Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise-2021/02

Bloco 2

1. Seja $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$. Defina o operador $T\colon L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ por
$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$
   a) Mostre que T está bem-definido e que é linear e contínuo.
   b) Determine a adjunta $T^*\colon L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ de T.
   c) Suponha que $K(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \le y \\ 0, & \text{se } x > y \end{cases}$. Mostre que se $g \in C[0,1]$, então T^*g é diferenciável e que $(T^*g)' = g$.

2. Responda cada item abaixo:

   a) Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável: $\Omega \neq \emptyset$ é um conjunto e Σ é uma σ-álgebra em Ω. Considere $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ uma medida e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Σ-mensuráveis satisfazendo
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n|\, d\mu < \infty.$$
   Mostre que existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ em $L^1(\Omega,\mu)$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$ para μ-quase todo $x \in \Omega$, e que
$$\int_\Omega f\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

   b) Seja $\Omega = \mathbb{R}$, Σ a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}$ e λ a medida de Lebesgue em Σ. Considere $A \in \Sigma$ com $\lambda(A) < \infty$ e $f : A \to [-\infty, +\infty]$, sendo f finita em quase toda parte de A. Mostre que, dado $\epsilon > 0$, existe $B \in \Sigma$ tal que $B \subseteq A$, $\lambda(A \backslash B) < \epsilon$ e de forma que f é limitada quando restrita a B.