Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise-2021/02

Bloco 1

1. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A, B \subset X$ conjuntos não vazios. Defina a *distância entre A e B* como sendo

$$D(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Classifique as afirmações seguintes em Verdadeiras ou Falsas. Se for verdadeira, prove-a, e se for falsa, apresente um contra-exemplo.

a) Se A e B são fechados, então

$$D(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

b) Se A é fechado, B é compacto e $A \cap B \neq \emptyset$, então $D(A, B) > 0$.

c) Suponha que X é um espaço vetorial normado. Se $A = \{x\}$ é um conjunto unitário e B é um conjunto convexo, então existe *no máximo* um elemento $y \in B$ tal que

$$||x - y|| = D(A, B).$$

2. Responda cada item abaixo, sendo (Ω, Σ) um espaço mensurável: $\Omega \neq \emptyset$ é um conjunto e Σ é uma σ-álgebra em Ω. Para evitar trivialidades, você pode admitir que, para cada medida μ dada nos itens abaixo, existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) \neq 0$.

a) Seja $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ uma medida e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$. Suponha que existe um subconjunto fechado S do plano complexo tal que as médias

$$\overline{f}_A := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu$$

pertencem a S, para todo $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) > 0$. Mostre que $f(x) \in S$, para μ-quase todo $x \in \Omega$.

b) Seja μ uma medida complexa em Σ e $|\mu|$ a variação total de μ. Mostre que existe uma função Σ-mensurável $h : \Omega \to \mathbb{C}$ satisfazendo $|h(x)| = 1$, para todo $x \in \Omega$, e tal que $d\mu = h\, d|\mu|$.

c) Enuncie e demonstre o teorema da decomposição de Hahn para uma medida $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$.