer, G um grupo, H um subgrupo de G e $\gamma : G \longrightarrow Bij(X)$ dado por $\gamma(g) = \phi_g$ uma ação de G sobre X. Podemos obter uma ação parcial a partir de γ definindo

$$X_g = \begin{cases} X, \text{ se } g \in H \\ \emptyset, \text{ se } g \notin H \end{cases}$$

e

$$\theta_g = \begin{cases} \phi_g, \text{ se } g \in H \\ \emptyset, \text{ se } g \notin H \end{cases} .$$

A verificação de θ é ação parcial é imediata.

Exemplo 16. Sejam o grupo aditivo $G = (\mathbb{R}, +)$ e $X = C_0((0, +\infty))$ a álgebra das funções contínuas de $(0, +\infty)$ para $\mathbb{R}$ que se anulam no infinito. Vamos definir uma ação parcial de G sobre a álgebra X.

Defina $X_r = X = C_0((0, +\infty))$, se $r \leq 0$ e $X_r = C_0((r, +\infty))$, como sendo o conjunto das funções de $C_0((0,+\infty))$ definidas em $(r,+\infty)$, se $r > 0$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, defina $\theta_r : X_{-r} \longrightarrow X_r$ por $\theta_r(f)(x) = f(x-r)$.

Note que θ_r está bem definido e X_r são ideais bilaterais de X, para todo $r \in \mathbb{R}$. Além disso, note que para todo $f \in X_{-r}$,

$$\begin{aligned}(\theta_r \circ \theta_{-r})(f)(x) = \theta_r(\theta_{-r}(f))(x) = \theta_{-r}(f)(x-r) = \\ = f((x-r)-(-r)) = f(x) = Id_{X_{-r}}(f)(x).\end{aligned}$$

Dessa forma, $\theta_r \circ \theta_{-r} = Id_{X_{-r}}$. Logo, como r é arbitrário segue que $\theta_{-r} \circ \theta_r = Id_{X_r}$ e portanto, θ_r é isomorfismo.

Agora basta mostrar que θ é de fato ação parcial.

(i) Note que $X_0 = C_0((0,+\infty)) = X$.

(ii) Sabendo que $\theta_r^{-1} = \theta_{-r}$, basta verificarmos que para todo $r, s \in \mathbb{R}$, a condição $\theta_{-r}(X_r \cap X_{-s}) \subseteq X_{-r-s}$ é válida. Para isso precisamos dividir em alguns casos.

Caso 1: $r > 0$ e $s > 0$.

Neste caso temos que $X_r = C_0((r,+\infty))$ e $X_{-s} = X$ e portanto, segue que $X_r \cap X_{-s} = X_r$. Mas, $-r-s < 0$ e logo, $X_{-r-s} = X$. Dessa forma, podemos concluir que

$$\theta_{-r}(X_r) = X_{-r} \subseteq X = X_{-r-s}.$$

Caso 2: $r \leq 0$ e $s \leq 0$.

Neste caso temos que $X_r = X$ e $X_{-s} = C_0((-s,+\infty))$ e portanto, segue que $X_r \cap X_{-s} = X_{-s}$. Por outro lado, temos que $\theta_{-r}(f)(x) = f(x+r)$, para todo $x > -r$. Mas como $f \in X_{-s}$ segue que $x + r > -s$, ou seja, $x + r > -r - s$. Segue que

$$\theta_{-r}(f)(x) = f(x+r) \in X_{-r-s}.$$

Caso 3: $r > 0$ e $s \leq 0$.

Então temos que $X_r = C_0((r,+\infty))$ e $X_{-s} = C_0((-s,+\infty))$. Por outro lado, temos que $\theta_{-r}(f)(x) = f(x+r)$, para todo $x > -r$. Como $f \in X_r \cap X_{-s}$ temos que $x+r > -s$, ou seja, $x + r > -r - s$. Segue que

$$\theta_{-r}(f)(x) = f(x+r) \in X_{-r-s}.$$

Caso 4: $r \leq 0$ e $s > 0$.

Neste caso temos que $X_r = X$ e $X_{-s} = X$ e dessa forma, $X_r \cap X_{-s} = X = X_r$. Segue que

$$\theta_{-r}(X_r) = X_{-r} \subseteq X_{-r-s}.$$

(iii) Para todos $r, s \in \mathbb{R}$ temos que mostrar que $\theta_s \circ \theta_r(f) = \theta_{s+r}(f)$, $\forall f \in \theta_r^{-1}(X_r \cap X_{-s})$.

Mas note que para todo $f \in \theta_r^{-1}(X_r \cap X_{-s})$ temos que

$$\begin{aligned} \theta_s \circ \theta_r(f)(x) = \theta_s(\theta_r(f))(x) = \theta_r(f)(x-s) = \\ = f(x-(r+s)) = \theta_{s+r}(f)(x). \end{aligned}$$

Desse modo, θ é ação parcial de G sobre a álgebra X.

A partir de agora fixaremos $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. O objetivo dos próximos resultados é mostrar que podemos obter ações parciais de grupo sobre conjuntos para ações parciais de grupo sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Seja X um conjunto não vazio qualquer e considere $F(X)$ a $\mathbb{K}$-álgebra das funções de X para $\mathbb{K}$ equipada com as operações usuais ponto a ponto. Dado A um subconjunto qualquer de X, definimos $F(A)$ como sendo o conjunto das funções de X para $\mathbb{K}$ tal que $f|_{X \setminus A} = 0$, ou seja, $F(A) = \{f \in F(X) \mid f(x) = 0, \forall x \notin A\}$.

Observação 17. Note que $F(A)$ é ideal bilateral de $F(X)$. Observe que os escalares podem ser vistos como funções constantes e que $F(A)$ é subespaço de $F(X)$. Note ainda que para $f \in F(X)$ e $g \in F(A)$ temos que, para todo $x \notin A$,

$$(f.g)(x) = f(x)g(x) = f(x).0 = 0$$

e

$$(g.f)(x) = g(x)f(x) = 0.f(x) = 0.$$

Desse modo, como f e g são arbitrários, temos $f.g$ e $g.f \in F(A)$ e, portanto, segue o desejado.

Proposição 18. *Sejam X e Y conjuntos quaisquer e $h : X \longrightarrow Y$ bijeção. Então a função*

$$\begin{aligned} \psi_h : F(Y) &\longrightarrow F(X) \\ f &\longrightarrow f \circ h \end{aligned}$$

é isomorfismo de álgebras.

Demonstração. Note que ψ_h está bem definido. Para mostrar que é um homomorfismo, sejam $f, g \in F(Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, para cada $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned}\psi_h(\lambda f + g)(x) &= (\lambda f + g)(h(x)) = \lambda f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= \lambda\psi_h(f)(x) + \psi_h(g)(x) = (\lambda\psi_h(f) + \psi_h(g))(x).\end{aligned}$$

Como x é arbitrário segue que $\psi_h(\lambda f + g) = \lambda\psi_h(f) + \psi_h(g)$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\psi_h(f.g)(x) &= (f.g)(h(x)) = f(h(x)).g(h(x)) = \psi_h(f)(x).\psi_h(g)(x) \\ &= (\psi_h(f).\psi_h(g))(x).\end{aligned}$$

Como x é arbitrário podemos concluir que $\psi_h(f.g) = \psi_h(f).\psi_h(g)$ e portanto, ψ_h é homomorfismo de álgebras.

Não é difícil ver que ψ_h é injetora pois dado $f \in \ker(\psi_h)$ então $\psi_h(f) = f \circ h = 0$. Certamente $f(h(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Como h é bijeção, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ de modo que $h(x) = y$. Portanto, $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Dessa forma, $f = 0$ e dessa forma, ψ_h é injetora.

Vejamos agora que ψ_h é sobrejetora. De fato, dado $g \in F(X)$ qualquer, escolha $g \circ h^{-1} : Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Note que $g \circ h^{-1} \in F(Y)$ e $\psi_h(g \circ h^{-1}) = g \circ h^{-1} \circ h = g$.

Portanto, ψ_h é isomorfismo.

■

Teorema 19. *Seja $(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X não vazio qualquer. Defina $D_g = F(X_g)$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ dada por $\alpha_g(f) = f \circ \theta_{g^{-1}}$, para cada $g \in G$. Então $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é ação parcial de G sobre a $\mathbb{K}$-álgebra $F(X)$.*

Demonstração. Note que D_g é ideal de $F(X)$ pela observação 17 e α_g é bijeção via proposição 18. Basta mostrar que $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ satisfaz as condições da proposição 10.

(i) Como $X_0 = X$ segue por definição que $D_0 = F(X_0) = F(X)$.

(ii) Temos que mostrar que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$. Antes disso, façamos a seguinte afirmação.

Afirmação: $\alpha_g(F(X_{g^{-1}} \cap X_h)) = F(\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h))$.

De fato, seja $y \in \alpha_g(F(X_{g^{-1}} \cap X_h))$. Então $y = \alpha_g(f) = f \circ \theta_{g^{-1}}$ para algum $f \in F(X_{g^{-1}} \cap X_h)$.

Se $x \in X_g \setminus (\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h))$ então $\theta_{g^{-1}}(x) \in X_{g^{-1}} \setminus (X_{g^{-1}} \cap X_h)$ pois θ_g é bijeção. Como $f \in F(X_{g^{-1}} \cap X_h)$ podemos concluir que $y(x) = f(\theta_{g^{-1}}(x)) = 0$. Portanto $y \in F(\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h))$.

Por outro lado, seja $y \in F(\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h))$.

Defina $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ de modo que

$$f(x) = \begin{cases} (y \circ \theta_g)(x), \text{ se } x \in X_{g^{-1}} \cap X_h \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Note que $f \in F(X_{g^{-1}} \cap X_h)$. Além disso, para $x \in X_{g^{-1}} \cap X_h$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha_g(f)(x) = f \circ \theta_{g^{-1}}(x) &= f(\theta_{g^{-1}}(x)) = y \circ \theta_g((\theta_{g^{-1}}(x)) \\ &= y \circ \theta_g \circ \theta_{g^{-1}}(x) = y(x) \end{aligned}$$

É imediato que se $x \notin X_{g^{-1}} \cap X_h$, então $\alpha_g(f)(x) = 0 = y(x)$, pois $\theta_g(x) \notin \theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h)$. Dessa forma, concluímos a afirmação.

Continuando com a demonstração, note que

$$D_{g^{-1}} \cap D_h = F(X_{g^{-1}}) \cap F(X_h) = F(X_{g^{-1}} \cap X_h).$$

Observe que a última igualdade da expressão acima é claramente direta pois dada uma função que se anula no complementar de $X_{g^{-1}}$ e no complementar de X_h quer dizer que a função se anula no complementar de $X_{g^{-1}} \cap X_h$.

Como θ é ação parcial, concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) &= \alpha_g(F(X_{g^{-1}} \cap X_h) = F(\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h)) \\ &= F(X_g \cap X_{gh}) = F(X_g) \cap F(X_{gh}) = D_g \cap D_{gh}. \end{aligned}$$

(iii) Temos que mostrar que $\alpha_g \circ \alpha_h(f) = \alpha_{gh}(f), \forall f \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

De fato, note que $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} = F(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}})$. Desse modo, para qualquer $f \in F(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}})$ temos que

$$\alpha_g(\alpha_h(f))(x) = \begin{cases} \alpha_h(f) \circ \theta_{g^{-1}}(x), & \text{se } x \in X_g \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então,

$$\alpha_g(\alpha_h(f))(x) = \begin{cases} f \circ \theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g-1}(x), & \text{se } x \in X_g \text{ e } \theta_{g^{-1}}(x) \in X_h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mas $x \in X_g$ e $\theta_{g^{-1}}(x) \in X_h$ se, e somente se, $x \in \theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h)$ e como θ é ação parcial segue que $x \in X_g \cap X_{gh}$. Além disso, por θ ser ação parcial, temos que $\theta_{(gh)^{-1}}(x) = \theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g^{-1}}(x)$, para todo $x \in X_g \cap X_{gh}$. Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \alpha_g(\alpha_h(f))(x) &= \begin{cases} f \circ \theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g^{-1}}(x), & \text{se } x \in X_g \cap X_{gh} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f \circ \theta_{(gh)^{-1}}(x), & \text{se } x \in X_g \cap X_{gh} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \alpha_{gh}(f)(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que α é ação parcial de G sobre a $\mathbb{K}$-álgebra $F(X)$.

■

3 A CONTRUÇÃO DA AÇÃO PARCIAL α

Neste capítulo vamos apresentar um exemplo interessante de ação parcial do grupo livre gerado pelas arestas de um grafo sobre um conjunto particular. Vamos apresentar algumas definições de grafos necessárias para os resultados posteriores e, após isso, vamos estabelecer a ação parcial e o produto cruzado parcial associado a esta ação. No apêndice A, encontram-se mais detalhes sobre a construção do produto cruzado parcial.

Definição 20. *Um grafo dirigido é uma quádrupla (E^0, E^1, r, s) composta de dois conjuntos enumeráveis E^0 e E^1 e também duas funções $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$. Os elementos de E^0 são chamados de vértices e os de E^1 são chamados de arestas.*

Para cada $e \in E^1$, $s(e)$ é o vértice onde a aresta começa e $r(e)$ é o vértice onde a aresta termina.

Observação 21. A fim de facilitar a notação chamaremos um grafo dirigido (E^0, E^1, r, s) simplesmente por E.

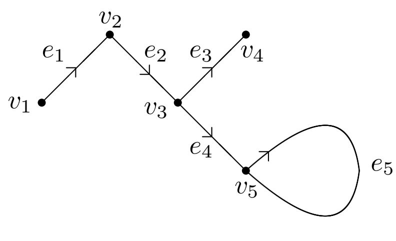
Definição 22.

1. *Uma aresta que começa e termina no mesmo vértice é chamada de "loop".*

2. *Um vértice que não recebe nenhuma aresta é chamada de fonte.*

3. *Um vértice que não emite nenhuma aresta é chamada de poço.*

Exemplo 23. Considere $E^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E^1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $s(e_1) = v_1$, $s(e_2) = v_2 = r(e_1)$, $s(e_3) = s(e_4) = v_3 = r(e_2)$, $s(e_5) = v_5 = r(e_5)$, $r(e_3) = v_4$, podemos representar este grafo E da seguinte forma:



.

Neste exemplo observe que v_1 é fonte, v_4 é poço e e_5 é um "loop"que começa e termina no vértice v_5.

Definição 24. *Seja E um grafo qualquer. Definimos:*

1. *Um caminho finito a como sendo uma sequência $a = a_1 \dots a_n$ de arestas de maneira que $r(a_i) = s(a_{i+1}), \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.*

2. *Um caminho infinito a como sendo uma sequência $a = a_1a_2a_3 \dots$ de arestas de maneira que $r(a_i) = s(a_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}$.*

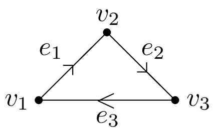
3. *Um caminho fechado ou, também chamado de ciclo, como sendo um caminho finito $a = a_1 \dots a_n$ de modo que $s(a_1) = r(a_n)$.*

4. *O comprimento de um caminho finito a como sendo o número de arestas que ele contém e, denotamos por $|a|$. Convencionamos que para v vértice temos $|v| = 0$.*

Exemplo 25. Voltando ao exemplo 23 temos que $a = e_1e_2e_3$ é um caminho finito com $|a| = 3$. Por outro lado, temos $b = e_1e_2e_4e_5e_5e_5 \dots$ um caminho infinito.

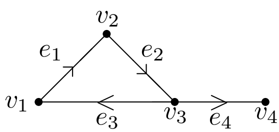
Definição 26. *Um grafo E satisfaz a condição (L) se todo ciclo em E tem um saída. Em outras palavras, um grafo E satisfaz a condição (L) se para todo caminho fechado $a = a_1 \dots a_n$, existe $t \in E^1$ com $t \neq a_i$ tal que $s(a_i) = s(t)$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Exemplo 27. Considere o grafo E_1 da seguinte maneira



.

O grafo E_1 não satisfaz a condição (L) pois o caminho fechado $e_1e_2e_3$ não tem nenhuma saída. Porém o grafo E_2 da figura abaixo satisfaz a condição (L).



.

Neste momento seja E um grafo qualquer e vamos considerar $\mathbb{F}$ o grupo livre gerado por E^1 com a operação produto dada pelo concatenação. Denotamos o elemento neutro de $\mathbb{F}$ por 0. A partir de agora vamos começar a construir uma ação parcial de $\mathbb{F}$.

Para isso, definimos o conjunto W como sendo o conjunto de todos os caminhos finitos do grafo E e W^∞ como sendo o conjunto de todos os caminhos infinitos do grafo E, isto é,

$$W := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a = a_1 \dots a_n \mid a_i \in E^1 \text{ e } r(a_i) = s(a_{i+1}), \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\}$$

e

$$W^\infty := \{a = a_1a_2a_3\dots \mid a_i \in E^1 \text{ e } r(a_i) = s(a_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Observação 28. Para $a \in W$ da forma $a = a_1 \dots a_n$, definimos $s(a) = s(a_1)$ e $r(a) = r(a_n)$. Para $a \in W^\infty$ da forma $a = a_1a_2a_3\dots$ definimos $s(a) = s(a_1)$. Para todo $v \in E^0$ definimos $s(v) = r(v) = v$.

De certa forma estamos estendendo as funções r, s do grafo para o conjunto $W \cup W^\infty \cup E^0$.

Agora defina o conjunto

$$X := \{a \in W \mid r(a) \text{ é poço}\} \cup \{v \in E^0 \mid v \text{ é poço}\} \cup W^\infty.$$

O conjunto X definido acima será o conjunto sobre o qual criaremos uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}$.

Desse modo, vamos primeiramente definir os subconjuntos de X da seguinte forma:

- $X_0 := X$.
- $X_a := \{\xi \in X \mid \xi_1\xi_2...\xi_{|a|} = a\}$ para todo $a \in W$. Isto é, X_a é o conjunto dos caminhos que começam por a. Denotaremos $\xi \in X_a$ como sendo $\xi = a.\eta$ com $\eta \in X$.
- $X_{b^{-1}} := \{\xi \in X \mid s(\xi) = r(b)\}$, para todo $b \in W$. Ou seja, $X_{b^{-1}}$ é o conjunto dos caminhos que tem início o vértice $r(b)$.
- $X_{ab^{-1}} := \{\xi \in X \mid \xi_1\xi_2...\xi_{|a|} = a\} = X_a$, para $ab^{-1} \in \mathbb{F}$ com $a, b \in W$, $r(a) = r(b)$ e ab^{-1} na forma reduzida, isto é, $a_{|a|} \neq b_{|b|}$.
- $X_c := \emptyset$, para todos os outros $c \in \mathbb{F}$.

Observação 29.

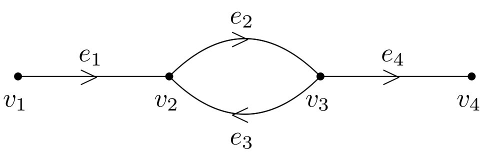
1) Uma das perguntas pertinentes neste momento é: por que definimos nossos subconjuntos de X somente para elementos de $\mathbb{F}$ da forma a, a^{-1} e ab^{-1}, com $a, b \in W$?

A resposta para essa pergunta virá um pouco mais adiante quando definirmos a Álgebra de caminhos de Leavitt associada ao grafo E.

2) Note que $r(b) \in X_{b^{-1}}$ se, e somente se, $r(b)$ é poço. Além disso, neste caso $X_{b^{-1}} = \{r(b)\}$ e $X_b = \{b\}$.

3) Para $v \in E^0$, defina $X_v = \{\xi \in X \mid s(\xi) = v\}$. Observe que para cada $b \in W$, $X_{b^{-1}}$ e $X_{r(b)}$ são o mesmo conjunto. Como $s(v) = v$ então $v \in X_v$ se, e somente se, v é poço. Neste caso, $X_v = \{v\}$.

Exemplo 30. Para exemplificar os conjuntos definidos anteriormente, considere o grafo E da seguinte maneira:



.

Neste grafo temos o conjunto

$$X_{e_1 e_2^{-1}} = \{e_1e_2e_3e_2e_3 \ldots, e_1e_2e_4, e_1e_2e_3e_2e_4, e_1e_2e_3e_2e_3e_2e_4, \ldots\}.$$

Também temos o conjunto

$$X_{e_2^{-1}} = \{e_3e_2e_3e_2 \ldots, e_4, e_3e_2e_4, e_3e_2e_3e_2e_4, \ldots\}.$$

Observação 31. A partir desde momento sempre usaremos as palavras de $\mathbb{F}$ da forma ab^{-1} na sua forma reduzida pois caso contrário basta reduzi-la utilizando a definição de produto por concatenação em $\mathbb{F}$.

Neste momento, vamos mostrar um lema bastante importante e que será utilizado com muita frequência durante todo o trabalho.

Lema 32. *Sejam $a, c \in W$, $b, d \in W \cup \{0\}$ e $v \in E^0$. Então:*

1. $X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \begin{cases} X_{ab^{-1}}, & \textit{se } a = ct \textit{ para algum } t \in W \cup \{0\} \\ X_{cd^{-1}}, & \textit{se } c = at \textit{ para algum } t \in W \cup \{0\} \\ \emptyset, & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

   supondo $r(a) = r(b)$ e $r(c) = r(d)$.

2. $X_{a^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \begin{cases} X_{cd^{-1}}, & \textit{se } r(a)=s(c) \\ \emptyset, & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

3. $X_{a^{-1}} \cap X_{c^{-1}} = \begin{cases} X_{a^{-1}} = X_{c^{-1}}, & \textit{se } r(a) = r(c) \\ \emptyset, & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

4. $X_v \cap X_{b^{-1}} = \begin{cases} X_v = X_{b^{-1}}, & \textit{se } r(b) = v \\ \emptyset, & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

5. $X_v \cap X_{ab^{-1}} = \begin{cases} X_{ab^{-1}}, & \textit{se } s(a) = v \\ \emptyset, & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

6. $X_v = \bigcup_{\substack{a \in W \\ s(a) = v}} X_{ab^{-1}}$.

Demonstração.

1. Caso $a = ct$ para algum $t \in W \cup \{0\}$, dado $\xi \in X_{ab^{-1}}$ então $\xi = a\eta = ct\eta$ e portanto, $\xi \in X_{cd^{-1}}$. Dessa forma, $X_{ab^{-1}} \subseteq X_{cd^{-1}}$ e logo, $X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = X_{ab^{-1}}$.

   Analogamente prova-se que caso $c = at$ para algum $t \in W \cup \{0\}$, então $X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = X_{cd^{-1}}$.

   Se nenhum dos casos acontece então segue imediatamente que $X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \emptyset$.

2. Se $\xi \in X_{cd^{-1}}$ então $s(\xi) = s(c)$. Portanto segue por definição que se $r(a) = s(c)$ então $\xi \in X_{a^{-1}}$. Logo, $X_{cd^{-1}} \subseteq X_{a^{-1}}$ e assim, $X_{a^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = X_{cd^{-1}}$. Por outro lado, caso $r(a) \neq s(c)$ segue imediatamente que $X_{a^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \emptyset$.

3. Imediata.

4. Imediata.

5. Se $\xi \in X_{ab^{-1}}$ então $s(\xi) = s(a)$. Portanto segue por definição que se $s(a) = v$ então $\xi \in X_v$. Dessa forma, $X_{ab^{-1}} \subseteq X_v$ e portanto, $X_v \cap X_{ab^{-1}} = X_{ab^{-1}}$. Por outro lado, caso $s(a) \neq v$ segue imediatamente que $X_v \cap X_{ab^{-1}} = \emptyset$.

6. Imediata.

■

Definidos os subconjuntos de X e demostradas algumas de suas propriedades, o próximo passo é definir as bijeções. Definimos:

- $\theta_0 := Id_X$.
- Para todo $a \in W$, $\theta_a : X_{a^{-1}} \longrightarrow X_a$ como sendo a função que "adiciona" a, ou seja, $\theta_a(\xi) = a\xi$, para todo $\xi \in X_{a^{-1}}$.
- Para todo $b \in W$, $\theta_{b^{-1}} : X_b \longrightarrow X_{b^{-1}}$ como sendo a função que "apaga" b, ou seja, $\theta_{b^{-1}}(b\xi) = \xi$, para todo $\xi \in X_{b^{-1}}$.
- Para todo $a, b \in W$ com $r(a) = r(b)$ e ab^{-1} na forma reduzida, $\theta_{ab^{-1}} : X_{ba^{-1}} \longrightarrow X_{ab^{-1}}$ como a função que "apaga" b e "adiciona" a, isto é, $\theta_{ab^{-1}}(b\xi) = a\xi$, para todo ξ.
- $\theta_c := \emptyset$, para qualquer outro $c \in \mathbb{F}$, ou seja, θ_c é definido como a função vazia.

Observação 33. Note que θ_a está bem definido pois se $r(a)$ é poço segue das observações anteriores que $X_a = \{a\}$ e $X_{a^{-1}} = \{r(a)\}$ e logo, $\theta_a(r(a)) = a$. Por outro lado, se $r(a)$ não é poço temos que para todo $\xi \in X_{a^{-1}}$, $s(\xi) = r(a)$ e assim, o caminho $a\xi$ faz sentido. Desse modo, $\theta_a(\xi) = a\xi \in X_a$.

Observação 34. Note que $\theta_{b^{-1}}$ está bem definido. De fato, se $r(b)$ é poço então temos que $X_b = \{b\}$ e $X_{b^{-1}} = \{r(b)\}$ e logo, $\theta_{b^{-1}}(b) = r(b)$. Por outro lado, se $r(b)$ não é poço temos que para todo $\xi \in X_b$, ξ pode ser escrito como $\xi = b\eta$, para algum $\eta \in X$. Note que $r(b) = s(\eta)$ e portanto, segue que $\theta_{b^{-1}}(\xi) = \eta \in X_{b^{-1}}$.

Observação 35. Podemos notar que θ_a e $\theta_{a^{-1}}$ são bijeções. De fato, para todo $\xi \in X_a$, podemos escrever $\xi = a\eta$ para algum $\eta \in X$ e dessa forma

$$\theta_a \circ \theta_{a^{-1}}(\xi) = \theta_a(\theta_{a^{-1}}(a\eta)) = \theta_a(\eta) = a\eta = \xi = Id_{X_a}(\xi).$$

Ou seja, $\theta_a \circ \theta_{a^{-1}} = Id_{X_a}$.

Por outro lado, para todo $\xi \in X_{a^{-1}}$ temos que

$$\theta_{a^{-1}} \circ \theta_a(\xi) = \theta_{a^{-1}}(\theta_a(\xi)) = \theta_{a^{-1}}(a\xi) = \xi = Id_{X_{a^{-1}}}(\xi).$$

Ou seja, $\theta_{a^{-1}} \circ \theta_a = Id_{X_{a^{-1}}}$.

Portanto, segue o desejado. Além disso, podemos concluir que $\theta_a^{-1} = \theta_{a^{-1}}$.

Observação 36. Notemos $\theta_{ab^{-1}}$ está bem definido. De fato, caso $r(a) = r(b)$ for poço temos que $X_{ab^{-1}} = \{a\}$ e $X_{ba^{-1}} = \{b\}$ e logo, $\theta_{ab^{-1}}(b) = a$.

Por outro lado, se $r(a) = r(b)$ não for poço temos que para todo $\xi \in X_{ba^{-1}}$, podemos escrever $\xi = b\eta$ para algum $\eta \in X$. Note que $r(a) = r(b) = s(\eta)$ e dessa maneira, faz sentido o caminho $a\eta$. Então podemos concluir que $\theta_{ab^{-1}}(\xi) = \theta_{ab^{-1}}(b\eta) = a\eta \in X_{ab^{-1}}$.

Observação 37. Podemos notar que $\theta_{ab^{-1}}$ é bijeção. De fato, para todo $\xi \in X_{ab^{-1}}$, podemos escrever $\xi = a\eta$ para algum $\eta \in X$. Dessa maneira obtemos

$$\theta_{ab^{-1}} \circ \theta_{ba^{-1}}(\xi) = \theta_{ab^{-1}}(\theta_{ba^{-1}}(a\eta)) = \theta_{ab^{-1}}(b\eta) = a\eta = \xi = Id_{X_{ab^{-1}}}(\xi).$$

Ou seja, $\theta_{ab^{-1}} \circ \theta_{ba^{-1}} = Id_{X_{ab^{-1}}}$.

Como a e b são arbitrários segue que $\theta_{ba^{-1}} \circ \theta_{ab^{-1}} = Id_{X_{ba^{-1}}}$ e portanto, segue o desejado. Da mesma forma, podemos concluir que $\theta_{ab^{-1}}^{-1} = \theta_{ba^{-1}}$.

Observação 38. Nas observações anteriores mostramos que θ_c é bijeção e $\theta_c^{-1} = \theta_{c^{-1}}$, para todo $c \in \mathbb{F}$.

Proposição 39. *O par $(\{X_c\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\theta_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ definido acima é uma ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre o conjunto X.*

Demonstração. Pelas observações anteriores, basta verificarmos que $(\{X_c\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\theta_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ satisfaz as condições de ação parcial. Lembrando que todos os elementos da forma $ab^{-1} \in \mathbb{F}$, com $a, b \in W$ e $r(a) = r(b)$ estarão sempre na sua forma reduzida, a fim de facilitar as contas.

(i) Note que, por definição, $X_0 = X$.

(ii) Precisamos mostrar que $\theta_s^{-1}(X_s \cap X_{t^{-1}}) \subseteq X_{(ts)^{-1}}$, $\forall t, s \in \mathbb{F}$. Sabendo que $\theta_s^{-1} = \theta_{s^{-1}}$, basta verificar que $\forall t, s \in \mathbb{F}$, a condição $\theta_{s^{-1}}(X_s \cap X_{t^{-1}}) \subseteq X_{(ts)^{-1}}$ é válida.

Para isso vamos dividir em vários casos.

1) Caso $t = 0$ ou $s = 0$.

Por definição $X_t = X$ ou $X_s = X$ e dessa forma, em ambos os casos, não é difícil verificar que $\theta_{s^{-1}}(X_s \cap X_{t^{-1}}) \subseteq X_{(ts)^{-1}}$ é válida.

2) Caso $t = a \in W$ e $s = b \in W$.

Precisamos mostrar que $\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_{a^{-1}}) \subseteq X_{(ab)^{-1}}$.

Se $s(b) \neq r(a)$ segue pelo lema 32 que $X_b \cap X_{a^{-1}} = \emptyset$. Por outro lado, $ab \notin W$ e por isso, $X_{(ab)^{-1}} = \emptyset$. Portanto, segue trivialmente o desejado.

Se $s(b) = r(a)$ e $r(a)$ não é poço temos que pelo lema 32, $X_b \cap X_{a^{-1}} = X_b$. Por outro lado, o caminho $ab \in W$ e note também que $X_{b^{-1}} = X_{(ab)^{-1}}$ pois dado $\xi \in X_{b^{-1}}$ temos que $s(\xi) = r(b) = r(ab)$. Assim,

$$\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_{a^{-1}}) = \theta_{b^{-1}}(X_b) = X_{b^{-1}} \subseteq X_{(ab)^{-1}}.$$

3) Caso $t = a \in W$ e $s = b^{-1}$ com $b \in W$.

Precisamos mostrar que $\theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_{a^{-1}}) \subseteq X_{ba^{-1}}$.

Se $r(a) \neq r(b)$ segue pelo lema 32 que $X_{b^{-1}} \cap X_{a^{-1}} = \emptyset$. Por outro lado, $X_{ba^{-1}} = \emptyset$ e portanto segue trivialmente.

Se $r(a) = r(b)$ temos pelo lema 32 que $X_{b^{-1}} \cap X_{a^{-1}} = X_{b^{-1}}$. Por outro lado, ba^{-1} fica bem definido e dessa forma temos que $X_b = X_{ba^{-1}}$. Portanto,

$$\theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_{a^{-1}}) = \theta_b(X_{b^{-1}}) = X_b = X_{ba^{-1}} \subseteq X_{ba^{-1}}.$$

4) Caso $t = a^{-1}$ com $a \in W$ e $s = b \in W$.

Basta mostrar que $\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_a) \subseteq X_{(a^{-1}b)^{-1}} = X_{b^{-1}a}$.

Se $a = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_b \cap X_a = X_a = X_{bu}$. Por outro lado, $b^{-1}a = b^{-1}bu = u \in W$ e portanto, $X_{b^{-1}a} = X_u$. Neste caso para todo $\xi \in X_{bu}$ com $\xi = bu\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{b^{-1}}(bu\eta) = u\eta \in X_u = X_{b^{-1}a}.$$

Portanto,

$$\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_a) = \theta_{b^{-1}}(X_{bu}) \subseteq X_u = X_{b^{-1}a}.$$

Se $b = au$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_b \cap X_a = X_b = X_{au}$. Por outro lado, $b^{-1}a = (au)^{-1}a = u^{-1}$ e portanto, $X_{b^{-1}a} = X_{u^{-1}}$. Neste caso para todo $\xi \in X_b$ com $\xi = b\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{b^{-1}}(b\eta) = \eta.$$

Como $s(\eta) = r(b) = r(au) = r(u)$ segue que $\eta \in X_{u^{-1}}$.

Portanto,

$$\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_a) = \theta_{b^{-1}}(X_b) \subseteq X_{u^{-1}} = X_{b^{-1}a}.$$

Se nenhum dos casos anteriores acontecerem então pelo lema 32 e por definição temos $X_b \cap X_a = \emptyset = X_{b^{-1}a}$ e segue trivialmente.

5) Caso $t = a^{-1}$ e $s = b^{-1}$ com $a, b \in W$.

Então precisamos mostrar que $\theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_a) \subseteq X_{ba}$.

Se $s(a) \neq r(b)$ segue que pelo lema 32, $X_{b^{-1}} \cap X_a = \emptyset = X_{ba}$ e portanto, segue trivialmente.

Agora se $s(a) = r(b)$ segue que pelo lema 32, $X_{b^{-1}} \cap X_a = X_a$. Por outro lado, $ba \in W$.

Assim, dado $\xi \in X_a$ com $\xi = a\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_b(\xi) = \theta_b(a\eta) = ba\eta \in X_{ba}.$$

Logo,

$$\theta_b(X_b \cap X_a) = \theta_b(X_a) \subseteq X_{ab}.$$

6) Caso $t = ac^{-1}$ com $a, c \in W$ e $r(a) = r(c)$ e $s = b \in W$.

Basta mostrar que $\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_{ca^{-1}}) \subseteq X_{(ac^{-1}b)^{-1}} = X_{b^{-1}ca^{-1}}$.

Se $c = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_b \cap X_{ca^{-1}} = X_{ca^{-1}}$. No entanto, $b^{-1}ca^{-1} = b^{-1}bua^{-1} = ua^{-1}$ e portanto, $X_{b^{-1}ca^{-1}} = X_{ua^{-1}}$. Neste caso temos que para todo $\xi \in X_{ca^{-1}} = X_c = X_{bu}$ com $\xi = bu\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{b^{-1}}(bu\eta) = u\eta \in X_u = X_{ua^{-1}}.$$

Portanto,

$$\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_{ca^{-1}}) = \theta_{b^{-1}}(X_{bu}) \subseteq X_u = X_{ua^{-1}} = X_{b^{-1}a}.$$

Se $b = c\mu$ para algum $\mu \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_{c\mu} \cap X_{ca^{-1}} = X_{c\mu} = X_b$. No entanto, $b^{-1}ca^{-1} = (c\mu)^{-1}ca^{-1} = \mu^{-1}a^{-1}$ e portanto, $X_{b^{-1}ca^{-1}} = X_{\mu^{-1}a^{-1}}$. Neste caso para todo $\xi \in X_b$ com $\xi = b\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{b^{-1}}(b\eta) = \eta.$$

Como $s(\eta) = r(b) = r(c\mu) = r(\mu)$ segue que $\eta \in X_{\mu^{-1}}$.

Portanto,

$$\theta_{b^{-1}}(X_b \cap X_a) = \theta_{b^{-1}}(X_b) \subseteq X_{\mu^{-1}} = X_{(a\mu)^{-1}} = X_{b^{-1}ca^{-1}}.$$

Se nenhum dos casos anteriores existirem então obtemos que $X_b \cap X_{ca^{-1}} = \emptyset = X_{b^{-1}ca^{-1}}$ e segue trivialmente.

7) Caso $t = ac^{-1}$ com $a, c \in W$ e $r(a) = r(c)$ e $s = b^{-1}$ com $b \in W$.

Basta mostrar que $\theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_{ca^{-1}}) \subseteq X_{(ac^{-1}b^{-1})^{-1}} = X_{bca^{-1}}$.
Se $s(c) \neq r(b)$ então $X_{b^{-1}} \cap X_{ca^{-1}} = \emptyset = X_{bca^{-1}}$, pelo lema 32. Dessa maneira, segue trivialmente.

Caso $s(c) = r(b)$ segue do lema 32 que $X_{b^{-1}} \cap X_{ca^{-1}} = X_{ca^{-1}}$. Por outro lado, no elemento $bca^{-1} \in \mathbb{F}$, observe que $bc \in W$ e que $r(bc) = r(a)$.

Assim, dado $\xi \in X_{ca^{-1}}$ com $\xi = c\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_b(\xi) = \theta_b(c\eta) = bc\eta \in X_{bc} = X_{bca^{-1}}.$$

Logo,

$$\theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_{ca^{-1}}) = \theta_b(X_{ca^{-1}}) \subseteq X_{bc} = X_{bca^{-1}}.$$

8) Caso $t = a^{-1}$ e $s = bd^{-1}$ com $a, b, d \in W$ e $r(b) = r(d)$.

Basta mostrar que $\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_a) \subseteq X_{(a^{-1}bd^{-1})^{-1}} = X_{db^{-1}a}$.
Se $a = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_{bd^{-1}} \cap X_a = X_a = X_{bu}$. No entanto, $db^{-1}a = db^{-1}bu = du$ e portanto, $X_{db^{-1}a} = X_{du}$. Neste caso para todo $\xi \in X_{bu}$ com $\xi = bu\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{db^{-1}}(\xi) = \theta_{db^{-1}}(bu\eta) = du\eta \in X_{du} = X_{db^{-1}a}.$$

Portanto,

$$\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_a) = \theta_{db^{-1}}(X_{bu}) \subseteq X_{du} = X_{db^{-1}a}.$$

Se $b = au$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_{bd^{-1}} \cap X_a = X_{bd^{-1}}$. No entanto, $db^{-1}a = d(au)^{-1}a = du^{-1}$ e portanto, $X_{db^{-1}a} = X_{du^{-1}}$. Neste caso para todo $\xi \in X_{bd^{-1}}$ com $\xi = b\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{db^{-1}}(\xi) = \theta_{db^{-1}}(b\eta) = d\eta \in X_d = X_{du^{-1}}.$$

Portanto,

$$\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_a) = \theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}}) \subseteq X_{du^{-1}} = X_{db^{-1}a}.$$

Se nenhum dos casos anteriores existirem então temos que $X_{bd^{-1}} \cap X_a = \emptyset = X_{db^{-1}a}$ e segue trivialmente.

9) Caso $t = a \in W$ e $s = bd^{-1}$ com $b, d \in W$ e $r(b) = r(d)$.
Basta verificar $\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_{a^{-1}}) \subseteq X_{(abd^{-1})^{-1}} = X_{d(ab)^{-1}}$.
Se $s(b) \neq r(a)$ então $X_{bd^{-1}} \cap X_{a^{-1}} = \emptyset = X_{d(ab)^{-1}}$, pelo lema 32. Portanto, segue trivialmente.
Se $s(b) = r(a)$ temos que pelo lema 32, $X_{bd^{-1}} \cap X_{a^{-1}} = X_{bd^{-1}}$. Por outro lado, o caminho $d(ab)^{-1}$ está bem definido e note também que $X_{db^{-1}} = X_{d(ab)^{-1}}$ pois $r(ab) = r(b) = r(d)$.
Assim,

$$\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_{a^{-1}}) = \theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}}) = X_{db^{-1}} = X_{d(ab)^{-1}}.$$

10) Caso $t = ac^{-1}$ com $a, c \in W$ e $r(a) = r(c)$ e $s = bd^{-1}$ com $b, d \in W$ e $r(b) = r(d)$. Neste caso precisamos mostrar que $\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_{ca^{-1}}) \subseteq X_{(ac^{-1}bd^{-1})^{-1}} = X_{db^{-1}ca^{-1}}$.
Se $c = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_{bd^{-1}} \cap X_{ca^{-1}} = X_{ca^{-1}}$. Por outro lado, notamos que $db^{-1}ca^{-1} = db^{-1}bua^{-1} = dua^{-1}$ está bem definido e portanto, $X_{db^{-1}ca^{-1}} = X_{dua^{-1}}$.
Neste caso para todo $\xi \in X_{ca^{-1}} = X_{bua^{-1}}$ com $\xi = bu\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{db^{-1}}(\xi) = \theta_{db^{-1}}(bu\eta) = du\eta \in X_{du} = X_{dua^{-1}}.$$

Portanto,

$$\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_{ca^{-1}}) = \theta_{db^{-1}}(X_{bua^{-1}}) \subseteq X_{dua^{-1}} = X_{db^{-1}ca^{-1}}.$$

Se $b = c\mu$ para algum $\mu \in W \cup \{0\}$ temos que pelo lema 32, $X_{bd^{-1}} \cap X_{ca^{-1}} = X_{bd^{-1}}$. Por outro lado, notamos que $db^{-1}ca^{-1} = d(c\mu)^{-1}ca^{-1} = d\mu^{-1}a^{-1}$ e consequentemente, $X_{db^{-1}ca^{-1}} = X_{d\mu^{-1}a^{-1}}$.
Neste caso para todo $\xi \in X_{bd^{-1}}$ com $\xi = b\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{db^{-1}}(\xi) = \theta_{db^{-1}}(b\eta) = d\eta \in X_d = X_{d\mu^{-1}a^{-1}}.$$

Portanto,

$$\theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}} \cap X_{ca^{-1}}) = \theta_{db^{-1}}(X_{bd^{-1}}) \subseteq X_{d\mu^{-1}a^{-1}} = X_{db^{-1}ca^{-1}}.$$

Se nenhum dos casos anteriores acontecer então temos que $X_{bd^{-1}} \cap X_{ca^{-1}} = \emptyset = X_{db^{-1}ca^{-1}}$ e segue trivialmente.

11) Se t ou s não são da forma como nos 10 casos anteriores, então $X_{t^{-1}}$ ou X_s será vazio, e segue trivialmente.

(iii) Temos que mostrar que $\theta_t \circ \theta_s(\xi) = \theta_{ts}(\xi)$, $\forall \xi \in X_{s^{-1}} \cap X_{(ts)^{-1}}$. Como no item anterior, também precisamos dividir em vários casos.

1) Caso $t = 0$ ou $s = 0$ então por definição $\theta_t = Id_X$ ou $\theta_s = Id_X$ e assim, a igualdade se torna imediata.

2) Caso $t = a \in W$ e $s = b \in W$.
Precisamos mostrar que $\theta_a \circ \theta_b(\xi) = \theta_{ab}(\xi)$, para todo $\xi \in X_{b^{-1}} \cap X_{(ab)^{-1}}$.
De fato, se $s(b) \neq r(a)$ então $X_{(ab)^{-1}} = \emptyset$ e portanto segue trivialmente.
Agora, se $s(b) = r(a)$ então $ab \in W$ e assim pelo lema 32, $X_{b^{-1}} \cap X_{(ab)^{-1}} = X_{(ab)^{-1}} = X_{b^{-1}}$ pois $r(b) = r(ab)$.
Logo, para todo $\xi \in X_{(ab)^{-1}} = X_{b^{-1}}$ temos que

$$\theta_a \circ \theta_b(\xi) = \theta_a(b\xi) = ab\xi = \theta_{ab}(\xi).$$

3) Caso $t = a \in W$ e $s = b^{-1}$ com $b \in W$.
Precisamos mostrar que $\theta_a \circ \theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{ab^{-1}}(\xi)$, para todo $\xi \in X_b \cap X_{ba^{-1}}$.
De fato, se $r(a) \neq r(b)$ então $X_{ba^{-1}} = \emptyset$ e portanto segue trivialmente.
Agora se $r(a) = r(b)$ note que $X_b \cap X_{ba^{-1}} = X_b$. Logo, para todo $\xi \in X_b$, $\xi = b\eta$ para algum $\eta \in X$ e portanto temos por um lado que

$$\theta_a \circ \theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_a \circ \theta_{b^{-1}}(b\eta) = \theta_a(\eta) = a\eta.$$

Por outro lado,

$$\theta_{ab^{-1}}(\xi) = \theta_{ab^{-1}}(b\eta) = a\eta.$$

Portanto segue o desejado.

4) Caso $t = a^{-1}$ com $a \in W$ e $s = b \in W$.
Precisamos mostrar que $\theta_{a^{-1}} \circ \theta_b(\xi) = \theta_{a^{-1}b}(\xi)$, para todo $\xi \in X_{b^{-1}} \cap X_{b^{-1}a}$.

Se $a = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ temos que $X_{b^{-1}a} = X_{b^{-1}bu} = X_u$ e usando novamente o lema 32 obtemos neste caso que $X_{b^{-1}} \cap X_u = X_u$ pois $s(u) = r(b)$.
Com isso, para todo $\xi \in X_u$, $\xi = u\eta$ para algum $\eta \in X$ obtemos por um lado que

$$\theta_{a^{-1}} \circ \theta_b(\xi) = \theta_{a^{-1}} \circ \theta_b(u\eta) = \theta_{a^{-1}}(bu\eta) = \theta_{a^{-1}}(a\eta) = \eta.$$

Note que $a^{-1}b = (bu)^{-1}b = u^{-1}$ e por outro lado temos

$$\theta_{a^{-1}b}(\xi) = \theta_{u^{-1}}(u\eta) = \eta.$$

Portanto a igualdade é válida.
Agora se $b = au$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{b^{-1}a} = X_{(au)^{-1}a} = X_{u^{-1}}$ e usando novamente o lema 32 temos que $X_{b^{-1}} \cap X_{u^{-1}} = X_{b^{-1}} = X_{u^{-1}}$ pois $r(u) = r(b)$.
Com isso, para todo $\xi \in X_{u^{-1}}$ temos por um lado que

$$\theta_{a^{-1}} \circ \theta_b(\xi) = \theta_{a^{-1}}(b\xi) = \theta_{a^{-1}}(au\xi) = u\xi.$$

Note que $a^{-1}b = a^{-1}au = u$ e por outro lado temos

$$\theta_{a^{-1}b}(\xi) = \theta_u(\xi) = u\xi.$$

Portanto temos a igualdade válida.
Se nenhum dos casos anteriores acontecer então a igualdade é válida trivialmente.

5) Caso $t = a^{-1}$ e $s = b^{-1}$ com $a, b \in W$.
Então precisamos mostrar que $\theta_{a^{-1}} \circ \theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{(ba)^{-1}}(\xi)$, para todo $\xi \in X_b \cap X_{ba}$.
De fato, se $s(a) \neq r(b)$ então $X_{(ba)^{-1}} = \emptyset$ e portanto segue trivialmente.
Agora, se $s(a) = r(b)$ então $ba \in W$ e assim pelo lema 32, $X_b \cap X_{ba} = X_{ba}$.
Logo, para todo $\xi \in X_{ba}$, $\xi = ba\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que

$$\theta_{a^{-1}} \circ \theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{a^{-1}} \circ \theta_{b^{-1}}(ba\eta) = \theta_{a^{-1}}(a\eta) = \eta.$$

Por outro lado,

$$\theta_{(ba)^{-1}}(\xi) = \theta_{(ba)^{-1}}(ba\eta) = \eta.$$

Portanto segue o desejado.

6) Caso $t = ac^{-1}$ com $a, c \in W$ e $r(a) = r(c)$ e $s = b \in W$.

Precisamos mostrar que $\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_b(\xi) = \theta_{ac^{-1}b}(\xi)$, para todo $\xi \in X_{b^{-1}} \cap X_{(ac^{-1}b)^{-1}}$.

Se $c = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{b^{-1}ca^{-1}} = X_{b^{-1}bua^{-1}} = X_{ua^{-1}}$ e usando novamente o lema 32 temos que $X_{b^{-1}} \cap X_{ua^{-1}} = X_{ua^{-1}}$ pois $s(u) = r(b)$.

Com isso, para todo $\xi \in X_{ua^{-1}}$, $\xi = u\eta$ para algum $\eta \in X$ temos por um lado que

$$\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_b(\xi) = \theta_{ac^{-1}} \circ \theta_b(u\eta) = \theta_{ac^{-1}}(bu\eta) = \theta_{ac^{-1}}(c\eta) = a\eta.$$

Note que $ac^{-1}b = a(bu)^{-1}b = au^{-1}$ e por outro lado temos

$$\theta_{au^{-1}}(\xi) = \theta_{au^{-1}}(u\eta) = a\eta.$$

Portanto a igualdade é válida.

Se $b = c\mu$ para algum $\mu \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{b^{-1}ca^{-1}} = X_{(c\mu)^{-1}ca^{-1}} = X_{(a\mu)^{-1}}$. Note que $a\mu \in W$ visto que $s(\mu) = r(c) = r(a)$. Usando novamente o lema 32 temos que $X_{b^{-1}} \cap X_{(a\mu)^{-1}} = X_{b^{-1}} = X_{(a\mu)^{-1}}$.

Com isso, para todo $\xi \in X_{(au)^{-1}}$ temos portanto por um lado que

$$\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_b(\xi) = \theta_{ac^{-1}}(b\xi) = \theta_{ac^{-1}}(c\mu\xi) = a\mu\xi.$$

Note que $ac^{-1}b = ac^{-1}c\mu = a\mu \in W$ e por outro lado temos

$$\theta_{ac^{-1}b}(\xi) = \theta_{a\mu}(\xi) = a\mu\xi.$$

Portanto a igualdade é válida.

Se nenhum dos casos anteriores acontecer então a igualdade é válida trivialmente.

7) Caso $t = ac^{-1}$ com $a, c \in W$ e $r(a) = r(c)$ e $s = b^{-1}$ com $b \in W$.

Precisamos mostrar que $\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{a(bc)^{-1}}(\xi)$, para todo $\xi \in X_b \cap X_{bca^{-1}}$.

Se $s(c) \neq r(b)$ então temos que $X_{bca^{-1}} = \emptyset$ e portanto a igualdade segue trivialmente.

Agora se $s(c) = r(b)$ então $X_b \cap X_{bca^{-1}} = X_{bca^{-1}} = X_{bc}$, pelo lema 32.

Desse modo, para todo $\xi \in X_{bca^{-1}}$, $\xi = bc\eta$ para algum $\eta \in X$ temos por um lado que

$$\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{b^{-1}}(\xi) = \theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{b^{-1}}(bc\eta) = \theta_{ac^{-1}}(c\eta) = a\eta.$$

Por outro lado temos

$$\theta_{a(bc)^{-1}}(\xi) = \theta_{a(bc)^{-1}}(bc\eta) = a\eta.$$

Portanto segue o desejado.

8) Caso $t = a^{-1}$ e $s = bd^{-1}$ com $a, b, d \in W$ e $r(b) = r(d)$.

Então precisamos mostrar que $\theta_{a^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) = \theta_{a^{-1}bd^{-1}}(\xi)$, para todo $\xi \in X_{db^{-1}} \cap X_{db^{-1}a}$.

Se $a = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{db^{-1}a} = X_{db^{-1}bu} = X_{du}$. Note que $du \in W$ visto que $s(u) = r(b) = r(d)$. Usando o lema 32 temos que $X_{db^{-1}} \cap X_{du} = X_{du}$.

Com isso, para todo $\xi \in X_{du}$, $\xi = du\eta$ para algum $\eta \in X$ segue por um lado que

$$\theta_{a^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) = \theta_{a^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(du\eta) = \theta_{a^{-1}}(bu\eta) = \theta_{a^{-1}}(a\eta) = \eta.$$

Note que $a^{-1}bd^{-1} = (bu)^{-1}bd^{-1} = (du)^{-1}$ e por outro lado temos

$$\theta_{(du)^{-1}}(\xi) = \theta_{(du)^{-1}}(du\eta) = \eta.$$

Portanto a igualdade é válida.

Se $b = au$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{db^{-1}a} = X_{d(au)^{-1}a} = X_{du^{-1}}$ e usando novamente o lema 32 temos que $X_{db^{-1}} \cap X_{du^{-1}} = X_{db^{-1}} = X_{du^{-1}}$ pois $r(b) = r(u)$.

Com isso, para todo $\xi \in X_{du^{-1}}$, $\xi = d\eta$ para algum $\eta \in X$ temos que por um lado

$$\theta_{a^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) = \theta_{a^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(d\eta) = \theta_{a^{-1}}(b\eta) = \theta_{a^{-1}}(au\eta) = u\eta.$$

Note que $a^{-1}bd^{-1} = a^{-1}aud^{-1} = ud^{-1}$ e por outro lado temos

$$\theta_{a^{-1}bd^{-1}}(\xi) = \theta_{ud^{-1}}(\xi) = \theta_{ud^{-1}}(d\eta) = u\eta.$$

Portanto a igualdade é válida.

Se nenhum dos casos anteriores acontecer então a igualdade é válida trivialmente.

9) Caso $t = a \in W$ e $s = bd^{-1}$ com $b, d \in W$ e $r(b) = r(d)$.

Precisamos mostrar que $\theta_a \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) = \theta_{abd^{-1}}(\xi)$, para todo $\xi \in X_{db^{-1}} \cap X_{d(ab)^{-1}}$.

Se $s(b) \neq r(a)$ então temos que $X_{d(ab)^{-1}} = \emptyset$ e portanto a igualdade segue trivialmente.

Agora se $s(b) = r(a)$ temos que $ab \in W$ e novamente pelo lema 32 temos que $X_{db^{-1}} \cap X_{d(ab)^{-1}} = X_{db^{-1}} = X_{d(ab)^{-1}}$ pois $r(b) = r(ab)$.

Assim, para todo $\xi \in X_{db^{-1}} = X_{d(ab)^{-1}}$, $\xi = d\eta$ para algum $\eta \in X$ temos por um lado que

$$\theta_a \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) = \theta_a \circ \theta_{bd^{-1}}(d\eta) = \theta_a(b\eta) = ab\eta.$$

Por outro lado, temos que

$$\theta_{abd^{-1}}(\xi) = \theta_{abd^{-1}}(d\eta) = ab\eta.$$

Portanto segue o desejado.

10) Caso $t = ac^{-1}$ com $a, c \in W$ e $r(a) = r(c)$ e $s = bd^{-1}$ com $b, d \in W$ e $r(b) = r(d)$.

Precisamos mostrar que $\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) = \theta_{ac^{-1}bd^{-1}}(\xi)$, para todo $\xi \in X_{db^{-1}} \cap X_{db^{-1}ca^{-1}}$.

Se $c = bu$ para algum $u \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{db^{-1}ca^{-1}} = X_{db^{-1}bua^{-1}} = X_{dua^{-1}}$. Note xque $s(u) = r(b) = r(d)$ e usando o lema 32 temos que $X_{db^{-1}} \cap X_{dua^{-1}} = X_{dua^{-1}}$. Com isso, para todo $\xi \in X_{dua^{-1}}$, $\xi = du\eta$ para algum $\eta \in X$ temos por um lado que

$$\begin{aligned}\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) &= \theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(du\eta) \\ &= \theta_{ac^{-1}}(bu\eta) = \theta_{ac^{-1}}(c\eta) = a\eta.\end{aligned}$$

Note que $ac^{-1}bd^{-1} = a(bu)^{-1}bd^{-1} = a(du)^{-1}$ e por outro lado temos

$$\theta_{a(du)^{-1}}(\xi) = \theta_{a(du)^{-1}}(du\eta) = a\eta.$$

Portanto a igualdade é válida.

Se $b = c\mu$ para algum $\mu \in W \cup \{0\}$ obtemos neste caso que $X_{db^{-1}ca^{-1}} = X_{d(c\mu)^{-1}ca^{-1}} = X_{d(a\mu)^{-1}}$ e usando novamente o lema 32 temos que $X_{db^{-1}} \cap X_{d(a\mu)^{-1}} = X_{db^{-1}} = X_{d(a\mu)^{-1}}$ pois $r(d) = r(b) = r(a\mu)$. Dessa maneira, para todo $\xi \in X_{d(a\mu)^{-1}}$,

$\xi = d\eta$ para algum $\eta \in X$ temos por um lado que

$$\begin{aligned}\theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(\xi) &= \theta_{ac^{-1}} \circ \theta_{bd^{-1}}(d\eta) = \theta_{ac^{-1}}(b\eta) \\ &= \theta_{ac^{-1}}(c\mu\eta) = a\mu\eta.\end{aligned}$$

Note que $ac^{-1}bd^{-1} = ac^{-1}c\mu d^{-1} = a\mu d^{-1}$ e por outro lado temos

$$\theta_{ac^{-1}bd^{-1}}(\xi) = \theta_{a\mu d^{-1}}(\xi) = \theta_{a\mu d^{-1}}(d\eta) = a\mu\eta.$$

Portanto a igualdade é válida.

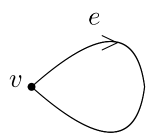
Se nenhum dos casos anteriores acontecer então a igualdade é válida trivialmente.

11) Caso t ou s não são da forma como nos 10 casos anteriores, então $X_{s^{-1}}$ ou $X_{(ts)^{-1}}$ será vazio, e a igualdade se tornará imediata.

Podemos concluir então que $(\{X_c\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\theta_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ é de fato ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre o conjunto X.

■

Exemplo 40. Seja E o grafo com $E^0 = \{v\}$ e $E^1 = \{e\}$ da seguinte maneira:



.

Note que X será o conjunto unitário cujo único elemento é o caminho infinito $\xi = eee\ldots$.

Seja G o grupo livre gerado por E^1. Note que $G \cong \mathbb{Z}$ via o isomorfismo de grupo $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ com $\varphi(a) = |a|$ e $\varphi(a^{-1}) = -|a|$, para todo $a \in W$.

Neste caso a ação parcial do grupo livre gerado por E^1 é na verdade uma ação de $\mathbb{Z}$ sobre o conjunto unitário X.

Até agora conseguimos definir uma ação parcial $(\{X_c\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\theta_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ de $\mathbb{F}$ sobre o conjunto X. Utilizando o teorema 19 do capítulo 2 podemos obter uma ação parcial no nível de álgebra a partir desta, ou seja, conseguimos obter $(\{F(X_c)\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\alpha_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre a $\mathbb{K}$-álgebra $F(X)$ como sendo $\alpha_c(f) = f \circ \theta_{c^{-1}}$, para todo $c \in \mathbb{F}$.

Para os propósitos posteriores, isto é, para a construção do produto cruzado parcial que desejamos, a $\mathbb{K}$-álgebra $F(X)$ é grande demais. Dessa forma, vamos restringi-la, nos concentrando nas funções características de cada subconjunto definido anteriormente.

Para cada $c \in \mathbb{F}$, seja 1_c a função característica de X_c, ou seja,

$$1_c(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \in X_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Com isso, definimos $D(X) = D_0 \subseteq F(X)$ como sendo

$$D_0 = D(X) = \text{span}\{\{1_p \mid p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\} \cup \{1_v \mid v \in E^0\}\},$$

em que 1_v é a função característica do conjunto X_v definido na observação 29. Agora, para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, definimos $D_p \subseteq F(X_p)$ como sendo

$$D_p = \text{span}\{\{1_p 1_q \mid q \in \mathbb{F}\}\},$$

em que span neste caso significa span $\mathbb{K}$-linear.

Note que $D(X)$ é subálgebra de $F(X)$ e, para cada $p \in \mathbb{F}$, D_p são ideais bilaterais de $D(X)$. O objetivo nesse momento é restringir a ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre $F(X)$ para a $\mathbb{K}$-álgebra $D(X)$.

Agora, para que possamos fazer isso é necessário garantir que a restrição dos isomorfismos α_p para os ideias D_p esteja bem definidos. Para que isso seja efetivado é preciso de alguns lemas.

Lema 41. *Sejam $a, c \in W$, $b, d \in W \cup \{0\}$ e $v \in E^0$. Então:*

1. $1_{ab^{-1}} 1_{cd^{-1}} = \begin{cases} 1_{ab^{-1}}, & \textit{se } a = ct \textit{ para algum } t \in W \cup \{0\} \\ 1_{cd^{-1}}, & \textit{se } c = at \textit{ para algum } t \in W \cup \{0\} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases},$

   supondo $r(a) = r(b)$ e $r(c) = r(d)$.

2. $1_{a^{-1}} 1_{cd^{-1}} = \begin{cases} 1_{cd^{-1}}, & \textit{se } r(a)=s(c) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$

3. $1_{a^{-1}} 1_{c^{-1}} = \begin{cases} 1_{a^{-1}} = 1_{c^{-1}}, & \textit{se } r(a)=r(c) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$

4. $1_v 1_{b^{-1}} = \begin{cases} 1_v = 1_{b^{-1}}, & \textit{se } r(b)=v \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$

5. $1_v 1_{ab^{-1}} = \begin{cases} 1_{ab^{-1}}, & \textit{se } s(a)=v \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$

Demonstração. Segue diretamente do lema 32. ∎

Lema 42.

1. *$\alpha_p(1_{p^{-1}}1_q) = 1_p 1_{pq}$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{F}$.*

2. *Para $a \in W$ e $b \in W \cup \{0\}$, supondo $r(a) = r(b)$, temos que*

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_a, & \textit{se } r(a) = v \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_{ab^{-1}}, & \textit{se } s(b) = v \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Demonstração.

1. Dados $p, q \in \mathbb{F}$ temos que para quaisquer $\xi \in X$,

$$\begin{aligned} \alpha_p(1_{p^{-1}}1_q)(\xi) &= (1_{p^{-1}}1_q \circ \theta_{p^{-1}})(\xi) = 1_{p^{-1}}(\theta_{p^{-1}}(\xi))1_q(\theta_{p^{-1}}(\xi)) = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \theta_{p^{-1}}(\xi) \in X_{p^{-1}} \cap X_q \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \in X_p \cap X_{pq} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = \\ &= 1_p(\xi)1_{pq}(\xi) = 1_p 1_{pq}(\xi), \end{aligned}$$

pois como θ é ação parcial, $\xi \in X_p \cap X_{pq}$ se, e somente se, $\theta_{p^{-1}}(\xi) \in X_{p^{-1}} \cap X_q$. Sendo assim, segue o desejado.

2. Pelo lema 41 temos que se $r(a) = v$ então $1_{a^{-1}}1_v = 1_{a^{-1}}$ e logo, como θ é ação parcial, segue que para todo $\xi \in X_a$ da forma $\xi = a\eta$ para algum $\eta \in X$

$$\begin{aligned} \alpha_a(1_{a^{-1}})(\xi) &= (1_{a^{-1}} \circ \theta_{a^{-1}})(\xi) = 1_{a^{-1}}(\theta_{a^{-1}}(a\eta)) \\ &= 1_{a^{-1}}(\eta) = 1 = 1_a(\xi). \end{aligned}$$

Caso $r(a) \neq v$ então $1_{a^{-1}}1_v = 0$ e, consequentemente, obtemos que $\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v) = \alpha_a(0) = 0$. Portanto, podemos concluir que

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_a, & \text{se } r(a) = v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Usando novamente o lema 41, de maneira bastante semelhante, prova-se que

$$\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_{ab^{-1}}, & \text{se } s(b) = v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

■

Observação 43. O lema 42 garante que para todo $p \in \mathbb{F}$,

$$\alpha_p(1_{p^{-1}}) = 1_p.$$

Essa observação será utilizada nos próximos capítulos.

Finalmente os lemas 41 e 42 nos garantem a restrição de α_p para os ideais D_p, isto é, $\alpha_p : D_{p^{-1}} \longrightarrow D_p$ dada por $\alpha_p(f) = f \circ \theta_{p^{-1}}$ está bem definida, para todo $p \in \mathbb{F}$. Mais do que isso, conseguimos realmente $(\{D_p\}_{p\in\mathbb{F}}, \{\alpha_p\}_{p\in\mathbb{F}})$ ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre a $\mathbb{K}$-álgebra $D(X)$.

Finalizando este capítulo, vamos considerar o produto cruzado parcial de $D(X)$ sobre $\mathbb{F}$ através de α, isto é,

$$D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} = \left\{ \sum_{p\in\mathbb{F}}^{\text{finito}} a_p\delta_p \;\middle|\; a_p \in D_p \right\}.$$

Veja Apêndice A para mais detalhes sobre o produto cruzado parcial. Este produto cruzado parcial aqui obtido será retomado no capítulo 5.

4 ÁLGEBRA DE LEAVITT

Neste capítulo vamos tratar de uma álgebra específica sobre um grafo E, chamada de Álgebra de caminhos de Leavitt ou simplesmente Álgebra de Leavitt. Vamos estudar algumas propriedades e exemplos a fim de nos familiarizar com esta estrutura.

Definição 44. *Sejam E um grafo e $\mathbb{K}$ um corpo. A Álgebra de caminhos de Leavitt sobre E com coeficientes em $\mathbb{K}$, denotada por $L_{\mathbb{K}}(E)$, é a $\mathbb{K}$-álgebra universal gerada pelo conjunto $\{v : v \in E^0\}$, de elementos idempotentes e ortogonais dois a dois, com os conjuntos $\{e : e \in E^1\}$ e $\{e^* : e \in E^1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$s(e)e = er(e) = e$, para todo $e \in E^1$;*

2. *$r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$, para todo $e \in E^1$;*

3. *Para quaisquer $e, f \in E^1$, $e^*f = \begin{cases} r(e), & se\ e = f \\ 0, & se\ e \neq f \end{cases}$;*

4. *$v = \sum\limits_{\substack{e \in E^1 \\ s(e)=v}} ee^*$ para todo $v \in E^0$ tal que $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$.*

Observação 45. Denotaremos por $(E^1)^*$ o conjunto de símbolos formais $\{e^* \mid e \in E^1\}$ e para cada $\alpha = e_1e_2\ldots e_n$ caminho finito definiremos $\alpha^* = e_n^*e_{n-1}^*\ldots e_2^*e_1^*$. Também defina $v^* = v$, para todo $v \in E^0$. Em alguns literaturas os elementos do conjunto E^1 são chamados de arestas "reais" e os elementos de $(E^1)^*$ são chamados de arestas "fantasmas".

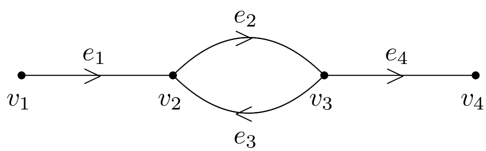
Observação 46. O significado de universal na definição 44 nos diz que, se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra qualquer contendo conjuntos $\{a_v \mid v \in E^0\}$, $\{b_e \mid e \in E^1\}$ e $\{b_{e^*} \mid e \in E^1\}$ satisfazendo as relações 1 a 4 então existe um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$ dado por $\phi(v) = a_v$, para todo $v \in E^0$, $\phi(e) = b_e$ e $\phi(e^*) = b_{e^*}$, para todo $e \in E^1$.

Em outras palavras, definido $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \longrightarrow A$ dado por $\phi(v) = a_v, \forall v \in E^0$, $\phi(e) = b_e$ e $\phi(e^*) = b_{e^*}, \forall e \in E^1$ e os conjuntos $\{a_v \mid v \in E^0\}$, $\{b_e \mid e \in E^1\}$ e $\{b_{e^*} \mid e \in E^1\}$ satisfazendo as relações 1 a 4 então pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$, ϕ se estende a um único $\mathbb{K}$-homomorfismo $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$.

A propriedade universal de álgebras, no caso particular de $L_{\mathbb{K}}(E)$, sempre existe, é única e é de extrema importância neste contexto nos proporcionando uma capacidade enorme de gerar homomorfismos.

Observação 47. Observe que os elementos de $L_{\mathbb{K}}(E)$ são combinações lineares de palavras dos conjuntos $\{e : e \in E^1\} \cup \{e^* : e \in E^1\} \cup E^0$ com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Exemplo 48. Se considerarmos o grafo E do exemplo 30



temos que, por exemplo, dois elementos de $L_{\mathbb{K}}(E)$ são $e_1e_2e_3e_2^*e_3^*$ e $v_1e_1e_2^*e_3e_2^*v_4$. Porém, note que o elemento $v_1e_1e_2^*e_3e_2^*v_4$ é simplesmente o elemento 0 da álgebra pois $e_2^*e_3 = 0$. O que podemos observar é que muitos elementos podem ser simplificados ou reescritos de uma forma mais elegante conforme o seguinte lema.

Lema 49. *Se E é um grafo e $L_{\mathbb{K}}(E)$ é a álgebra de Leavitt associada a E então para quaisquer caminhos α, β, γ e δ vistos como elementos de $L_{\mathbb{K}}(E)$ de modo que $r(\alpha) = r(\beta)$ e $r(\gamma) = r(\delta)$ temos que*

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\gamma'\delta^*, & \textit{se } \gamma = \beta\gamma' \textit{ para algum } \gamma' \\ \alpha\delta^*, & \textit{se } \gamma = \beta \\ \alpha\beta'^*\delta^*, & \textit{se } \beta = \gamma\beta' \textit{ para algum } \beta' \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Demonstração. Se $\gamma = \beta\gamma'$ para algum caminho γ' então temos que

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \alpha\beta^*\beta\gamma'\delta^* = \alpha r(\beta)\gamma'\delta^* = \alpha\gamma'\delta^*.$$

Se $\gamma = \beta$ então

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \alpha\beta^*\beta\delta^* = \alpha r(\beta)\delta^* = \alpha\delta^*.$$

Por último, se $\beta = \gamma\beta'$ para algum caminho β' temos que

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \alpha(\gamma\beta')^*\gamma\delta^* = \alpha\beta'^*\gamma^*\gamma\delta^* = \alpha\beta'^*r(\gamma)\delta^* = \alpha\beta'^*\delta^*.$$

Nos outros casos segue imediatamente que $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = 0$.

■

Proposição 50. *Se E é um grafo e $L_{\mathbb{K}}(E)$ é a álgebra de Leavitt associada a E então*

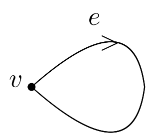
$$L_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{span}\{\{\alpha\beta^* \mid \alpha, \beta \in W \cup \{0\} \textit{ tal que } r(\alpha) = r(\beta)\} \cup E^0\}.$$

Demonstração. Segue imediatamente do lema 49.

■

Observação 51. Vista a proposição 50, podemos responder com mais clareza à pergunta da observação 29 uma vez que em $L_{\mathbb{K}}(E)$ os elementos da forma $\beta^*\alpha$ são nulos, com $\alpha, \beta \in W$, α não começo de β e nem β começo de α.

Exemplo 52. Considere o grafo E com $E^0 = \{v\}$ e $E^1 = \{e\}$ da seguinte maneira:



Seja $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ a álgebra dos polinômios de Laurent com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Defina $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \longrightarrow \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ como sendo $\phi(v) = 1$, $\phi(e) = x$ e $\phi(e^*) = x^{-1}$.

Note que $\phi(s(e))\phi(e) = 1.x = x = \phi(e) = x.1 = \phi(e).\phi(r(e))$ e que $\phi(r(e))\phi(e^*) = 1.x^{-1} = x^{-1} = \phi(e^*) = x^{-1}.1 = \phi(e^*)\phi(s(e))$.

Portanto as condições 1 e 2 da definição 44 são satisfeitas. As condições 3 e 4 são satisfeitas trivialmente.

Logo pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$, ϕ se estende a um $\mathbb{K}$-homomorfismo

$$\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathbb{K}[x, x^{-1}].$$

Na verdade $L_{\mathbb{K}}(E) \cong \mathbb{K}[x, x^{-1}]$. De fato, utilizando a propriedade universal de $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$, obtemos $\psi : \mathbb{K}[x, x^{-1}] \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E)$ um $\mathbb{K}$-homomorfismo dado pela extensão linear de $\psi(x) = e$, $\psi(x^{-1}) = e^*$ e $\psi(1) = v$,

Não é difícil observar que ψ é inversa de ϕ e portanto obtemos o isomorfismo desejado.

Exemplo 53. Seja E o grafo com os conjuntos $E^0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $E^1 = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ dado da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} \underset{v_1}{\bullet} \arrow[r, "e_1"] & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[r, "e_2"] & \underset{v_3}{\bullet} & \cdots & \underset{v_{n-1}}{\bullet} \arrow[r, "e_{n-1}"] & \underset{v_n}{\bullet} \end{tikzcd}$$

Seja $M_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.

Defina $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ por $\phi(v_i) = E_{i,i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(e_i) = E_{i,i+1}$ e $\phi(e_i^*) = E_{i+1,i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, em que $E_{i,j}$ é a matriz da forma

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $E_{i,j}$ é a matriz $n \times n$ em que todos os elementos são nulos, exceto o elemento 1 que se encontra na posição i, j. Relembrando rapidamente que o produto de duas matrizes $E_{i,j}$ e $E_{k,l}$ em $M_n(\mathbb{K})$ é dada por

$$E_{i,j}.E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l}, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Para todo i, j, note que $E_{i,i}.E_{j,j} = \begin{cases} E_{i,i}, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$.

Logo, as matrizes $E_{i,i}$ são idempotentes e ortogonais duas a duas. Agora note que

$$\phi(s(e_i))\phi(e_i) = \phi(v_i)\phi(e_i) = E_{i,i}E_{i,i+1} = E_{i,i+1} = \phi(e_i).$$

Além disso,

$$\phi(e_i)\phi(r(e_i)) = \phi(e_i)\phi(v_{i+1}) = E_{i,i+1}.E_{i+1,i+1} = E_{i,i+1} = \phi(e_i).$$

Ou seja, $\phi(s(e_i))\phi(e_i) = \phi(e_i) = \phi(e_i)\phi(r(e_i))$, para todo i.

Agora note que da mesma maneira descrita acima temos

$$\phi(r(e_i))\phi(e_i^*) = \phi(v_{i+1})\phi(e_i^*) = E_{i+1,i+1}E_{i+1,i} = E_{i+1,i} = \phi(e_i^*)$$

e que

$$\phi(e_i^*)\phi(s(e_i)) = \phi(e_i^*)\phi(v_i) = E_{i+1,i}.E_{i,i} = E_{i+1,i} = \phi(e_i^*).$$

Isto é, $\phi(r(e_i))\phi(e_i^*) = \phi(e_i^*) = \phi(e_i^*)\phi(s(e_i))$, para todo i. Logo, as condições 1 e 2 da definição 44 são válidas.

Para a condição 3, notamos que dados $e_i, e_j \in E^1$ temos que

$$\phi(e_i^*).\phi(e_j) = E_{i+1,i}.E_{j,j+1} = \begin{cases} E_{i+1,i+1}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Mas $E_{i+1,i+1} = \phi(v_{i+1}) = \phi(r(e_i))$ e portanto,

$$\phi(e_i^*).\phi(e_j) = \begin{cases} \phi(r(e_i)), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Assim, concluímos que a condição 3 é satisfeita.

Finalmente para a condição 4, observe que para cada $v_i \in E^1$, $i = 1, \ldots, n-1$, temos que existe somente $e_i \in E^1$ tal que $s(e_i) = v_i$ e desse modo obtemos que

$$\phi(e_i)\phi(e_i^*) = E_{i,i+1}E_{i+1,i} = E_{i,i} = \phi(v_i).$$

Dessa maneira, pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$ temos que ϕ se estende a um $\mathbb{K}$-homomorfismo $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$.

Mais do que isso, ϕ é sobrejetora. Para isso basta mostrarmos que conseguimos gerar $E_{i,j}$, para todo i, j, a partir das matrizes definidas acima.

De fato, caso $i = j$ então não há nada a fazer pois $\phi(v_i) = E_{i,i}$, para todo i, por definição.

Agora caso $i > j$ então note que podemos representar $E_{i,j}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} E_{i,j} = E_{i,i-1}.E_{i-1,i-2}\ldots E_{j+1,j} &= \phi(e_{i-1}^*).\phi(e_{i-2}^*)\ldots\phi(e_j^*) = \\ &= \phi(e_{i-1}^*.e_{i-2}^*\ldots e_{j-1}^*). \end{aligned}$$

Por outro lado, caso $i < j$ então note que podemos representar $E_{i,j}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} E_{i,j} = E_{i,i+1}.E_{i+1,i+2}\ldots E_{j-1,j} &= \phi(e_i)\phi(e_{i+1})\ldots\phi(e_{j-1}) = \\ &= \phi(e_i e_{i+1}\ldots e_{j-1}). \end{aligned}$$

Como toda matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se escreve na forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} E_{i,j},$$

podemos concluir que ϕ é sobrejetora. A injetividade de ϕ será vista mais adiante.

Exemplo 54. Seja E o grafo com $E^0 = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $E^1 = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dado da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_2 \arrow[r, "e_2"] & v_3 \arrow[r, "e_3"] & v_4 & \cdots \end{tikzcd}$$

Considere $M_\infty(\mathbb{K})$ como sendo a $\mathbb{K}$-álgebra das matrizes infinitas que possuem um número finito de elementos não nulos.

Defina $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \longrightarrow M_\infty(\mathbb{K})$ por $\phi(v_i) = E_{i,i}$, $\phi(e_i) = E_{i,i+1}$ e $\phi(e_i^*) = E_{i+1,i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ em que $E_{i,j}$ é matriz infinita em que todos os elementos são nulos, exceto o elemento 1 na posição i, j.

Então de forma análoga verifica-se que ϕ se estende a um $\mathbb{K}$-homomorfismo sobrejetor $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow M_\infty(\mathbb{K})$. A injetividade de ϕ será vista mais adiante.

5 O ISOMORFISMO ENTRE $L_{\mathbb{K}}(E)$ E $D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$

O principal propósito deste capítulo é produzir um isomorfismo entre a Álgebra de Leavitt associada a um grafo E e o produto cruzado parcial $D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ determinado no capítulo 3.

Proposição 55. *Existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \to D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ tal que $\varphi(e) = 1_e\delta_e$, $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ $\forall e \in E^1$, e $\varphi(v) = 1_v\delta_0$, $\forall v \in E^0$.*

Demonstração. Vamos mostrar que os conjuntos

$$\{1_e\delta_e \mid e \in E^1\}, \{1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} \mid e \in E^1\} \text{ e } \{1_v\delta_0 \mid v \in E^0\}$$

em $D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ satisfazem as condições 1 a 4 da definição 44.

Para começar, primeiramente note que dados $v, w \in E^0$,

$$(1_v\delta_0)(1_w\delta_0) = \alpha_0(\alpha_0(1_v)1_w)\delta_0 = 1_v1_w\delta_0.$$

Mas, pelo lema 41, $1_v1_w = 1_v$ se $v = w$ e $1_v1_w = 0$ se $v \neq w$. Logo, temos que

$$(1_v\delta_0)(1_w\delta_0) = \begin{cases} 1_v\delta_0, & \text{se } v = w \\ 0, & \text{se } v \neq w \end{cases}.$$

Portanto os elementos $1_v\delta_0$ são idempotentes e ortogonais dois a dois. Agora vamos analisar as demais relações.

1. Queremos mostrar que $\forall e \in E^1$,

$$(1_{s(e)}\delta_0)(1_e\delta_e) = 1_e\delta_e = (1_e\delta_e)(1_{r(e)}\delta_0).$$

Pelo lema 41 segue que $1_{s(e)}1_e = 1_e$. Assim, temos que

$$(1_{s(e)}\delta_0)(1_e\delta_e) = \alpha_0(\alpha_0^{-1}(1_{s(e)})1_e)\delta_{0e} = 1_{s(e)}1_e\delta_e = 1_e\delta_e.$$

Por outro lado, pela observação 43 temos que $\alpha_{e^{-1}}(1_e) = 1_{e^{-1}}$ e pelo lema 42 segue que $\alpha_e(1_{e^{-1}}1_{r(e)}) = 1_e$. Portanto,

$$(1_e\delta_e)(1_{r(e)}\delta_0) = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{r(e)})\delta_{e0} = \alpha_e(1_{e^{-1}}1_{r(e)})\delta_e = 1_e\delta_e.$$

Segue o desejado.

2. Queremos mostrar que $\forall e \in E^1$,

$$(1_{r(e)}\delta_0)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_{s(e)}\delta_0).$$

Pelo lema 41 segue que $1_{r(e)}1_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}(1_{r(e)}\delta_0)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) &= \alpha_0(\alpha_0^{-1}(1_{r(e)})1_{e^{-1}})\delta_{0e^{-1}} = 1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = \\ &= 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, pela observação 43 temos que $\alpha_e(1_{e^{-1}}) = 1_e$ e pelo lema 42 segue que $\alpha_{e^{-1}}(1_e 1_{s(e)}) = 1_{e^{-1}}$. Portanto,

$$\begin{aligned}(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_{s(e)}\delta_0) &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_{s(e)})\delta_{e^{-1}0} = \\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_{s(e)})\delta_{e^{-1}} = \\ &= 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}.\end{aligned}$$

Logo, segue o desejado.

3. Queremos mostrar que dados $e, f \in E^1$,

$$(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_f\delta_f) = \begin{cases} 1_{r(e)}\delta_0, & \text{se } e = f \\ 0, & \text{se } e \neq f \end{cases}.$$

Supondo $e \neq f$, pelo lema 41 note que $1_e 1_f = 0$ e portanto, $\alpha_{e^{-1}}(1_e 1_f) = 0$. Logo,

$$(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_f\delta_f) = \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_f)\delta_{e^{-1}f} = \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_f)\delta_{e^{-1}f} = 0.$$

Agora suponha $e = f$. Então segue que

$$\begin{aligned}(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_e\delta_e) &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_e)\delta_{e^{-1}e} = \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_e)\delta_0 = \\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e)\delta_0 = 1_{e^{-1}}\delta_0.\end{aligned}$$

Porém, pelo lema 41 segue que $1_{e^{-1}} = 1_{r(e)}$. Portanto segue o resultado.

4. Seja $v \in E^0$ com $0 < \#\{e \mid s(e) = v\} < \infty$, queremos mostrar que

$$1_v\delta_0 = \sum_{\substack{e \in E^1 \\ s(e) = v}} (1_e\delta_e)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}).$$

Note primeiramente que,

$$(1_e\delta_e)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{e^{-1}})\delta_{ee^{-1}} = \alpha_e(1_{e^{-1}}1_{e^{-1}})\delta_0 = \\ = \alpha_e(1_{e^{-1}})\delta_0 = 1_e\delta_0.$$

Dessa maneira, podemos concluir que

$$\sum_{\substack{e\in E^1\\ s(e)=v}} (1_e\delta_e)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = \sum_{\substack{e\in E^1\\ s(e)=v}} 1_e\delta_0 = \left(\sum_{\substack{e\in E^1\\ s(e)=v}} 1_e\right)\delta_0 = 1_v\delta_0.$$

Pela a propriedade universal do $L_{\mathbb{K}}(E)$ conseguimos obter um $\mathbb{K}$-homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ que satisfaz $\varphi(e) = 1_e\delta_e$, $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$, para todo $e \in E^1$, e $\varphi(v) = 1_v\delta_0$, para todo $v \in E^0$.

■

Para efetivar o isomorfismo precisamos de uma lema auxiliar.

Lema 56. *Seja o $\mathbb{K}$-homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ obtido anteriormente. Então para $a \in W$, $\varphi(a) = 1_a\delta_a$ e $\varphi(a^*) = 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}}$. Para $a, b \in W$ com ab^{-1} na forma reduzida e $r(a) = r(b)$ vale que $\varphi(ab^*) = 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}$. Mais ainda, $1_p\delta_p \in Im(\varphi)$, $\forall p \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$.*

Demonstração. Seja $a \in W$ da forma $a = a_1 \dots a_n$. Vamos provar que $\varphi(a) = 1_a\delta_a$ por indução em n.

Note que se $n = 1$ então por definição segue que $\varphi(a) = 1_a\delta_a$. Suponha então válido para n, isto é, $\varphi(a_1 \dots a_n) = 1_{a_1\dots a_n}\delta_{a_1\dots a_n}$. Para facilitar a notação e o uso dos lemas, chamaremos o caminho $a_1 \dots a_n$ de c. Dessa forma, obtemos que

$$\varphi(a) = \varphi(a_1 \dots a_n a_{n+1}) = \varphi(ca_{n+1}) = \varphi(c)\varphi(a_{n+1}) = \\ = (1_c\delta_c)(1_{a_{n+1}}\delta_{a_{n+1}}) = \alpha_c(\alpha_{c^{-1}}(1_c)1_{a_{n+1}})\delta_{ca_{n+1}} = \\ = \alpha_c(1_{c^{-1}}1_{a_{n+1}})\delta_a = 1_c1_{ca_{n+1}}\delta_a = 1_a\delta_a.$$

Note que pelo lema 42, $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_{a_{n+1}}) = 1_c1_{ca_{n+1}}$ e pelo lema 41, $1_c1_{ca_{n+1}} = 1_c1_a = 1_a$. Analogamente, prova-se que $\varphi(a^*) = 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}}$.

Portanto provamos que $\varphi(a) = 1_a\delta_a$ e $\varphi(a^*) = 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}}$, para todo $a \in W$.

Agora, utilizando o lema 42 notamos que para todo $a, b \in W$,

$$\begin{aligned}\phi(ab^*) &= \phi(a)\phi(b^*) = (1_a\delta_a)(1_{b^{-1}}\delta_{b^{-1}}) = \alpha_a(\alpha_{a^{-1}}(1_a)1_{b^{-1}})\delta_{ab^{-1}} \\ &= \alpha_a(1_{a^{-1}}1_{b^{-1}})\delta_{ab^{-1}} = 1_a 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}} = 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}.\end{aligned}$$

Portanto temos que $\phi(ab^*) = 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}$, para todo $a, b \in W$ com ab^{-1} forma reduzida e $r(a) = r(b)$.

De acordo com a estrutura de $L_{\mathbb{K}}(E)$ e com as definições dos subconjuntos X_p, basta mostrar para todos os p dessa forma. Dessa maneira, segue que $1_p\delta_p \in \mathrm{Im}(\varphi)$, $\forall p \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$.

■

Por fim, chegamos ao teorema principal deste capítulo. Os resultados do apêndice B serão importantes e utilizados neste momento para a demonstração do $\mathbb{K}$-isomorfismo desejado.

Teorema 57. *O $\mathbb{K}$-homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ é um $\mathbb{K}$-isomorfismo.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que φ é injetiva, usando o teorema 79 do apêndice B. Pelas proposições 77 e 78 do apêndice B temos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ e $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ são $\mathbb{Z}$-graduados. Mais do que isso, note que $\varphi(v) = 1_v\delta_0 \neq 0$ pois $X_v \neq \emptyset$, $\forall v \in E^0$.

Note que para $\alpha\beta^* \in (L_{\mathbb{K}}(E))_n$ com $\alpha, \beta \in W \cup \{0\}$, em que $(L_{\mathbb{K}}(E))_n$ é a $\mathbb{Z}$-graduação de $L_{\mathbb{K}}(E)$, temos que pelo lema 56 que $\varphi(\alpha\beta^*) = 1_{\alpha\beta^{-1}}\delta_{\alpha\beta^{-1}} \in D_{\alpha\beta^{-1}}\delta_{\alpha\beta^{-1}}$ (Para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, denotamos por $D_p\delta_p$ o conjunto $D_p\delta_p = \{a_p\delta_p \mid a_p \in D_p\}$). Como $|\alpha\beta^{-1}| = |\alpha| - |\beta| = n$, segue que $1_{\alpha\beta^{-1}}\delta_{\alpha\beta^{-1}} \in A_n$, em que A_n é proveniente da $\mathbb{Z}$ graduação de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ da proposição 78.

Dessa forma, dado $x \in (L_{\mathbb{K}}(E))_n$ da forma

$$x = \sum_{|\alpha|-|\beta|=n} \alpha\beta^*,$$

segue por linearidade que,

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{|\alpha|-|\beta|=n} \alpha\beta^*\right) &= \sum_{|\alpha|-|\beta|=n} \varphi(\alpha\beta^*) = \\ &= \sum_{|\alpha\beta^{-1}|=n} 1_{\alpha\beta^{-1}}\delta_{\alpha\beta^{-1}} \in A_n.\end{aligned}$$

Assim, φ é $\mathbb{Z}$-graduado e, pelo teorema 79, φ é injetora. Agora vamos mostrar que φ é sobrejetiva.

Isto significa mostrar que $D_p\delta_p \subseteq \text{Im}(\varphi)$ para todo $p \in \mathbb{F}$. (Pois assim por linearidade podemos concluir que $\text{Im}(\varphi) = D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$).

Mostraremos que $D_0\delta_0 \subseteq \text{Im}(\varphi)$.

De fato, note que $\varphi(v) = 1_v\delta_0$, para todo $v \in E^0$ e portanto, $1_v\delta_0 \in \text{Im}(\varphi)$. Mais do que isso, note que para todo $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$,

$$(1_p\delta_p)(1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}}) = \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(1_p)1_{p^{-1}})\delta_{pp^{-1}} = \alpha_p(1_{p^{-1}})\delta_0 = 1_p\delta_0.$$

Pelo lema 56 temos $1_p\delta_p$ e $1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}} \in \text{Im}(\varphi)$. Dessa forma, obtemos que $1_p\delta_0 \in \text{Im}(\varphi)$. Por linearidade, segue que $D_0\delta_0 \subseteq \text{Im}(\varphi)$. Basta agora mostrarmos que $D_p\delta_p \in \text{Im}(\varphi)$ para todo $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Note que,

$$(1_q\delta_0)(1_p\delta_p) = 1_q1_p\delta_p = 1_p1_q\delta_p.$$

Como $1_p\delta_p$ e $1_q\delta_0 \in \text{Im}(\varphi)$, então $1_p1_q\delta_0 \in \text{Im}(\varphi)$. Novamente por linearidade, segue que $D_p\delta_p \subseteq \text{Im}(\varphi)$.

■

6 TEOREMA DE UNICIDADE DE CUNTZ-KRIEGER

Neste penúltimo capítulo apresentaremos alguns resultados auxiliares que nos darão suporte para a apresentação e demonstração do Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger para a Álgebra de Leavitt utilizando o isomorfismo apresentado no capítulo 5.

Alguns exemplos serão retomados a fim de mostrar a aplicação do teorema. O principal artigo que serviu como base para esta prova é (GONÇALVES; ROYER, 2014).

Lema 58. *Seja E um grafo que satisfaz a condição (L). Dados um caminho fechado $b = b_1 \dots b_r \in W$ e $x_b \in D_b$ um elemento não nulo, então existem número naturais $m, k \geq 1$, com $k \leq r$, e $t_1, ..., t_k \in E^1$, tal que $t_i \neq b_i$, para algum i, e*

$$x_b \cdot 1_{b^m t_1 \dots t_k} \neq 0.$$

Demonstração. Suponha que exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_b.1_{b^N} = 0$. Com isso, tome m como sendo o maior número natural o qual $x_b.1_{b^m} \neq 0$ (note que $m \geq 1$ pois $x_b.1_b = x_b \neq 0$). Agora note que X_{b^m} é o conjunto de todos os caminhos em X que começam por b^m. Sem perda de generalidade, podemos escrever este conjunto como sendo o conjunto de todos os caminhos que começam por $b^m t$ para todas arestas $t \in E^1$ com $s(t) = r(b)$ separando os casos em que $r(t)$ é ou não poço. Isto é, podemos escrever

$$X_{b^m} = \left(\bigcup_{\substack{t \in E^1 \\ r(t) \text{ não é poço}}} X_{b^m t} \right) \dot{\bigcup} \left(\bigcup_{\substack{t \in E^1 \\ r(t) \text{ poço}}} X_{b^m t} \right).$$

Usando a mesma ideia podemos reescrever os conjuntos $X_{b^m t}$ acima com $r(t)$ não sendo poço como sendo uniões de conjuntos da forma $X_{b^m t}$ com $t \in W$, $|t| = 2$. Dessa maneira, obtemos que

$$X_{b^m} = \left(\bigcup_{\substack{t \in E^1 \\ r(t) \text{ não é poço}}} X_{b^m t} \right) \dot{\bigcup} \left(\bigcup_{\substack{t \in E^1 \\ r(t) \text{ poço}}} X_{b^m t} \right)$$

$$= \left(\bigcup_{\substack{t\in W \\ |t|=2 \\ r(t) \text{ não é poço}}} X_{b^m t} \right) \dot{\bigcup} \left(\bigcup_{\substack{t\in E^1 \\ r(t) \text{ poço}}} X_{b^m t} \right) =$$

$$= \left(\bigcup_{\substack{t\in W \\ |t|=2 \\ r(t) \text{ não é poço}}} X_{b^m t} \right) \dot{\bigcup} \left(\bigcup_{\substack{t\in W \\ |t|<2 \\ r(t) \text{ poço}}} X_{b^m t} \right).$$

Continuando este processo, podemos reescrever X_{b^m} como sendo o conjunto de todos os caminhos que começam por $b^m t$ para todos caminhos $t \in W$ com $s(t) = r(b)$ de tamanho $|t| = r$ ou de tamanho $|t| < r$ e $r(t)$ poço, ou seja,

$$X_{b^m} = \left(\bigcup_{\substack{t\in W \\ |t|=r}} X_{b^m t} \right) \dot{\bigcup} \left(\bigcup_{\substack{t\in W \\ |t|<r \\ r(t) \text{ poço}}} X_{b^m t} \right).$$

Como $x_b.1_{b^m} \neq 0$ por hipótese segue que, existe $t \in W$ da forma $t = t_1 \dots t_k$ com $|t| = k \leq r$ e existe $\xi \in X_{b^m t}$ de modo que $x_b.1_{b^m}(\xi) = x_b.1_{b^m t}(\xi) = x_b.1_{b^m t_1 \dots t_k}(\xi) \neq 0$. Portanto concluímos que $x_b.1_{b^m t_1 \dots t_k} = x_b.1_{b^m t} \neq 0$.

Mas note que t pode ser da forma $k = r$ ou $k < r$ e $r(t)$ poço. Se $k < r$ e $r(t)$ é poço então neste caso $t_k \neq b_i$ para todo i pois $r(b_i)$ não é poço. Em particular, $t_k \neq b_k$.

Por outro lado, se $k = r$ então $t \neq b$ pois caso $t = b$ então teríamos que $x_b.1_{b^{m+1}} = x_b.1_{b^m t} \neq 0$, o que contradiz a hipótese de que $x_b.1_{b^{m+1}} = 0$. Portanto $t_i \neq b_i$, para algum i. Dessa maneira, segue o desejado.

Agora suponha que $x_b.1_{b^N} \neq 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Como $x_b \in D_b$, $x_b \neq 0$ então podemos escrever $x_b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_b 1_{k_i l_i^{-1}}$, em que $k_i, l_i \in W \cup \{0\}$, para todo i.

Usando o lema 41 podemos reescrever x_b da seguinte maneira:

$$x_b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{a_i c_i^{-1}},$$

com $a_i \in W$, $c_i \in W \cup \{0\}$.

Escolha $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, de modo que $m.|b| \geq |a_i|$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Note que para qualquer $\xi \in X_b$ temos que

$$(1_{b^m}.1_{a_i c_i^{-1}})(\xi) = (1_{b^m})(\xi)(1_{a_i c_i^{-1}})(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \in X_{b^m} \cap X_{a_i c_i^{-1}} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Como $|a_i| \leq m.|b| = |b^m|$, segue que $(1_{b^m}.1_{a_i c_i^{-1}})(\xi)$ depende somente das $m.|b|$ primeiras entradas de ξ. Por linearidade obtemos que

$$(x_b.1_{b^m})(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1_{b^m} 1_{a_i c_i^{-1}})(\xi),$$

o que da mesma maneira depende também das $m.|b|$ primeiras entradas de ξ.

Acontece que como $x_b.1_{b^m} \neq 0$ então existe $\xi \in X_b$ o qual $(x_b.1_{b^m})(\xi) \neq 0$. Como o grafo E satisfaz a condição (L) temos que existe pelo menos $t_j \in E^1$, para algum j, com $s(t_j) = s(b_j)$ porém $t_j \neq b_j$.

Considere $\varsigma \in X_b$ como sendo $\varsigma = \xi_1 \ldots \xi_{m|b|} b_1 \ldots b_{j-1} t_j$, em que $\xi = \xi_1 \xi_2 \ldots$ caminho em X_b. Pela razão de que $(x_b.1_{b^m})(\xi)$ depende somente das $m.|b|$ primeiras entradas de ξ então

$$(x_b.1_{b^m})(\varsigma) = (x_b.1_{b^m})(\xi_1 \ldots \xi_{m|b|} b_1 \ldots b_{j-1} t_j) = (x_b.1_{b^m})(\xi) \neq 0.$$

Mas note que $X_{b^m} \cap X_{b^m b_1 \ldots b_{j-1} t_j} = X_{b^m b_1 \ldots b_{j-1} t_j}$. Então podemos concluir que

$$\begin{aligned}(x_b.1_{b^m b_1 \ldots b_{j-1} t_j})(\varsigma) &= (x_b.1_{b^m}.1_{b^m b_1 \ldots b_{j-1} t_j})(\varsigma) = \\ &= (x_b.1_{b^m})(\varsigma)\, \underbrace{1_{b^m b_1 \ldots b_{j-1} t_j}(\varsigma)}_{1} = \\ &= (x_b.1_{b^m})(\varsigma) = (x_b.1_{b^m})(\xi) \neq 0.\end{aligned}$$

Dessa maneira, segue o desejado.

■

Demonstramos o lema 58 o qual é um resultado bastante técnico e importante para o resultado posterior. Demonstraremos agora um teorema crucial para o objetivo principal do capítulo.

Teorema 59. *Seja E um grafo que satisfaz a condição (L). Se I é um ideal não nulo de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ então $I \cap D_0\delta_0 \neq \{0\}$.*

Demonstração. Seja $x \in I$ elemento não nulo. A ideia desta demonstração é simplesmente multiplicar x por elementos apropriados de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ para obter um elemento não nulo de $I \cap D_0\delta_0$. Para isso vamos dividir em alguns passos.

Passo 1: Vamos mostrar que existe um elemento não nulo de I da forma $\sum_{i=1}^{p} x_{c_i}\delta_{c_i}$, em que $c_i \in W$, para todo i e $c_i \neq c_j$, para $i \neq j$.

De fato, como $x \neq 0$ então podemos escrever $x = \sum_{i=1}^{p} x_{a_i b_i^{-1}}\delta_{a_i b_i^{-1}}$ com $a_i, b_i \in W \cup \{0\}$, $a_i b_i^{-1}$ na forma reduzida, $a_i b_i^{-1} \neq a_j b_j^{-1}$ para todo $i \neq j$, $r(a_i) = r(b_i)$ e $x_{a_i b_i^{-1}} \neq 0$, para todo i, pois caso $x_{a_i b_i^{-1}}$ for zero, podemos descartar.

Escolha b_m dentre todos os b_i tal que $|b_m| = \max_i\{|b_i|\}$. Com isso, temos que $x.(1_{b_m}\delta_{b_m}) \neq 0$ pois note que, como $1_{b_m} = 1_{b_m a_m^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}
(x_{a_m b_m^{-1}}\delta_{a_m b_m^{-1}})(1_{b_m}\delta_{b_m}) &= \alpha_{a_m b_m^{-1}}(\alpha_{b_m a_m^{-1}}(x_{a_m b_m^{-1}})1_{b_m})\delta_{a_m b_m^{-1} b_m} = \\
&= \alpha_{a_m b_m^{-1}}(\alpha_{b_m a_m^{-1}}(x_{a_m b_m^{-1}})1_{b_m a_m^{-1}})\delta_{a_m} = \\
&= \alpha_{a_m b_m^{-1}}(\alpha_{b_m a_m^{-1}}(x_{a_m b_m^{-1}}))\delta_{a_m} = \\
&= x_{a_m b_m^{-1}}\delta_{a_m} \neq 0.
\end{aligned}$$

Mais do que isso, note que

$$\begin{aligned}
x.1_{b_m}\delta_{b_m} &= \sum_{i=1}^{p}(x_{a_i b_i^{-1}}\delta_{a_i b_i^{-1}})(1_{b_m}\delta_{b_m}) = \\
&= \sum_{i=1}^{p} \alpha_{a_i b_i^{-1}}(\alpha_{b_i a_i^{-1}}(x_{a_i b_i^{-1}})1_{b_m})\delta_{a_i b_i^{-1} b_m} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \alpha_{a_i b_i^{-1}}(\alpha_{b_i a_i^{-1}}(x_{a_i b_i^{-1}})1_{b_i a_i^{-1}}1_{b_m})\delta_{a_i b_i^{-1} b_m} \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_{a_i b_i^{-1}}\alpha_{a_i b_i^{-1}}(1_{b_i a_i^{-1}}1_{b_m})\delta_{a_i b_i^{-1} b_m} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_{a_i b_i^{-1}} 1_{a_i b_i^{-1}} 1_{a_i b_i^{-1} b_m} \delta_{a_i b_i^{-1} b_m} =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} x_{c_i} \delta_{c_i}.$$

Ou seja, como $\delta_{a_i b_i^{-1} b_m} \neq \delta_{a_j b_j^{-1} b_m}$, para $i \neq j$ garantimos que o elemento $x.1_{b_m}\delta_{b_m} \neq 0$. Observe também que como I é ideal, então $x.1_{b_m}\delta_{b_m} \in I$. Logo, temos o passo 1 provado.

Passo 2: Vamos mostrar que existe um elemento não nulo de I da forma $x_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{p} x_{d_i}\delta_{d_i}$, em que $x_0 \neq 0$, $d_i \in W$ com $d_i \neq d_j$, para $i \neq j$ e se $i < j$, então d_i é começo de d_j. Além disso, $r(d_i) = s(d_i) = r(d_j) = s(d_j)$.

Para isso, seja $x \in I$ o elemento não nulo do passo 1, ou seja, x pode ser escrito da forma

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_{c_i}\delta_{c_i}$$

com $c_i \in W$, $x_{c_i} \neq 0$ para cada i e $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$.

Escolha c_n dentre todos os c_i tal que $|c_n| = \max_i\{|c_i|\}$. Caso $c_n = 0$ então $x = x_0\delta_0$, com $x_0 \neq 0$ e nosso passo 2 está provado.

Caso $c_n \neq 0$ então defina

$$y := (1_{c_n}\delta_0)x = \sum_{i=1}^{p} 1_{c_n} x_{c_i}\delta_{c_i}.$$

Pela mesma razão do passo 1, obtemos que $1_{c_n}x_{c_n} = x_{c_n} \neq 0$ e pela razão de que $1_{c_n}x_{c_n}\delta_{c_n} = x_{c_n}\delta_{c_n} \neq 0$ então temos $y \neq 0$. Para cada c_i com $|c_i| \neq 0$, $1_{c_n}x_{c_i} = 1_{c_n}1_{c_i}x_{c_i}$. No entanto, como c_n tem comprimento máximo, pelo lema 41 obtemos que

$$1_{c_i}1_{c_n} = \begin{cases} 1_{c_n}, & \text{se } c_i \text{ for começo de } c_n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Com isso, podemos escrever y da seguinte maneira

$$\begin{aligned} y &= \left(\sum_{c_i \text{ começo de } c_n} 1_{c_n} x_{c_i} \delta_{c_i} \right) + 1_{c_n} x_0 \delta_0 = \\ &= y_0 \delta_0 + \left(\sum_{c_i \text{ começo de } c_n} y_{c_i} \delta_{c_i} \right) \end{aligned}$$

onde denotamos por $y_{c_i} = x_{c_i} 1_{c_n}$, para todo i e $y_0 = 1_{c_n} x_0$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $y_0 \neq 0$ pois caso contrário seja c tal que $|c| = \min_i \{|c_i|\}$ e considere o elemento

$$\begin{aligned} \tilde{y} = (1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}}).y &= \sum_{c_i \text{ começo de } c_n} (1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}})(y_{c_i} \delta_{c_i}) = \\ &= \sum_{c_i \text{ começo de } c_n} \alpha_{c^{-1}}(\alpha_c(1_{c^{-1}}) y_{c_i}) \delta_{c^{-1} c_i} = \\ &= \sum_{c_i \text{ começo de } c_n} \alpha_{c^{-1}}(y_{c_i}) \delta_{c^{-1} c_i}. \end{aligned}$$

Claramente $\tilde{y}$ possui fibra zero não nula.

Seja $w = r(c_n)$. O que vamos fazer aqui é multiplicar y por $(1_w \delta_0)$ à direita. Observe que

$$\begin{aligned} y.(1_w \delta_0) &= (y_0 \delta_0)(1_w \delta_0) + \left(\sum_{c_i \text{ começo de } c_n} (y_{c_i} \delta_{c_i})(1_w \delta_0) \right) \\ &= y_0 1_w \delta_0 + \left(\sum_{c_i \text{ começo de } c_n} \alpha_{c_i}(\alpha_{c_i^{-1}}(y_{c_i}) 1_w) \delta_{c_i} \right). \end{aligned}$$

Note que $\alpha_{c_i^{-1}}(y_{c_i}) 1_w = \alpha_{c_i^{-1}}(y_{c_i}) 1_{c_i^{-1}} 1_w$ pois $1_{c_i^{-1}}$ é a unidade de $D_{c_i^{-1}}$. Porém sabemos que pelo lema 41 que

$$1_{c_i^{-1}} 1_w = \begin{cases} 1_{c_i^{-1}}, & \text{se } r(c_i) = w \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Isto é, se $r(c_i) = w$, então $\alpha_{c_i^{-1}}(y_{c_i}) 1_{c_i^{-1}} 1_w = \alpha_{c_i^{-1}}(y_{c_i}) 1_{c_i^{-1}} = \alpha_{c_i^{-1}}(y_{c_i})$ e portanto, podemos reescrever $y.(1_w \delta_0)$ da seguinte maneira

$$y.(1_w\delta_0) = y_0 1_w \delta_0 + \left(\sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} y_{c_i}\delta_{c_i} \right).$$

Continuando o processo, seja $v = s(c_n)$. Agora a estratégia é multiplicar o elemento $y \cdot 1_w\delta_0$ à esquerda por $1_v\delta_0$ obtendo

$$\begin{aligned} 1_v\delta_0 \cdot y \cdot 1_w\delta_0 &= (1_v\delta_0)(y_0.1_w\delta_0) + \left(\sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} (1_v\delta_0)(y_{c_i}\delta_{c_i}) \right) = \\ &= (y_0 1_v 1_w)\delta_0 + \left(\sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} \underbrace{1_v y_{c_i}}_{y_{c_i}} \delta_{c_i} \right) = \\ &= (y_0 1_v 1_w)\delta_0 + \left(\sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} y_{c_i}\delta_{c_i} \right). \end{aligned}$$

Note que $1_v y_{c_i} = y_{c_i}$ pois $v = s(c_n) = s(c_i)$. Dessa forma, defina o elemento

$$z := 1_v\delta_0 \cdot y \cdot 1_w\delta_0 = (y_0 1_v 1_w)\delta_0 + \left(\sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} y_{c_i}\delta_{c_i} \right).$$

Pela mesma razão do passo 1 e $y_{c_n} = x_{c_n} 1_{c_n} = x_{c_n} \neq 0$ temos que $z \neq 0$.

Por um lado, se $v = w$ então $y_0 1_v 1_w = y_0 1_v = y_0 \neq 0$ e temos nosso elemento do passo 2. Por outro lado se $v \neq w$ então temos que $y_0 1_v 1_w = 0$. Neste caso, usaremos o mesmo truque já visto acima. Seja c o elemento dentro todos os c_i's de forma que $|c| = \min_i\{|c_i|\}$. Assim, considere o seguinte elemento

$$\begin{aligned}
1_{c^{-1}}\delta_{c^{-1}}.z &= \sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} (1_{c^{-1}}\delta_{c^{-1}})(y_{c_i}\delta_{c_i}) = \\
&= \sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} \alpha_{c^{-1}}(\alpha_c(1_{c^{-1}})y_{c_i})\delta_{c^{-1}c_i} = \\
&= \sum_{\substack{c_i \text{ começo de } c_n \\ r(c_i)=w}} \alpha_{c^{-1}}(y_{c_i})\delta_{c^{-1}c_i}.
\end{aligned}$$

Note que o elemento construído pertence a I pois I é ideal. Observe também que $s(c^{-1}c_i) = r(c) = w = r(c^{-1}c_i)$, para cada i. Desse modo, provamos enfim o passo 2.

Passo 3: Seja $x = x_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{p} x_{c_i}\delta_{c_i}$, com $x_0 \neq 0$, $x_{c_i} \neq 0$, para todo i, como sendo o elemento não nulo do passo 2. Então vamos provar que $y \in I$ elemento não nulo tal que $y = y_0\delta_0$ ou $y = y_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{k} y_{c_i}\delta_{c_i}$, com $k < p$.

Para isso vamos reescrever x do passo 2 como sendo

$$x = \sum_{i=0}^{p} x_{c_i}\delta_{c_i},$$

em que $c_0 = 0$, $x_{c_i} \neq 0$ para todo i.

Note que como c_n é o caminho de maior comprimento visto que, para $i < j$, c_i é começo de c_j.

Se $c_n = 0$ então imediatamente temos que $x = x_0\delta_0$, e portanto o passo 3 é concluído. Agora, se $c_n \neq 0$ então denotaremos por b o caminho c_n, isto é, $c_n = b_1 ... b_{|c_n|}$. Vamos construir o elemento $y \in I$ não nulo.

Como o grafo não satisfaz a condição (L), segue do lema 58 que existem $m, k \geq 1$ e $t_1, ..., t_k \in E^1$, com $t_i \neq b_i$ para algum i e $x_b \cdot 1_{b^m t_1 \ldots t_k} \neq 0$. Considere o elemento z da seguinte forma

$$z := (1_{b^m}\delta_0) \cdot x \cdot (1_{b^{m-1}t_1\ldots t_k}\delta_0) = \sum_{i=0}^{p} z_{c_i}\delta_{c_i},$$

em que $z_{c_i}\delta_{c_i} = (1_{b^m}\delta_0)\cdot(x_{c_i}\delta_{c_i})\cdot(1_{b^{m-1}t_1\dots t_k}\delta_0)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} z_{c_0}\delta_{c_0} = z_0\delta_0 = (1_{b^m}\delta_0)(x_0\delta_0)(1_{b^{m-1}t_1\dots t_k}\delta_0) = \\ = x_0 1_{b^m}1_{b^{m-1}t_1\dots t_k}\delta_0 = 0, \end{aligned}$$

pois $1_{b^m}1_{b^{m-1}t_1\dots t_k} = 0$. Então,

$$z = \sum_{i=1}^{p}(1_{b^m}\delta_0)\cdot(x_{c_i}\delta_{c_i})\cdot(1_{b^{m-1}t_1\dots t_k}\delta_0).$$

Note também que

$$\begin{aligned} z_b\delta_b &= (1_{b^m}\delta_0)\cdot(x_b\delta_b)\cdot(1_{b^{m-1}t_1\dots t_k}\delta_0) = \\ &= (1_{b^m}\delta_0)(\alpha_b(\alpha_{b^{-1}}(x_b)1_{b^{m-1}t_1\dots t_k})\delta_b) = \\ &= (1_{b^m}\delta_0)(\alpha_b(\alpha_{b^{-1}}(x_b)1_{b^{-1}}1_{b^{m-1}t_1\dots t_k})\delta_b) = \\ &= (1_{b^m}\delta_0)(x_b\alpha_b(1_{b^{-1}}1_{b^{m-1}t_1\dots t_k})\delta_b) = \\ &= (1_{b^m}\delta_0)(x_b 1_b 1_{b^m t_1\dots t_k}\delta_b) = \\ &= x_b.1_{b^m}.1_b.1_{b^m t_1\dots t_k}\delta_b = \\ &= x_b.1_{b^m t_1\dots t_k}\delta_b \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, para obter o elemento desejado do passo 3 precisamos agora deslocar a fibra. Para fazer isso, consideramos c o elemento dentre os c_i de modo que $|c| = \min_i\{|c_i|\}$. Dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} (1_{c^{-1}}\delta_{c^{-1}})z &= \sum_{i=1}^{p}(1_{c^{-1}}\delta_{c^{-1}})\cdot(z_{c_i}\delta_{c_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\alpha_{c^{-1}}(\alpha_c(1_{c^{-1}})z_{c_i})\delta_{c^{-1}c_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\alpha_{c^{-1}}(z_{c_i})\delta_{c^{-1}c_i} = \\ &= \alpha_{c^{-1}}(z_c)\delta_0 + \sum_{i=1}^{k}\alpha_{c^{-1}}(z_{c_i})\delta_{c^{-1}c_i}, \end{aligned}$$

com $k < p$. Note que $z_c \neq 0$ e portanto, $\alpha_{c^{-1}}(z_c) \neq 0$. Finalmente podemos definir o elemento desejado por

$$y := 1_{c^{-1}}\delta_{c^{-1}} \cdot z.$$

Passo 4: Vamos mostrar definitivamente o teorema.

De fato, seja $x \in I$ elemento não nulo do passo 2, isto é,

$$x = x_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{p} x_{c_i}\delta_{c_i}.$$

Se $x_{c_i} = 0$, para cada i, então temos que x é da forma $x = x_0\delta_0 \in D_0\delta_0$ e assim o teorema é finalizado. Caso $x_{c_i} \neq 0$, para algum i, então aplicamos em x um número finito de vezes o passo 3 e portanto temos o desejado.

■

Lema 60. *Seja E um grafo que satisfaz a condição (L) e I um ideal não nulo de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Então existe $v \in E^0$ tal que $1_v\delta_0 \in I$.*

Demonstração. Seja I um ideal não vazio de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Pelo teorema anterior existe $x \in I$ elemento não nulo da forma $x = x_0\delta_0 \in D_0\delta_0$.

Como $x_0 \in D_0$ então podemos escrever

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{a_i b_i^{-1}} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{v_j}$$

com $a_i \in W$, $b_i \in W \cup 0$, para todo i e $v_j \in E^0$, para todo j .

Podemos assumir sem perda de generalidade que $a_i \neq 0$ para todo i, pois caso contrário se $a_i = 0$ para algum i então teríamos que $1_{a_i b_i^{-1}} = 1_{b_i^{-1}} = 1_{r(b_i)}$.

Dessa forma, seja $v \in E^0$ tal que $1_v x_0 \neq 0$.

Uma observação importante é a existência desse vértice. De fato, como $x_0 \neq 0$ então existe ξ de modo que $x_0(\xi) \neq 0$. Então $1_{s(\xi)}x_0(\xi) \neq 0$ e dessa forma, a existência de v é garantida. Porém, v pode ser poço ou não.

Caso v seja poço então temos que $1_v 1_{a_i b_i^{-1}} = 0$ e portanto, podemos concluir que

$$1_v x_0\delta_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_v 1_{a_i b_i^{-1}} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_v 1_{v_j} = \sum_{\substack{j=1 \\ v=v_j}}^{m} \beta_j 1_v \delta_0 = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ v=v_j}}^{m} \beta_j \right) 1_v\delta_0.$$

Como $1_v x_0 \neq 0$, então $h := \sum_{\substack{j=1 \\ v=v_j}}^{m} \beta_j \neq 0$ e, como $\mathbb{K}$ é corpo, então

$$1_v\delta_0 = \left(h^{-1}1_v\delta_0\right)(x_0\delta_0) \in I.$$

Suponha agora que v não seja poço. Então considere m como sendo o máximo entre os comprimentos dos a_i's acima, em outras palavras, $m = \max_i\{|a_i|\}$. Vamos lembrar que podemos escrever

$$X_v = \bigcup_{\substack{c\in W \\ v=s(c)}} X_c = \left(\dot{\bigcup_{\substack{c\in W \\ v=s(c) \\ |c|=m}}} X_c \right) \bigcup \left(\dot{\bigcup_{\substack{c\in W \\ v=s(c) \\ |c|<m \\ r(c) \text{ poço}}}} X_c \right).$$

Como $1_v x_0 \neq 0$ então existe $\xi \in X_v$ de forma que $(1_v x_0)(\xi) \neq 0$. Pela observação acima podemos concluir que existe $c \in W$ com $s(c) = v$ tal que $1_c(\xi) = 1_v(\xi)$. Assim temos que

$$1_c x_0(\xi) = 1_c(\xi)x_0(\xi) = 1_v(\xi)x_0(\xi) = (1_v x_0)(\xi) \neq 0.$$

Note que podemos ainda supor que c é de tal forma que $|c| = m$ ou $|c| < m$ e $r(c)$ é poço.

Independente do caso pelo lema 41 temos que

$$1_c 1_{a_i b_i^{-1}} = \begin{cases} 1_c, & \text{se } a_i \text{ for começo de } c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e também que

$$1_c 1_{v_j} = \begin{cases} 1_c, & \text{se } s(c) = v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim obtemos que

$$1_c x_0 \delta_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_c 1_{a_i b_i^{-1}} \delta_0 \right) + \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_c 1_{v_j} \delta_0 \right) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ a_i \text{ começo de } c}}^{n} \lambda_i 1_c \delta_0 \right) + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ s(c)=v_j}}^{m} \beta_j 1_c \delta_0 \right) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ a_i \text{ começo de } c}}^{n} \lambda_i + \sum_{\substack{j=1 \\ s(c)=v_j}}^{m} \beta_j \right) 1_c \delta_0.$$

Como $1_c x_0 \neq 0$, então $\tilde{h} := \left(\sum_{\substack{i=1 \\ a_i \text{ começo de } c}}^{n} \lambda_i + \sum_{\substack{j=1 \\ s(c)=v_j}}^{m} \beta_j \right) \neq 0$
e, como $\mathbb{K}$ é corpo, então

$$1_c \delta_0 = \left(\tilde{h}^{-1} 1_c \delta_0 \right) (x_0 \delta_0) \in I.$$

Observe que

$$(1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}}).\underbrace{(1_c \delta_0)}_{\in I}.(1_c \delta_c) = (1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}}).(1_c \delta_c) = 1_{c^{-1}} \delta_0.$$

Como $1_c \delta_0 \in I$ e I é ideal temos que $1_{c^{-1}} \delta_0 \in I$. Mas $1_{c^{-1}} = 1_{r(c)}$ e portanto, $1_{r(c)} \delta_0 \in I$ concluindo o lema.

■

Teorema 61. *(**Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger**) Seja E um grafo que satisfaz a condição (L) e A uma $\mathbb{K}$-álgebra qualquer. Se $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$ é um $\mathbb{K}$-homomorfismo tal que $\varphi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$, então φ é injetora.*

Demonstração. Seja $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ o $\mathbb{K}$-isomorfismo do capítulo 5 e considere o $\mathbb{K}$-homomorfismo $\psi : D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} \longrightarrow A$ como sendo $\psi = \varphi \circ \phi^{-1}$. Note que para todo $v \in E^0$, temos que

$$\psi(1_v \delta_0) = (\varphi \circ \phi^{-1})(1_v \delta_0) = \varphi(v) \neq 0.$$

Suponha por contradição que ψ não seja injetora. Neste caso, considere o ideal não nulo $I = \ker(\psi)$ de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Pelo lema 60 existe $v_0 \in E^0$ tal que $1_{v_0} \delta_0 \in I$. Isto significa dizer que $\psi(v_0) = 0$, o que é uma contradição. Logo, ψ é injetora e portanto φ é injetora.

■

Exemplo 62. Considere o grafo E do exemplo 53 dado por:

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \quad \cdots \quad v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} v_n$$

Vimos que existe $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ um $\mathbb{K}$-homomorfismo sobrejetor.

Como E satisfaz a condição (L) trivialmente e $\phi(v_i) = E_{i,i} \neq 0$, para todo i, segue do teorema 61 que $L_{\mathbb{K}}(E) \cong M_n(\mathbb{K})$.

Exemplo 63. Considere o grafo E do exemplo 54 dado por:

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_3} v_4 \quad \cdots$$

Vimos que existe $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow M_\infty(\mathbb{K})$ um $\mathbb{K}$-homomorfismo sobrejetor.

Como E satisfaz a condição (L) trivialmente e $\phi(v_i) = E_{i,i} \neq 0$, para todo i, segue do teorema 61 que $L_{\mathbb{K}}(E) \cong M_\infty(\mathbb{K})$.

7 SISTEMAS DE RAMIFICAÇÃO E-ALGÉBRICOS

Neste último capítulo faremos um estudo sobre os sistemas de ramificação E-algébricos associados a um grafo E. O objetivo aqui é mostrar a recíproca do Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger, isto é, se o grafo E não satisfaz a condição (L) então existe uma $\mathbb{K}$-álgebra A e um $\mathbb{K}$-homomorfismo $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$ tal que $\phi(v) \neq 0$, para todo $v \in E^0$ porém ϕ não é injetora.

Definição 64. *Sejam X um conjunto não vazio e E um grafo qualquer. Sejam $\{R_e\}_{e\in E^1}$ e $\{D_v\}_{v\in E^0}$ famílias de subconjuntos de X que satisfazem:*

(i) $R_e \cap R_t = \emptyset$, $\forall e, t \in E^1$ *com* $e \neq t$;

(ii) $D_v \cap D_w = \emptyset$, $\forall v, w \in E^0$ *com* $v \neq w$;

(iii) $R_e \subseteq D_{s(e)}$, $\forall e \in E^1$;

(iv) Para todo vértice v tal que $0 < \#\{e : s(e) = v\} < \infty$ *tem-se*

$$D_v = \bigcup_{\substack{e\in E^1\\ s(e)=v}} R_e;$$

(v) Para cada $e \in E^1$ existe $f_e : D_{r(e)} \longrightarrow R_e$ bijeção.

Então a quádrupla $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ é chamada de sistema de ramificação E-algébrico associado ao grafo E.

Observação 65. Quando não houver confusão, denotaremos por X ao contrário de $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ o sistema de ramificação E-algébrico associado ao grafo E aqui utilizado.

Dado X um sistema de ramificação E-algébrico associado ao grafo E, considere $\mathrm{Hom}(F(X))$ a $\mathbb{K}$-álgebra dos homomorfismos de $F(X)$ para $F(X)$ com as operações de soma e produto por escalar usuais e produto dado através da composição. Vamos definir alguns homomorfismos relevantes para nossa abordagem.

Para cada $e \in E^1$ defina

$$\tau_e : F(X) \longrightarrow F(X)$$

como sendo

$$\tau_e(\phi)(x) = \begin{cases} \phi \circ f_e^{-1}(x), & \text{se } x \in R_e \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para todo $\phi \in F(X)$. Note que τ_e está bem definido pois se $x \notin R_e$, então $\tau_e(\phi)(x) = 0$. Se $x \in R_e$ então note que $f_e^{-1}(x) \in D_{r(e)} \subseteq X$ e como $\phi \in F(X)$, segue que $\tau_e(\phi)(x) = \phi(f_e^{-1}(x))$. Utilizaremos a notação $\tau_e(\phi) = 1_{R_e}.(\phi \circ f_e^{-1})$ a fim de facilitar algumas contas mais adiante. Todavia, lembre-se que estamos tratando da definição descrita acima.

Mais do que isso, $\tau_e \in \mathrm{Hom}(F(X))$. De fato, dados $\phi, \psi \in F(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que se $x \in R_e$ então

$$\begin{aligned}\tau_e(\lambda\phi + \psi)(x) &= (\lambda\phi + \psi)(f_e^{-1}(x)) = (\lambda\phi)(f_e^{-1}(x)) + \psi(f_e^{-1}(x)) = \\ &= \lambda\phi(f_e^{-1}(x)) + \psi(f_e^{-1}(x)) = \lambda\tau_e(\phi)(x) + \tau_e(\psi)(x) = \\ &= (\lambda\tau_e(\phi) + \tau_e(\psi))(x).\end{aligned}$$

Logo, $\tau_e(\lambda\phi+\psi) = \lambda\tau_e(\phi)+\tau_e(\psi)$. Caso $x \notin R_e$ então $\tau_e(\lambda\phi+\psi)(x) = 0 = (\lambda\tau_e(\phi) + \tau_e(\psi))(x)$. Logo a igualdade também é válida.

Note que $F(X)$ está sendo visto como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Portanto basta verificar que τ_e é linear. O produto dado pela composição é referente à $\mathbb{K}$-álgebra $\mathrm{Hom}(F(X))$ e não a $F(X)$. Portanto $\tau_e \in \mathrm{Hom}(F(X))$.

Da mesma forma vamos definir

$$\tau_{e^*} : F(X) \longrightarrow F(X)$$

como sendo

$$\tau_e(\phi)(x) = \begin{cases} \phi \circ f_e(x), & \text{se } x \in D_{r(e)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para todo $\phi \in F(X)$. Note que τ_{e^*} está bem definido pois se $x \notin D_{r(e)}$, então $\tau_{e^*}(\phi)(x) = 0$. Caso $x \in D_{r(e)}$ então note que $f_e(x) \in R_e \subseteq X$ e como $\phi \in F(X)$, segue que $\tau_{e^*}(\phi)(x) = \phi(f_e(x))$.

Da mesma forma, utilizaremos o abuso de notação como acima, isto é, $\tau_{e^*}(\phi) = 1_{D_{r(e)}}.(\phi \circ f_e)$, para todo $\phi \in F(X)$. De maneira análoga obtemos que $\tau_{e^*} \in \mathrm{Hom}(F(X))$.

Para cada $v \in E^0$ defina

$$\rho_v : F(X) \longrightarrow F(X)$$

como sendo

$$\rho_v(\phi)(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{se } x \in D_v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para todo $\phi \in F(X)$.

Utilizaremos a notação $\rho_v(\phi) = 1_{D_v}.\phi$, para todo $\phi \in F(X)$ e claramente temos que $\rho_v \in \text{Hom}(F(X))$.

Definido os homomorfismos acima, os próximos resultados nos garantirão a existência de um sistema de ramificação E-algébrico X e de um homomorfismo de $L_{\mathbb{K}}(E)$ para $\text{Hom}(F(X))$.

Teorema 66. *Seja X um sistema de ramificação E-algébrico associado ao grafo E. Então existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras*

$$\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow Hom(F(X))$$

tal que $\varphi(e) = \tau_e$, $\varphi(e^*) = \tau_{e^*}$, $\forall e \in E^1$ e $\varphi(v) = \rho_v$, $\forall v \in E^0$.

Demonstração. Vamos mostrar que os conjuntos

$$\{\tau_e \mid e \in E^1\}, \{\tau_{e^*} \mid e \in E^1\} \text{ e } \{\rho_v \mid v \in E^0\}$$

em $\text{Hom}(F(X))$ satisfazem as relações 1 a 4 da definição 44.

Note primeiramente que dados $v, w \in E^0$ temos

$$\rho_v \circ \rho_w(\phi) = \rho_v(\rho_w(\phi)) = 1_{D_v}.\rho_w(\phi) = 1_{D_v}.1_{D_w}.\phi$$

Mas se $v \neq w$ então $D_v \cap D_w = \emptyset$. Se $v = w$ então $D_v \cap D_w = D_v$. Logo,

$$\rho_v \circ \rho_w(\phi) = \begin{cases} \rho_v(\phi), & \text{se } v = w \\ 0, & \text{se } v \neq w \end{cases}.$$

Portanto, ρ_v são idempotentes e ortogonais dois a dois. Agora vamos mostrar as demais relações.

1. Temos que mostrar que $\rho_{s(e)} \circ \tau_e = \tau_e = \tau_e \circ \rho_{r(e)}$.

   Para cada $\phi \in F(X)$ temos que

   $$\begin{aligned} \rho_{s(e)} \circ \tau_e(\phi) &= \rho_{s(e)}(\tau_e(\phi)) = 1_{D_{s(e)}}.\tau_e(\phi) \\ &= 1_{D_{s(e)}}.1_{R_e}.(\phi \circ f_e^{-1}). \end{aligned}$$

   Porém $R_e \subseteq D_{s(e)}$. Dessa forma, $1_{R_e}.1_{D_{s(e)}} = 1_{R_e}$ e portanto, segue que

   $$\rho_{s(e)} \circ \tau_e(\phi) = \tau_e(\phi).$$

Por outro lado, para cada $\phi \in F(X)$ temos que

$$\begin{aligned}\tau_e \circ \rho_{r(e)}(\phi) &= \tau_e(\rho_{r(e)}(\phi)) = 1_{R_e}.(\rho_{r(e)}(\phi) \circ f_e^{-1}) \\ &= 1_{R_e}.((1_{D_{r(e)}}.\phi) \circ f_e^{-1}).\end{aligned}$$

Mas como $f_e^{-1}(x) \in D_{r(e)}$, para todo $x \in R_e$, segue que

$$\tau_e \circ \rho_{r(e)}(\phi) = 1_{R_e}.(\phi \circ f_e^{-1}) = \tau_e(\phi).$$

Portanto, $\rho_{s(e)} \circ \tau_e = \tau_e = \tau_e \circ \rho_{r(e)}$.

2. Precisamos mostrar que $\rho_{r(e)} \circ \tau_{e^*} = \tau_{e^*} = \tau_{e^*} \circ \rho_{s(e)}$.
Para cada $\phi \in F(X)$ temos que

$$\begin{aligned}\tau_{e^*} \circ \rho_{s(e)}(\phi) &= \tau_{e^*}(\rho_{s(e)}(\phi)) = 1_{D_{r(e)}}.(\rho_{s(e)}(\phi) \circ f_e) \\ &= 1_{D_{r(e)}}.((1_{D_{s(e)}}.\phi) \circ f_e).\end{aligned}$$

Como $f_e(x) \in R_e$, para todo $x \in D_{r(e)}$, e $1_{D_{r(e)}}1_{D_{s(e)}} = 0$, segue que

$$\tau_{e^*} \circ \rho_{s(e)}(\phi) = 1_{D_{r(e)}}.(\phi \circ f_e) = \tau_{e^*}(\phi).$$

Por outro lado, para cada $\phi \in F(X)$ temos que

$$\begin{aligned}\rho_{r(e)} \circ \tau_{e^*}(\phi) &= \rho_{r(e)}(\tau_{e^*}(\phi)) = 1_{D_{r(e)}}.\tau_{e^*}(\phi) \\ &= 1_{D_{r(e)}}.1_{D_{r(e)}}.(\phi \circ f_e) = 1_{D_{r(e)}}.(\phi \circ f_e) = \tau_{e^*}(\phi).\end{aligned}$$

Logo, $\rho_{r(e)} \circ \tau_{e^*} = \tau_{e^*} = \tau_{e^*} \circ \rho_{s(e)}$.

3. Precisamos mostrar que $\tau_{e^*} \circ \tau_t = \begin{cases} \rho_{r(e)}, & \text{se } e = t \\ 0, & \text{se } e \neq t \end{cases}$.
De fato, se $e \neq t$ então para cada $\phi \in F(X)$ temos

$$\tau_{e^*} \circ \tau_t(\phi) = \tau_{e^*}(\tau_t(\phi)) = 1_{D_{r(e)}}.(\tau_t(\phi) \circ f_e).$$

Como $f_e(x) \in R_e$, para todo $x \in D_{r(e)}$, e $R_e \cap R_t = \emptyset$ então $\tau_t(\phi) \circ f_e = (1_{R_t}.(\phi \circ f_e^{-1})) \circ f_e = 0$ e portanto, $\tau_{e^*} \circ \tau_t = 0$.
Se $e = t$, então temos

$$\tau_{e^*} \circ \tau_e(\phi) = \tau_{e^*}(\tau_e(\phi)) = 1_{D_{r(e)}}.(\tau_e(\phi) \circ f_e).$$

Novamente, como $f_e(x) \in R_e$, para todo $x \in D_{r(e)}$, segue que

$$\begin{aligned}\tau_{e^*} \circ \tau_e(\phi) &= 1_{D_{r(e)}}.((1_{R_e}.(\phi \circ f_e^{-1})) \circ f_e) = 1_{D_{r(e)}}.(\phi \circ f_e^{-1} \circ f_e)\\ &= 1_{D_{r(e)}}.\phi = \rho_{r(e)}(\phi).\end{aligned}$$

Dessa forma, $\tau_{e^*} \circ \tau_e = \rho_{r(e)}$.

4. Vamos mostrar que dado $v \in E^0$ tal que $0 < \# s^{-1}(v) < \infty$ temos que

$$\rho_v = \sum_{\substack{e \in E^1\\ s(e)=v}} \tau_e \circ \tau_{e^*}.$$

Primeiramente note que para cada $\phi \in F(X)$ temos que

$$\tau_e \circ \tau_{e^*}(\phi) = \tau_e(\tau_{e^*}(\phi)) = 1_{R_e}.(\tau_{e^*}(\phi) \circ f_e^{-1}).$$

Como $f_e^{-1}(x) \in D_{r(e)}$, para todo $x \in R_e$, segue que

$$\begin{aligned}\tau_e \circ \tau_{e^*}(\phi) &= 1_{R_e}.((1_{D_r(e)}.(\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1})\\ &= 1_{R_e}.(\phi \circ f_e \circ f_e^{-1}) = 1_{R_e}.\phi.\end{aligned}$$

Agora, por definição temos que $D_v = \bigcup_{\substack{e \in E^1\\ s(e)=v}} R_e$. Isso implica diretamente que

$$1_{D_v} = \sum_{\substack{e \in E^1\\ s(e)=v}} 1_{R_e},$$

pois neste caso a união é disjunta.

Portanto podemos concluir que para cada $\phi \in F(X)$,

$$\rho(\phi) = 1_{D_v}.\phi = \left(\sum_{\substack{e \in E^1\\ s(e)=v}} 1_{R_e}\right)\phi = \sum_{\substack{e \in E^1\\ s(e)=v}} 1_{R_e}\phi = \sum_{\substack{e \in E^1\\ s(e)=v}} \tau_e \circ \tau_{e^*}(\phi).$$

Portanto pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$ temos que existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \text{Hom}(F(X))$ tal que $\varphi(e) = \tau_e$, $\varphi(e^*) = \tau_{e^*}$, $\forall e \in E^1$ e $\varphi(v) = \rho_v$, $\forall v \in E^0$.

$\blacksquare$

Teorema 67. *Seja E um grafo. Então existe um sistema de ramificação E-algébrico X associado ao grafo E, em que X é um intervalo possivelmente ilimitado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Enumere E^1 como $E^1 = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (se E^1 for finito então escreva $E^1 = \{e_1, \dots, e_n\}$). Para cada $i \geq 1$, considere o intervalo $R_{e_i} = [i-1, i) \subseteq \mathbb{R}$.

Enumere E^0 como $E^0 = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e seja V o conjunto de todos os vértices que são poço, ou seja, $V = \{v_i \in E^0 \mid v_i \text{ é poço}\}$. Então para cada $v_i \in V$, $i \geq 1$, defina o intervalo $D_{v_i} = [-i, -i+1) \subseteq \mathbb{R}$. Por outro lado, para cada $v \in E^0$ tal que v não é poço, defina

$$D_v = \dot{\bigcup_{\substack{e_i \in E^1 \\ s(e_i) = v}}} R_{e_i}.$$

Desse modo, basta mostrar que as condições (i) a (v) da definição 64 são válidas. De fato,

(i) Para $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ temos

$$R_{e_i} \cap R_{e_j} = [i-1, i) \cap [j-1, j) = \emptyset.$$

(ii) Sejam $v_i, v_j \in E^0$ com $i \neq j$. Se v_i, v_j são poços então note que

$$D_{v_i} \cap D_{v_j} = [-i, -i+1) \cap [-j, -j+1) = \emptyset.$$

Se v_i é poço e v_j não, então

$$D_{v_i} \cap D_{v_j} = [-i, -i+1) \cap \left(\dot{\bigcup_{\substack{e_l \in E^1 \\ s(e_l) = v_j}}} R_{e_l} \right) =$$

$$= \dot{\bigcup_{\substack{e_l \in E^1 \\ s(e_l) = v_j}}} [-i, -i+1) \cap R_{e_l} = \emptyset.$$

Se v_i, v_j não são poços, então $D_{v_i} \cap D_{v_j} = \emptyset$ pois $R_{e_l} \cap R_{e_k} = \emptyset$, para $l \neq k$.

(iii) Para todo $e \in E^1$, como $s(e)$ não é poço, então

$$R_e \subseteq \dot{\bigcup_{\substack{t\in E^1 \\ s(t)=s(e)}}} R_t = D_{s(e)}.$$

(iv) Para todo $v \in E^0$ de forma que $0 < \#\{e \in E^1 \mid s(e) = v\} < \infty$ então por definição

$$D_v = \dot{\bigcup_{\substack{e\in E^1 \\ s(e)=v}}} R_e.$$

Para mostrar a condição (v) precisamos primeiramente definir as bijeções.

Seja $e_j \in E^1$. Se $r(e_j)$ é poço então certamente $r(e_j) = v_i \in V$, para algum $i \in \mathbb{N}$ e logo, $D_{r(e_j)} = [-i, -i+1)$. Defina $f_{e_j} : D_{r(e_j)} \longrightarrow R_{e_j}$ como sendo qualquer bijeção linear entre esses dois intervalos (por exemplo, podemos definir $f_{e_j}(x) = x + (j + i - 1)$, $\forall x \in D_{r(e_j)}$).

Por outro lado, se $r(e_j)$ não é poço então por definição temos

$$D_{r(e)} = \dot{\bigcup_{\substack{t_{i_k}\in E^1 \\ s(t_{i_k})=r(e)}}} R_{t_{i_k}}.$$

Para definir a bijeção neste caso, precisamos dividir o intervalo $R_{e_j} = [j-1, j)$ em intervalos menores. Suponha inicialmente que $\#\{t_{i_k} \in E^1 \mid s(t_{i_k}) = r(e_j)\}$ é finito. Desta forma vamos particionar o intervalo R_{e_j} da seguinte maneira:

$x_0 = j - 1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = j$ em que n é da forma $n = \#\{t_{i_k} \in E^1 \mid s(t_{i_k}) = r(e_j)\}$. Assim,

$$R_{e_j} = [j-1, j) = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} \underbrace{[x_{k-1}, x_k)}_{I_k}.$$

Defina $f_{e_j} : D_{r(e_j)} \longrightarrow R_{e_j}$ tal que $f_{e_j}|_{R_{t_{i_k}}}$ seja qualquer bijeção linear entre $R_{t_{i_k}}$ e I_k, para todo k.

Por outro lado, se $\#\{t_{i_k} \in E^1 \mid s(t_{i_k}) = r(e_j)\}$ é infinito então considere (x_n) uma sequência estritamente crescente com $x_0 = j-1$ de modo que $x_n \to j$. Dessa maneira temos que

$$R_{e_j} = [j-1, j) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{[x_{k-1}, x_k)}_{I_k}.$$

Da mesma maneira do caso anterior, defina $f_{e_j} : D_{r(e_j)} \longrightarrow R_{e_j}$ tal que $f_{e_j}|_{R_{t_{i_k}}}$ seja qualquer bijeção linear entre $R_{t_{i_k}}$ e I_k, para todo k.

Por fim, defina o conjunto

$$X = \left(\dot{\bigcup_{e\in E^1}} R_e\right) \bigcup \left(\dot{\bigcup_{v\in V}} D_v\right).$$

Portanto obtemos $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ um sistema de ramificação E-algébrico associado ao grafo E.

■

Com estes resultados podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 68. *Seja E um grafo. Então existe X um sistema de ramificação E-algébrico associado a grafo E e um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow Hom(F(X))$ tal que $\varphi(e) = \tau_e$, $\varphi(e^*) = \tau_{e^*}$, $\forall e \in E^1$ e $\varphi(v) = \rho_v$, $\forall v \in E^0$.*

Demonstração. Segue dos teoremas 66 e 67.

■

Teorema 69. *Seja E um grafo que não satisfaz a condição (L). Então existe X um sistema de ramificação E-algébrico associado ao grafo E e um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow Hom(F(X))$ tal que $\varphi(v) \neq 0$, $\forall v \in E^0$ porém φ não é injetora.*

Demonstração. Seja E um grafo que não satisfaz a condição (L). Então existe $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ caminho fechado o qual não tem saída. Pelo teorema 66 existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X))$ em que X é o sistema de ramificação E-algébrico construído no teorema 67. A ideia central da prova é modificar um pouco o sistema de ramificação X. Mais especificamente, vamos modificar as bijeções $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}$.

Note que por construção, $D_v \neq \emptyset$ para todo $v \in E^0$. Logo, $\varphi(v) = \rho_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$.

Para cada i, temos as bijeções $f_{\alpha_i} : D_{r(\alpha_i)} \longrightarrow R_{\alpha_i}$ e assim, para o caminho fechado α, podemos definir $f_\alpha : D_{r(\alpha)} \longrightarrow R_{\alpha_1}$ como sendo $f_\alpha = f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_n}$, já que $R_{\alpha_1} \subseteq D_{s(\alpha_1)} = D_{s(\alpha)} = D_{r(\alpha)}$.

Perceba que f_α está bem definido pois $f_{\alpha_i} : D_{r(\alpha_i)} \longrightarrow R_{\alpha_i}$ notamos que $R_{\alpha_i} \subseteq D_{s(\alpha_i)} = D_{r(\alpha_{i-1})}$ e dessa maneira, obtemos $\mathrm{Im}(f_{\alpha_i}) \subseteq$

$D_{r(\alpha_{i-1})} = \mathrm{Dom}(f_{\alpha_{i-1}})$ (se α fosse apenas um caminho, então f_α não seria bijeção). Como α é um caminho fechado sem saída então $R_{\alpha_i} = D_{s(\alpha_i)} = D_{r(\alpha_{i-1})}$. Para nossos propósitos, precisamos que f_α seja a identidade, e para tanto o que vamos fazer é escolher bijeções f_{α_i} adequadas. Desse forma, escolha f_{α_n} como sendo a inversa de $f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_{n-1}}$, de forma que f_α seja a identidade.

Agora, note que $1_\alpha \delta_\alpha$ é diferente de $1_{s(\alpha)}\delta_{s(\alpha)}$ em $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Pelo teorema 57 segue que $\alpha \neq s(\alpha)$ em $L_{\mathbb{K}}(E)$. Como f_α é identidade, então para cada $\phi \in F(X)$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha)(\phi) &= \varphi(\alpha_1 \ldots \alpha_n)(\phi) = \varphi(\alpha_1) \circ \ldots \circ \varphi(\alpha_n)(\phi) = \\
&= \tau_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \tau_{\alpha_n}(\phi) = 1_{R_{\alpha_1}}.(\tau_{\alpha_2} \circ \ldots \circ \tau_{\alpha_n}(\phi)) \circ f_{\alpha_1}^{-1} = \\
&= 1_{R_{\alpha_1}}.[1_{R_{\alpha_2}}.(\tau_{\alpha_3} \circ \ldots \circ \tau_{\alpha_n}(\phi)) \circ f_{\alpha_2}^{-1}] \circ f_{\alpha_1}^{-1} = \\
&= 1_{R_{\alpha_1}}.(\tau_{\alpha_3} \circ \ldots \circ \tau_{\alpha_n}(\phi)) \circ f_{\alpha_2}^{-1} \circ f_{\alpha_1}^{-1} = \ldots = \\
&= 1_{R_{\alpha_1}}.\phi \circ f_{\alpha_n}^{-1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_1}^{-1} = 1_{D_{s(\alpha)}}.\phi \circ f_{\alpha}^{-1} = \\
&= 1_{D_{s(\alpha)}}.\phi = \rho_{s(\alpha)}(\phi) = \varphi(s(\alpha))(\phi).
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(\alpha) = \varphi(s(\alpha))$ e logo, φ não é injetora.

■

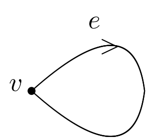
Diante dos resultados obtidos até aqui podemos formular o seguinte corolário.

Corolário 70. *Seja E um grafo. Então o grafo E satisfaz a condição (L) se, e somente se, para cada $\mathbb{K}$-álgebra A e cada $\mathbb{K}$-homomorfismo $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$ com $\pi(v) \neq 0$, $\forall v \in E^0$, π é injetor.*

Demonstração. Segue imediatamente dos teoremas 61 e 69.

■

Exemplo 71. Demonstramos na proposição 59 que se um grafo E satisfaz a condição (L) então todo ideal I não nulo de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ tem a propriedade de que $I \cap D_0\delta_0 \neq \{0\}$. No exemplo abaixo apresentamos um exemplo de um grafo que não tem a condição (L) e que também não satisfaz a propriedade de intersecção dos ideais. Seja o grafo E do exemplo 40 da seguinte maneira:



.

Vamos mostrar que existe um ideal I não nulo de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ de modo que $I \cap D_0\delta_0 = \{0\}$.

De fato, este grafo não satisfaz a condição (L) então pelo corolário 70 existe um homomorfismo não injetor $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$ tal que $\pi(v) \neq 0$, $\forall v \in E^0$. Considere $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ o isomorfismo visto no capítulo 5. Seja $I = \varphi(\ker(\pi))$ o ideal em $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Note que o ideal I é próprio.

Suponha que $I \cap D_0\delta_0 \neq \{0\}$ e note que $D_0 \cong \mathbb{K}$. Então existe $k\delta_0 \in I$ para algum $k \in \mathbb{K}$.

Portanto $1\delta_0 = (k^{-1}\delta_0).(k\delta_0) \in I$. Porém $1\delta_0$ é a unidade em $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Desse modo, poderíamos concluir que $I = D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ o que é absurdo. Logo, $I \cap D_0\delta_0 = \{0\}$.

8 CONCLUSÃO

Estudamos a teoria de ações parciais de grupo e uma grande parte da teoria de Álgebras de Leavitt e sua conexão com produto cruzado parcial o qual vem proporcionado um grande número de produções científicas importantes no campo da matemática. Nosso objetivo neste trabalho foi demonstrar o Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger sobre as Álgebras de Leavitt via produto cruzado parcial, o qual é um ponto de vista bem diferente do tradicional.

Para o bom andamento do trabalho, foram utilizados vários artigos como referência, principalmente o artigo (GONÇALVES; ROYER, 2014), crucial no desenvolvimento.

A maior dificuldade do trabalho foi estabelecer uma forma clara de redigir os detalhes dos resultados. Contudo, o trabalho contribuiu de forma significativa na aprendizagem do elaborador e, espera-se que este trabalho contribua de alguma forma ao leitor e colabore com a produção científica no campo da matemática, do qual tenho tanto orgulho de fazer parte.

APÊNDICE A – Produto Cruzado Parcial

Neste apêndice faremos a construção algébrica do produto cruzado parcial.

Fixe um corpo $\mathbb{K}$ e seja $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra A.

Denote por V o espaço vetorial de todas as funções de G em A que tem suporte finito, isto é,

$$V := \{f : G \longrightarrow A \mid f(g) \neq 0 \text{ apenas para finitos } g \in G\}.$$

Defina $V_\alpha := \{f \in V | f(g) \in D_g, \ \forall g \in G\}$. Claramente V_α é um subespaço vetorial de V.

Para qualquer $g \in G$ e $a_g \in D_g$, denote por $a_g\delta_g$ a função pertencente a V_α dada por:

$$a_g\delta_g(h) = \begin{cases} a_g, & \text{se } h = g \\ 0, & \text{se } h \neq g \end{cases}.$$

Assim, é fácil ver que toda função $f \in V_\alpha$ é escrita de maneira única sob a forma $f = \sum\limits_{g\in G}^{\text{finita}} a_g\delta_g$, em que $a_g = f(g) \neq 0$, para todo $g \in G$.

Observação 72.

(1) $\sum\limits_{g\in G}^{\text{finita}} a_g\delta_g = 0 \Leftrightarrow a_g = 0, \forall g \in G$.

(2) Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{g\in G}^{\text{finita}} a_g\delta_g + \lambda \sum_{g\in G}^{\text{finita}} b_g\delta_g = \sum_{g\in G}^{\text{finita}} (a_g + \lambda b_g)\delta_g.$$

(3) $\{a_g\delta_g | g \in G \text{ e } a_g \in D_g\}$ gera $A \rtimes_\alpha G$.

Além disso podemos dar a V_α uma estrutura de álgebra. A soma e o produto por escalar serão dados como na observação (2). Para o produto, adotamos a seguinte operação:

$$(a_g\delta_g)(a_h\delta_h) = \alpha_g(\underbrace{\underbrace{\alpha_{g^{-1}}(a_g)}_{\in D_{g^{-1}}} \underbrace{a_h}_{\in D_h}}_{\in (D_{g^{-1}} \cap D_h)})\delta_{gh},$$

estendendo por distributividade para todo $\boldsymbol{V_\alpha}$.

Definição 73. *O produto cruzado parcial algébrico de* $\boldsymbol{A}$ *por* $\boldsymbol{G}$ *através de* $\boldsymbol{\alpha}$*, denotado por* $\boldsymbol{A \rtimes_\alpha G}$*, é a álgebra* $\boldsymbol{V_\alpha}$ *definido acima. Em outras palavras,*

$$\boldsymbol{A \rtimes_\alpha G = \left\{ \sum_{g \in G}^{\mathit{finita}} a_g \delta_g \;\middle|\; a_g \in D_g \right\}.}$$

Poderíamos nos perguntar se o produto cruzado parcial é associativo ou não. Em geral, não é associativo. Mas existe um resultado que nos garante que: se $\boldsymbol{\alpha}$ é ação parcial de um grupo $\boldsymbol{G}$ sobre uma $\boldsymbol{C^*}$-álgebra $\boldsymbol{A}$, então $\boldsymbol{A \rtimes_\alpha G}$ é associativo. Mais detalhes sobre este e outros resultados, o leitor pode encontrar em (BOAVA, 2007) e (DOKUCHAEV; EXEL, 2005).

APÊNDICE B – $\mathbb{Z}$-graduação

Neste apêndice faremos uma introdução no estudo de anéis $\mathbb{Z}$-graduados e mostraremos que tanto a Álgebra de caminhos de Leavitt quanto $D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ são $\mathbb{Z}$-graduados.

Definição 74. *Seja R um anel. Dizemos que R é $\mathbb{Z}$-graduado se existir uma coleção de subgrupos aditivos $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de R tal que*

i) $R = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$;

ii) $R_m R_n \subseteq R_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Observação 75. O significado de graduação definido acima nos garante que podemos representar um anel R como soma direta de outras estruturas "menores" em que satisfazem a propriedade (ii).

Definição 76. *Seja R e S anéis $\mathbb{Z}$-graduados e $\phi : R \longrightarrow S$ homomorfismo de anéis. Dizemos que $\phi : R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de anéis graduados se $\phi(R_n) \subseteq S_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 77. *$L_{\mathbb{K}}(E)$ é $\mathbb{Z}$-graduado.*

Demonstração. Defina a graduação de $L_{\mathbb{K}}(E)$ como sendo

$$(L_{\mathbb{K}}(E))_n = \mathrm{span}\{\alpha\beta^* \mid \alpha, \beta \in W \cup \{0\}, |\alpha| - |\beta| = n\}.$$

Note que $(L_{\mathbb{K}}(E))_n$ é subgrupo aditivo de $L_{\mathbb{K}}(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $\alpha, \beta \in W \cup \{0\}$ com $|\alpha| - |\beta| = n$ independe de representação.

Afirmação 1: $(L_{\mathbb{K}}(E))_m.(L_{\mathbb{K}}(E))_n \subseteq (L_{\mathbb{K}}(E))_{m+n}$.

De fato, note que para $\alpha\beta^*$ com $|\alpha| - |\beta| = m$ e $\gamma\delta^*$ com $|\gamma| - |\delta| = n$ temos que pelo lema 49 temos que

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\gamma'\delta^*, & \text{se } \gamma = \beta\gamma' \text{ para algum } \gamma' \\ \alpha\delta^*, & \text{se } \gamma = \beta \\ \alpha\beta'^*\delta^*, & \text{se } \beta = \gamma\beta' \text{ para algum } \beta' \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Note que em todos os casos temos que $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*)$ se torna algo do tipo $\sigma\varsigma^*$ com $|\sigma| - |\varsigma| = n + m$. Por exemplo, se $\gamma = \beta\gamma'$ para algum γ' então $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \alpha\gamma'\delta^*$. Como $\gamma = \beta\gamma'$ então $|\gamma'| = |\gamma| - |\beta|$ e portanto temos que $|(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*)| = |\alpha\gamma'\delta^*| = |\alpha| + |\gamma'| - |\delta| = |\alpha| + |\gamma| - |\beta| - |\delta| = (|\alpha| - |\beta|) + (|\gamma| - |\delta|) = m + n$. Assim, por linearidade segue o desejado.

Afirmação 2: $L_{\mathbb{K}}(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (L_{\mathbb{K}}(E))_n$.

Note que dado $x \in L_{\mathbb{K}}(E)$ qualquer, x pode ser escrito da seguinte maneira

$$x = \sum_{k} \lambda_k \alpha_k \beta_k^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{k \\ |\alpha_k| - |\beta_k| = n}} \lambda_k \alpha_k \beta_k^*.$$

Para mostrar que de fato essa soma é direta precisamos de alguns resultados auxiliares.

Para começar considere o conjunto

$$S = \{s^{-1}(v) \mid 0 < \# s^{-1}(v) < \infty\}.$$

Para cada $A \in S$, fixe $e_A \in A$.

Então aplicando o Teorema 2.7 do artigo (ARA; GOODEARL, 2012) para o caso trivial em que o grafo separado é o grafo E e portanto $CL_{\mathbb{K}}(E, C) = L_{\mathbb{K}}(E)$ temos que o conjunto

$$B = \{\alpha\beta^* \mid (\alpha_{|\alpha|}, \beta_{|\beta|}) \neq (e_A, e_A), \forall A \in S\} \cup E^0$$

é uma base para $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Observe que dado $\alpha\beta^* \in (L_{\mathbb{K}}(E))_n$ então $\alpha\beta^* = \sum \lambda_i b_i$ com $b_i \in B \cap (L_{\mathbb{K}}(E))_n$.

De fato, se $(\alpha_{|\alpha|}, \beta_{|\beta|}) \neq (e_A, e_A), \forall A \in S$ então é imediato. Se $(\alpha_{|\alpha|}, \beta_{|\beta|}) = (e_A, e_A)$, para algum $A \in S$ então

$$\alpha\beta^* = \alpha_1 \dots \alpha_{|\alpha|-1} e_A e_A^* \beta_{|\alpha|-n-1}^* \dots \beta_1^*.$$

Note que podemos escrever

$$e_A e_A^* = v - \sum_{\substack{e \in A \\ e \neq e_A}} e e^*.$$

Desse modo, $\alpha\beta^*$ pode ser reescrito como uma soma, substituindo $e_A e_A^*$ pelo somatório acima. Note que ao adicionar essas novas parcelas, o comprimento de $\alpha\beta^*$ permanece o mesmo. Repetindo o processo em cada uma destas parcelas, se necessário, conseguimos garantir que $\alpha\beta^* \in B$.

Assim por linearidade segue que para qualquer $a_n \in (L_{\mathbb{K}}(E))_n$, podemos escrever $a_n = \sum_{i} \lambda_i b_i$ com $b_i \in B \cap (L_{\mathbb{K}}(E))_n$.

Com essas informações então podemos provar de fato que a soma em questão é direta.

Dado $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n = 0$ com $a_n \in (L_{\mathbb{K}}(E))_n$ precisamos mostrar que $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Mas para cada $a_n \in (L_{\mathbb{K}}(E))_n$, podemos escrever $a_n = \sum\limits_i \lambda_i^{(n)} b_i^{(n)}$ com $b_i^{(n)} \in B \cap (L_{\mathbb{K}}(E))_n$. Assim,

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_i \lambda_i^{(n)} b_i^{(n)}.$$

Note que $b_i^{(n)} \in B$ são dois a dois distintos pois $|b_i^{(n)}| \neq |b_j^{(m)}|$, para $n \neq m$. Isso implica que $\lambda_i^{(n)} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo i. Portanto $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e segue o desejado.

■

Proposição 78. *$D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ é $\mathbb{Z}$-graduado.*

Demonstração. Defina a graduação de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ como sendo

$$A_z = \{\sum_p a_p\delta_p \mid \ a_p \in D_p \text{ e } |p| = z\} \subseteq D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}.$$

Note que A_z é subgrupo aditivo de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ e para cada $p \in \mathbb{F}$, definimos $|p| = m - n$ em que m é o número de geradores (elementos de E^1) de p, e n é o número de inversos dos geradores de p.

Afirmação 1: $A_z A_w \subseteq A_{z+w}$.

De fato, dados $x \in A_z$ e $y \in A_w$ da forma

$$x = \sum_{|p|=z} a_p\delta_p \text{ e } y = \sum_{|q|=w} a_q\delta_q.$$

Note primeiramente que

$$(a_p\delta_p)(a_q\delta_q) = \underbrace{\overbrace{\alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(a_p)a_q)}^{a_p a_{pq}}}_{\in D_{pq}}\delta_{pq} \in D_{pq}\delta_{pq}.$$

Desse modo

$$x.y = \left(\sum_{|p|=z} a_p\delta_p\right)\left(\sum_{|q|=w} a_q\delta_q\right) = \sum_{|p|=z}\sum_{|q|=w} a_{pq}\delta_{pq}.$$

Mas $|pq| = |p| + |q| = z + w$ e logo, $x.y \in A_{z+w}$.

Afirmação 2: $\boldsymbol{D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F} = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} A_z}$.

De fato, dado $\boldsymbol{x \in D(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}}$, podemos escrever $\boldsymbol{x}$ da forma

$$\boldsymbol{x = \sum_{p\in\mathbb{F}} a_p\delta_p = \sum_{z\in\mathbb{Z}} \sum_{|p|=z} a_p\delta_p.}$$

Agora note que para $\boldsymbol{p \neq q}$, $\boldsymbol{D_p\delta_p \cap D_q\delta_q = \{0\}}$ pois

$$\boldsymbol{a_p\delta_p(h) = \begin{cases} a_p, & \text{se } p = h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}}$$

e

$$\boldsymbol{a_q\delta_q(h) = \begin{cases} a_q, & \text{se } q = h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}}.$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sum_{p\in\mathbb{F}} a_p\delta_p} &\boldsymbol{= \sum_{z\in\mathbb{Z}} \sum_{|p|=z} a_p\delta_p = 0 \Rightarrow} \\ &\boldsymbol{\Rightarrow \sum_{p\in\mathbb{F}} a_p\delta_p(g) = \sum_{z\in\mathbb{Z}} \sum_{|p|=z} a_p\delta_p(g) = 0 \Rightarrow} \\ &\boldsymbol{\Rightarrow a_g = 0, \text{ para todo } g \in \mathbb{F}.} \end{aligned}$$

■

Teorema 79 (Teorema de Unicidade $\mathbb{Z}$-graduação). *Sejam $\boldsymbol{E}$ um grafo e $\boldsymbol{L_{\mathbb{K}}(E)}$ a Álgebra de Leavitt associada a $\boldsymbol{E}$ com a $\mathbb{Z}$-graduação usual. Se $\boldsymbol{A}$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado e $\boldsymbol{\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A}$ é um homomorfismo $\mathbb{Z}$-graduado com $\boldsymbol{\pi(v) \neq 0}$, $\boldsymbol{\forall v \in E^0}$, então $\boldsymbol{\pi}$ é injetiva.*

Demonstração. Ver teorema 4.8 do artigo (TOMFORDE, 2007).

■

REFERÊNCIAS

ABRAMS, G.; ARANDA-PINO, G. *The Leavitt path algebra of a graph.* [S.l.]: Journal Algebra, 293(2); 319-334, 2005.

ABRAMS, G.; ARANDA-PINO, G. *The Leavitt path algebras of arbitrary graphs.* [S.l.]: Houston J. Math, 34(2); 423-442, 2008.

ARA, P.; GOODEARL, K. R. *Leavitt Path Algebras of Separated Graphs.* [S.l.]: Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 2012(669); 165-224, 2012.

BOAVA, G. *Caracterizações da C*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais.* Dissertação (Mestrado) — UFSC, 2007.

DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. *Associativity of Crossed Products by Partial Actions, Enveloping Actions and Partial Representations.* [S.l.]: Transactions of the American Mathematical Society, 357(5); 1931 - 1952, 2005.

GONÇALVES, D.; LI, H.; ROYER, D. *Faithful representations of graph algebras via branching systems.* [S.l.]: arXiv preprint arXiv:1412.3558, 2014.

GONÇALVES, D.; OINERT, J.; ROYER, D. *Simplicity of partial skew group rings with applications to Leavitt path algebras and topological dynamics.* [S.l.]: Journal of Algebra, 420; 201 - 216, 2014.

GONÇALVES, D.; ROYER, D. *On the representations of Leavitt path algebras.* [S.l.]: arXiv preprint arXiv:1006.2797, 2010.

GONÇALVES, D.; ROYER, D. *Leavitt Path Algebras as Partial Skew Group Rings.* [S.l.]: Communications in Algebra, 42(8); 3578-3592, 2014.

TOMFORDE, M. *Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras.* [S.l.]: Journal of Algebra, 318(1); 270 - 299, 2007.