Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Uma classificação de fibrados de Fell estáveis

Camila Fabre Sehnem
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Fevereiro de 2014

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Uma classificação de fibrados de Fell estáveis

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Camila Fabre Sehnem
Florianópolis
Fevereiro de 2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sehnem, Camila Fabre
Uma classificação de fibrados de Fell estáveis / Camila Fabre Sehnem ; orientador, Ruy Exel Filho - Florianópolis, SC, 2014.
137 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Fibrados de Fell. 3. Ações parciais de grupos. 4. Produtos smash. I. Filho, Ruy Exel. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Uma classificação de fibrados de Fell estáveis

Camila Fabre Sehnem[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Michael Dokuchaev
(Universidade de São Paulo - USP)

Prof. Alcides Buss
(Universidade Federal de Santa Catarina -UFSC)

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Prof. Dr. Giuliano Boava
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2014.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais pelo amor, carinho e apoio recebidos em todos os momentos. Agradeço infinitamente por tê-los ao meu lado, pela confiança que vocês têm em mim, por não medirem esforços para ver seus filhos felizes. Vê-los felizes e orgulhosos é minha maior motivação para lutar por meus objetivos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Ruy Exel Filho, por ter aceito orientar-me durante o mestrado e pela sugestão do tema para esta dissertação. Além de tudo o que aprendi, o prazer que tive em estudar cada teoria para alcançar o objetivo principal fortaleceu muito o meu desejo de continuar a carreira acadêmica e ingressar em um programa de doutorado. Agradeço também pela disposição e prontidão para resolver minhas dúvidas e discutir o trabalho e por ter compartilhado comigo um pouco de seus conhecimentos matemáticos. Aprendi muito nesses dois anos de mestrado com o matemático e profissional admirável que você é.

Agradeço aos professores Alcides Buss, Daniel Gonçalves, Giuliano Boava e Michael Dokuchaev por todas as correções, sugestões e por terem dedicado um período de seus tempos para a leitura deste trabalho. Agradeço ao professor Alcides Buss por ter dado ideias de exemplos e resultados para acrescentar no trabalho final, e pelos comentários e sugestões que me fizeram aprender mais ainda. Agradeço ao professor Giuliano Boava por não deixar passar despercebido nem uma vírgula fora da margem. Obrigada pela atenção impressionante que também teve com a parte estética do trabalho.

Agradeço aos meus amigos e colegas de matemática, Sara Pinter, Deividi Ricardo Pansera, Gustavo Felisberto Valente, Soyara Biazotto e Maíra Gauer, pelos cafés, risadas, almoços, conselhos e amizade.

Agradeço a todos os meus amigos, incluindo os já citados, por cada momento de distração, pelo apoio em todas as horas e por torcerem por mim sempre. É muito bom saber que tenho amigos de verdade, com os quais posso contar em todos os momentos, e que tornam minha vida muito mais alegre e especial.

Agradeço às minhas queridas amigas e colegas de casa, Ana Lúcia Danielewicz e Carla Danielewicz, por me deixarem praticamente tomar posse da mesa da sala para os estudos desta dissertação.

Agradeço à Elisa, secretária da pós, por sua competência e prontidão para resolver todas as questões burocráticas necessárias.

Por último, mas não menos importante, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos fornecida, sem a qual não seria possível escrever esta dissertação.

Resumo

Dada uma C^*-álgebra graduada B por um grupo discreto G, definimos a C^*-álgebra produto smash como uma certa subálgebra de $B \otimes K(l^2(G))$.

Usamos a C^*-álgebra produto smash para mostrar que, dado qualquer fibrado de Fell estável sobre um grupo enumerável tal que a álgebra da fibra unidade é separável, existe uma ação parcial do grupo base na álgebra da fibra unidade cujo fibrado de Fell associado é isomorfo ao fibrado inicial.

Abstract

Given a graded C^*-algebra B by a discrete group G, we define the smash product C^*-algebra $B\#C^*(G)$ as a certain subalgebra of $B \otimes K(l^2(G))$.

We use the smash product C^*-algebra to show that given any stable Fell bundle over a countable group such that the unit fiber algebra is separable, there is a partial action of the base group on the unit fiber algebra whose associated Fell bundle is isomorphic to the given one.

Índice

Introdução

Muito embora a teoria de fibrados C^*-algébricos, atualmente mais conhecidos como fibrados de Fell, seja desenvolvida no contexto mais geral de grupos localmente compactos (veja [14, 15]), esta teoria está estreitamente relacionada com a de C^*-álgebras graduadas quando lidamos com grupos discretos. Uma C^*-álgebra B é dita ser graduada por um grupo G se $B = \overline{\oplus}_{g\in G} B_g$, em que, para cada g, B_g é um subespaço fechado de B, $B_g^* = B_{g^{-1}}$, e $B_g B_h \subseteq B_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Em termos gerais, um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ sobre um grupo discreto G é uma coleção de espaços de Banach $\{B_t\}_{t\in G}$ com operações de multiplicação

$$\cdot \, : \, B_t \times B_s \to B_{ts}$$

e involução

$$* \, : \, B_t \to B_{t^{-1}}$$

satisfazendo as propriedades que seriam satisfeitas se a coleção de subespaços $\{B_t\}_{t\in G}$ fosse, de fato, uma graduação para alguma C^*-álgebra.

Um fibrado de Fell dá origem a C^*-álgebras graduadas pela coleção de subespaços $\{B_t\}_{t\in G}$ um tanto especiais, a saber as C^*-álgebras seccionais cheia e reduzida. A primeira delas possui uma propriedade universal e é definida de forma mais abstrata, como a C^*-álgebra envolvente de uma certa $*$-álgebra, que é obtida naturalmente a partir do fibrado de Fell. Já a última é definida a partir de uma representação concreta desta $*$-álgebra e, de certa forma, é a "menor" C^*-álgebra graduada pela coleção de subespaços $\{B_t\}_{t\in G}$ (veja [10]). Isto nos leva ao fato que uma C^*-álgebra graduada pode não ser necessariamente a C^*-álgebra seccional cheia ou reduzida do seu fibrado de Fell associado (veja Exemplo 5.1.4). Entretanto, podemos vê-la como o completamento da $*$-álgebra $\oplus_{g\in G} B_g$ em uma dada C^*-norma e, neste contexto, [10] apresenta condições suficientes para que estas C^*-álgebras sejam isomorfas.

C^*-álgebras graduadas também surgem a partir de ações de grupos em C^*-álgebras. Por exemplo, uma C^*-álgebra admitindo uma ação contínua de um grupo compacto abeliano Γ é graduada pelo grupo $\widehat{\Gamma}$. Já uma ação global α de um grupo discreto G em uma C^*-álgebra A dá origem ao produto cruzado $A \rtimes_\alpha G$, que é uma C^*-álgebra graduada por uma coleção de subespaços que são cópias de A, pelo menos como espaços de Banach. No caso em que α é uma ação parcial, temos uma C^*-álgebra graduada por uma família de subespaços que são cópias de ideais de A, que chamamos produto cruzado parcial.

O conceito de produto cruzado parcial de uma C^*-álgebra por um único automorfismo parcial foi introduzido em [12] e, posteriormente, foi generalizado em [19] para o produto cruzado parcial por um grupo discreto qualquer. Em suma, na primeira construção, o automorfismo usado na definição do produto cruzado usual de uma C^*-álgebra pelo grupo dos inteiros foi substituído por um $*$-isomorfismo entre dois ideais, enquanto na última, a partir de uma ação parcial, foi definido uma estrutura de $*$-álgebra de Banach em um certo subespaço das funções integráveis do grupo na C^*-álgebra. O produto cruzado parcial foi definido como a C^*-álgebra envolvente de tal $*$-álgebra de Banach, generalizando assim a noção de produto cruzado usual.

Uma ação parcial de um grupo G em uma C^*-álgebra A é um par $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ em que, para cada $g \in G$, D_g é um ideal de A, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um $*$-isomorfismo e, pelo menos quando possível, temos uma certa compatibilidade entre a operação de composição dos $*$-isomorfismos α_g's e a operação do grupo. Em um contexto ainda mais geral, temos ações parciais torcidas, cuja definição, além dos ideais e $*$-isomorfismos indexados em G, envolve uma coleção de multiplicadores indexados em $G \times G$.

Em [7], A. Buss, R. Meyer e C. Zhu mostraram que fibrados de Fell saturados, no contexto mais geral de grupos localmente compactos, correspondem a ações (globais) de grupos. Neste trabalho, consideramos fibrados de Fell sobre grupos discretos (não necessariamente saturados) e, sob certas hipóteses, obtemos uma equivalência entre fibrados de Fell sobre um grupo G e ações parciais de G. Assim, tornamos mais precisa a ideia de que fibrado de Fell é uma espécie de ação de grupo, embora já saibamos de [11] que dado um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ sobre um grupo enumerável cuja álgebra da fibra unidade é estável e separável, então $\mathcal{B}$ pode ser obtido a partir de uma ação parcial torcida ou, como também é conhecido na literatura, $\mathcal{B}$ pode ser exibido como um *fibrado produto semidireto*. Aqui, melhoramos este resultado, exibindo um fibrado satisfazendo as mesmas hipóteses assumidas em [11] como o fibrado de

Fell obtido a partir de uma ação parcial *não torcida* do grupo base na sua álgebra da fibra unidade. Desta forma, com o que foi feito em [10], temos condições suficientes para que uma C^*-álgebra graduada seja um produto cruzado parcial.

Organizamos o trabalho como segue:

No primeiro capítulo, embasados em [23] e [18], definimos C^*-módulos de Hilbert e sua C^*-álgebra de operadores adjuntáveis. Feito isto, introduzimos o conceito de bimódulos de imprimitividade e, então, definimos Morita equivalência entre C^*-álgebras. Por fim, mostramos que esta relação, como o próprio nome sugere, é uma relação de equivalência entre C^*-álgebras e encerramos construindo a álgebra de ligação de um bimódulo de imprimitividade, que além da sua importância no estudo de Morita equivalência, neste trabalho também será usada para obter importantes resultados subsequentes.

No segundo capítulo, definimos o conceito de fibrado de Fell sobre grupos discretos e começamos construindo uma $*$-álgebra relacionada a um fibrado. Mostramos que tal $*$-álgebra é admissível e, assim, definimos a C^*-álgebra seccional cheia como sendo sua C^*-álgebra envolvente. Em seguida, construímos uma representação injetiva do fibrado de Fell, que nos leva a definir a C^*-álgebra seccional reduzida, além de concluir propriedades importantes da C^*-álgebra seccional cheia.

No terceiro capítulo, definimos ações parciais de grupos discretos e mostramos que, a partir de uma ação parcial, é possível obter um fibrado de Fell. Além disso, a fim de ilustrar definições posteriores, introduzimos brevemente o conceito de ações contínuas de grupos localmente compactos em C^*-álgebras e definimos um produto cruzado associado. Mostramos também que, dada uma ação de um grupo discreto abeliano, podemos obter uma ação contínua do seu grupo dual no produto cruzado obtido. Este caso será suficiente para o que precisamos, muito embora isto também seja verdade quando o grupo em questão é um grupo localmente compacto abeliano qualquer.

No quarto capítulo, introduzimos o conceito de C^*-álgebras estáveis e, com isso, definimos fibrado de Fell estável como sendo um fibrado cuja álgebra da fibra unidade é uma C^*-álgebra estável. Desenvolvemos alguns resultados nesta teoria, tendo por objetivo obter as ferramentas necessárias para o capítulo final. Por fim, embasados em [5] e [6], apresentamos o teorema de Brown-Green-Rieffel.

No último capítulo, apresentamos finalmente o principal resultado do trabalho. Começamos definindo C^*-álgebras graduadas e, para tais, definimos a C^*-álgebra produto smash, que também é conhecida na literatura como produto cruzado, no contexto de coações de grupos (veja

[22]). Mostramos que, dada uma C^*-álgebra graduada, sua álgebra da fibra unidade é Morita equivalente a um ideal da C^*-álgebra produto smash. Tal ideal admite uma ação parcial do grupo base, cujo produto cruzado parcial obtido é Morita equivalente à C^*-álgebra graduada em questão, quando esta é a C^*-álgebra seccional cheia de seu fibrado de Fell associado. Com isto em mãos e o teorema de Brown-Green-Rieffel, assumimos certas hipóteses sobre um fibrado de Fell e obtemos o principal resultado do trabalho.

No apêndice, apresentamos alguns resultados usados ao longo do texto envolvendo a álgebra de multiplicadores de uma C^*-álgebra, apresentamos algumas definições equivalentes para elemento estritamente positivo de uma C^*-álgebra e, além disso, construímos a C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra admissível.

Fixemos notações usadas ao longo texto. Dada uma sentença lógica P, o símbolo $[P]$ tem valor 1 se a sentença P for verdadeira. Caso contrário, o símbolo $[P]$ possui valor 0. Por exemplo, o símbolo $[s = t]$ tem valor 1 se $s = t$, e possui valor 0 se $s \neq t$. De mesma forma, o símbolo $[n \geq k]$ tem valor 1 se $n \geq k$ e, no caso em que $n < k$, temos $[n \geq k] = 0$.

Com relação a pré-requisitos, a teoria de integração de grupos com valores em uma C^*-álgebra pode ser encontrada em [27]. O produto tensorial de C^*-álgebras é usado com bastante frequência, e é abordado em [20], já a teoria de grupos localmente compactos é apresentada em [24]. Ao longo do trabalho, citamos alguns resultados úteis e suas referências, à medida que isso for necessário. Entretanto, acreditamos que, em sua maioria, estes resultados podem ser encontrados em [20].

Capítulo 1

Morita equivalência

Neste capítulo, embasados em [23] e [18], começamos introduzindo C^*-módulos de Hilbert, apresentando algumas de suas propriedades e construindo a álgebra de operadores adjuntáveis. Feito isto, introduzimos o conceito de Morita equivalência entre C^*-álgebras e mostramos que isto, de fato, define uma relação de equivalência. A referência [26] também foi amplamente usada.

1.1 Módulos de Hilbert

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e A uma C^*-álgebra. Dizemos que X é um A-*módulo *(à direita), e denotamos por X_A, se existe uma aplicação $X \times A \to X$, $(x, a) \mapsto xa$ satisfazendo, para quaisquer $x, y \in X$, $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,*

(i) $x(ab) = (xa)b$;

(ii) $\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a)$;

(iii) $x(a + b) = xa + xb$;

(iv) $(x + y)a = xa + ya$.

Definição 1.1.2. *Seja X_A um A-módulo à direita. Dizemos que X_A é um A-*módulo com produto interno *se existe uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : X \times X \to A$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$, $a \in A$ e escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, satisfaz os seguintes postulados:*

(i) $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle_A = \lambda\langle x, y\rangle_A + \mu\langle x, z\rangle_A$;

(ii) $\langle x, ya\rangle_A = \langle x, y\rangle_A a$;

(iii) $\langle x, y\rangle_A^* = \langle y, x\rangle_A$;

(iv) $\langle x, x\rangle_A \geq 0$, *i.e.*, $\langle x, x\rangle_A$ *é positivo como um elemento da* C^*-*álgebra* A;

(v) $\langle x, x\rangle_A = 0$ *implica que* $x = 0$.

Neste caso, dizemos que a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : X \times X \to A$ é um *A-produto interno.*

Observação 1.1.3. *Os axiomas (i) e (iii) implicam que* $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ *é conjugado-linear na primeira variável.*

Demonstração: Com efeito, temos

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu y, z\rangle_A = \langle \lambda z, \lambda x + \mu y\rangle_A^* &= (\lambda\langle z, x\rangle_A + \mu\langle z, y\rangle_A)^* \\ &= \bar{\lambda}\langle z, x\rangle_A^* + \bar{\mu}\langle z, y\rangle_A^* \\ &= \bar{\lambda}\langle x, z\rangle_A + \bar{\mu}\langle y, z\rangle_A.\end{aligned}$$

■

Observação 1.1.4. *As condições (ii) e (iii) implicam que* $\langle xa, y\rangle_A = a^*\langle x, y\rangle_A$, *donde segue que*

$$\langle X, X\rangle_A := \operatorname{span}\{\langle x, y\rangle_A : x, y \in X\}$$

é um ideal em A.

Observação 1.1.5. *Se* ${}_AX$ *é um* A*-módulo à esquerda, um* A*-módulo com produto interno pode ser definido similarmente. Neste caso, o produto interno é definido como sendo* A*-linear na primeira variável, ou seja,*

$${}_A\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda_A\langle x, y\rangle + \mu\langle y, z\rangle \quad e \quad {}_A\langle ax, y\rangle = a_A\langle x, y\rangle,$$

para quaisquer $x, y \in X$, $a \in A$, *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Definição 1.1.6. *Seja* X *um* A*-módulo com produto interno. Dizemos que* X *é* cheio *se* $\overline{\langle X, X\rangle_A} = A$.

Exemplo 1.1.7. *Todo espaço vetorial complexo (não-nulo) com produto interno linear na segunda variável é um $\mathbb{C}$-módulo com produto interno cheio.*

Exemplo 1.1.8. *Seja A uma C^*-álgebra. Então A é um A-módulo com produto interno cheio com a ação de módulo dada pela multiplicação pela direita e produto interno $\langle a, b\rangle_A = a^*b$, para $a, b \in A$. Se I é um ideal próprio de A, então I é um A-módulo com ação de módulo e produto interno definidos de forma análoga. No entanto, I* não *é cheio.*

Demonstração: Os itens (i)-(iv) da Definição 1.1.2 seguem diretamente de propriedades e postulados relativos às operações de involução e multiplicação de A. O item (iv) é uma consequência do C^*-axioma.

Já a igualdade $\overline{\langle A, A\rangle_A} = A$, segue do fato que

$$a = \lim_{\lambda} u_\lambda a = \lim_{\lambda} \langle u_\lambda, a\rangle_A,$$

em que $a \in A$ e $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma unidade aproximada para A.

■

Fazendo uma analogia com o caso escalar, poderíamos nos perguntar se a aplicação $\|\cdot\|_A : X \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|\langle x, x\rangle_A\|^{\frac{1}{2}}$ é uma norma em A. Para obter uma resposta afirmativa, resta provarmos que a desigualdade triangular é satisfeita e este é, de fato, nosso próximo objetivo.

Lema 1.1.9 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja X um A-módulo com produto interno e sejam $x, y \in X$. Então*

$$\langle x, y\rangle_A^* \langle x, y\rangle_A \leq \|\langle x, x\rangle_A\| \langle y, y\rangle_A$$

como elementos da C^*-álgebra A.

Demonstração: De fato, suponha inicialmente que $\|\langle x, x\rangle_A\| = 1$. Então, para todo $a \in A$

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle xa - y, xa - y\rangle_A &= a^*\langle x, x\rangle_A a - \langle y, x\rangle_A a - a^*\langle x, y\rangle_A + \langle y, y\rangle_A \\ &\leq a^*a - \langle y, x\rangle_A a - a^*\langle x, y\rangle_A + \langle y, y\rangle_A, \end{aligned}$$

em que na última desigualdade usamos o fato que $a^*ba \leq \|b\| a^*a$, para todo $b \in A^+$. Colocando $a = \langle x, y\rangle_A$ obtemos

$$\langle x, y\rangle_A^* \langle x, y\rangle_A \leq \langle y, y\rangle_A,$$

como desejado.

Para o caso em que $x = 0$ não há nada a fazer. Para o caso geral, basta aplicarmos o que já foi feito para $z = \lambda x$, em que $\lambda = \dfrac{1}{\|\langle x, x\rangle_A\|^{\frac{1}{2}}}$. ■

Corolário 1.1.10. *Se X é um A-módulo com produto interno, então*

$$\|x\|_A := \|\langle x, x\rangle_A\|^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em X tal que $\|xa\|_A \leq \|a\|\|x\|_A$. Mais ainda,

$$X\langle X, X\rangle_A := \operatorname{span}\{x\langle y, z\rangle_A : x, y, z \in X\}$$

é um supespaço denso em X.

Demonstração: Primeiramente, vejamos que $\|\cdot\|_A$ é uma norma em X.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in X$ temos

$$\|\lambda x\|_A = \|\langle \lambda x, \lambda x\rangle_A\|^{\frac{1}{2}} = \||\lambda|^2\langle x, x\rangle_A\|^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|\langle x, x\rangle_A\|^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|_A.$$

Se $\|x\|_A = 0$, então $\langle x, x\rangle_A = 0$ e da condição (v) da Definição 1.1.2 vem que $x = 0$.

Vamos verificar que $\|\cdot\|_A$ satisfaz a desigualdade triangular. O Lema 1.1.9 e o C^*-axioma nos dizem que $\|\langle x, y\rangle_A\| \leq \|x\|_A\|y\|_A$, para quaisquer $x, y \in X$. Assim,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_A^2 &\leq \|\langle x, x\rangle_A\| + \|\langle x, y\rangle_A\| + \|\langle y, x\rangle_A\| + \|\langle y, y\rangle_A\| \\ &\leq \|x\|_A^2 + 2\|x\|_A\|y\|_A + \|y\|_A^2 \\ &= (\|x\|_A + \|y\|_A)^2.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_A$ é uma norma em X. Além disso,

$$\|xa\|_A^2 = \|\langle xa, xa\rangle_A\| = \|a^*\langle x, x\rangle_A a\|,$$

em que $a \in A$. Uma vez que $a^*\langle x, x\rangle_A a \leq \|\langle x, x\rangle_A\|a^*a$, obtemos a desigualdade $\|xa\|_A \leq \|a\|\|x\|_A$.

Por fim, mostremos que $X\langle X, X\rangle_A$ é denso em X. Sendo $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada para o ideal fechado $\overline{\langle X, X\rangle_A}$, temos

$$\|x - xu_\lambda\|_A^2 = \|\langle x, x\rangle_A - \langle x, x\rangle_A u_\lambda - u_\lambda\langle x, x\rangle_A + u_\lambda\langle x, x\rangle_A u_\lambda\|.$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, existe λ_0 tal que $\|x - xu_{\lambda_0}\|_A < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Agora, seja y em $\langle X, X\rangle_A$ tal que

$$\|u_{\lambda_0} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando a desigualdade triangular para $\|\cdot\|_A$ e o fato que $\|x(u_{\lambda_0} - y)\|_A \leq \|x\|_A \|u_{\lambda_0} - y\|$, concluímos que

$$\|x - xy\|_A < \varepsilon.$$

Donde $X\langle X, X\rangle_A$ é denso A.

Isso completa a prova do corolário.

■

Definição 1.1.11. *Um* A-módulo de Hilbert *é um A-módulo com produto interno X que é completo na norma $\|\cdot\|_A$.*

Exemplo 1.1.12. *Todo espaço de Hilbert com produto interno linear na segunda variável é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert.*

Exemplo 1.1.13. *Seja A uma C^*-álgebra. Então A é um A-módulo de Hilbert, com a ação de módulo e produto interno definidos no Exemplo 1.1.8. Se I é um ideal (fechado) de A, então I é um A-módulo de Hilbert com ação de módulo e produto interno como no Exemplo 1.1.8.*

Demonstração: Isso segue do fato que a norma $\|\cdot\|_A$ coincide com a C^*-norma $\|\cdot\|$. ■

Exemplo 1.1.14. *Seja A uma C^*-álgebra e p uma projeção na álgebra de multiplicadores $M(A)$. Então $Ap = \{ap : a \in A\}$ é um pAp-módulo de Hilbert cheio com a ação de módulo dada pela multiplicação pela direita e produto interno definido por $\langle ap, bp\rangle_{pAp} = pa^*bp$, para $a, b \in A$.*

Demonstração: As propriedades algébricas são facilmente verificadas a partir de propriedades das operações de multiplicação e involução de A.

Novamente, a norma $\|\cdot\|_{pAp}$ coincide com a norma de Ap herdada de A, pois

$$\|ap\|^2_{pAp} = \|\langle pa^*ap\rangle_{pAp}\| = \|ap\|^2.$$

Segue que Ap é completo, já que $Ap = (Ap)p$ e, portanto, qualquer sequência em Ap convergente em A, possui o limite em Ap. Além disso, se $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para A e $a \in A$, observamos que

$$pap = \lim_\lambda pu_\lambda ap = \lim_\lambda \langle u_\lambda p, ap\rangle_{pAp},$$

donde $\langle Ap, Ap\rangle_{pAp}$ é denso em pAp.

Logo, Ap é um pAp-módulo de Hilbert cheio.

$\blacksquare$

Exemplo 1.1.15 (Soma direta). *Suponha que X e Y sejam A-módulos de Hilbert. Então $Z = X \oplus Y := \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ é um A-módulo de Hilbert com a ação de módulo dada por $Z \times A \to Z$, $((x,y),a) \mapsto (xa, ya)$ e produto interno definido por*

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle_A := \langle x,x'\rangle_A + \langle y,y'\rangle_A.$$

Demonstração: Todas as propriedades algébricas seguem da definição da ação de módulo e produto interno, e do fato que X e Y são A-módulos de Hilbert.

Vamos mostrar que Z é completo com a norma $\|\cdot\|_A$.

Com efeito,

$$\langle x,x\rangle_A \le \langle x,x\rangle_A + \langle y,y\rangle_A,$$

e isso nos diz que

$$\|x\|_A^2 \le \|\langle x,x\rangle_A + \langle y,y\rangle_A\| = \|(x,y)\|_A^2 \le \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2.$$

Similarmente,

$$\|y\|_A^2 \le \|(x,y)\|_A^2 \le \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2.$$

Ou seja,

$$\max\{\|x\|_A, \|y\|_A\} \le \|(x,y)\|_A \le \sqrt{\|x\|_A^2 + \|y\|_A^2}. \qquad (\dagger)$$

Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência de Cauchy em Z. Escrevemos $z_n = (x_n, y_n)$, para cada n. Como X e Y são completos, a desigualdade do lado esquerdo em $(\dagger)$ nos diz que existe $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Agora, a desigualdade do lado direito de $(\dagger)$ implica que $z_n = (x_n, y_n) \to (x,y)$ em Z.

Logo, Z é um A-módulo de Hilbert.

$\blacksquare$

1.2 Operadores adjuntáveis

Nesta seção, vamos construir uma C^*-álgebra a partir de um A-módulo de Hilbert, a saber, a álgebra de operadores adjuntáveis. Tal

C^*-álgebra nos permitirá obter uma representação injetiva de um fibrado de Fell no próximo capítulo.

Começamos defininindo operadores adjuntáveis em um C^*-módulo de Hilbert.

Definição 1.2.1. *Sejam X e Y A-módulos de Hilbert. Uma função $T : X \to Y$ é* adjuntável *se existe uma função $T^* : Y \to X$ tal que*

$$\langle T(x), y\rangle_A = \langle x, T^*(y)\rangle_A,$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Neste caso, dizemos que T^* é o *adjunto* de T. Posteriormente, veremos que, quando existe, o adjunto é único.

Lema 1.2.2. *Toda aplicação adjuntável $T : X \to Y$ entre A-módulos de Hilbert é A-linear (isto é, T é linear e $T(xa) = T(x)a$, para todo $a \in A$) e limitada.*

Demonstração: Primeiramente, observamos que se Z é um A-módulo de Hilbert e $x \in Z$ é tal que $\langle x, z\rangle_A = 0$, para todo $z \in Z$, então ao escolher $z = x$ concluímos que $x = 0$.

Desta forma, sendo $x \in X$ e y um elemento escolhido arbitrariamente em Y, temos

$$\begin{aligned}\langle T(xa), y\rangle_A &= \langle xa, T^*(y)\rangle_A = a^*\langle x, T^*(y)\rangle_A \\ &= a^*\langle T(x), y\rangle_A = \langle T(x)a, y\rangle_A.\end{aligned}$$

Isso nos diz que

$$\langle T(xa) - T(x)a, y\rangle_A = 0,$$

para cada $y \in Y$, donde $T(xa) = T(x)a$.

Similarmente, prova-se que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ e $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$, em que $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Resta provarmos que T é limitado. Para isso, vamos usar o teorema do gráfico fechado.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X convergindo a x e tal que $T(x_n) \to y$ em Y. Seja $z \in Y$. Por um lado,

$$\langle T(x_n), z\rangle_A \to \langle y, z\rangle_A$$

e, por outro lado,

$$\langle T(x_n), z\rangle_A = \langle x_n, T^*(z)\rangle_A \to \langle x, T^*(z)\rangle_A = \langle T(x), z\rangle_A,$$

em que a continuidade da aplicação $x \to \langle x, z\rangle_A$ é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Portanto, como z é arbitrário, devemos ter $y = T(x)$. Donde T é limitada.

■

Nem todo operador A-linear e limitado entre módulos de Hilbert é adjuntável. Isto segue no próximo exemplo.

Exemplo 1.2.3. *Seja $A = C([0,1])$ e seja $J = \{f \in A : f(0) = 0\}$. Do Exemplo 1.1.13, segue que A e J são A-módulos de Hilbert. Seja $X := A \oplus J$ e seja $T : X \to X$ tal que $T(f,g) = (g,0)$, para $f \in A$ e $g \in J$. Então, T é A-linear e limitado, mas não é adjuntável.*

Demonstração: É fácil ver que T é A-linear. Para ver que T é contínuo, notemos que

$$\begin{aligned} \|T(f,g)\|_A &= \|(g,0)\|_A = \|\langle g,g\rangle_A\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\langle f,f\rangle_A + \langle g,g\rangle_A\|^{\frac{1}{2}} = \|(f,g)\|_A. \end{aligned}$$

Tomando $g \in J$ com $\|g\|_A = 1$, concluímos que $\|T\| = 1$. Logo, T é A-linear e limitado.

Suponha que T seja adjuntável e seja $(f,g) := T^*(1,0)$. Para todo $(h,k) \in X$ temos

$$\bar{k} = \langle T(h,k),(1,0)\rangle_A = \langle (h,k),(f,g)\rangle_A = \bar{h}f + \bar{k}g. \qquad (\dagger)$$

Daí, segue que $f(0) = 0$.

Agora, para $k \in J$ arbitrário, a igualdade $(\dagger)$ implica que

$$\bar{k}(1 - f - g) = 0.$$

Logo, devemos ter $f + g = 1$.

Assim, $1 = f(0) + g(0) = 0 + g(0) = g(0)$, o que é uma contradição, pois $g \in J$.

■

Definição 1.2.4. *Sejam X e Y A-módulos de Hilbert. Denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores adjuntáveis de X em Y. Quando $X = Y$, escrevemos $\mathcal{L}(X)$, ou ainda $\mathcal{L}(X_A)$, em vez de $\mathcal{L}(X,X)$.*

Nosso objetivo agora é mostrar que, se X é um A-módulo de Hilbert, $\mathcal{L}(X)$ é uma C^*-álgebra. A próxima proposição mostra algumas propriedades dos operadores adjuntáveis.

Proposição 1.2.5. *Sejam X, Y, Z A-módulos de Hilbert e sejam $T : X \to Y$, $S : X \to Y$ e $R : Y \to Z$ operadores adjuntáveis. Então:*

(i) *T^* é único;*

(ii) *T^* é adjuntável e $T^{**} = T$;*

(iii) *Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda T + S$ é adjuntável e $(\lambda T + S)^* = \bar{\lambda} T^* + S^*$;*

(iv) *RT é adjuntável e $(RT)^* = T^* R^*$.*

Demonstração: (i) Seja $U : Y \to X$ tal que

$$\langle T(x), y \rangle_A = \langle x, U(y) \rangle_A,$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Desta forma, fixado y em Y e para x escolhido arbitrariamente em X, segue

$$\langle x, T^*(y) \rangle_A = \langle x, U(y) \rangle_A.$$

Por um argumento já utilizado, isso implica $T^*(y) = U(y)$.

(ii) Para $x \in X$ e $y \in Y$, vale que

$$\langle T^*(y), x \rangle_A = \langle x, T^*(y) \rangle_A^* = \langle T(x), y \rangle_A^* = \langle y, T(x) \rangle_A.$$

Donde $T^{**} = T$.

(iii) Novamente,

$$\begin{aligned} \langle (\lambda T + S)(x), y \rangle_A &= \bar{\lambda} \langle T(x), y \rangle_A + \langle S(x), y \rangle_A \\ &= \bar{\lambda} \langle x, T^*(x) \rangle_A + \langle x, S^*(y) \rangle_A \\ &= \langle x, \bar{\lambda}(T^* + S^*)(y) \rangle_A. \end{aligned}$$

Como x é arbitrário, fica verificado o item (iii).

(iv) A prova é feita de forma análoga ao item (iii).

■

Teorema 1.2.6. *Se X é um A-módulo de Hilbert, então $\mathcal{L}(X)$ é uma C^*-álgebra com respeito à norma herdada da álgebra de Banach $B(X)$.*

Demonstração: Da Proposição 1.2.5, segue que $\mathcal{L}(X)$ é uma subálgebra de $B(X)$. Como $B(X)$ é uma álgebra de Banach, temos que

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|,$$

para todo T em $\mathcal{L}(X)$.

Além disso, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|T^*T\| \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|\langle T^*T(x), x\rangle_A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\langle T(x), T(x)\rangle_A\| = \|T\|^2$$

e obtemos que $\|T\| \leq \|T^*\|$. De mesma forma, observando que $T^{**} = T$, concluímos que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Logo, $\|T^*\| = \|T\|$.

Assim, $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$, donde se verifica o C^*-axioma para $\mathcal{L}(X)$. Uma vez que a operação de involução é uma isometria, $\mathcal{L}(X)$ é, de fato, uma C^*-álgebra.

■

Corolário 1.2.7. *Seja X um A-módulo de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(X)$. Então*

$$\langle T(x), T(x)\rangle_A \leq \|T\|^2 \langle x, x\rangle_A.$$

Demonstração: Como $\|T\|^2 - T^*T$ é um elemento positivo da C^*-álgebra $\mathcal{L}(X)$, existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T\|^2 - T^*T = S^*S$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\|T\|^2\langle x, x\rangle_A - \langle T(x), T(x)\rangle_A &= \|T\|^2\langle x, x\rangle_A - \langle T^*T(x), x\rangle_A \\
&= \langle (\|T\|^2 - T^*T)(x), x\rangle_A = \langle S^*S(x), x\rangle_A \\
&= \langle S(x), S(x)\rangle_A \geq 0.
\end{aligned}$$

Donde segue $\langle T(x), T(x)\rangle_A \leq \|T\|^2\langle x, x\rangle_A$.

■

1.3 Bimódulos de imprimitividade

Nesta seção, definimos o que seria um A-B bimódulo de imprimitividade, para A e B C^*-álgebras. Apresentamos alguns exemplos e alguns resultados neste sentido.

Definição 1.3.1. *Sejam A e B C^*-álgebras. Um A-B* bimódulo de imprimitividade *é um A-B bimódulo X tal que:*

(i) *X é um A-módulo de Hilbert cheio à esquerda e um B-módulo de Hilbert cheio à direita;*

(ii) *Para quaisquer* $x, y, z \in X$,

$$_A\langle x, y\rangle z = x\langle y, z\rangle_B.$$

Exemplo 1.3.2. *Um espaço de Hilbert* H *é um* $K(H)$-$\mathbb{C}$ *bimódulo de imprimitividade com as ações de módulos à esquerda e à direita dadas por* $(T, h) \mapsto T(h)$ *e* $(h, \lambda) \mapsto \lambda h$, *para* $T \in K(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $h \in H$, *e produtos internos definidos como segue:*

$$_{K(H)}\langle h, k\rangle := h \otimes k,$$

em que $(h \otimes k)(z) = \langle k, z\rangle h$, *para todo* $z \in H$, *e*

$$\langle h, k\rangle_{\mathbb{C}} := \langle h, k\rangle.$$

Demonstração: Seja $F(H)$ o conjunto dos operadores de posto finito sobre H. Sabemos do Teorema 2.4.5 de [20] que $F(H)$ é denso em $K(H)$. Já o Teorema 2.4.6, novamente em [20], nos diz que $F(H)$ é gerado por operadores de posto 1, e estes são precisamente os operadores da forma $h \otimes k$, $h, k \in H$. Isso implica que $_{K(H)}\langle H, H\rangle$ é denso em $K(H)$.

Mais ainda, observamos

$$\|h\|_{K(H)} = \|(h \otimes h)\|^{\frac{1}{2}} = (\|h\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|h\|,$$

donde H é um $K(H)$-módulo de Hilbert cheio.

Vamos verificar a condição (ii) da Definição 1.3.1.

Sejam $x, y, z \in H$. Então,

$$_{K(H)}\langle x, y\rangle z = \langle y, z\rangle x = x\langle y, z\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Logo, H é um $K(H)$-$\mathbb{C}$ bimódulo de imprimitividade.

$\blacksquare$

Exemplo 1.3.3. *Seja* A *um* C^*-*álgebra. Então* A *é um* A-A *bimódulo de imprimitividade com a estrutura de bimódulo dada pela multiplicação em* A, *e com produtos internos* $_A\langle a, b\rangle = ab^*$ *e* $\langle a, b\rangle_A = a^*b$, *para* $a, b \in A$.

Demonstração: Vamos verificar o item (ii) da Definição 1.3.1. Isto segue do seguinte cálculo:

$$_A\langle a, b\rangle c = ab^*c = a\langle b, c\rangle_A,$$

em que $a, b, c \in A$.

■

Exemplo 1.3.4. *Seja A uma C^*-álgebra e sejam p, q projeções em $M(A)$. Suponha que $\overline{ApA} = \overline{AqA} = A$. Então pAq é um pAp-qAq bimódulo de imprimitividade com a estrutura de bimódulo dada pela multiplicação em A, e produtos internos definidos por*

$$_{pAp}\langle paq, pbq\rangle = paqb^*p$$

e

$$\langle paq, pbq\rangle_{qAq} = qa^*pbq,$$

para $a, b \in A$.

Demonstração: O fato de pAq ser um pAp-módulo de Hilbert cheio e um qAq-módulo de Hilbert cheio é uma consequência imediata da hipótese $\overline{ApA} = \overline{AqA} = A$. A condição (ii) da Definição 1.3.1 é verificada no seguinte cálculo:

$$_{pAp}\langle paq, pbq\rangle pcq = paqb^*pcq = paq\langle pbq, pcq\rangle_{qAq},$$

em que $a, b, c \in A$. Em particular, ao escolher $q = 1$, segue que pA é um pAp-A bimódulo de imprimitividade.

■

Uma projeção p em $M(A)$ satisfazendo a hipótese do exemplo anterior ($\overline{ApA} = A$) é dita ser *cheia*. Uma C^*-álgebra da forma pAp, em que $p \in M(A)$ é uma projeção cheia, é chamada *canto cheio*. Este tipo de projeção terá um papel importante no desenvolvimento deste trabalho e será estudado com mais detalhes na Seção 4.3.

Proposição 1.3.5. *Sejam A e B C^*-álgebras e suponha que X seja um A-B bimódulo de imprimitividade. Então*

(i) *Para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, e $x, y \in X$,*

$$_A\langle xb, y\rangle =_A \langle x, yb^*\rangle \quad e \quad \langle ax, y\rangle_B = \langle x, a^*y\rangle_B;$$

(ii) *Para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, e $x \in X$,*

$$\langle ax, ax\rangle_B \leq \|a\|^2\langle x, x\rangle_B \quad e \quad {}_A\langle xb, xb\rangle \leq \|b\|^2\, {}_A\langle x, x\rangle.$$

Demonstração: (i) Suponha que X seja um A-B bimódulo de imprimitividade. Pelo item (iii), dados $x, y, z \in X$, temos que

$$x\langle ay, z\rangle_B = {}_A\langle x, ay\rangle z = {}_A\langle x, y\rangle a^* z = x\langle y, a^* z\rangle_B.$$

Assim, se w é outro elemento de X, vale que

$$\langle w, x\rangle_B \langle ay, z\rangle_B = \langle w, x\rangle_B \langle y, a^* z\rangle_B.$$

Uma vez que $\langle X, X\rangle_B$ é denso em B, concluímos que

$$b\langle ay, z\rangle_B = b\langle y, a^* z\rangle_B,$$

para todo $b \in B$. Por meio de uma unidade aproximada, obtemos que

$$\langle ay, z\rangle_B = \langle y, a^* z\rangle_B,$$

para quaisquer $y, z \in X$.

Similarmente, prova-se que ${}_A\langle yb, z\rangle = {}_A\langle y, zb\rangle$, para quaisquer $y, z \in X$.

(ii) Pelo que foi feito no item (i), A age por operadores adjuntáveis em X_B. Desta forma, vamos mostrar que a aplicação $\varphi : A \to \mathcal{L}(X_B)$, $a \mapsto \varphi(a)$ é um $*$-homomorfismo injetivo, em que

$$\varphi(a)(x) = ax,$$

para todo $x \in X$.

De fato, do item (i), concluímos que $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$ e φ é um $*$-homomorfismo. Para ver que φ é injetivo, seja $a \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$. Então segue que $ax = 0$, para todo $x \in X$. Mas isso significa que, para cada $y \in X$,

$$0 = {}_A\langle ax, y\rangle = a\,{}_A\langle x, y\rangle.$$

Uma vez que o ideal ${}_A\langle X, X\rangle$ é denso em A, isso implica que $a = 0$.

Assim, pelo Corolário 1.2.7,

$$\langle ax, ax\rangle_B = \langle \varphi(a)(x), \varphi(a)(x)\rangle_B \leq \|\varphi(a)\|^2 \langle x, x\rangle_B = \|a\|^2 \langle x, x\rangle_B.$$

Um argumento análogo mostra que

$${}_A\langle xb, xb\rangle \leq \|b\|^2\, {}_A\langle x, x\rangle.$$

■

Observação 1.3.6. *Do Lema 1.2.2 e do item (i) da Proposição 1.3.5,* *segue que $(ax)b = a(xb)$ e $(\lambda a)(xb) = a(x(\lambda b))$. Assim, é redundante exigir que X seja um A-B bimódulo.*

Corolário 1.3.7. *Seja X um A-B bimódulo de imprimitividade. Então,*

$$\|x\|_A = \|x\|_B,$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: Seja $x \in X$. Temos que

$$\begin{aligned} \|x\|_A^4 &= \|{}_A\langle x, x\rangle\|^2 = \|{}_A\langle x, x\rangle {}_A\langle x, x\rangle\| \\ &= \|{}_A\langle {}_A\langle x, x\rangle x, x\rangle\| = \|{}_A\langle x\langle x, x\rangle_B, x\rangle\|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e item (ii) da Proposição 1.3.5, segue que

$$\|x\|_A^4 \leq \|x\langle x, x\rangle_B\|_A \|x\|_A \leq \|x\|_B^2 \|x\|_A^2.$$

Logo, $\|x\|_A \leq \|x\|_B$. Um cálculo análogo prova a desigualdade contrária.

Portanto, $\|x\|_A = \|x\|_B$.

■

1.4 Morita equivalência

Nesta seção, tendo em mãos o que foi feito até aqui, definimos Morita equivalência entre C^*-álgebras. Tal relação é reflexiva e simétrica, e com um esforço um pouco maior, mostramos que a transitividade também é satisfeita. Encerramos construindo a álgebra de ligação de um A-B bimódulo de imprimitividade, que tem grande importância no estudo de Morita equivalência. Neste trabalho, ela que será usada no Capítulo 4.

Definição 1.4.1. *Sejam A e B C^*-álgebras. Dizemos que A é Morita equivalente a B, e denotamos $A \sim_M B$, se existe um A-B bimódulo de imprimitividade.*

Além dos exemplos apresentados na Seção 1.3, traremos a seguir um outro exemplo, que nos diz que Morita equivalência é um conceito mais fraco que isomorfismo. No entanto, veremos no Capítulo 4 que, sob certas hipóteses de enumerabilidade, Morita equivalência implica isomorfismo estável. Em outras palavras, se A é Morita equivalente a

B e K denota a C^*-álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então $A \otimes K \cong B \otimes K$.

Exemplo 1.4.2. *Sejam A e B C^*-álgebras. Seja $\psi : A \to B$ um isomorfismo. Então A é Morita equivalente a B.*

Demonstração: Colocamos $X = B$ e definimos a estrutura de bimódulo por

$$(a, x) \mapsto \psi(a)x \quad \text{e} \quad (x, b) \mapsto xb$$

e produtos internos dados por

$${}_A\langle x, y\rangle = \psi^{-1}(xy^*) \quad \text{e} \quad \langle x, y\rangle_B = x^*y,$$

para $a \in A$, $b \in B$ e $x, y \in X$.

Afirmamos que X é um A-B bimódulo de imprimitividade.

É claro que $\langle X, X\rangle_B$ é denso em B. Uma vez que ψ é um isomorfismo, também vale que ${}_A\langle X, X\rangle$ é denso em A.

A condição (ii) da Definição 1.3.1 segue do seguinte cálculo:

$${}_A\langle x, y\rangle z = \psi(\psi^{-1}(xy^*))z = xy^*z = x\langle y, z\rangle_B.$$

Logo, X é um A-B bimódulo de imprimitividade.

■

Nosso próximo objetivo é mostrar que Morita equivalência é, como o próprio nome sugere, uma relação de equivalência. A próxima proposição mostra a propriedade de simetria da Morita equivalência. Antes de enunciá-la, lembramos que se V é um espaço vetorial, o espaço vetorial conjugado de V é o espaço vetorial $\widetilde{V} = \{\tilde{v} : v \in V\}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar dadas por

$$\tilde{x} + \tilde{y} := \widetilde{x + y}, \qquad \lambda\tilde{x} := \widetilde{\overline{\lambda}x}.$$

A partir de um A-B bimódulo de imprimitividade, é possível definir uma estrutura de B-A bimódulo de imprimitividade no espaço vetorial conjugado $\widetilde{X}$. Como segue:

Proposição 1.4.3. *Seja X um A-B bimódulo de imprimitividade. Definimos uma estrutura de B-A-bimódulo em $\widetilde{X}$ por*

$$(b, \tilde{x}) \mapsto \widetilde{xb^*} \quad e \quad (\tilde{x}, a) \mapsto \widetilde{a^*x}$$

e produtos internos por

$${}_B\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle := \langle x, y\rangle_B \quad e \quad \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_A := {}_A\langle x, y\rangle,$$

para $a \in A$, $b \in B$ e $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{X}$. Então, $\widetilde{X}$ é um B-A bimódulo de imprimitividade.

Demonstração: Diretamente da definição dos produtos internos e do fato que X é um A-B bimódulo de imprimitividade, segue que ${}_B\langle \widetilde{X}, \widetilde{X}\rangle$ é denso em B e $\langle \widetilde{X}, \widetilde{X}\rangle_A$ é denso em A.

Os seguintes cálculos provam que $\widetilde{X}$ é um A-módulo de Hilbert à direita:

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}a\rangle_A = {}_A\langle x, a^*y\rangle = {}_A\langle x, y\rangle a = \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_A a.$$

De mesma forma, prova-se que X é um B-módulo de Hilbert à esquerda.

Além disso,

$$\begin{aligned} {}_B\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle \tilde{z} &= \widetilde{z\langle y, x\rangle_B} \\ &= \widetilde{{}_A\langle z, y\rangle x} = \tilde{x}\langle \tilde{y}, \tilde{z}\rangle_A. \end{aligned}$$

Logo, com estas operações $\widetilde{X}$ é um B-A bimódulo de imprimitividade.

■

Para provar a propriedade transitiva da Morita equivalência, precisamos estudar completamentos de C^*-módulos com produto interno. A partir de agora, vamos desenvolver um pouco da teoria nesse sentido.

Definição 1.4.4. *Seja A_0 uma $*$-subálgebra densa de uma C^*-álgebra A e seja X_0 um A_0-módulo à direita. Dizemos que X_0 é um A_0-*módulo com pré-produto interno *se existe uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 : X_0 \times X_0 \to A_0$ que satisfaz as condições (i)-(iv) da Definição 1.1.2 (em que $\langle x, x\rangle_0 \geq 0$ é interpretado como elemento de A).*

Observação 1.4.5. *A desigualdade de Cauchy-Schwarz (Lema 1.1.9) também vale no contexto da Definição 1.4.4 com uma demonstração idêntica.*

Proposição 1.4.6. *Seja A_0 uma $*$-subálgebra densa de uma C^*-álgebra A e seja X_0 um A_0-módulo com pré-produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Então existe um A-módulo de Hilbert X e uma aplicação linear $q : X_0 \to X$ tal que $q(X_0)$ é denso em X, $q(xa) = q(x)a$ para todo $x \in X_0$, $a \in A_0$, e $\langle q(x), q(y)\rangle_A = \langle x, y\rangle_0$.*

Demonstração: Seja $N = \{x \in X_0 : \langle x, x\rangle_0 = 0\}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x, y\rangle_0 = 0 = \langle y, x\rangle_0, \text{ sempre que } y \in X_0 \text{ e } x \in N. \qquad (\dagger)$$

Logo, N é um subespaço vetorial de X_0 e podemos considerar o espaço vetorial quociente X_0/N.

Seja $q : X_0 \to X_0/N$ a aplicação quociente. Como $\langle xa, xa\rangle_0 = a^*\langle x, x\rangle_0 a$, segue que N é um A_0-submódulo. Desta forma, segue que se $q(x) = q(x')$, tem-se $ax = ax'$. Mais ainda, por (†), se $q(y) = q(y')$ vale que

$$\langle x, y - y'\rangle_0 = 0 \quad \text{e} \quad \langle x - x', y'\rangle_0 = 0$$

donde $\langle x, y\rangle_0 = \langle x', y'\rangle_0$.

Portanto, as fórmulas

$$\langle q(x), q(y)\rangle_A := \langle x, y\rangle_0 \quad \text{e} \quad q(x)a := q(xa)$$

estão bem definidas e fazem de X_0/N um A_0-módulo com produto interno.

Analogamente ao Corolário 1.1.10,

$$\|q(x)\| := \|\langle x, x\rangle_0\|^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em X_0/N, donde podemos considerar seu completamento X. Identificando X_0/N com o subespaço correspondente em X, temos que

$$\|q(x)a\|^2 = \|\langle xa, xa\rangle_0\| = \|a^*\langle x, x\rangle_0 a\| \leq \|\langle x, x\rangle_0\|\|a\|^2 = \|q(x)\|^2\|a\|^2.$$

Isso significa que a multiplicação pela direita por um elemento a de A_0 é um operador limitado sobre X_0/N, e assim se estende a um operador sobre X satisfazendo $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$, para todo $x \in X$. Novamente usando a continuidade, podemos estender a ação de módulo à C^*-álgebra A.

Similarmente, sendo $x, y \in X$, e $\{q(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em X_0/N tais que $q(x_n) \to x$ e $q(y_n) \to y$, podemos definir um produto interno colocando

$$\langle x, y\rangle_A := \lim_n \langle q(x_n), q(y_n)\rangle_A.$$

O limite acima existe pois

$$\begin{aligned}\|\langle x_n, y_n\rangle_0 - \langle x_m, y_m\rangle_0\| &= \|\langle x_n - x_m, y_n\rangle_0 + \langle x_m, y_n - y_m\rangle_0\| \\ &\leq \|q(x_n) - q(x_m)\|\|q(y_n)\| \\ &\quad +\|q(x_m)\|\|q(y_n) - q(y_m)\|.\end{aligned}$$

De mesma forma, prova-se que o limite independe da sequência que tomarmos convergindo a x e a y. Ou seja, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ está bem definido.

Uma vez que o conjunto dos elementos positivos de A é fechado, fica fácil ver que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ satisfaz $(i) - (iv)$ da Definição 1.1.2. Além disso, $\langle x, x \rangle_0 = 0$ implica $\lim_n \|q(x_n)\| = 0$. Mas, este limite é exatamente $\|x\|$. Ou seja, $x = 0$, o que completa a prova de que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ é um A-produto interno.

Portanto, X é um A-módulo de Hilbert.

■

Vamos nos referir ao A-módulo de Hilbert X construído acima como o *completamento* do A_0-módulo X_0 com produto interno.

Definição 1.4.7. *Sejam A e B C^*-álgebras e sejam A_0 e B_0 $*$-subálgebras densas de A e B, respectivamente. Um A_0-B_0 pré-bimódulo de imprimitividade é um espaço vetorial complexo X_0 que é um A_0-B_0 bimódulo satisfazendo:*

(i) *X_0 é um A_0-módulo com pré-produto interno à esquerda e um B_0-módulo com pré-produto interno à direita;*

(ii) *${}_{A_0}\langle X_0, X_0 \rangle$ e $\langle X_0, X_0 \rangle_B$ são ideais densos em A e B, respectivamente.*

(iii) *Para quaisquer $a \in A_0$, $b \in B_0$, e $x \in X_0$,*

$$\langle ax, ax \rangle_{B_0} \leq \|a\|^2 \langle x, x \rangle_{B_0} \quad e \quad {}_{A_0}\langle xb, xb \rangle \leq \|b\|^2 \, {}_{A_0}\langle x, x \rangle;$$

(iv) *Para quaisquer $x, y, z \in X_0$,*

$${}_{A_0}\langle x, y \rangle z = x \langle y, z \rangle_{B_0}.$$

Proposição 1.4.8. *Sejam A e B C^*-álgebras e sejam A_0 e B_0 C^*-álgebras densas de A e B, respectivamente. Seja X_0 um A_0-B_0 pré-bimódulo de imprimitividade. Então existem um A-B bimódulo de imprimitividade X e um homomorfismo de bimódulos $q : X_0 \to X$ (isto é, q é linear e $q(axb) = aq(x)b$, para quaisquer $x \in X_0$, $a \in A_0$ e $b \in B_0$) tal que $q(X_0)$ é denso em X e*

$${}_A\langle q(x), q(y) \rangle = {}_{A_0}\langle x, y \rangle \quad e \quad \langle q(x), q(y) \rangle_B = \langle x, y \rangle_{B_0}$$

sempre que $x, y \in X_0$.

Demonstração: Primeiramente, aplicando o item (iii) da Definição 1.4.7 em vez do item (ii) da Proposição 1.3.5, temos que ${}_{A_0}\|x\| = \|x\|_{B_0}$, para todo $x \in X_0$, com uma demonstração idêntica à que foi feita no Corolário 1.3.7. Donde segue que os N's da Proposição 1.4.6 coincidem. Em outras palavras, $N_A = N_B$, em que $N_A = \{x \in X_0 :_{A_0} \langle x, x\rangle = 0\}$ e $N_B = \{x \in X_0 : \langle x, x\rangle_B = 0\}$. Assim, continuamos usando a notação q para aplicação quociente $q : X_0 \to X_0/N$.

Novamente usando o fato que ${}_{A_0}\|\cdot\| = \|\cdot\|_{B_0}$, concluímos que o completamento X de $(X_0/N, \|\cdot\|_{B_0})$ é um A-módulo de Hilbert cheio e um B-módulo de Hilbert cheio. Mais ainda, para quaisquer $a \in A_0$, $b \in B_0$, e $x \in X_0$,

$$q(axb) = q(ax)b = aq(x)b.$$

Como para quaisquer $x, y, z \in X_0$ vale que ${}_{A_0}\langle x, y\rangle z = x\langle y, z\rangle_{B_0}$, tem-se que

$$\begin{aligned} {}_A\langle q(x), q(y)\rangle q(z) &= {}_{A_0}\langle x, y\rangle q(z) = q({}_{A_0}\langle x, y\rangle z) \\ &= q(x\langle y, z\rangle_{B_0}) = q(x)\langle y, z\rangle_{B_0} \end{aligned}$$

e assim também é verdade para quaisquer $x, y, z \in X$.

Portanto, fica provado que X é um A-B bimódulo de imprimitividade.

■

Corolário 1.4.9. *Sejam A e B C^*-álgebras e seja X um A-B bimódulo satisfazendo os itens (i), (ii) e (iv) da Definição 1.4.7. Então X é um A-B pré-bimódulo de imprimitividade se e somente se*

(iii)' *para quaisquer $x, y \in X$, $a \in A$, e $b \in B$,*

$$\langle ax, y\rangle_B = \langle x, a^*y\rangle_B \quad e \quad {}_A\langle xb, y\rangle = {}_A\langle x, yb^*\rangle.$$

Demonstração: Suponha que X seja um A-B bimódulo satisfazendo as condições (i), (ii) e (iv) da Definição 1.4.7 e a condição (iii)'. Seja

$$\tilde{A} = \{a + \lambda 1 : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

a unitização de A. Então, a ação de A em X se estende a uma ação de $\tilde{A}$ por $(a + \lambda 1, x) \mapsto ax + \lambda x$. Notemos que

$$\begin{aligned} \langle (a + \lambda 1)x, y\rangle_B &= \langle ax + \lambda x, y\rangle_B \\ &= \langle ax, y\rangle_B + \langle \lambda x, y\rangle_B \\ &= \langle x, a^*y\rangle_B + \langle \lambda x, \bar{\lambda} y\rangle_B \\ &= \langle x, (a + \lambda 1)^*y\rangle_B. \end{aligned}$$

Em particular, se $c = d^*d$ é um elemento positivo em $\tilde{A}$, obtemos que

$$\langle x, cx\rangle_B = \langle x, d^*dx\rangle_B = \langle dx, dx \geq 0.$$

Como $\|a\|^2 1 - a^*a$ é um elemento positivo em $\tilde{A}$, concluímos que

$$\|a\|^2\langle x, x\rangle_B - \langle ax, ax\rangle_B = \langle x, (\|a\|^2 1 - a^*a)x\rangle_B \geq 0.$$

Contas análogas mostram que o mesmo vale para o B-produto interno, ou seja, $\|b\|^2\,{}_A\langle x, x\rangle -_A \langle xb, xb\rangle \geq 0$, para quaisquer $x \in X$, e $b \in B$. Logo, X satisfaz (iii) da Definição 1.4.7, e portanto, é um A-B pré-bimódulo de imprimitividade.

Suponha agora que X seja um A-B pré-bimódulo de imprimitividade e vamos mostrar que X satisfaz (iii)'.

Sejam $x, y, z, w \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \langle {}_A\langle x, y\rangle z, w\rangle_B &= \langle x\langle y, z\rangle_B, w\rangle_B = \langle z, y\rangle_B\langle x, w\rangle_B \\ &= \langle z, y\langle x, w\rangle_B\rangle_B = \langle z,_A \langle x, y\rangle^* w\rangle_B. \end{aligned}$$

Logo, se $a \in A$ é da forma ${}_A\langle x, y\rangle$, para alguns $x, y \in X$, vale que $\langle az, w\rangle_B = \langle z, a^*w\rangle_B$. Por Cauchy-Schwarz e pela condição (iii), temos que

$$\|\langle az, w\rangle_B\| \leq \|az\|_B\|w\|_B \leq \|a\|\|z\|_B\|w\|_B.$$

Assim, usando a desigualdade que acabamos de obter e que ${}_A\langle X, X\rangle$ é denso em A, concluímos que a igualdade $\langle az, w\rangle_B = \langle z, a^*w\rangle_B$ se verifica para todo $a \in A$.

Similarmente, prova-se que ${}_A\langle zb, w\rangle =_A \langle z, wb^*\rangle$, para todo $b \in B$.

Portanto, X satisfaz a condição (iii)'.

■

Sejam X um A-módulo de Hilbert (à direta) e Y um B-módulo de Hilbert (à direita). Seja $\phi : A \to \mathcal{L}(Y)$ um $*$-homomorfismo. Queremos construir um espaço vetorial $X \otimes_\phi Y$ possuindo uma estrutura de um B-módulo de Hilbert.

Seja $X \otimes_{alg} Y$ o produto tensorial algébrico dos espaços vetoriais X e Y. Consideramos Y como um A-módulo à esquerda através da ação $(a, y) \mapsto \phi(a)y$ e assim podemos construir o produto tensorial algébrico de X e Y sobre A, denotado por $X \odot_A Y$. Mais precisamente, $X \odot_A Y$ é o quociente do espaço vetorial produto tensorial $X \otimes_{alg} Y$ sobre $\mathbb{C}$ pelo subespaço

$$N := \text{span}\{xa \otimes y - x \otimes \phi(a)y : x \in X, y \in Y, a \in A\}.$$

Como podemos ver no Lema a, da Seção 9.5 de [21], $X \odot_A Y$ possui uma estrutura de B-módulo à direita com a ação em um tensor elementar dada por

$$(x \otimes y, b) \mapsto x \otimes yb.$$

Na próxima proposição, vamos ver que $X \odot_A Y$ possui uma estrutura de um B-módulo com produto interno.

Proposição 1.4.10. *Sejam A e B C^*-álgebras, X um A-módulo de Hilbert e Y um B-módulo de Hilbert. Seja $\phi : A \to \mathcal{L}(Y)$ um $*$-homomorfismo. Então $X \odot_A Y$ é um B-módulo com produto interno. Mais ainda, em tensores elementares o B-produto interno é dado por*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_B = \langle y_1, \phi(\langle x_1, x_2 \rangle_A) y_2 \rangle_B.$$

Demonstração: Vamos definir um B-pré-produto interno no produto tensorial algébrico $X \otimes_{alg} Y$ e, feito isto, vamos mostrar que $N' = \{z \in X \otimes_{alg} Y : \langle z, z \rangle_B = 0\}$ é exatamente o supespaço vetorial N que definimos acima. Ou seja, vamos provar que

$$N' = \text{span}\{xa \otimes y - x \otimes \phi(a)y : x \in X, y \in Y, a \in A\}.$$

Sejam $x \in X$ e $y \in Y$ fixados. A aplicação $X \times Y \to B$, $(x', y') \mapsto \langle y, \phi(\langle x, x' \rangle_A) y' \rangle_B$ é bilinear e, portanto, se estende a uma aplicação linear $T_{x,y} : X \otimes_{alg} Y \to B$ tal que

$$T_{x,y}(x' \otimes y') = \langle y, \phi(\langle x, x' \rangle_A) y' \rangle_B,$$

para quaisquer $x' \in X$ e $y' \in Y$. Por outro lado, seja $T^*_{x,y}$ a transformação de $X \otimes_{alg} Y$ em B dada por $z \mapsto (T_{x,y}(z))^*$. Então $T^*_{x,y}$ é conjudado-linear. Agora, a aplicação $(x, y) \mapsto T^*_{x,y}$ é uma bilinear de $X \times Y$ no espaço das transformações conjugado-lineares de $X \otimes_{alg} Y$ em B. Se $CL(X \otimes_{alg} Y, B)$ denota o espaço das transformações conjugado-lineares de $X \otimes_{alg} Y$ em B, segue que existe uma única aplicação linear $T^* : X \otimes_{alg} Y \to CL(X \otimes_{alg} Y, B)$ tal que

$$T^*(x \otimes y) = T^*_{x,y},$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Por fim, colocamos

$$\langle z, w \rangle_B := (T^*(z)(w))^*,$$

para $z, w \in X \otimes_{alg} Y$. Notemos que para $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \in X \otimes_{alg} Y$

tensores elementares, temos

$$\begin{aligned}\langle x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2\rangle_B &= (T^*(x_1\otimes y_1)(x_2\otimes y_2))^* = (T^*_{x_1,y_1}(x_2\otimes y_2))^*\\ &= (T_{x_1,y_1}(x_2\otimes y_2)^*)^* = T_{x_1,y_1}(x_2\otimes y_2)\\ &= \langle y_1, \phi(\langle x_1, x_2\rangle_A)y_2\rangle_B.\end{aligned}$$

Além disso, se $b\in B$,

$$\begin{aligned}\langle x_1\otimes y_1, (x_2\otimes y_2)b\rangle_B &= \langle x_1\otimes y_1, x_2\otimes (y_2 b)\rangle_B\\ &= \langle y_1, \phi(\langle x_1, x_2\rangle_A)y_2 b\rangle_B\\ &= \langle y_1, \phi(\langle x_1, x_2\rangle_A)y_2\rangle_B b\\ &= \langle x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2\rangle_B b.\end{aligned}$$

Vamos verificar agora a positividade de $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$.

Seja $z=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\in X\otimes_{alg} Y$. Então,

$$\begin{aligned}\langle z, z\rangle_B &= \sum_{i,j}\langle y_i, \phi(\langle x_i, y_i\rangle_A)y_j\rangle_B\\ &= \langle y, \phi^{(n)}(M)y\rangle,\end{aligned}$$

em que $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in Y^n$, $M\in M_n(A)$ é a matriz cujas entradas são dadas por $a_{ij}=\langle x_i, x_j\rangle_A$, para cada $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno usual definido no produto cartesiano de módulos de Hilbert (veja Exemplo 1.1.15).

O Lema 2.65 de [23] nos diz que a matriz M é positiva. Como ϕ é um $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras, ϕ é completamente positivo, donde $\phi^{(n)}(M)\geq 0$. Como resultado, $\langle z,z\rangle_B=\langle y,\phi^{(n)}(M)y\rangle\geq 0$.

Nosso último passo é mostrar que N' e N coincidem, em que

$$N=\operatorname{span}\{xa\otimes y - x\otimes\phi(a)y : x\in X, y\in Y, a\in A\},$$

e

$$N'=\{z\in X\otimes_{alg} Y : \langle z,z\rangle_B = 0\}.$$

Seja $z\in N$ da forma $xa\otimes y - x\otimes\phi(a)y$. Então, usando que ϕ é um $*$-homomorfismo, segue

$$\begin{aligned}\langle z,z\rangle_B &= \langle y, \phi(\langle xa, xa\rangle_A)y\rangle_B + \langle\phi(a)y, \phi(\langle x, x\rangle_A)\phi(a)y\rangle_B\\ &\quad -\langle y, \phi(\langle xa, x\rangle_A)\phi(a)y\rangle_B - \langle\phi(a)y, \phi(\langle x, xa\rangle_A)y\rangle_B\\ &= \langle y, \phi(\langle xa, xa\rangle_A)y\rangle_B + \langle\phi(a)y, \phi(\langle x, xa\rangle_A)y\rangle_B\\ &\quad -\langle y, \phi(\langle xa, xa\rangle_A)y\rangle_B - \langle\phi(a)y, \phi(\langle x, xa\rangle_A)y\rangle_B = 0.\end{aligned}$$

Assim, obtemos a inclusão $N \subseteq N'$.

Novamente, seja $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes_{alg} Y$ e, como fizemos anteriormente, escrevemos $\langle y, \phi^{(n)}(M)y\rangle$ para $\langle z, z\rangle_B$. Seja $T = \phi^{(n)}(M)$. Então, $T \geq 0$ e podemos considerar $T^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(Y^n)$ sua única raiz quadrada positiva. Temos que $T^{\frac{1}{2}}(y) = 0$, pois

$$\langle T^{\frac{1}{2}}(y), T^{\frac{1}{2}}(y)\rangle = \langle y, T(y)\rangle.$$

Analogamente, temos que $T^{\frac{1}{4}}(y) = 0$.

Consideramos agora X^n com a estrutura de $M_n(A)$-módulo de Hilbert. Então, sendo $m = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e se $|m| := \sqrt{\langle m, m\rangle_{M_n(A)}}$, temos que $|m| = M^{\frac{1}{2}}$.

Vamos usar agora o Lema 4.4 de [18]: Seja X um A-módulo de Hilbert, $x \in X$ e $0 < \alpha < 1$. Então existe um elemento w em X tal que $x = w|x|^{\alpha}$.

Por este resultado, obtemos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in X^n$ tal que $wM^{\frac{1}{4}} = m$. Escrevemos c_{ij} para a entrada i, j da matriz $M^{\frac{1}{4}}$. Uma vez que $T^{\frac{1}{4}} = \phi^{(n)}(M^{\frac{1}{4}})$, a matriz de $T^{\frac{1}{4}}$ é $(\phi(c_{ij}))_{i,j}$. Portanto,

$$x_j = \sum_i w_i c_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_j \phi(c_{ij}) y_j = 0.$$

Daí, $\sum_{i,j} w_i \otimes \phi(c_{ij}) y_j = 0$ e vem que

$$\sum_j x_j \otimes y_j = \sum_{i,j} w_i c_{ij} \otimes y_j = \sum_{i,j} (w_i c_{ij} \otimes y_j - w_i \otimes \phi(c_{ij}) y_j),$$

que é um elemento de N'. Donde $N = N'$.

Desta forma, $X \odot_A Y$ é, de fato, um B-módulo com produto interno.

■

Definição 1.4.11. *O completamento do B-módulo com produto interno $X \odot_A Y$, denotado por $X \otimes_\phi Y$, é chamado* produto tensorial interno *de X e Y (relativo a ϕ).*

Para fins da próxima demonstração, teremos Y um B-C bimódulo de imprimitividade e vamos considerar o produto tensorial interno relativo à inclusão de B na C^*-álgebra dos operadores adjuntáveis $\mathcal{L}(Y_C)$. Ou seja, neste caso, teremos $\phi = \iota_B$, em que $\iota_B(b)y = by$, para todo $y \in Y$ e $b \in B$. Neste caso, vamos denotar o produto tensorial interno $X \otimes_{\iota_B} Y$ simplesmente por $X \otimes_B Y$.

Proposição 1.4.12. *Sejam A, B e C C^*-álgebras e suponha que X seja um A-B bimódulo de imprimitividade e Y seja um $B-C$-bimódulo de imprimitividade. Então $Z = X \odot_B Y$ é um A-C bimódulo e existem únicos produtos internos avaliados em A e C, respectivamente, satisfazendo*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_C = \langle y_1, \langle x_1, x_2 \rangle_B y_2 \rangle_C$$

e

$${}_A\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle =_A \langle x_1 \, {}_B\langle y_1, y_2 \rangle, x_2 \rangle,$$

em que $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$. O produto tensorial interno $X \otimes_B Y$ é um A-C bimódulo de imprimitividade.

Demonstração: Por meio dos mesmos argumentos que utilizamos na Proposição 1.4.10, concluímos que A age sobre Z à esquerda e tal ação é dada em um tensor elementar por

$$(a, x \otimes y) \mapsto (ax) \otimes y.$$

Mais ainda, existe um produto interno em $X \odot_B Y$ com valores em A satisfazendo

$${}_A\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle =_A \langle x_1 \, {}_B\langle y_1, y_2 \rangle, x_2 \rangle,$$

sempre que $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$.

Exatamente como construímos na Proposição 1.4.10, C age à direita em $X \odot_B Y$ e tal ação é dada em tensores elementares por

$$(x \otimes y, c) \mapsto x \otimes (yc),$$

em que $c \in C$. Além disso, existe um produto interno em $X \odot_B Y$ com valores em C satisfazendo

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_C = \langle y_1, \langle x_1, x_2 \rangle_B y_2 \rangle_C,$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$.

Vamos mostrar que $X \odot_B Y$ é um A-C pré-bimódulo de imprimitividade.

Pelo Corolário 1.1.10, XB é denso em X e BY é denso em Y. Como ${}_A\langle X, X \rangle$ e $\langle Y, Y \rangle_C$ são densos em A e C, respectivamente, segue que ${}_A X \odot_B Y$ e $X \odot_B Y_C$ são cheios.

Seja $a \in A$. Então

$$\langle a(x_1 \otimes y_1), x_2 \otimes y_2 \rangle_C \quad = \quad \langle (ax_1) \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_C$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle y_1, \langle ax_1, x_2\rangle_B y_2\rangle_C \\
&= \langle y_1, \langle x_1, a^* x_2\rangle_B y_2\rangle_C \\
&= \langle x_1 \otimes y_1, (a^* x_2) \otimes y_2\rangle_C \\
&= \langle x_1 \otimes y_1, a^*(x_2 \otimes y_2)\rangle_C.
\end{aligned}
$$

Similarmente prova-se que

$$
{}_A\langle (x_1 \otimes y_1)c, x_2 \otimes y_2\rangle = {}_A\langle x_1 \otimes y_1, (x_2 \otimes y_2)c^*\rangle,
$$

para todo $c \in C$.

Além disso, se $z \in X$ e $w \in Y$,

$$
\begin{aligned}
{}_A\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2\rangle(z \otimes w) &= ({}_A\langle x_1\, {}_B\langle y_1, y_2\rangle, x_2\rangle z) \otimes w \\
&= (x_1 \langle x_2\, {}_B\langle y_2, y_1\rangle, z\rangle_B) \otimes w \\
&= x_1 \otimes (\langle x_2\, {}_B\langle y_2, y_1\rangle, z\rangle_B w) \\
&= x_1 \otimes ({}_B\langle y_1, y_2\rangle \langle x_2, z\rangle_B\, w) \\
&= x_1 \otimes ({}_B\langle y_1, \langle z, x_2\rangle_B y_2\rangle w) \\
&= x_1 \otimes (y_1 \langle \langle z, x_2\rangle_B y_2, w\rangle_C) \\
&= x_1 \otimes (y_1 \langle y_2, \langle x_2, z\rangle_B w\rangle_C) \\
&= (x_1 \otimes y_1)\langle x_2 \otimes y_2, z \otimes w\rangle_C.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Corolário 1.4.9, concluímos que $X \odot_B Y$ é um A-C pré-bimódulo de imprimitividade. Assim, o produto tensorial interno $X \otimes_B Y$ é um A-C bimódulo de imprimitividade.

■

Agora, temos todas as ferramentas para mostrar que Morita equivalência é de fato uma relação de equivalência. Como segue:

Proposição 1.4.13. *Morita equivalência é uma relação de equivalência entre C^*-álgebras.*

Demonstração: Acabamos de provar a transitividade na Proposição 1.4.12 e que Morita equivalência é uma relação simétrica, segue da Proposição 1.4.3. Já a reflexividade vimos no Exemplo 1.3.3.

■

Exemplo 1.4.14. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $M_n(\mathbb{C})$ e $M_m(\mathbb{C})$ são Morita equivalentes.*

Demonstração: Identificando $M_n(\mathbb{C})$ com $B(\mathbb{C}^n)$ e $M_m(\mathbb{C})$ com $B(\mathbb{C}^m)$, sabemos do Exemplo 1.3.2 que $M_n(\mathbb{C}) \sim_M \mathbb{C}$ bem como $M_m(\mathbb{C}) \sim_M \mathbb{C}$.

Uma vez que Morita equivalência é uma relação de equivalência, segue que $M_n(\mathbb{C})$ e $M_m(\mathbb{C})$ são Morita equivalentes.

Uma outra forma de mostrar a Morita equivalência entre $M_n(\mathbb{C})$ e $M_m(\mathbb{C})$, seria considerarmos $A = M_{n+m}(\mathbb{C})$, $p = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$ e $q = \sum_{i=n+1}^{n+m} e_{ii}$, em que denota a matriz cuja entrada a_{ii} é igual a 1, e todas as outras são nulas. Então p e q são projeção cheias e $M_n(\mathbb{C}) \cong pAp$ e $M_m(\mathbb{C}) \cong qAq$, e pelo Exemplo 1.3.4 obtemos $M_n(\mathbb{C}) \sim_M M_m(\mathbb{C})$. Ou ainda,

■

Lembremos que uma C^*-subálgebra B de uma C^*-álgebra A é dita ser um canto cheio se existe uma projeção cheia em $M(A)$ ($\overline{ApA} = A$) tal que $B = pAp$. Dois cantos cheios pAp e qAq são ditos *complementares* se $p + q = 1$. Vimos no Exemplo 1.3.4 que cantos cheios de uma C^*-álgebra são Morita equivalentes. No próximo teorema, vamos ver duas C^*-álgebras Morita equivalentes A e B como cantos complementares cheios de uma C^*-álgebra, chamada *álgebra de ligação.*

Teorema 1.4.15. *Sejam A e B C^*-álgebras. Então, A e B são Morita equivalentes se, e somente se, existe uma C^*-álgebra C com cantos complementares cheios isomorfos a A e B, respectivamente.*

Demonstração: Seja X um A-B bimódulo de imprimitividade e seja $\widetilde{X}$ seu espaço vetorial conjugado com a estrutura de B-A bimódulo de imprimitividade, definida na Proposição 1.4.3. Seja $M = X \oplus B$. De acordo com o Exemplo 1.1.15, M é um B-módulo de Hilbert.

Para $a \in A$, $b \in B$, $x, y \in X$, colocamos

$$L = \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \qquad (\ddagger)$$

para denotar a aplicação de $M \to M$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix},$$

em que $z \in X$ e $c \in B$.

Se C denota a coleção de todos as aplicações dessa forma, queremos mostrar que C é uma C^*-subálgebra de $\mathcal{L}(M)$. Primeiramente, vamos provar que o operador L em ($\ddagger$) é adjuntável e

$$L^* = \begin{pmatrix} a^* & y \\ \tilde{x} & b^* \end{pmatrix}.$$

Sejam $z, z' \in X$ e $c, c' \in B$. Então,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle_B = \left\langle \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z\rangle_B + bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle_B$$

$$\begin{aligned}
&= \langle az + xc, z'\rangle_B + (\langle y, z\rangle_B + bc)^* c' \\
&= \langle z, a^* z' + yc'\rangle_B + c^*\langle x, z'\rangle_B + c^* b^* c' \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^* z' + yc' \\ \langle x, z'\rangle_B + b^* c' \end{pmatrix} \right\rangle_B \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^* & y \\ \tilde{x} & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle_B .
\end{aligned}$$

Logo, C é, de fato, um subconjunto de $\mathcal{L}(M)$ fechado em relação à operação de involução. Além disso, é fácil ver que C é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(M)$, com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais de matrizes.

Vamos verificar agora que C é uma $*$-subálgebra de $\mathcal{L}(M)$. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'z + x'c \\ \langle y', z\rangle_B + b'c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} aa'z + ax'c + x\langle y', z\rangle_B + xb'c \\ \langle y, a'z + x'c\rangle_B + b\langle y', z\rangle_B + bb'c \end{pmatrix} \\
&= (\triangle).
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
(\triangle) &= \begin{pmatrix} (aa' +_A \langle x, y'\rangle) z + (ax' + xb')c \\ (\langle a'^* y, z\rangle_B + \langle y' b^*, z\rangle_B) + (\langle y, x'\rangle_B + bb')c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa' +_A \langle x, y'\rangle & ax' + xb' \\ \tilde{y}a' + b\tilde{y}' & \langle y, x'\rangle_B + bb' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ou seja, C é uma $*$-subálgebra de $\mathcal{L}(M)$ e

$$\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' +_A \langle x, y'\rangle & ax' + xb' \\ \tilde{y}a' + b\tilde{y}' & \langle y, x'\rangle_B + bb' \end{pmatrix},$$

para quaisquer $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $x, x', y, y' \in X$.

Resta mostrarmos que C é fechado em $\mathcal{L}(M)$, e como resultado teremos que C é uma C^*-álgebra.

Para isso, vamos provar que se $L \in \mathcal{L}(M)$ é dado por (‡), então

$$\max\{\|a\|, \|x\|_B, \|y\|_B, \|b\|\} \leq \|L\| \leq \|a\| + \|x\|_B + \|y\|_B + \|b\|. \quad (1.1)$$

Escrevendo

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

e usando a desigualdade triangular, é suficiente mostrarmos que cada parcela possui norma menor ou igual que a norma de sua entrada não nula. De forma mais precisa, temos a igualdade.

$$\left\|\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|a\|, \quad \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\| = \|b\|,$$

e

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|x\|_B, \quad \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|y\|_B.$$

De fato, como a inclusão de A em $\mathcal{L}(X_B)$ é injetiva, segue que $\|a\| = \sup_{\|x\|_B \leq 1} \|ax\|_B$, donde

$$\left\|\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|a\|.$$

Usando o fato que B possui unidade aproximada e que $\|xc\|_B \leq \|x\|_B\|c\|$, segue que

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|x\|_B.$$

Por Cauchy-Schwarz, temos que $\|\langle y, z\rangle_B\| \leq \|y\|_B\|z\|_B$. Colocando $z = \dfrac{y}{\|y\|_B}$, temos que $\|z\|_B = 1$ e

$$\|\langle y, z\rangle_B^* \langle y, z\rangle_B\| = \|\langle y, z\rangle_B\|^2 = \|\langle y, y\rangle_B\| = \|y\|_B^2.$$

Daí, obtemos a igualdade

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|y\|_B.$$

Claramente temos

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| = \|b\|.$$

Para a desigualdade do lado esquerdo de (1.1), observamos que

$$\begin{aligned} \|y\|_B^4 &= \|\langle y, y\rangle_B\|^2 = \left\| \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \langle y, y\rangle_B \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_B \right\| \\ &\leq \|\langle y, y\rangle_B\| \|L\| \|y\|_B = \|L\| \|y\|_B^3. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|x\|_B^4 &= \|\langle x, x\rangle_B\|^2 = \left\| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} 0 \\ \langle x, x\rangle_B \end{pmatrix} \right\rangle_B \right\| \\ &\leq \|x\|_B \|L\| \|\langle x, x\rangle_B\| = \|L\| \|x\|_B^3. \end{aligned}$$

Assim, $\|L\|$ domina $\|x\|_B$ e $\|y\|_B$. Novamente usando que a inclusão de A em $\mathcal{L}(X_B)$ é injetiva e, portanto, isométrica, podemos obter $x' \in X$ tal que $\|x'\|_B = 1$ e $\|ax'\|_B$ é aproximadamente $\|a\|$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \|a\|^2 \sim \|ax'\|_B^2 &= \|\langle ax', ax'\rangle_B\| \\ &= \left\| \left\langle \begin{pmatrix} ax' \\ 0 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_B \right\| \\ &\leq \|ax'\|_B \|L\| \|x'\|_B \\ &\leq \|a\| \|L\| \|x'\|_B^2 \\ &= \|a\| \|L\|, \end{aligned}$$

e portanto $\|a\| \leq \|L\|$.

Por fim, sendo $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma unidade aproximada para B,

$$\|b\|^2 = \lim_\lambda \|b^* b u_\lambda\| = \lim_\lambda \left\| \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} 0 \\ u_\lambda \end{pmatrix} \right\rangle_B \right\| \leq \|b\| \|L\|.$$

Logo, fica provado a desigualdade (1.1). Consequentemente, C é uma C^*-subálgebra de $\mathcal{L}(M)$.

Resta provarmos que A e B são cantos complementares cheios de C. Pelo que fizemos até aqui, fica claro que as aplicações

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

são $*$-homomorfismos injetivos de A e B em C, respectivamente. Seja p o operador adjuntável sobre M dado por

$$p\begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que $p = p^* = p^2$. Escrevemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para p, em que "1" é o operador identidade sobre X.

Analogamente, seja q o operador $\mathcal{L}(M)$ definido por

$$q\begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

e escrevemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para q, em que "1" é o operador identidade sobre B. Novamente temos $q = q^* = q^2$.

Além disso, prova-se que

$$p\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$$

bem como

$$q\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Logo, as projeções p e q são multiplicadores de C e temos $pCp \cong A$ e $qCq \cong B$. Mais ainda, $p + q = 1$.

Agora, para concluir a demonstração, só precisamos mostrar que p e q são projeções cheias. Mas,

$$CpC = \left\{ \begin{pmatrix} aa' & ax' \\ \tilde{y}a' & \langle y, x' \rangle_B \end{pmatrix} : a, a' \in A, y, x' \in X \right\}$$

e assim, como X é um B-módulo cheio, AX é denso em X com a norma $\| \cdot \|_A$ e as normas $\| \cdot \|_A$ e $\| \cdot \|_B$ coincidem (Corolário 1.3.7), usamos o lado direito da desigualdade (1.1) para obter que p é uma projeção cheia.

Com argumentos semelhantes, prova-se que

$$CqC = \left\{ \begin{pmatrix} {}_A\langle x, y' \rangle & xb' \\ b\tilde{y}' & bb' \end{pmatrix} : b, b' \in B, x, y' \in X \right\}$$

é denso em C, donde q é projeção cheia.

Portanto, A e B são cantos complementares cheios de C.

A recíproca segue do Exemplo 1.3.4.

■

Definição 1.4.16. *Seja X um A-B bimódulo de imprimitividade. A* álgebra de ligação *de X é a C^*-álgebra de matrizes construída no Teorema 1.4.15.*

A álgebra de ligação é tão importante quanto o resultado apresentado no Teorema 1.4.15. Por exemplo, tal C^*-álgebra tem um papel fundamental no teorema de Brown-Green-Rieffel, que aqui se encontra na Seção 4.3.

Capítulo 2

Fibrados de Fell

Neste capítulo, definimos fibrados de Fell sobre grupos discretos e construímos suas C^*-álgebras seccionais cheia e reduzida. A primeira, é obtida de uma forma mais abstrata, a partir da C^*-álgebra envolvente de uma certa $*$-álgebra e a segunda, é definida de maneira mais concreta, como a C^*-álgebra gerada pela imagem de uma $*$-representação injetiva da $*$-álgebra relacionada a um fibrado de Fell. As principais referências usadas foram [13], [15], [14], [4].

Ao longo de todo o capítulo, G é um grupo discreto com elemento neutro e.

2.1 A C^*-álgebra seccional cheia de um fibrado de Fell

Nesta seção, definimos fibrados de Fell e apresentamos alguns exemplos. Obtemos uma relação entre um fibrado de Fell e uma determinada $*$-álgebra, e a partir disso definimos a C^*-álgebra seccional cheia.

Definição 2.1.1. *Um* fibrado de Fell *sobre um grupo discreto G é uma coleção de espaços de Banach $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ munida com uma família de aplicações bilineares $\cdot : B_s \times B_t \to B_{st}$ e uma família de aplicações conjugado lineares $* : B_t \to B_{t^{-1}}$, chamadas de multiplicação e involução, respectivamente, satisfazendo, para quaisquer $b_s \in B_s, b_t \in B_t, b_r \in B_r$, e $s, t, r \in G$:*

(i) *As operações de multiplicação são associativas: $(b_s b_t) b_r = b_s (b_t b_r)$;*

(ii) $*: B_t \to B_{t^{-1}}$ *é involutiva e isométrica;*

(iii) $(b_s b_t)^* = b_t^* b_s^*$;

(iv) $\|b_s b_t\| \leq \|b_s\| \|b_t\|$;

(v) $\|b_t^* b_t\| = \|b_t\|^2$;

(vi) *Para todo* $b_t \in B_t$, *existe* $a \in B_e$ *tal que* $b_t^* b_t = a^* a$.

Para cada $t \in G$, o espaço de Banach B_t é denomidado a *fibra da entrada* t ou *fibra com entrada* t do fibrado de Fell $\mathcal{B}$.

Observação 2.1.2. *As condições (i)-(iv) nos dizem que* B_e *é uma* $*$-*álgebra de Banach. Adicionando a condição (v) temos que* B_e *é, de fato, uma* C^*-*álgebra.*

Antes da próxima observação, para fixar notações, com $B_t B_s$ queremos dizer o espaço vetorial fechado gerado por $\{b_t b_s : b_t \in B_t, b_s \in B_s\}$.

Observação 2.1.3. *Para cada* $g \in G$, $B_{g^{-1}} B_g$ *é um ideal em* B_e.

Demonstração: Suponha que $a \in B_{g^{-1}} B_g$ seja da forma $a_{g^{-1}} a_g$, com $a_{g^{-1}} \in B_{g^{-1}}$ e $a_g \in B_g$. Seja $b \in B_e$. Então,

$$ba = (ba_{g^{-1}})a_g \in B_e B_{g^{-1}} B_g \subseteq B_{g^{-1}} B_g$$

e

$$ab = a_{g^{-1}}(a_g b) \in B_{g^{-1}} B_g B_e \subseteq B_{g^{-1}} B_g.$$

Uma vez que elementos da forma $a_{g^{-1}} a_g$ geram $B_{g^{-1}} B_g$, segue o resultado.

■

Exemplo 2.1.4. *Seja* G *um grupo discreto. Colocamos, para cada* $t \in G$, $B_t = \mathbb{C} \times \{t\}$, *com a estrutura de espaço de Banach obtida através da bijeção canônica entre* $\mathbb{C} \times \{t\}$ *e* $\mathbb{C}$. *Escrevemos* $\lambda\delta_t$ *para* (λ, t) *e assim* $B_t = \mathbb{C}\delta_t$. *Seja* $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$ *com as operações de multiplicação e involução dadas por*

$$\lambda\delta_s \alpha\delta_t = \lambda\alpha\delta_{st}, \quad e \quad (\lambda\delta_t)^* = \bar{\lambda}\delta_{t^{-1}},$$

para $s, t \in G$ *e* $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$. *Então,* $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$ *é um fibrado de Fell, chamado* fibrado trivial.

Exemplo 2.1.5. *Seja $A = M_3(\mathbb{C})$. Sejam B_{-1}, B_0 e B_1 os subespaços de A gerados, respectivamente, pelas matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$ colocamos $B_n = \{0\}$. Então, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ munido com as operações de multiplicação e involução usuais de matrizes é um fibrado de Fell.

Demonstração: Notemos que B_0 é uma C^*-álgebra, $B_1^* = B_{-1}$ bem como $B_1^* = B_{-1}$. Além disso,

$$B_{-1}B_1 =, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad B_1B_{-1} =, \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $B_{-1}B_1 \subseteq B_0$ e $B_1B_{-1} \subseteq B_0$. Observamos também que $B_0B_1 = B_1 = B_1B_0$, $B_{-1}B_0 = B_{-1} = B_0B_{-1}$, $B_1B_1 = \{0\} = B_2$ e $B_{-1}B_{-1} = \{0\} = B_{-2}$.

Se

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz em B_{-1}, então

$$a^*a = \begin{pmatrix} |a_{21}|^2 + |a_{31}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

é um elemento positivo em B_0. Analogamente, $a^*a \geq 0$ em B_0, para toda matriz $a \in B_1$.

Os outros axiomas da Definição 2.1.1 seguem diretamente do fato que $M_n(\mathbb{C})$ é uma C^*-álgebra. Donde $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um fibrado de Fell.

■

Exemplo 2.1.6. *Sejam A e B C^*-álgebras e X um $A - B$-bimódulo de imprimitividade. Seja C a álgebra de ligação de X. Sejam B_{-1}, B_0*

e B_1 os subespaços de C definidos, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{X} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, colocamos $B_n = \{0\}$. Então, com as operações herdadas de C, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um fibrado de Fell.

Demonstração: Vamos mostrar somente a condição (vi) da Definição 2.1.1.

Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{x} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle x, x\rangle_B \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle x, x\rangle_B^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle x, x\rangle_B^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{x} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}_A\langle x, x\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}_A\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_A\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um fibrado de Fell.

■

Exemplo 2.1.7. *Seja D o disco unitário $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o círculo unitário. Sejam $A = C(D)$ a C^*-álgebra das funções contínuas com valores complexos sobre D e G o grupo multiplicativo de dois elementos $\{-1, 1\}$. Definimos os seguintes espaços fechados B_1 e B_{-1} de A:*

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{f \in A : f(-z) = f(z), \text{ para todo } z \in S^1\}, \\
B_{-1} &= \{f \in A : f(-z) = -f(z), \text{ para todo } z \in S^1\}.
\end{aligned}$$

Então, com as operações herdadas de A, $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$ é um fibrado de Fell.

Demonstração: Como a operação de multiplicação em $A = C(D)$ é definida pontualmente, fica fácil ver que $B_t B_s \subseteq B_{ts}$, para $t, s \in \{-1, 1\}$. Também $B_1^* = B_1$ e $B_{-1}^* = B_{-1}$.

Vamos verificar a condição (vi) da Definição 2.1.1. Seja $f \in B_{-1}$.

Observamos que se $g \in A$ é dada por $D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |f(z)|$, para $z \in S^1$ temos

$$g(-z) = |f(-z)| = |-f(z)| = |f(z)|.$$

Donde $g \in B_1$ e $f^*f = g^*g$.

Portanto, $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ é um fibrado de Fell.

■

Proposição 2.1.8. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Se $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para B_e, então*

$$\lim_\lambda b_t u_\lambda = \lim_\lambda u_\lambda b_t = b_t,$$

para quaisquer $t \in G$ e $b_t \in B_t$.

Demonstração: De fato, uma vez que $b_t^*b_t \in B_e$, vale que $b_t^*b_t = \lim_\lambda b_t^*b_t u_\lambda = \lim_\lambda u_\lambda b_t^*b_t$. Assim, segue do axioma (v) da Definição 2.1.1 que

$$\begin{aligned} \|b_t - b_t u_\lambda\| &= \|(b_t - b_t u_\lambda)^*(b_t - b_t u_\lambda)\| \\ &= \|b_t^*b_t - b_t^*b_t u_\lambda - u_\lambda b_t^*b_t + u_\lambda b_t^*b_t u_\lambda\| \to 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_\lambda b_t u_\lambda = b_t$. Para provar que $b_t = \lim_\lambda u_\lambda b_t$, basta aplicar o que já foi feito para b_t^* e usar que a operação de involução é isométrica.

■

Observação 2.1.9. *Podemos perceber na demonstração da Proposição 2.1.8 que*

$$b_t = \lim_\lambda b_t v_\lambda$$

e

$$b_t = \lim_\lambda v'_\lambda b_t,$$

sendo $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ e $(v'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ unidades aproximadas para os ideais $B_{t^{-1}}B_t$ e $B_tB_{t^{-1}}$, respectivamente.

Nosso objetivo agora é, partindo de um fibrado de Fell, construir uma C^*-álgebra. Para isso, consideramos o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dado por

$$C_c(\mathcal{B}) = \left\{ \xi : G \to \bigcup_{t\in G} B_t : \xi(t) \in B_t,\ \forall t \in G \text{ e } \operatorname{supp}(\xi) \text{ é finito} \right\}$$

com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Ou seja, $C_c(\mathcal{B})$ é soma direta $\oplus_{g\in G}B_g$.

Na próxima proposição, vamos definir em $C_c(\mathcal{B})$ uma estrutura de $*$-álgebra.

Proposição 2.1.10. *Seja $\mathcal{B}=\{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Definimos em $C_c(\mathcal{B})$ as operações de multiplicação e involução da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rcl} * : C_c(\mathcal{B})\times C_c(\mathcal{B}) & \to & C_c(\mathcal{B}) \\ (\xi,\eta) & \mapsto & \xi*\eta, \end{array}$$

em que $(\xi*\eta)(s)=\sum_{t\in G}\xi(t)\eta(t^{-1}s)$, para todo $s\in G$, e

$$\begin{array}{rcl} * : C_c(\mathcal{B}) & \to & C_c(\mathcal{B}) \\ \xi & \mapsto & \xi^*, \end{array}$$

em que $\xi^*(t)=\xi(t^{-1})^*$, para todo $t\in G$. Então, $C_c(\mathcal{B})$ é uma $*$-álgebra.

Demonstração: A operação de multiplicação $*$ é bilinear, pois a multiplicação $\cdot\ :\ B_s\times B_t\to B_{st}$ é bilinear. Vamos verificar que $*$ é associativa.

De fato, sejam ξ, η e ζ em $C_c(\mathcal{B})$. Seja $s\in G$. Usando o axioma de bilinearidade da multiplicação em $\mathcal{B}$, temos

$$\begin{aligned}
((\xi*\eta)*\zeta)(s) &= \sum_{t\in G}(\xi*\eta)(t)\zeta(t^{-1}s)\\
&= \sum_{t\in G}\left(\sum_{r\in G}\xi(r)\eta(r^{-1}t)\right)\zeta(t^{-1}s)\\
&= \sum_{t\in G}\sum_{r\in G}\xi(r)\eta(r^{-1}t)\zeta(t^{-1}s)\\
&= \sum_{r\in G}\sum_{t\in G}\xi(r)\eta(r^{-1}t)\zeta(t^{-1}s)\\
&= \sum_{r\in G}\xi(r)\left(\sum_{t\in G}\eta(r^{-1}t)\zeta(t^{-1}s)\right)\\
&= \sum_{r\in G}\xi(r)\left(\sum_{t\in G}\eta(r^{-1}t)\zeta(t^{-1}rr^{-1}s)\right).
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t' = r^{-1}t$ e substituindo vem que

$$\begin{aligned}((\xi * \eta) * \zeta)(s) &= \sum_{r \in G} \xi(r) \left(\sum_{t' \in G} \eta(t')\zeta(t'^{-1}r^{-1}s) \right) \\ &= \sum_{r \in G} \xi(r)(\eta * \zeta)(r^{-1}s) \\ &= (\xi * (\eta * \zeta))(s).\end{aligned}$$

Donde $*$ é associativa.

Vejamos que $(\xi * \eta)^* = \eta^* * \xi^*$. Para $s \in G$,

$$\begin{aligned}(\xi * \eta)^*(s) = \big((\xi * \eta)(s^{-1})\big)^* \\ &= \left(\sum_{t \in G} \xi(t)\eta(t^{-1}s^{-1}) \right)^* \\ &= \sum_{t \in G} \eta(t^{-1}s^{-1})^* \xi(t)^* \\ &= \sum_{t \in G} \eta^*(st)\xi^*(t^{-1}) \\ &= \sum_{t \in G} \eta^*(st)\xi^*((st)^{-1}s).\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t' = st$, obtemos

$$\begin{aligned}(\xi * \eta)^*(s) &= \sum_{t' \in G} \eta^*(t')\xi^*(t'^{-1}s) \\ &= (\eta^* * \xi^*)(s),\end{aligned}$$

concluindo que $(\xi * \eta)^* = \eta^* * \xi^*$.

Mais ainda, observando que a operação de involução de $\mathcal{B}$ é involutiva, temos para todo $t \in G$

$$(\xi^*)^*(t) = (\xi^*(t^{-1}))^* = (\xi(t)^*)^* = \xi(t).$$

Portanto, estas operações de multiplicação e involução fazem de $C_c(\mathcal{B})$ uma $*$-álgebra.

■

Observação 2.1.11. *A função* $\|\cdot\|_1 : C_c(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^+$, $\xi \mapsto \sum_{t \in G} \|\xi(t)\|$ *faz de* $C_c(\mathcal{B})$ *uma* $*$*-álgebra normada.*

Lembremos que se P é uma sentença lógica, representamos por $[P]$

o valor 1 se a sentença P for verdadeira, e 0 se a sentença P for falsa. Por exemplo, o símbolo $[s = t]$ tem valor 1 se $s = t$. Caso contrário, $[s = t] = 0$.

Proposição 2.1.12. *Para cada $t \in G$, consideremos a transformação linear $j_t : B_t \to C_c(\mathcal{B})$ dada por*

$$j_t(b_t) \mid_s = [s = t] b_t,$$

para todo $s \in G$. Então $C_c(\mathcal{B}) = \oplus_{t \in G} j_t(B_t)$ e, para quaisquer $s, t \in G$ e $b_t \in B_t$, $b_s \in B_s$, vale que:

(i) $\|j_t(b_t)\|_1 = \|b_t\|$*;*

(ii) $j_s(b_s) * j_t(b_t) = j_{st}(b_s b_t)$*;*

(iii) $j_t(b_t)^* = j_{t^{-1}}(b_t^*)$*.*

Demonstração: Seja $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Para cada $t \in G$, seja $b_t = \xi(t)$. Então, se $s \in G$, temos que

$$\left(\sum_{t \in G} j_t(b_t) \right)(s) = \sum_{t \in G} j_t(b_t) \mid_s = b_s = \xi(s).$$

Além disso, se $\sum_{t \in G} j_t(b_t) = 0$ e $s \in G$, segue que

$$b_s = \left(\sum_{t \in G} j_t(b_t) \right)(s) = 0,$$

donde $j_t(b_t) = 0$, para cada t. Logo, $C_c(\mathcal{B}) = \oplus_{t \in G} j_t(B_t)$.

Para o item (i), observamos que

$$\|j_t(b_t)\|_1 = \sum_{s \in G} \|j_t(b_t)(s)\| = \|j_t(b_t)(t)\| = \|b_t\|.$$

Já o item (ii) segue do seguinte cálculo:

$$(j_s(b_s) * j_t(b_t))(r) = b_s j_t(b_t)(s^{-1} r) = [r = st] b_s b_t = j_{st}(b_s b_t)(r),$$

e portanto $(j_s(b_s) * j_t(b_t) = j_{st}(b_s b_t)$. De mesma forma,

$$j_t(b_t)^*(s) = j_t(b_t)(s^{-1})^* = [s = t^{-1}] b_t^*$$

e segue que $j_t(b_t)^* = j_{t^{-1}}(b_t^*)$.

■

Proposição 2.1.13. *Sejam $\pi : C_c(\mathcal{B}) \to A$ uma $*$-representação de $C_c(\mathcal{B})$ em uma C^*-álgebra A e $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Então $\|\pi(\xi)\| \leq \|\xi\|_1$.*

Demonstração: Se π é uma $*$-representação de $C_c(\mathcal{B})$, as afirmações (ii) e (iii) da Proposição 2.1.12 implicam que $\pi \circ j_e : B_e \to A$ é um $*$-homomorfismo de C^*-álgebras. Assim,

$$\|\pi(j_e(b_e))\| \leq \|b_e\|, \text{ para todo } b_e \in B_e.$$

Por outro lado, dado $b_t \in B_t$, $b_t^* b_t$ é um elemento de B_e. Desta forma,

$$\|\pi(j_t(b_t))\|^2 = \|\pi(j_t(b_t))^* \pi(j_t(b_t))\| = \|\pi(j_e(b_t^* b_t))\| \leq \|b_t^* b_t\| = \|b_t\|^2.$$

Ou seja, $\|\pi(j_t(b_t))\| \leq \|b_t\|$.

Agora, para um elemento arbitrário ξ em $C_c(\mathcal{B})$, novamente usando a Proposição 2.1.12, escrevemos $\xi = \sum_{t \in G} j_t(\xi_t)$, em que $\xi_t = \xi(t)$. Daí,

$$\|\pi(\xi)\| \leq \sum_{t \in G} \|\pi(j_t(\xi_t))\| \leq \sum_{t \in G} \|\xi_t\| = \|\xi\|_1.$$

Portanto, $\|\pi(\xi)\| \leq \|\xi\|_1$, para todo $\xi \in C_c(\mathcal{B})$.

■

Como uma consequência da proposição anterior, segue que $C_c(\mathcal{B})$ é uma $*$-álgebra admissível.

Definição 2.1.14. *A C^*-*álgebra seccional cheia *de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$, denotada por $C^*(\mathcal{B})$, é a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra $C_c(\mathcal{B})$.*

Exemplo 2.1.15. *Seja $G = \mathbb{Z}$ e seja $\mathcal{B}$ o fibrado trivial. Ou seja, $B_n = \mathbb{C} \times \{n\} = \mathbb{C}\delta_n$. Então, $C^*(\mathcal{B}) \cong C(S^1)$.*

Demonstração: Primeiramente, observamos que $C^*(\mathcal{B})$ é abeliana, pois $\mathbb{Z}$ é um grupo abeliano, bem como a C^*-álgebra dos números complexos. Além disso, o elemento δ_1 é unitário e gera $C^*(\mathcal{B})$, pois $(\delta_1)^n = \delta_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Desta forma, sabemos que $C^*(\mathcal{B}) \cong C(\sigma(\delta_1))$, em que $\sigma(\delta_1)$ denota o espectro do elemento δ_1. Uma vez que δ_1 é unitário, temos que $\sigma(\delta_1) \subseteq S^1$ e, portanto, precisamos mostrar que $S^1 \subseteq \sigma(\delta_1)$.

De fato, seja $\lambda \in S^1$. Consideremos a aplicação

$$\tau_\lambda : \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\delta_n \quad \to \quad \mathbb{C}$$

$$\sum_i \alpha_i \delta_i \quad \mapsto \quad \sum_i \alpha_i \lambda^i.$$

Então, para α, $\beta \in \mathbb{C}$ e $n, m \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}\tau_\lambda(\alpha\delta_n\beta\delta_m) &= \tau_\lambda(\alpha\beta\delta_{n+m}) = \alpha\beta\lambda^{n+m} \\ &= \alpha\lambda^n\beta\lambda^m = \tau_\lambda(\alpha\delta_n)\tau_\lambda(\beta\delta_m)\end{aligned}$$

e

$$\tau_\lambda(\alpha\delta_n)^* = (\alpha\lambda^n)^* = \bar{\alpha}\lambda^{-n} = \tau_\lambda((\alpha\delta_n)^*).$$

Logo, τ_λ é uma $*$-representação de $C_c(\mathcal{B}) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}\delta_n$ e, segue da propriedade universal de $C^*(\mathcal{B})$, que existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\tau_\lambda} : C^*(\mathcal{B}) \to \mathbb{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C_c(\mathcal{B}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\tau_\lambda"'] & C^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "\widetilde{\tau_\lambda}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

comuta.

Donde, $\widetilde{\tau_\lambda}$ é um caráter sobre $C^*(\mathcal{B})$, ou seja, um homomorfismo não nulo de $C^*(\mathcal{B})$ em $\mathbb{C}$. Portanto,

$$\lambda = \tau_\lambda(\delta_1) = \widetilde{\tau_\lambda}(\delta_1) \in \sigma(\delta_1)$$

e concluímos que $C^*(\mathcal{B}) \cong C(S^1)$.

■

Observação 2.1.16. *Se G é um grupo discreto e $\mathcal{B} = \{\mathbb{C}\delta_t\}_{t\in G}$ é o fibrado trivial, $C^*(\mathcal{B})$ é chamada C^*-*álgebra do grupo *G e é denotada por $C^*(G)$.*

2.2 A representação regular

Nesta seção, estamos interessados em construir uma representação fiel de $C_c(\mathcal{B})$, que será chamada *representação regular*. A partir dela, será definida uma outra C^*-álgebra relacionada a um fibrado de Fell. Uma importante consequência da representação regular é que podemos considerar $C_c(\mathcal{B})$ como uma $*$-subálgebra de $C^*(\mathcal{B})$ e, além disso, $C^*(\mathcal{B})$ é uma C^*-álgebra graduada, cuja definição veremos no Capítulo 5.

Começamos os preparativos para construir a representação regular definindo uma estrutura de B_e-módulo com produto interno no espaço vetorial $C_c(\mathcal{B})$.

Proposição 2.2.1. *O espaço vetorial $C_c(\mathcal{B})$ é um B_e-módulo com produto interno com a ação de módulo dada por*

$$\begin{array}{rcl} C_c(\mathcal{B}) \times B_e & \to & C_c(\mathcal{B}) \\ (\xi, a) & \mapsto & \xi a, \end{array}$$

em que $(\xi a)(t) = \xi(t)a$, para todo $t \in G$, e produto interno

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_e} : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) & \to & B_e \\ (\xi, \eta) & \mapsto & \displaystyle\sum_{t \in G} \xi(t)^* \eta(t), \end{array}$$

para $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$.

Demonstração: As propriedades de produto interno e de ação de módulo seguem diretamente dos axiomas de fibrado de Fell e da estrutura de $*$-álgebra de $C_c(\mathcal{B})$.

■

Denotaremos o completamento do B_e-módulo com produto interno $C_c(\mathcal{B})$ por $l_2(\mathcal{B})$.

Nosso objetivo agora é construir uma $*$-representação de $C_c(\mathcal{B})$ na C^*-álgebra dos operadores adjuntáveis sobre $l_2(\mathcal{B})$. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.2.2. *Seja $b_s \in B_s$ e a um elemento positivo de B_e. Então*

$$b_s^* a b_s \leq \|a\| b_s^* b_s.$$

Demonstração: De fato, sabemos que $a \leq \|a\|$ na unitização $\widetilde{B_e}$. Sendo assim, se $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma unidade aproximada para B_e e $\lambda \in \Lambda$, segue que

$$0 \leq u_\lambda b_s^* (\|a\| - a) b_s u_\lambda = \|a\| u_\lambda b_s^* b_s u_\lambda - u_\lambda b_s^* a b_s u_\lambda.$$

Uma vez que B_e^+ é fechado, concluímos que $b_s^* a b_s \leq \|a\| b_s^* b_s$.

■

A partir de agora, para facilitar a notação, vamos denotar simplesmente por b_t a imagem de um elemento $b_t \in B_t$ em $C_c(\mathcal{B})$ pela transformação linear $j_t : B_t \to C_c(\mathcal{B})$ definida na Proposição 2.1.12. Assim, $C_c(\mathcal{B}) = \oplus_{t \in G} B_t$. Ficará claro pelo contexto quando estaremos nos referindo a b_t como um elemento de $C_c(\mathcal{B})$ ou como um elemento do espaço de Banach B_t.

Para cada $t \in G$ e para cada $b_t \in B_t$, definimos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_{b_t} : C_c(\mathcal{B}) & \to & C_c(\mathcal{B}) \\ \xi & \mapsto & b_t * \xi. \end{array}$$

Notemos que $(b_t * \xi)(s) = b_t \xi(t^{-1}s)$, para todo $s \in G$. É fácil ver que $\widetilde{T}_{b_t}$ é linear, pois a multiplicação $*$ em $C_c(\mathcal{B})$ é bilinear. Mais ainda, segue do Lema 2.2.2, que $\|\widetilde{T}_{b_t}(\xi)\| \leq \|b_t\| \|\xi\|_{B_e}$, donde $\widetilde{T}_{b_t}$ se estende a um operador linear $T_{b_t} : l_2(\mathcal{B}) \to l_2(\mathcal{B})$ tal que $\|T_{b_t}\| \leq \|b_t\|$.

A seguinte proposição nos diz que T_{b_t} é um operador adjuntável em $l_2(\mathcal{B})$:

Proposição 2.2.3. *T_{b_t} é adjuntável e ${T_{b_t}}^* = T_{b_t^*}$.*

Demonstração: Primeiramente, consideramos ξ, $\eta \in C_c(\mathcal{B})$. Então,

$$\langle T_{b_t}\xi, \eta \rangle_{B_e} = \sum_{s \in G} \xi(t^{-1}s)^* b_t^* \eta(s) = \sum_{s \in G} \xi(t^{-1}s)^* b_t^* \eta(tt^{-1}s).$$

Fazendo a mudança de variável $s' = t^{-1}s$ e substituindo na igualdade acima, vem que

$$\langle T_{b_t}\xi, \eta \rangle_{B_e} = \sum_{s' \in G} \xi(s')^* b_t^* \eta(ts') = \sum_{s' \in G} \xi(s') T_{b_t^*}(\eta)(s') = \langle \xi, T_{b_t^*}\eta \rangle_{B_e}.$$

Agora, se ξ, $\eta \in l_2(\mathcal{B})$, da continuidade de T_{b_t} e $T_{b_t^*}$ segue que

$$\begin{array}{rcl} \langle T_{b_t}(\xi), \eta \rangle_{B_e} & = & \lim\limits_m \langle T_{b_t}(\xi_m), \eta_m \rangle_{B_e} = \lim\limits_m \langle \xi_m, T_{b_t^*}(\eta_m) \rangle_{B_e} \\ & = & \langle \xi, T_{b_t^*}(\eta) \rangle_{B_e}, \end{array}$$

em que $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\eta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ são sequências em $C_c(\mathcal{B})$ convergindo a ξ e η, respectivamente.

Logo, ${T_{b_t}}^* = T_{b_t^*}$.

■

Proposição 2.2.4. *Sejam $a_t, b_t \in B_t$, $b_s \in B_s$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:*

(i) $T_{a_t + \lambda b_t} = T_{a_t} + \lambda T_{b_t}$;

(ii) $T_{b_t} T_{b_s} = T_{b_t b_s}$.

Demonstração: (i) Para $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, vale que

$$T_{a_t + \lambda b_t}(\xi) = (a_t + \lambda b_t) * \xi = a_t * \xi + \lambda b_t * \xi = T_{a_t}(\xi) + \lambda T_{b_t}(\xi).$$

Para o caso $\xi \in l_2(\mathcal{B})$, basta argumentar por continuidade.

(ii) Novamente, sendo $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, temos que

$$T_{b_t}(T_{b_s}(\xi)) = b_t * (b_s * \xi) = (b_t * b_s) * \xi = (b_t b_s) * \xi = T_{b_t b_s}(\xi).$$

O caso geral em que $\xi \in l_2(\mathcal{B})$ segue por continuidade.

■

Corolário 2.2.5. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T : C_c(\mathcal{B}) & \to & \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B})) \\ \xi & \mapsto & \sum_{t\in G} T_{\xi(t)}, \end{array}$$

é um $*$-homomorfismo injetivo.

Demonstração: As proposições 2.2.3 e 2.2.4 nos dizem que T é um $*$-homomorfismo. Assim, resta somente verificarmos que T é injetor.

Seja $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ tal que $T(\xi) = 0$. Seja $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada para B_e. Então, para $\lambda \in \Lambda$ e $s \in G$,

$$0 = T(\xi)(j_e(u_\lambda)) \mid_s = \sum_{t\in G} \xi(t) j_e(u_\lambda)(t^{-1}s).$$

Escolhendo $s = t$, obtemos que $\xi(t)u_\lambda = 0$. Como $\lambda \in \Lambda$ é arbitrário, segue da Proposição 2.1.8 que $\xi(t) = 0$.

Portanto, $\xi = 0$ e T é um $*$-homomorfismo injetivo.

■

O $*$-homomorfismo T da proposição acima é chamado *representação regular à esquerda* de $C_c(\mathcal{B})$.

Definição 2.2.6. *A* C^*-álgebra seccional reduzida *do fibrado de Fell $\mathcal{B}$, denotada por $C_r^*(\mathcal{B})$, é o fecho de $T(C_c(\mathcal{B}))$ em $\mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}))$.*

Corolário 2.2.7. *A C^*-álgebra seccional cheia de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ é o completamento de $C_c(\mathcal{B})$ na norma*

$$\begin{array}{rcl} |||\cdot||| : C_c(\mathcal{B}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ \xi & \mapsto & \sup\{\|\pi(\xi)\| : \pi \textit{ é } *\textit{-representação de } C_c(\mathcal{B})\}. \end{array}$$

Demonstração: Sabemos do Teorema A.1.3 que $C^*(\mathcal{B})$ é o completamento de $C_c(\mathcal{B})/N$ na norma

$$|||\xi + N||| = \sup\{\|\pi(\xi)\| : \pi \text{ é } *\text{-representação de } C_c(\mathcal{B})\},$$

em que $N = \{\eta \in C_c(\mathcal{B}) : \sup_\pi \|\pi(\eta)\| = 0\}$.

Neste caso, o Corolário 2.2.5 implica que $N = \{0\}$, ou seja, a projeção canônica $\iota : C_c(\mathcal{B}) \to C_c(\mathcal{B})/N$ é injetiva e a C^*-álgebra envolvente de $C_c(\mathcal{B})$ é simplesmente o completamento de $C_c(\mathcal{B})$ na norma

$$|||\xi||| = \sup\{\|\pi(\xi)\| : \pi \text{ é } *\text{-representação de } C_c(\mathcal{B})\}.$$

$\blacksquare$

Observação 2.2.8. *Pela propriedade universal da C^*-álgebra envolvente, existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{T} : C^*(\mathcal{B}) \to C^*_r(\mathcal{B})$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} C_c(\mathcal{B}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "T"'] & C^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "\widetilde{T}"] \\ & C^*_r(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

comuta, em que ι é a inclusão de $C_c(\mathcal{B})$ em $C^*(\mathcal{B})$.

Definição 2.2.9. *O fibrado de Fell $\mathcal{B}$ é dito ser* amenable *se $\widetilde{T}$ é injetivo.*

O leitor interessado em mais detalhes sobre fibrados de Fell amenable pode encontrá-los em [10].

Capítulo 3

Produtos Cruzados

Neste capítulo definimos o conceito de ação parcial de um grupo discreto em C^*-álgebras, que é uma generalização de ação global. Depois, mostramos que existe um fibrado de Fell associado a uma ação parcial, através do qual definimos os produtos cruzados parciais cheio e reduzido, aplicando o que desenvolvemos no Capítulo 2. As principais referências que usamos são [11], [12] e [19].

Na última seção, apresentamos brevemente a teoria de produtos cruzados no caso de ações globais de grupos localmente compactos. No caso em que a ação é de um grupo discreto abeliano, mostramos que é possível obter uma ação do seu grupo dual no produto cruzado resultante, muito embora isto seja possível no caso mais geral de grupos localmente compactos abelianos. A teoria de grupos localmente compactos é encontrada em [24]. Já uma ótima referência para produtos cruzados é [27]. Em [25], é provada a existência da ação dual no caso mais geral, além de trazer importantes resultados relativos ao produto cruzado obtido.

3.1 Ações parciais de grupos

Definição 3.1.1. *Uma* ação parcial *de um grupo discreto G em uma C^*-álgebra A é um par*

$$\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}),$$

em que para cada $g \in G$, D_g é um ideal fechado em A e α_g é um $*$-isomorfismo de $D_{g^{-1}}$ em D_g, satisfazendo para quaisquer $g, h \in G$

(i) $D_e = A$,

(ii) $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{gh}$,

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_{gh}(a)$, *para todo* $a \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$.

Dizemos que (A, G, α) é um C^*-*sistema dinâmico parcial* ou, simplesmente, um *sistema dinâmico parcial*. No caso em que $D_g = A$, para todo g, α é dita ser uma *ação global*, ou simplesmente uma *ação*, de G em A e (A, G, α) é chamado *sistema dinâmico*.

Observação 3.1.2. (ii) *consiste das condições necessárias para que* $\alpha_g(\alpha_h(a))$ *em* (iii) *esteja bem definido.*

Demonstração: De fato, se $a \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$, (ii) nos diz que $\alpha_h(a) \in D_{h(h^{-1}g^{-1})} = D_{g^{-1}}$. ■

Observação 3.1.3. α_e *é o automorfismo identidade.*

Demonstração: Dado $a \in A$, segue de (iii) que $\alpha_e(\alpha_e(a)) = \alpha_e(a)$. Uma vez que α_e é injetiva, obtemos que $\alpha_e(a) = a$. Donde, α_e é o automorfismo identidade.

Observação 3.1.4. *Se* θ *é uma ação global de um grupo discreto* G *em uma* C^*-*algebra* A *e* I *é um ideal de* A, *colocando* $D_g = \theta_g(I) \cap I$ *e* $\alpha_g = \theta_g |_{D_{g^{-1}}}$, *para cada* $g \in G$, *temos que* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *é uma ação parcial de* G *em* I.

Demonstração: Cada D_g é um ideal em I, pois é uma interseção de ideais. Para ver que α_g é um isomorfismo de $D_{g^{-1}}$ e D_g, consideremos um elemento x em $D_{g^{-1}}$, ou seja, $x \in \theta_{g^{-1}}(I) \cap I$. Desta forma, $\alpha_g(x) = \theta_g(x) \in I$ pois $y \in \theta_{g^{-1}}(I)$ e também $\alpha_g(x) \in \theta_g(I)$, uma vez que $x \in I$. Logo, $\alpha_g(x) \in \theta_g(I) \cap I = D_g$.

Dado $y \in D_g$, basta colocarmos $x = \alpha_{g^{-1}}(y) \in D_{g^{-1}}$, e assim $\alpha_g(x) = y$, donde cada α_g é um isomorfismo. Os outros axiomas da definição de ação parcial seguem diretamente do fato de θ ser uma ação de G em A.

■

Proposição 3.1.5. *A condição* (ii) *na Definição 3.1.1 é equivalente a:*

(ii)' $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, *para quaisquer* $g, h \in G$.

Demonstração: É fácil ver que (ii)' implica (ii). Suponha que valha (ii) e seja $b \in D_g \cap D_{gh}$. Por (ii), temos que $\alpha_{g^{-1}}(b) \in D_{g^{-1}} \cap D_h$. Logo, colocando $y = \alpha_{g^{-1}}(b)$, temos que $y \in D_{g^{-1}} \cap D_h$ e $\alpha_g(y) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)) = b$.

■

Exemplo 3.1.6. *Seja A uma C^*-algebra e sejam I e J ideais de A. Seja $\alpha : I \to J$ um $*$-isomorfismo.*

Defina $D_0 = A$, $D_1 = J$ e $D_{-1} = I$. Para cada $n > 1$, seja D_n definido indutivamente como

$$D_n = \{x \in D_{n-1} : \alpha^{-(n-1)}(x) \in J\}$$

e para $n < -1$

$$D_n = \{x \in D_{n+1} : \alpha^{-(n+1)}(x) \in I\}.$$

Seja $\alpha_n := \alpha^n$, em que α^0 é definido como sendo o automorfismo identidade de A. Então $\alpha = (\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ é uma ação parcial e $(A, \mathbb{Z}, \alpha)$ é um sistema dinâmico parcial.

Demonstração: Observamos que cada D_n é, de fato, o domínio de α^{-n} e $\alpha_n : D_{-n} \to D_n$ é um isomorfismo. De fato, suponha $n > 0$ e seja $x \in D_{-n}$. Então $\alpha_n(x) = \alpha^n(x) \in J$ e temos, para $n \geq k \geq 1$ que

$$\alpha^{-k+1}(\alpha^n(x)) = \alpha^{n-k+1}(x) \in J$$

pois $1 \leq n-k+1 \leq n$, ou seja, as potências de α são positivas. Além disso, se $y \in D_n$, tomando $x = \alpha^{-n}(y) \in D_{-n}$ segue que $\alpha^n(x) = y$. O caso $n < 0$ é análogo.

Vamos agora provar por indução em $n \geq 0$ que cada D_n é um ideal em A.

Para isso, vamos provar que D_n é um ideal em D_{n-1}, para $n > 0$ e D_n é um ideal em D_{n+1}, para $n < 0$. Como I e J são ideais em A, teremos que D_n é ideal de A, para todo n.

Para $n = 0$ e $n = 1$ não há nada a fazer, pois $D_1 = J$. Suponha $n > 1$ e que D_{n-1} é um ideal em D_{n-2}. Vamos mostrar que D_n é um ideal em D_{n-1}.

Sejam $b \in D_n$ e $y \in D_{n-1}$. Uma vez que D_n é fechado por involução, basta provarmos que é um ideal à esquerda, ou seja, $yb \in D_n$. Como D_{n-1} é um ideal em J, segue que $yb \in D_{n-1}$. Temos que

$$\alpha^{-(n-1)}(yb) = \alpha^{-1}[\alpha^{-(n-2)}(yb)] = \alpha^{-1}[\alpha^{-(n-2)}(y)\alpha^{-(n-2)}(b)],$$

pois $y, b \in D_{n-2}$, que é o domínio de $\alpha^{-(n-2)}$. Por hipótese, temos que $\alpha^{-(n-2)}(y), \alpha^{-(n-2)}(y) \in J$, donde

$$\alpha^{-(n-1)}(yb) = \alpha^{-1}[\alpha^{-(n-2)}(y)]\alpha^{-1}[\alpha^{-(n-2)}(b)] \in J$$

pois $\alpha^{-(n-1)}(b) = \alpha^{-1}[\alpha^{-(n-2)}(b)] \in J$.

Logo, $yb \in D_n$ e assim D_n é ideal em D_{n-1}, ou seja, D_n é ideal em A. Para $n < 0$ a prova é análoga.

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Precisamos provar que $\alpha_m(D_{-m} \cap D_n) \subseteq D_{m+n}$, a condição (ii) da definição de ação parcial.

O caso $m = 0$ é direto e o caso $n = 0$ já argumentamos. Se $m, n > 0$ e $x \in D_{-m} \cap D_n$, temos que

$$\alpha^{-k+1}(\alpha^m(x)) = \alpha^{m-k+1}(x) \in J$$

para cada $1 \leq k \leq m < m+n$, pois $m - k + 1 > 0$. Se $k = m + r$, com $1 \leq r \leq n$ então

$$\alpha^{-k+1}(\alpha^m(x)) = \alpha^{-m-r+1}(\alpha^m(x)) = \alpha^{-r+1}(x) \in J,$$

uma vez que $x \in D_n$.

Suponha agora $m > 0$ e $n < 0$ e seja $x \in D_{-m} \cap D_n$. Suponha $m > m + n > 0$. O resultado segue do fato que $\alpha^m(x) \in D_m \subseteq D_{m+n}$. Agora, para $n < m + n < 0$, seja $n < m + n \leq k \leq -1$. Observamos que $\alpha^m(x) \in I$, pois neste caso $-m - 1 \geq n$ e assim $(\alpha^m(x)) = \alpha^{-((-m-1)+1)}(x) \in I$. Mais ainda,

$$\alpha^{-k-1}(\alpha^m(x)) = \alpha^{-k-1+m}(x) \in I,$$

pois $\alpha^r(x) \in I$ para todo $0 \leq r \leq -n - 1$.

Os casos em que $m < 0$ e $n > 0$, e $m < 0$ e $n < 0$ são análogos. O fato que $\alpha_{n+m}(x) = \alpha_n(\alpha_m(x))$, para $x \in D_{-m} \cap D_{-m-n}$, segue diretamente da definição de α_n como composição de isomorfismos.

Logo, $\alpha = (\{D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ é uma ação parcial.

■

3.2 Produtos cruzados parciais

Nosso objetivo nesta seção é construir um fibrado de Fell a partir de um ação parcial α de um grupo discreto G em uma C^*-álgebra A. Isto é feito em [11] no caso mais geral, e mais complicado, de ações parciais torcidas. No caso de ações parciais não torcidas, definindo a coleção de espaços de Banach e as operações de multiplicação e involução, é um tanto mais simples provar a associatividade do produto.

Começamos por definir a coleção de espaços de Banach indexados em G.

Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G em uma C^*-álgebra A. Seja

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{(a,g) \in A \times G : a \in D_g\},$$

e para cada $t \in G$, seja B_t o subconjunto de $\widetilde{\mathcal{B}}$ formado por todos os pares (a,g) com $g = t$. Usaremos a notação $a\delta_t$ para (a,t), donde $B_t = D_t\delta_t$.

Dotamos B_t com a estrutura de um espaço de Banach obtida através da bijeção canônica entre B_t e D_t.

Considere a família $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ de espaços de Banach. Definimos em $\mathcal{B}$ as operações de multiplicação e involução por

$$(a_s\delta_s) * (b_t\delta_t) = \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)\delta_{st}$$

e

$$(a_s\delta_s)^* = \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}},$$

para a_s em D_s e b_t em D_t.

Proposição 3.2.1. *Com as operações acima, $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell.*

Demonstração:

A bilinearidade da operação de multiplicação $* : B_s \to B_t$ segue do fato que cada α_g é um isomorfismo e, portanto, linear. Vamos mostrar que a operação $*$ está bem definida, ou seja, $(a_s\delta_s) * (b_t\delta_t) \in D_{st}\delta_{st}$, $s,t \in G$. De fato,

$$(a_s\delta_s) * (b_t\delta_t) = \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)\delta_{st},$$

e observando que $\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t \in D_{s^{-1}} \cap D_t$, concluímos do item (ii) da Definição 3.1.1 que $\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t) \in D_{st}$, donde a operação de multiplicação $*$ está bem definida.

Vamos mostrar que $*$ é associativa. Seja $c_g \in D_g$. Temos

$$\begin{aligned}(a_s\delta_s * b_t\delta_t) * (c_g\delta_g) &= \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)\delta_{st} * c_g\delta_g \\ &= \alpha_{st}(\alpha_{t^{-1}s^{-1}}(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t))c_g)\delta_{stg}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(a_s\delta_s) * (b_t\delta_t * c_g\delta_g) &= a_s\delta_s * \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)\delta_{tg}\\ &= \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g))\delta_{stg}.\end{aligned}$$

Ou seja, precisamos provar que $\alpha_{st}(\alpha_{t^{-1}s^{-1}}(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g) = \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g))$.

Uma vez que $\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g) \in D_{s^{-1}} \cap D_t$, pelo item (ii) da definição de ação parcial concluímos que

$$\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)) \in D_s \cap D_{st}.$$

Logo,

$$\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)) = \alpha_{st}(\alpha_{t^{-1}s^{-1}}(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)),$$

e pela injetividade de α_{st} é suficiente mostrarmos a seguinte igualdade:

$$\alpha_{t^{-1}s^{-1}}(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t))c_g = \alpha_{t^{-1}s^{-1}}[\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g))]. \quad (\dagger)$$

Para isso, seja $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada para $D_{t^{-1}s^{-1}} \cap D_{t^{-1}}$ e seja $(w_\mu)_{\mu\in L}$ uma unidade aproximada para $D_{t^{-1}}$. Usando o fato que $\alpha_{t^{-1}s^{-1}}\alpha_s = \alpha_{t^{-1}}$ em $D_{s^{-1}} \cap D_t$, o lado esquerdo de ($\dagger$) se torna

$$\begin{aligned}\alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g &= \lim_\lambda \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)u_\lambda c_g\\ &= \lim_\lambda \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(u_\lambda c_g)\\ &= \lim_\lambda \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda c_g)]\\ &= \lim_\lambda \lim_\mu \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda c_g w_\mu)]\\ &= \lim_\lambda \lim_\mu \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)\alpha_t(c_g w_\mu)].\end{aligned}$$

Como $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para $D_{t^{-1}s^{-1}} \cap D_{t^{-1}}$ e α_t é um isomorfismo de $D_{t^{-1}s^{-1}} \cap D_{t^{-1}}$ em $D_t \cap D_{s^{-1}}$ (Proposição 3.1.5), segue que $\{\alpha_t(u_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para $D_t \cap D_{s^{-1}}$. Assim, se supusermos por um instante que podemos trocar a ordem do limite, a expressão acima se torna

$$\begin{aligned}\lim_{\mu} \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(c_g w_\mu)] &= \lim_{\mu} \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g w_\mu)] \\ &= \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)],\end{aligned}$$

e novamente usando que $\alpha_{t^{-1}} = \alpha_{t^{-1}s^{-1}}\alpha_s$ em $D_{s^{-1}} \cap D_t$, a expressão obtida acima é idêntica ao lado direito de (†).

Assim, resta provarmos que podemos trocar a ordem do limite. Mas, considerando que

$$\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)] = \lim_{\mu}\lim_{\lambda} \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)\alpha_t(c_g w_\mu)]$$

e

$$\alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g = \lim_{\lambda}\lim_{\mu} \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)\alpha_t(c_g w_\mu)],$$

temos

$$\|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)] - \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g\| \leq (\triangle),$$

em que

$$\begin{aligned}(\triangle) &= \|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)] - \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(c_g w_\mu)]\| \\ &+ \|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(c_g w_\mu)] - \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)\alpha_t(c_g w_\mu)]\| \\ &+ \|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)\alpha_t(c_g w_\mu)] - \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g\|.\end{aligned}$$

Observando que $\|\alpha_t(c_g w_\mu)\| \leq \|c_g\|$, para todo $\mu \in L$, vem que

$$\begin{aligned}(\triangle) &\leq \|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)] - \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(c_g w_\mu)]\| \\ &+ \|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t] - \alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)]\|\|c_g\| \\ &+ \|\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t\alpha_t(u_\lambda)\alpha_t(c_g w_\mu) - \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g\|.\end{aligned}$$

Aplicando o limite sobre μ e em seguida sobre λ em ambos os lados da desigualdade obtida, concluímos que

$$\alpha_{t^{-1}}[\alpha_{s^{-1}}(a_s)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_g)] = \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)c_g,$$

ou seja, podemos trocar a ordem do limite. Portanto, fica provada a associatividade da multiplicação em $\mathcal{B}$.

Mais ainda, temos

$$(a_g\delta_g)^* * (a_g\delta_g) = \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}} * a_g\delta_g = \alpha_{g^{-1}}(a_g^* a_g)\delta_e,$$

que é um elemento positivo em $B_e = A\delta_e$.

Agora, mais uma vez observando que $\alpha_{t^{-1}s^{-1}}\alpha_s = \alpha_{t^{-1}}$ em $D_{s^{-1}} \cap D_t$, temos

$$\begin{aligned}
(a_s\delta_s * b_t\delta_t)^* &= (\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)\delta_{st})^* \\
&= \alpha_{t^{-1}s^{-1}}[\alpha_s(b_t^*\alpha_{s^{-1}}(a_s^*))]\delta_{t^{-1}s^{-1}} \\
&= \alpha_{t^{-1}}[b_t^*\alpha_{s^{-1}}(a_s^*)]\delta_{t^{-1}s^{-1}} \\
&= (\alpha_{t^{-1}}(b_t^*)\delta_{t^{-1}}) * (\alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}}) \\
&= (b_t\delta_t)^* * (a_s\delta_s)^*.
\end{aligned}$$

Como cada α_g é um isomorfismo de C^*-álgebras, temos que a operação de involução em $\mathcal{B}$ é isométrica. Logo, $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell.

■

Definição 3.2.2. *O* produto cruzado parcial *de A e G por α, denotado por $A \rtimes_\alpha G$, é a C^*-álgebra seccional cheia do fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$.*

Definição 3.2.3. *O* produto cruzado parcial reduzido *de A e G por α, denotado por $A \rtimes_{\alpha,r} G$, é a C^*-álgebra seccional reduzida do fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$.*

Observação 3.2.4. *No caso em que α é uma ação global de G em A, $A \rtimes_\alpha G$ é chamado* produto cruzado *de A e G por α. Similarmente, $A \rtimes_{\alpha,r} G$ é dito ser o* produto cruzado reduzido *de A e G por α.*

Exemplo 3.2.5. *Seja $A = \mathbb{C}^n$, $I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_n = 0\}$ e $J = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1 = 0\}$. Seja $\alpha : I \to J$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mapsto (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. E seja $\alpha = (\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ a ação parcial definida como no Exemplo 3.1.6. Então, $\mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = M_n(\mathbb{C})$.*

Demonstração: Observamos que

$$\begin{aligned}
D_1 &= J, \\
D_2 &= \{(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in J : x_2 = 0\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= \{(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in J : x_2 = x_3 = \cdots x_{n-1} = 0\}, \\ D_m &= \{0\}, \text{ para todo } m \geq n \end{aligned}$$

e similarmente

$$\begin{aligned} D_{-1} &= I, \\ D_{-2} &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in I : x_{n-1} = 0\}, \\ &\vdots \\ D_{-n+1} &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in I : x_2 = x_3 = \cdots x_{n-1} = 0\}, \\ D_m &= \{0\}, \text{ para todo } m \leq -n. \end{aligned}$$

Seja $e_{i,j} := e_i \delta_{i-j}$, em que $e_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{entrada } i}, \ldots, 0)$, para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Notemos que, para $i - j < 0$, $e_{i,j} \in B_{i-j} = D_{i-j}\delta_{i-j}$, pois

$$\alpha^{-i+j-1}(e_i) = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{entrada } j-1}, \ldots, 0) \in I$$

e para $i - j > 0$,

$$\alpha^{-i+j+1}(e_i) = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{entrada } j+1}, \ldots, 0) \in J.$$

Sejam $1 \leq k, l \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} e_{i,j} e_{k,l} &= e_i \delta_{i-j} * e_k \delta_{l-k} = \alpha_{i-j}(\alpha_{j-i}(e_i) e_k) \delta_{(i-j)+(k-l)} \\ &= [j = k] e_i \delta_{i-l} = [j = k] e_i \delta_{i-l} = e_{i,l}, \end{aligned}$$

donde $\{e_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ é um sistema de unidades matriciais. Como geram $\mathbb{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, segue que $\mathbb{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = M_n(\mathbb{C})$.

■

Exemplo 3.2.6. *Seja $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ uma C^*-álgebra de dimensão finita. Seja $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ e para cada $1 \leq l \leq k$, seja α_l o isomorfismo entre os ideais I_l e J_l de $\mathbb{C}^{n_l}$ como no exemplo acima. Colocamos $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{n_k}$, $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_k$ e $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_k$. Seja $\alpha : I \to J$ o isomorfismo dado por $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k$ e α a ação parcial de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{C}^N$ definida no Exemplo 3.1.6. Então $A = \mathbb{C}^N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Observamos que, neste caso, se D_i^l denota o ideal em $\mathbb{C}^{n_l}$ correspondente à ação parcial α_l do Exemplo 3.2.5, temos que

$$\begin{aligned} D_1 &= J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_k, \\ D_2 &= D_2^1 \oplus D_2^2 \oplus \cdots \oplus D_2^k, \\ &\vdots \\ D_{n-1} &= D_{n_1-1}^1 \oplus D_{n_2-1}^2 \oplus \cdots \oplus D_{n_k-1}^k, \\ D_m &= \{0\}, \text{ para todo } m \geq n, \end{aligned}$$

em que $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.

Similarmente,

$$\begin{aligned} D_{-1} &= I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_k, \\ D_{-2} &= D_{-2}^1 \oplus D_{-2}^2 \oplus \cdots \oplus D_{-2}^k, \\ &\vdots \\ D_{-n+1} &= D_{-n_1+1}^1 \oplus D_{-n_2+1}^2 \oplus \cdots \oplus D_{-n_k+1}^k, \\ D_m &= \{0\}, \text{ para todo } m \leq -n. \end{aligned}$$

Fixamos $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e, definininindo $n_0 := 0$, seja

$$e_{i,j}^l := e_{n_{l-1}+i}\delta_{i-j},$$

em que $e_{n_{l-1}+i} = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{entrada } n_{l-1}+i}, \ldots, 0)$ e para $1 \leq i \leq n_l$, $1 \leq j \leq n_l$.

Assim, os mesmos argumentos usados no Exemplo 3.2.5 garantem que $e_{i,j}^l$ está bem definido, ou seja, $e_{n_{l-1}+i} \in D_{i-j}$.

Já vimos no Exemplo 3.2.5 que $e_{i,j}^l e_{h,k}^l = [j = h] e_{i,k}^l$, donde é suficiente mostrarmos que $e_{i,j}^l e_{h,k}^m = 0$, para $l \neq m$. Com efeito,

$$\begin{aligned} e_{i,j}^l e_{h,k}^m &= e_{n_{l-1}+i}\delta_{i-j} * e_{n_{m-1}+h}\delta_{h-k} \\ &= \alpha_{i-j}(\alpha_{j-i}(e_{n_{l-1}+i})e_{n_{m-1}+h})\delta_{(i-j)+(h-k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, uma vez que $\{e_{i,j}^l : 1 \leq i, j \leq n_l, 1 \leq l \leq k\}$ é uma base para $\mathbb{C}^N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, a aplicação

$$e_{i,j}^l \mapsto (0, 0, \ldots, \underbrace{e_{i,j}}_{\text{entrada } l}, \ldots, 0)$$

é um isomorfismo entre $\mathbb{C}^N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ e A.

■

3.3 Ações de grupos localmente compactos

A fim de fornecer exemplos e, consequentemente, uma melhor compreensão da definição do produto Smash, que será apresentada no Capítulo 5, defininimos nesta seção o que é uma ação contínua de um grupo localmente compacto G em uma C^*-álgebra A. Além disso, apresentamos brevemente o produto cruzado de A por uma ação contínua de G e, para o caso discreto, mostramos que se G é abeliano, o produto cruzado $A \rtimes_\alpha G$ admite uma ação contínua do grupo dual $\widehat{G}$.

Primeiramente, lembremos que um grupo topológico localmente compacto G admite uma medida de Borel μ regular e invariante à esquerda, ou seja, se E é um subconjunto de Borel de G e $s \in G$, então $\mu(sE) = \mu(E)$. Tal medida é única a menos de multiplicação por escalar e é chamada *medida de Haar*. Uma prova de sua existência e unicidade pode ser encontrada em [16]. Quando G é compacto, μ é finita, e neste caso usamos a medida normalizada $\mu(G) = 1$. Se G é discreto, μ é a medida de contagem.

Em geral, uma medida de Haar pode não ser invariante por translação à direita. No entanto, existe um homomorfismo contínuo $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$, conhecido como *função modular*, tal que $\mu(Es) = \Delta(s)\mu(E)$. Se G é compacto ou abeliano, Δ é o homomorfismo trivial.

Usaremos também nesta seção o conceito de integração sobre grupos localmente compactos com valores em uma C^*-álgebra. Mais detalhes e propriedades deste conceito de integração bem como a teoria geral de produtos cruzados por grupos localmente compactos são encontrados em [27].

Seja A uma C^*-álgebra. Vamos denotar por $\mathrm{Aut}(A)$ o grupo de todos os $*$-automorfismos de A.

Definição 3.3.1. *Seja G um grupo localmente compacto. Uma* ação contínua *de G em A é um homomorfismo $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ que é contínuo na topologia forte, ou seja, para cada $a \in A$, a aplicação $g \mapsto \alpha_g(a)$ é contínua.*

Sejam $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ uma ação contínua e $C_c(G, A)$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas com suporte compacto de G em A. Para $f, g \in C_c(G, A)$ e $s \in G$, definimos

$$(f * g)(s) = \int_G f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s))d\mu(r).$$

O Corolário 1.104 de [27] garante que $s \mapsto (f*g)(s)$ define um elemento de $C_c(G, A)$, chamado *convolução* de f e g.

Definimos em $C_c(G, A)$ uma operação de involução por

$$f^*(s) = \Delta(s)^{-1}\alpha_s(f(s^{-1})^*).$$

Com estas operações, $C_c(G, A)$ é uma $*$-álgebra.

A $*$-álgebra $C_c(G, a)$ possui uma norma, a saber

$$\|f\|_1 = \int_G \|f(t)\|d\mu(t)$$

e que se relaciona com as operações de multiplicação e involução de $C_c(G, a)$ da seguinte forma:

Proposição 3.3.2. *Sejam $f, g \in C_c(G, A)$. Então,*

$$\|f^*\|_1 = \|f\|$$

e

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \|f^*\|_1 = \int_G \|f^*(s)\|d\mu(s) &= \int_G \Delta(s^{-1})\|\alpha_s(f(s^{-1})^*)\|d\mu(s) \\ &= \int_G \Delta(s^{-1})\|f(s^{-1})\|d\mu(s) \\ &= \int_G \|f(s)\|d\mu(s) = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Acima, usamos o Lema 1.67 de [27], que nos diz que

$$\int_G \Delta(s^{-1})f(s^{-1})d\mu(s) = \int_G f(s)d\mu(s),$$

sempre que $f \in C_c(G)$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_G \| \int_G f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s))d\mu(r)\| d\mu(s) \\
&\leq \int_G \int_G \|f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s))\| d\mu(r)d\mu(s) \\
&\leq \int_G \int_G \|f(r)\|\|\alpha_r(g(r^{-1}s))\| d\mu(r)d\mu(s) \\
&= \int_G \|f(r)\| \left(\int_G \|\alpha_r(g(r^{-1}s))\| d\mu(s) \right) d\mu(r) \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

■

Como um resultado da proposição acima, temos que $C_c(G, A)$ é uma $*$-álgebra normada.

Definição 3.3.3. *Seja π uma $*$-representação de $C_c(G, A)$. Dizemos que π é* L_1-norma decrescente *se $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$, para todo $f \in C_c(G, A)$.*

Vamos denotar por $\mathrm{Rep}(C_c(G, A))$ o conjunto de todas as $*$-representações L_1-norma decrescentes de $C_c(G, A)$.

A próxima proposição consiste na definição de uma C^*-norma em $C_c(G, A)$. Embora não demonstraremos aqui, ela é uma consequência da Proposição 2.23 e do Lema 2.26 de [27].

Proposição 3.3.4. *Seja (A, G, α) um sistema dinâmico e para cada $f \in C_c(G, A)$, colocamos*

$$\|f\| := \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \in \mathrm{Rep}(C_c(G, A))\}.$$

Então, $\|\cdot\|$ é uma C^*-norma em $C_c(G, A)$.

Definição 3.3.5. *Seja (A, G, α) um sistema dinâmico. Definimos o* produto cruzado *de A e G por α, denotado por $A \rtimes_\alpha G$, como sendo o completamento de $C_c(G, A)$ na norma definida na Proposição 3.3.4.*

O produto cruzado também pode ser definido como o completamento da $*$-álgebra de Banach $L^1(G, A)$ com as mesmas operações de convolução e involução e a mesma definição de norma. Claro, neste caso o supremo é tomado sob todas as representações, que já são automaticamente L^1-norma decrescentes. O Apêndice B de [27] apresenta um pouco da teoria definida desta forma.

Um produto cruzado reduzido de uma C^*-álgebra A e um grupo localmente compacto G por uma ação contínua α é definido na Seção 7 de [27] como sendo o completamento de $C_c(G,A)$ em uma norma dada por uma $*$-representação especial. No entanto, vale ressaltar que a definição de produto cruzado reduzido por grupos discretos que apresentamos em 3.2.3 coincide com a de [27], e isso segue da Proposição 3.8 de [10].

Dada uma ação de um grupo discreto abeliano G, é possível obter uma ação contínua do um certo grupo compacto abeliano no produto cruzado $A \rtimes_\alpha G$. Nosso objetivo agora é construir esta ação.

Definição 3.3.6. *Seja G é um grupo localmente compacto abeliano. Um* carāter *sobre G é um homomorfismo $\chi : G \to S^1$.*

O conjunto $\widehat{G}$ de todos os caráteres contínuos de G é um grupo localmente compacto com a operação de multiplicação definida pontualmente e topologia para a qual os conjuntos

$$P(F,\varepsilon) = \{\chi \in \widehat{G} : |\chi(x) - 1| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in F\},$$

para $F \subseteq G$ compacto e $\varepsilon > 0$, formam uma base na identidade 1 ($1(x) = 1$, para todo $x \in G$).

O grupo $\widehat{G}$ é chamado *grupo dual* de G. O Teorema 1.2.5 de [24] afirma que se G é discreto, então $\widehat{G}$ é compacto. Por outro lado, se G é compacto, então $\widehat{G}$ é discreto.

Proposição 3.3.7. *Seja G um grupo discreto abeliano e (A, G, α) um sistema dinâmico. Para cada $\gamma \in \widehat{G}$, definimos uma aplicação $\widehat{\alpha}_\gamma : C_c(G,A) \to A \rtimes_\alpha G$ por*

$$\widehat{\alpha}_\gamma\left(\sum_g a_g\delta_g\right) = \gamma(g)a_g\delta_g.$$

Então $\widehat{\alpha}_\gamma$ se estende a um $*$-automorfismo de $A \rtimes_\alpha G$ e a aplicação $\widehat{\alpha} : \widehat{G} \to \mathrm{Aut}(A \rtimes_\alpha G)$, $\gamma \mapsto \widehat{\alpha}_\gamma$ é uma ação contínua.

Demonstração: Escrevemos Γ para $\widehat{G}$ e seja $\gamma \in \Gamma$. Notemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_\gamma(a\delta_g)\widehat{\alpha}_\gamma(b\delta_h) &= \gamma(g)\gamma(h)a\alpha_g(b)\delta_{gh} \\ &= \gamma(gh)a\alpha_g(b)\delta_{gh} \\ &= \widehat{\alpha}_\gamma(a\delta_g b\delta_h) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\alpha(a\delta_g)^* &= \overline{\gamma(g)}\alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}} \\
&= \gamma(g^{-1})\alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}} \\
&= \widehat{\alpha}_\gamma((a\delta_g)^*).
\end{aligned}
$$

Logo, $\widehat{\alpha}_\gamma$ é uma $*$-representação de $C_c(G,A)$, e pela propriedade universal do produto cruzado $A \rtimes_\alpha G$, segue que $\widehat{\alpha}_\gamma$ se estende a um $*$-endomorfismo de $A \rtimes_\alpha G$, que vamos continuar denotando por $\widehat{\alpha}_\gamma$.

Para ver que $\widehat{\alpha}_\gamma$ é de fato um $*$-automorfismo, vamos mostrar que $\widehat{\alpha}_{\gamma_1}\widehat{\alpha}_{\gamma_2} = \widehat{\alpha}_{\gamma_1\gamma_2}$, para quaisquer γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$. Consequentemente, como $\widehat{\alpha}_1$ é o automorfismo identidade de $A \rtimes_\alpha G$, concluiremos que $\widehat{\alpha}_\gamma$ é um $*$-automorfismo com $\widehat{\alpha}_\gamma^{-1} = \widehat{\alpha}_{\gamma^{-1}}$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_{\gamma_1}(\widehat{\alpha}_{\gamma_2}(a\delta_g)) &= \widehat{\alpha}_{\gamma_1}(\gamma_2(g)a\delta_g) \\
&= \gamma_1(g)\gamma_2(g)a\delta_g \\
&= (\gamma_1\gamma_2)(g)a\delta_g \\
&= \widehat{\alpha}_{\gamma_1\gamma_2}(a\delta_g).
\end{aligned}
$$

Argumentanto por continuidade, obtemos que $\widehat{\alpha}_{\gamma_1}\widehat{\alpha}_{\gamma_2} = \widehat{\alpha}_{\gamma_1\gamma_2}$.

Para a continuidade na topologia forte da aplicação $\gamma \mapsto \widehat{\alpha}_\gamma$, basta ver que a aplicação $\gamma \mapsto \widehat{\alpha}_\gamma(b)$ é contínua sempre que b é da forma $a\delta_g$, e como $\|\widehat{\alpha}_\gamma\| = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$, o resultado segue também para qualquer $b \in A \rtimes_\alpha G$.

$\blacksquare$

A ação $\widehat{\alpha}$ da proposição anterior é chamada *ação dual* de α. É possível definir uma ação dual de $\widehat{G}$ em $A \rtimes_\alpha G$ para um grupo localmente compacto abeliano qualquer. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes em [25]. No Capítulo 5 vamos ver que $(A \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$ é isomorfo a $A \otimes K(l^2(G))$. Este resultado é conhecido como *dualidade de Takai*.

Capítulo 4

Teorema de Brown-Green-Rieffel

Neste capítulo, nosso principal resultado é o teorema de Brown-Green-Rieffel, que afirma que Morita equivalência entre C^*-álgebras possuindo elementos estritamente positivos (Definição A.2.1) equivale a isomorfismo estável. Este teorema terá uma importância crucial no nosso principal resultado, que será apresentado no Capítulo 5. O teorema é apresentado em [6], embora seja uma consequência de resultados obtidos em [5] e da existência da álgebra de ligação (Teorema 1.4.15). Ou seja, primeiramente, o resultado é obtido para um canto cheio de uma C^*-álgebra e usando a álgebra de ligação, é estendido para o caso mais geral de C^*-álgebras Morita equivalentes.

Depois de definir C^*-álgebras estáveis, definimos fibrados de Fell estáveis e mostramos que, neste caso, sua C^*-álgebra seccional cheia é estável. A prova disto foi obtida de [17]. Embora não tenhamos feito isso aqui, uma demonstração idêntica garante que a C^*-álgebra seccional reduzida de um fibrado de Fell estável é também estável.

Usaremos amplamente a teoria de produtos tensoriais de C^*-álgebras, que é abordada no Capítulo 6 de [20]. Além disso, vamos usar sem mencionar que existe uma inclusão de $M(A) \otimes_* M(B)$ em $M(A \otimes_* B)$, em que $A \otimes_* B$ denota o produto tensorial espacial de A e B (Proposição A.3.5).

Para fixar notações, ao longo de todo o capítulo, K denota a C^*-álgebra de todos os operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $\{e_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ é um sistema de unidades matriciais que geram K. Ou seja, sendo $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal para tal espaço de Hilbert e sendo $e_{i,j}$ o operador $h \mapsto \langle e_j, h\rangle e_i$, temos que $\operatorname{span}\{e_{i,j} : i,j \in \mathbb{N}\}$ é uma $*$-subálgebra densa de K e a identidade $e_{i,j}e_{k,l} = [j = k]e_{i,l}$ é satisfeita, para quaisquer $i, j, k, l \in \mathbb{N}$.

4.1 C^*-álgebras estáveis

Definição 4.1.1. *Uma C^*-álgebra A é dita ser* estável *se A é isomorfa a $A \otimes K$.*

Exemplo 4.1.2. *K é estável.*

Demonstração: Temos que mostrar que K e $K \otimes K$ são isomorfas. Para isso, seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uma bijeção. Detonaremos por (i_1, i_2) a imagem $f(i)$ de um elemento $i \in \mathbb{N}$. Primeiramente, vamos definir um homomorfismo na $*$-subálgebra densa S de K gerada pelo sistema de unidades matriciais $\{e_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$.

Consideremos a aplicação $\tilde{\varphi} : S \to K \otimes K$ dada por $\tilde{\varphi}(e_{ij}) = e_{i_1j_1} \otimes e_{i_2j_2}$. Então, para $k, l \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\varphi}(e_{ij}e_{k,l}) = [j = k]\tilde{\varphi}(e_{il}) = [j = k](e_{i_1l_1} \otimes e_{i_2l_2}).$$

Por outro lado,

$$\tilde{\varphi}(e_{i,j})\tilde{\varphi}(e_{k,l}) = (e_{i_1j_1}\otimes e_{i_2j_2})(e_{k_1l_1}\otimes e_{k_2l_2}) = [j_1 = k_1][j_2 = k_2](e_{i_1l_1}\otimes e_{i_2l_2}),$$

e como $j = k$ se, e somente se, $j_1 = k_1$ e $j_2 = k_2$, segue que $\tilde{\varphi}(e_{ij})\tilde{\varphi}(e_{kl}) = \tilde{\varphi}(e_{ij}e_{kl})$.

Além disso,

$$\tilde{\varphi}((e_{ij})^*) = \tilde{\varphi}(e_{ji}) = e_{j_1i_1} \otimes e_{j_2i_2} = (e_{i_1j_1} \otimes e_{i_2j_2})^* = \tilde{\varphi}(e_{ij})^*.$$

Logo, fica provado que $\tilde{\varphi}$ é um $*$-homomorfismo.

Provemos agora que $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Observamos que se dois pares (i, j) e (k, l) são distintos, digamos, sem perda de generalidade, que $i \neq k$, então $i_1 \neq k_1$ ou $i_2 \neq k_2$, donde $\tilde{\varphi}(e_{ij}) = e_{i_1j_1} \otimes e_{i_2j_2}$ e $\tilde{\varphi}(e_{kl}) = e_{k_1l_1} \otimes e_{k_2l_2}$ são distintos e, consequentemente, linearmente independentes. Mais geralmente, concluímos que a imagem da base $\{e_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ de S pelo homomorfismo $\tilde{\varphi}$ é linearmente independente já que o conjunto $\{e_{ij} \otimes e_{kl} : i, j, k, l \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente em $K \otimes K$. Portanto, $\tilde{\varphi}$ é injetiva.

Para cada conjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$, temos uma C^*-álgebra $C_F \subseteq S$ associada. Na verdade, $C_F = \{\sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_{ij} : i, j \in F\}$. Claro que $\tilde{\varphi}$ restrita à C^*-álgebra C_F é injetiva e, portanto, isométrica. Como S é a união destas C^*-álgebras, segue que $\tilde{\varphi}$ é isométrico.

Desta forma, $\tilde{\varphi}$ se estende a um homorfismo isométrico $\varphi : K \to K \otimes K$. Uma vez que a imagem de φ contém a $*$-subálgebra densa gerada pelo conjunto $\{e_{ij} \otimes e_{kl} : (i,j),(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, segue que φ é um isomorfismo. ■

Proposição 4.1.3. *Seja A uma C^*-álgebra. Então, A é estável se, e somente se, existe uma C^*-álgebra B tal que A é isomorfa a $B \otimes K$.*

Demonstração: Se A é estável, por definição temos que A é isomorfa a $A \otimes K$, donde basta tomarmos $B = A$. Por outro lado, se A é isomorfa a $B \otimes K$ para alguma C^*-álgebra B, então

$$A \otimes K \cong (B \otimes K) \otimes K \cong B \otimes (K \otimes K).$$

Do Exemplo 4.1.2 segue que $A \otimes K \cong B \otimes K \cong A$ e, portanto, A é estável.

■

4.2 Fibrados de Fell estáveis

Nesta seção, vamos definir fibrados de Fell estáveis e definir uma espécie de estabilização de fibrados de Fell. Mostraremos que a C^*-álgebra seccional cheia obtida através deste novo fibrado de Fell é, na verdade, a estabilização da antiga.

Para mostrar a boa definição da estabilização, precisamos do conceito de isomorfismos entre fibrados de Fell, que é nossa primeira definição.

Definição 4.2.1. *Seja G um grupo discreto e $\mathcal{A} = \{A_g\}_{g\in G}$, $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ fibrados de Fell. Um* isomorfismo *entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é uma coleção de aplicações $\{\phi_t\}_{t\in G}$ tal que, para cada $t \in G$, $\phi_t : A_t \to B_t$ é linear e injetiva, e para quaisquer $s, t \in G$, $a_t \in A_t$ e $a_s \in A_s$,*

(i) $\phi_t(A_t) = B_t$;

(ii) $\phi_{st}(a_s a_t) = \phi_s(a_s)\phi_t(a_t)$;

(iii) $\phi_{t^{-1}}(a_t^*) = (\phi_t(a_t))^*$.

Observação 4.2.2. *Uma vez que* $\phi_e : A_e \to B_e$ *é um isomorfismo entre* C^**-álgebras, segue que* $\|\phi_t(a_t)\| = \|a_t\|$*, para cada* $t \in G$ *e cada* $a_t \in B_t$*.*

Demonstração: De fato, a afirmação segue dos seguintes cálculos:

$$\|\phi_t(a_t)\|^2 = \|\phi_t(a_t)^*\phi_t(a_t)\| = \|\phi_e(a_t^*a_t)\| = \|a_t^*a_t\| = \|a_t\|^2.$$

■

Exemplo 4.2.3. *Seja* (A, G, α) *um sistema dinâmico parcial e suponha que* $\varphi : A \to B$ *seja um isomorfismo entre* C^**-álgebras. Seja* $\theta = (\{D'_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *a ação parcial de* G *em* B *obtida através de* φ *colocando*

$$D'_g = \varphi(D_g) \quad e \quad \theta_g = \varphi \circ \alpha_g \circ \varphi^{-1}, \text{ para cada } g \in G.$$

Sendo $A_g = D_g\delta_g$ *,* $B_g = D'_g\delta_g$*, segue que* $\mathcal{A} = \{A_g\}_{g\in G}$ *e* $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ *são fibrados de Fell isomorfos.*

Demonstração: Definimos $\phi_g : A_g \to B_g$ por $a\delta_g \mapsto \varphi(a)\delta_g$. Observamos que, como $a \in D_g$, $\varphi(a) \in D'_g$, por definição, donde ϕ_g está bem definida e $\phi_g(A_g) \subseteq B_g$. Também é fácil ver que ϕ_g é linear. Além disso, dado $b\delta_g \in B_g$, temos que $b \in D'_g = \varphi(D_g)$. Logo, tomando $a = \varphi^{-1}(b)$, temos que $a \in D_g$ e $\phi_g(a\delta_g) = b\delta_g$, e portanto $\phi_g(A_g) = B_g$.

Dados $a_s\delta_s$ e $a_t\delta_t$ em $\mathcal{A}$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_s(a_s\delta_s)\phi_t(a_t\delta_t) &= \varphi(a_s)\delta_s\varphi(a_t)\delta_t \\
&= \theta_s(\theta_{s^{-1}}(\varphi(a_s))\varphi(a_t))\delta_{st} \\
&= \theta_s(\varphi(\alpha_{s^{-1}}(a_s))\varphi(a_t))\delta_{st} \\
&= \theta_s(\varphi(\alpha_{s^{-1}}(a_s)a_t))\delta_{st} \\
&= \varphi(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)a_t))\delta_{st} \\
&= \phi_{st}(a_s\delta_s a_t\delta_t).
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\phi_t(a\delta_t)^* &= (\varphi(a)\delta_t)^* = \theta_{t^{-1}}(\varphi(a)^*))\delta_{t^{-1}} \\
&= \varphi(\alpha_{t^{-1}}(a^*))\delta_{t^{-1}} = \phi_{t^{-1}}((a\delta_t)^*).
\end{aligned}$$

Portanto, $\{\phi_g\}_{g\in G}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

■

Observação 4.2.4. *Sejam* $\mathcal{A} = \{A_g\}_{g\in G}$ *e* $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ *fibrados de Fell isomorfos. Então*

$$C^*(\mathcal{A}) \cong C^*(\mathcal{B}) \quad e \quad C_r^*(\mathcal{A}) \cong C_r^*(\mathcal{B}).$$

Demonstração: Seja $\{\phi_g\}_{g\in G}$ um isomorfismo e para $f \in C_c(\mathcal{A})$, colocamos $\widetilde{\phi}(f) : G \to \bigcup_{t\in G} B_t$ por $\widetilde{\phi}(f)(t) = \phi_t(f(t))$. Então $\widetilde{\phi}(f)$ é um elemento de $C_c(\mathcal{B})$. Além disso, se $g \in C_c(\mathcal{B})$, escolhendo $f \in C_c(\mathcal{A})$ dada por $t \mapsto \phi_t^{-1}(g(t))$, segue que $\widetilde{\phi}(f) = g$.

Usando as propriedades da família de aplicações $\{\phi_t\}_{t\in G}$, é fácil ver que $\widetilde{\phi}$ é um $*$-isomorfismo entre as $*$-álgebras $C_c(\mathcal{A})$ e $C_c(\mathcal{B})$. Assim, $\widetilde{\phi}$ se estende a um $*$-homomorfismo de $C^*(\mathcal{A})$ em $C^*(\mathcal{B})$ que tem como $*$-homomorfismo inverso a extensão de $\widetilde{\phi}^{-1}$ a $C^*(\mathcal{B})$.

Vamos ver agora que $C_r^*(\mathcal{A})$ e $C_r^*(\mathcal{B})$ são C^*-álgebras isomorfas. Lembremos da Proposição 2.2.1 que $C_c(\mathcal{A})$ é um A_e-módulo com produto interno com a ação de módulo dada por

$$(\xi, a) \mapsto \xi a,$$

em que $(\xi a)(t) = \xi(t)a$, e produto interno

$$(\xi, \eta) \mapsto \sum_{t\in G} \xi(t)^* \eta(t).$$

Similarmente, $C_c(\mathcal{B})$ é um B_e-módulo com produto interno.

Observamos que, se $\xi \in C_c(\mathcal{A})$,

$$\langle \xi, \xi \rangle_{A_e} = \sum_{t\in G} \xi(t)^* \xi(t)$$

e

$$\langle \widetilde{\phi}(\xi), \widetilde{\phi}(\xi) \rangle_{B_e} = \sum_{t\in G} \phi_t(\xi(t))^* \phi_t(\xi(t)) = \phi_e\left(\sum_{t\in G} \xi(t)^* \xi(t)\right),$$

donde segue que

$$\|\xi\|_{A_e} = \|\widetilde{\phi}(\xi)\|_{B_e}.$$

De mesma forma, para $\eta \in C_c(\mathcal{A})$, vale que

$$\|\widetilde{\phi}(\xi) * \widetilde{\phi}(\eta)\|_{B_e} = \|\xi * \eta\|_{A_e}.$$

Sejam $T_A : C_c(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(l_2(\mathcal{A}))$ e $T_B : C_c(\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}))$ as representações regulares de $C_c(\mathcal{A})$ e $C_c(\mathcal{B})$, respectivamente. Então, novamente usando que $\widetilde{\phi} : C_c(\mathcal{A}) \to C_c(\mathcal{B})$ é isomorfismo,

$$\begin{aligned}
\|T_B(\widetilde{\phi}(\xi))\| &= \sup_{\|\eta'\|_{B_e}\leq 1} \|\widetilde{\phi}(\xi) * \eta'\|_{B_e} \\
&= \sup_{\|\eta\|_{A_e}\leq 1} \|\widetilde{\phi}(\xi) * \widetilde{\phi}(\eta)\|_{B_e} \\
&= \sup_{\|\eta\|_{A_e}\leq 1} \|\xi * \eta\|_{A_e} \\
&= \|T_A(\xi)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $T_A(C_c(\mathcal{A}))$ e $T_B(C_c(\mathcal{B}))$ são $*$-álgebras isometricamente isomorfas, donde tal isomorfismo se estende a um isomorfismo entre $C_r^*(\mathcal{A})$ e $C_r^*(\mathcal{B})$.

■

Lembremos da Proposição 2.1.12, que para cada $t \in G$, a transformação linear $j_t : B_t \to C_c(\mathcal{B})$ dada por

$$j_t(b_t)\mid_s = [s = t]b_t,$$

para todo $s \in G$ é tal que $C_c(\mathcal{B}) = \oplus_{t\in G} j_t(B_t)$ e vale que $\|j_t(b_t)\|_1 = \|b_t\|$, $j_s(b_s) * j_t(b_t) = j_{st}(b_s b_t)$ e $j_t(b_t)^* = j_{t^{-1}}(b_t^*)$ para quaisquer $s, t \in G$ e $b_t \in B_t$, $b_s \in B_s$. Como a inclusão de $C_c(\mathcal{B})$ é injetiva, escrevendo simplesmente B_t para a imagem de $j_t(B_t)$ em $C^*(\mathcal{B})$ temos que $C^*(\mathcal{B}) = \overline{\oplus}_{g\in G} B_g$.

Definição 4.2.5. *Dizemos que um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ é* estável *se a álgebra da fibra unidade B_e é estável.*

Seja $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ um fibrado de Fell. Colocamos $\mathcal{B} \otimes K = \{B_g \otimes K\}_{g\in G}$, em que $B_g \otimes K =: \overline{\text{span}}\{b_g \otimes u : b_g \in B_g, u \in K\} \subseteq C^*(\mathcal{B}) \otimes K$, para cada $g \in G$. Então $\mathcal{B} \otimes K$ possui uma estrutura canônica de fibrado de Fell com a norma e as operações herdadas de $C^*(\mathcal{B}) \otimes K$. Vamos nos referir ao fibrado de Fell $\mathcal{B} \otimes K$ como a *estabilização* de $\mathcal{B}$.

Observação 4.2.6. *Seja φ uma representação fiel de $C_c(\mathcal{B})$ em uma C^*-álgebra A e definimos $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{B_g}\}_{g\in G}$, em que*

$$\widetilde{B_g} = \varphi(B_g) \otimes K =: \overline{\text{span}}\{\varphi(b_g) \otimes u : b_g \in B_g, u \in K\}.$$

Dotamos $\widetilde{\mathcal{B}}$ com a estrutura de fibrado de Fell obtida de $A \otimes K$. Então os fibrados de Fell $\mathcal{B} \otimes K$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ são isomorfos, através da aplicação $\widetilde{\varphi} \otimes 1$, em que $\widetilde{\varphi} : C^*(\mathcal{B}) \to A$ é a extensão de φ obtida pela propriedade universal *e $\widetilde{\varphi}\otimes 1 : C^*(\mathcal{B})\otimes K \to A\otimes K$ é tal que $(\widetilde{\varphi}\otimes 1)(b\otimes u) = \varphi(b)\otimes u$, para quaisquer $b \in C^*(\mathcal{B})$ e $u \in K$.*

Demonstração: Vamos verificar que, para uma soma finita $\sum_{i=1}^n a_{g_i}\otimes u_i$ vale que

$$\|\sum_1^n a_{g_i}\otimes u_i\| = \|\sum_1^n \varphi(a_{g_i})\otimes u_i\|,$$

em que $a_{g_i}\in B_g$ e $u_i \in K$, para $i = 1,\cdots,n$.

Se φ é uma $*$-representação injetiva de $\oplus_{g\in G}B_g$, em particular temos que φ é fiel sobre a C^*-álgebra B_e. Logo, temos que $B_e\otimes K$ e $\varphi(B_e)\otimes K$ são isomorfos através da aplicação $\varphi\otimes 1$. Agora, dado $a \in B_g\otimes K$, temos pelo C^*-axioma que $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ e, ainda, $a^*a \in B_e\otimes K$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n a_{g_i}\otimes u_i\right\|^2 &= \left\|\left(\sum_{i=1}^n a_{g_i}\otimes u_i\right)^*\left(\sum_{i=1}^n a_{g_i}\otimes u_i\right)\right\| \\
&= \left\|(\varphi\otimes 1)\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{g_i}\otimes u_i\right)^*\left(\sum_{i=1}^n a_{g_i}\otimes u_i\right)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^n \varphi(a_{g_i})\otimes u_i\right\|^2,
\end{aligned}$$

donde segue que $B_g\otimes K$ e $\widetilde{B_g}$ são isomorfos isometricamente como espaços de Banach, para cada $g \in G$.

Além disso, é fácil ver que as operações multiplicação e involução dos fibrados de Fell $\mathcal{B}\otimes K$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ são equivalentes, pois $\widetilde{\varphi}\otimes 1$ é $*$-homomorfismo. Desta forma, $\mathcal{B}\otimes K$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ são isomorfos.

■

O próximo resultado nos diz que a C^*-álgebra seccional cheia da estabilização de um fibrado de Fell é a estabilização de sua C^*-álgebra seccional cheia.

Proposição 4.2.7. *Seja $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ um fibrado de Fell e seja $\mathcal{B}\otimes K$ sua estabilização. Então,*

$$C^*(\mathcal{B})\otimes K \cong C^*(\mathcal{B}\otimes K).$$

Demonstração: Por um lado, temos a $*$-representação $\imath$ de $\bigoplus_{g\in G}(B_g\otimes K)$ em $C^*(\mathcal{B})\otimes K$ dada pela inclusão, donde segue da propriedade universal que existe uma $*$-representação $\widetilde{\imath}$ de $C^*(\mathcal{B}\otimes K)$ em $C^*(\mathcal{B})\otimes K$ que coincide com $\imath$ em $\oplus_{g\in G}B_g \otimes K$.

Por outro lado, para cada $h \in G$ e uma soma finita $\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i \in B_g \otimes K$, definimos $b_h\widetilde{\otimes}_L 1$ e $b_h\widetilde{\otimes}_R 1$ por

$$(b_h\widetilde{\otimes}_L 1)\left(\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\right) = \sum_1^n b_h a_{g_i} \otimes u_i$$

e

$$\left(\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\right)(b_h\widetilde{\otimes}_R 1) = \sum_1^n a_{g_i} b_h \otimes u_i,$$

em que $a_{g_i} \in B_g$ e $u_i \in K$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Seja $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada para K. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\|(b_h\widetilde{\otimes}_L 1)\left(\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\right)\right\| &= \left\|\sum_1^n b_h a_{g_i} \otimes u_i\right\| \\
&= \left\|\lim_\lambda (b_h \otimes v_\lambda)\left(\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\right)\right\| \\
&= \leq \|b_h\|\|\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\|.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\left\|\left(\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\right)(b_h\widetilde{\otimes}_R 1)\right\| \leq \|b_h\|\|\sum_1^n a_{g_i} \otimes u_i\|.$$

Assim, $b_h\widetilde{\otimes}_L 1$ e $b_h\widetilde{\otimes}_R 1$ se estendem a um multiplicador $b_h \otimes 1 = (b_h \otimes_L 1, b_h \otimes_R 1)$ de $\oplus_{g\in G}B_g \otimes K$. De mesma forma, prova-se que $b_h \otimes 1 = (b_h \otimes_L 1, b_h \otimes_R 1)$ de fato é contínuo com relação à norma universal, donde se estende a um multiplicador de $C^*(\mathcal{B} \otimes K)$, que continuaremos denotando da mesma forma.

Por fim, consideremos a representação $\jmath$ de $\oplus_{g\in G}B_g$ na álgebra de multiplicadores $M(C^*(\mathcal{B} \otimes K))$ definida por

$$\sum_{h\in G} b_h \mapsto \sum_{h\in G} b_h \otimes 1.$$

Novamente, $\jmath$ se estende a um $*$-homomorfismo $\widetilde{\jmath}$ de $C^*(\mathcal{B})$ em $M(C^*(\mathcal{B} \otimes K))$. Além disso, temos uma $*$-representação ρ da álgebra de operadores compactos K em $M(C^*(\mathcal{B} \otimes K))$ dada por $u \mapsto 1 \otimes u$. Como $\widetilde{\jmath}(C^*(\mathcal{B}))$ e $\rho(K)$ comutam, existe um único $*$-homomorfismo π de $C^*(\mathcal{B}) \otimes K$ tal que $\pi(a \otimes b) = \widetilde{\jmath}(a) \otimes \rho(b)$. É fácil ver que $\pi = \widetilde{\imath}^{-1}$. ■

Proposição 4.2.8. *Seja $\mathcal{B}$ um fibrado de Fell estável. Então $C^*(\mathcal{B})$ é uma C^*-álgebra estável. Mais ainda, existe um isomorfismo φ : $C^*(\mathcal{B}) \to C^*(\mathcal{B}) \otimes K$ tal que*

$$\varphi(B_g) = B_g \otimes K,$$

para todo $g \in G$.

Demonstração: Primeiramente, consideremos $E_j = 1 \otimes e_{jj} \in M(B_e \otimes K)$. Então, E_j é uma projeção, para cada $j \in \mathbb{N}$, e $\sum_j E_j = 1 \otimes 1$ com convergência na topologia estrita de $M(B_e \otimes K)$. Mais ainda, as projeções E_j são mutuamente equivalentes e ortogonais, uma vez que $(1 \otimes e_{ij})(1 \otimes e_{ji}) = E_i$ e $(1 \otimes e_{ji})(1 \otimes e_{ij}) = E_j$.

Suponha agora que B_e seja estável. Assim, B_e é isomorfo a $B_e \otimes K$ e, consequentemente, $M(B_e \otimes K)$ e $M(B_e)$ são isomorfos. Tal isomorfismo é também contínuo nas respectivas topologias estritas de $M(B_e \otimes K)$ e $M(B_e)$ (Proposição A.3.3), donde concluímos do que foi feito acima que existe uma sequência de projeções $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $M(B_e)$, mutuamente equivalentes e ortogonais, e tais que $\sum_j E_j = 1$ com convergência na topologia estrita de $M(B_e)$. Observando que a inclusão de B_e em $C^*(\mathcal{B})$ é não degenerada e novamente usando a Proposição A.3.3, podemos considerar uma sequência $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $M(C^*(\mathcal{B}))$ satisfazendo as mesmas propriedades.

Vamos mostrar que $C^*(\mathcal{B}) \cong A_1 \otimes K$, em que $A_1 = E_1 C^*(\mathcal{B}) E_1$.

Seja $p_n = \sum_1^n E_j$ e colocamos $A_n = p_n C^*(\mathcal{B}) p_n$. Notemos que $A_n \subseteq A_{n+1}$, pois se $b \in A_n$, temos que

$$p_{n+1} b p_{n+1} = p_{n+1} p_n b p_n p_{n+1} = p_n b p_n = b.$$

Seja $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ a inclusão e seja

$$\begin{aligned} \psi^n : A_n &\to A_1 \otimes K \\ b &\mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_i^* b v_j \otimes e_{ij}, \end{aligned}$$

em que $v_1, v_2, \ldots$ são isometrias parciais em $M(C^*(\mathcal{B}))$ com $v_1 = E_1$, $v_j^* v_j = E_1$ e $v_j v_j^* = E_j$, para $j \geq 2$. Vamos mostrar que ψ^n é um $*$-homomorfismo injetor.

Como $v_j = v_j v_j^* v_j = v_j E_1$ e $v_j^* = v_j^* v_j v_j^* = E_1 v_j^*$, para cada j, temos que ψ^n está bem definida. Para ver que ψ^n é $*$-homomorfismo, sejam $a, b \in A_n$. Então,

$$\begin{aligned}
\psi^n(a)\psi^n(b) &= \left(\sum_{1\le i,j\le n} v_i^* a v_j \otimes e_{ij}\right)\left(\sum_{1\le k,l\le n} v_k^* b v_l \otimes e_{kl}\right) \\
&= \sum_{1\le i,l\le n} v_i^* a \left(\sum_{k=1}^{n} v_k v_k^*\right) b v_l \otimes e_{il} \\
&= \sum_{1\le i,l\le n} v_i^* a p_n b v_l \otimes e_{il} \\
&= \sum_{1\le i,l\le n} v_i^* a b v_l \otimes e_{il} = \psi^n(ab).
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\psi^n(a)^* = \sum_{1\le i,j\le n} v_j^* a^* v_i \otimes e_{ji} = \psi^n(a^*).$$

Mostremos que ψ^n é injetor. Seja $a \in A_n$ tal que

$$\psi^n(a) = \sum_{1\le i,j\le n} v_i^* a v_j \otimes e_{ij} = 0.$$

Isso nos diz que $v_i^* a v_j = 0$, para $1 \le i, j \le n$. Multiplicando a igualdade por v_i pela esquerda e por v_j^* pela direita, concluímos que $E_i a E_j = 0$, para $1 \le i, j \le n$. Logo, $a = p_n a p_n = \left(\sum_1^n E_j\right) a \left(\sum_1^n E_j\right) = 0$.

Observamos que se $a \in A_n$ e $j = n+1$, então

$$a v_j = a v_j v_j^* v_j = a E_{n+1} v_{n+1} = 0$$

e similarmente, $v_j^* a = v_j^* v_j v_j^* a = 0$. Portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\psi^{n+1}"] \\
& A_1 \otimes K
\end{tikzcd}$$

comuta.

Desta forma, sendo A o limite direto da sequência $(A_n, \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, existe um único $*$-homomorfismo $\psi : A \to A_1 \otimes K$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A \arrow[d, "\psi"] \\ & A_1 \otimes K \end{tikzcd}$$

comuta, em que φ^n é a inclusão natural de A_n em A (Teorema 6.1.2, [20]).

No entanto, neste caso A é exatamente $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ (Observação 6.1.3, [20]). Uma vez que $A_n = p_n C^*(\mathcal{B}) p_n$ e a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1 estritamente em $M(C^*(\mathcal{B}))$, segue que $A = C^*(\mathcal{B})$. Assim, resta provarmos que ψ é um isomorfismo para concluir que $C^*(\mathcal{B})$ é estável.

De fato, ψ é injetiva pois cada ψ^n é isométrica. Vamos provar que ψ é sobrejetora.

Sejam $k, l \in \mathbb{N}$ e $b \otimes e_{kl} \in A_1 \otimes K$. Temos que $b = E_1 b E_1 = v_k^* v_k b v_l^* v_l$. Tomamos $a = v_k b v_l^*$ e temos que $a \in A_n$, em que $n = \max\{k, l\}$. Uma vez que $v_i^* v_j = 0$ para $i \neq j$, temos

$$\psi(a) = \psi^n(a) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_i^* v_k b v_l^* v_j \otimes e_{ij} = b \otimes e_{kl}.$$

Como estes elementos geram $A_1 \otimes K$, segue que ψ é um $*$-isomorfismo e, portanto, $C^*(\mathcal{B})$ é estável.

Por fim, seja $g \in G$. Como $v_j \in M(B_e) \subseteq M(C^*(\mathcal{B}))$, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $\psi(B_g) = E_1 B_g E_1 \otimes K$, pois os multiplicadores $v_j's$ não alteram a fibra g. Além disso, o isomorfismo φ entre $A_1 \otimes K$ e $A_1 \otimes K \otimes K$ construído na Proposição 4.1.3 é tal que

$$\varphi\left(E_1 B_g E_1 \otimes K\right) = E_1 B_g E_1 \otimes K \otimes K.$$

Assim, identificando $C^*(\mathcal{B})$ com $A_1 \otimes K$ e B_g com $E_1 B_g E_1 \otimes K$, o isomorfismo φ entre $C^*(\mathcal{B})$ e $C^*(\mathcal{B}) \otimes K$ é tal que $\varphi\left(B_g\right) = B_g \otimes K$.

■

4.3 Projeções cheias

Nesta seção, vamos ver algumas propriedades satisfeitas por projeções cheias e mostrar que se $p \in M(A)$ é cheia, em caso de uma C^*-álgebra com elemento estritamente positivo ou, equivalentemente, com uma unidade aproximada sequencial, obtemos uma isometria parcial v

em $M(A\otimes K)$ satisfazendo $v^*v=1$ e $vv^*=p\otimes 1$. Tal isometria parcial fornece um isomorfismo estável entre A e o canto determinado por p. Este resultado, assim como os principais resultados desta seção, pode ser encontrado em [5]. A prova do teorema de Brown-Green-Rieffel é obtida de [6]. O leitor interessado em uma outra demonstração do teorema pode encontrá-la em [18].

Definição 4.3.1. *Um* canto *de A é uma C^*-álgebra da forma pAp, para alguma projeção p em $M(A)$.*

Exemplo 4.3.2. *Uma vez que $(1\otimes e_{jj})(A\otimes K)(1\otimes e_{jj})=A\otimes e_{jj}$, para qualquer $j\in\mathbb{N}$, podemos ver A como um canto de $A\otimes K$.*

Uma C^*-subálgebra de uma C^*-álgebra A é dita ser *cheia* se não está contida em nenhum ideal próprio de A.

Lema 4.3.3. *Seja p uma projeção em $M(A)$. Então são equivalentes:*

(i) *Para qualquer representação não degenerada π de A, tem-se $\tilde{\pi}(p)\neq 0$, em que $\tilde{\pi}$ denota a única extensão unital de π a $M(A)$;*

(ii) *Para qualquer representação irredutível π de A, tem-se $\tilde{\pi}(p)\neq 0$;*

(iii) *pAp é cheia;*

(iv) *$\overline{ApA}=A$;*

(v) *pA não está contido em nenhum ideal próprio fechado de A;*

(vi) *Ap não está contido em nenhum ideal próprio fechado de A;*

(vii) *O ideal fechado de $M(A)$ gerado por p contém A;*

(viii) *p não pertence a nenhum ideal próprio estritamente fechado de $M(A)$.*

Demonstração: Para (i)$\Rightarrow$(ii) não há nada a fazer. Se pAp não é cheia, pelo Teorema 5.3.3 de [20] existe um estado puro ρ de A tal que $pAp\subseteq I\subseteq N_\rho$, em que I denota o ideal fechado gerado por pAp e N_ρ é o núcleo do estado puro ρ. Como ρ é um estado puro, pelo Teorema 5.1.6 de [20] a representação GNS (H_ρ,φ_ρ) associada a ρ é irredutível. Esta representação se anula em I e, consequentemente, em pAp e teremos $\widetilde{\varphi_\rho}(p)=0$, contradizendo a hipótese. Donde segue (ii)$\Rightarrow$(iii).

Para (iii)$\Rightarrow$(iv), é suficiente observamos que $pAp=pA\cap Ap$ e, da existência de unidade aproximada para A, segue que $\overline{ApA}\supseteq pA\supseteq$

pAp. Utilizando o mesmo argumento, obtemos a implicação (iv)$\Rightarrow$(v). (v)$\Rightarrow$(vi) segue diretamente do fato de $(pA)^* = Ap$ e qualquer ideal fechado de A é autoadjunto. Como o ideal fechado gerado por p contém Ap e pA, temos (vi)$\Rightarrow$(vii) e uma vez que A é denso em $M(A)$ na topologia estrita, temos (vii)$\Rightarrow$(viii).

Resta provarmos a implicação (viii)$\Rightarrow$(i). Observamos que, se π é uma representação não degenerada de A sobre um espaço de Hilbert H, então $\ker(\tilde{\pi})$ é fechado na topologia estrita de $M(A)$. De fato, como π é não degenerada, se um net $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em $\ker(\tilde{\pi})$ é tal que $x_\lambda \to x$ na topologia estrita de $M(A)$, em que $x \in M(A)$, segue que

$$0 = \tilde{\pi}(x_\lambda)\pi(a)h = \tilde{\pi}(x_\lambda a)h \to \tilde{\pi}(xa)h = \tilde{\pi}(x)\pi(a)h,$$

para $a \in A$ e $h \in H$. Logo, $x \in \ker(\tilde{\pi})$ e $\ker(\tilde{\pi})$ é fechado na topologia estrita de $M(A)$. Portanto segue (vii)$\Rightarrow$(i), concluindo a prova.

■

Definição 4.3.4. *Uma projeção p em $M(A)$ é dita ser* cheia *se satisfaz as condições do Lema 4.3.3.*

Exemplo 4.3.5. *A projeção identidade é cheia, para qualquer C^*-álgebra e se $F \subseteq \mathbb{N}$ é finito e não vazio, a projeção $\sum\limits_{i\in F} e_{ii} \in K$, é uma projeção cheia.*

Demonstração: De fato, se $p = \sum\limits_{i\in F} e_{ii} \in K$, observamos que qualquer elemento da forma e_{il}, com $i \in F$ e $j \in \mathbb{N}$, pertence a pK. Assim, se I é um ideal fechado de A contendo pK segue que qualquer matriz unidade $e_{kl} \in I$. Como as matrizes unidade geram K, segue o resultado.

■

Proposição 4.3.6. *Seja A uma C^*-álgebra e I um ideal de A que é denso em A. Então existe uma unidade aproximada crescente de A consistindo de elementos de I.*

Demonstração: Seja $\tilde{A}$ a unitização de A e seja Λ o conjunto de subconjuntos finitos de I ordenados por inclusão.

Para $\lambda = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Lambda$, colocamos

$$v_\lambda = x_1x_1^* + \cdots + x_nx_n^* \in I$$

e

$$u_\lambda = v_\lambda \left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1}.$$

Uma vez que v_λ é positivo e, portanto, $\frac{1}{n} + v_\lambda$ é invertível em $\tilde{A}$, temos que u_λ está bem definido. Além disso, como I é um ideal em $\tilde{A}$, segue que $u_\lambda \in I$. Uma vez que a função de uma variável real $t \mapsto t\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1}$ só apresenta valores entre 0 e 1 para $t \geq 0$, temos que $0 \leq u_\lambda \leq 1$. Vamos mostrar que $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para A.

Temos, para $\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}((u_\lambda - 1)x_i)((u_\lambda - 1)x_i)^* &= (u_\lambda - 1)v_\lambda(u_\lambda - 1) \\
&= \left(v_\lambda\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} - 1\right)v_\lambda \\
&\quad \left(v_\lambda\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} - 1\right) \\
&= v_\lambda\left(v_\lambda^2\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-2}\right) \\
&\quad +v_\lambda\left(-2v_\lambda\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_\lambda\left(v_\lambda^2 - 2v_\lambda\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right) + \left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^2\right)\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-2} \\
&= \frac{v_\lambda}{n^2}\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Agora, a função de uma variável real $t \mapsto t\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-2}$ é sempre menor ou igual a $\dfrac{n}{4}$. De fato, derivando a função $t \mapsto \frac{1}{n^2 t} + \frac{2}{n} + t$ com relação a t obtemos que $t = \frac{1}{n}$ é ponto de mínimo no intervalo $(0, +\infty)$, ou seja, $t = \dfrac{1}{n}$ é ponto de máximo para a função $t \mapsto t\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-2}$ em $[0, +\infty)$. Donde

$$t\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-2} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^{-2} = \frac{n}{4}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n}((u_\lambda - 1)x_i)((u_\lambda - 1)x_i)^* \leq \frac{1}{4n}.$$

Para $i = 1, 2, \ldots, n$ deduzimos que $((u_\lambda - 1)x_i)((u_\lambda - 1)x_i)^* \leq \dfrac{1}{4n}$ e segue que

$$\|(u_\lambda - 1)x_i\|^2 \leq \frac{1}{4n}.$$

Assim, para $x \in I$ concluímos que $\lim\limits_{\lambda}(u_\lambda x) = x$. Como $\|u_\lambda\| \leq 1$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e I é denso em A, temos que $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é unidade aproximada para A.

Finalmente, provemos que $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é crescente. Sejam $\lambda, \mu \in \Lambda$ tais que $\lambda \leq \mu$. Temos $\lambda = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\mu = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, $n \leq p$ e assim, $v_\lambda \leq v_\mu$ e

$$\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{n} + v_\mu\right)^{-1}.$$

Para qualquer número real $t \geq 0$ temos

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} \geq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + t\right)^{-1},$$

donde

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\mu\right)^{-1} \geq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + v_\mu\right)^{-1},$$

o que implica

$$1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} \leq 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\mu\right)^{-1} \leq 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + v_\mu\right)^{-1}. \quad (1)$$

No entanto,

$$\left(v_\lambda + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1}\right) = v_\lambda,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
v_\lambda\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-1} &= \left(v_\lambda+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-1}\right)\left(v_\lambda+\frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= 1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos de (1) que

$$u_\lambda = v_\lambda\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-1} \leq v_\mu\left(\frac{1}{n}+v_\mu\right)^{-1} = u_\mu$$

e $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é crescente.

■

O seguinte teorema generaliza o que acabamos de provar:

Teorema 4.3.7. *Se R é um ideal à direita de A (não necessariamente fechado) que gera um ideal denso em A, então A possui uma unidade aproximada crescente consistindo de somas finitas da forma $\sum r_j^* r_j$, $r_j \in R$.*

Demonstração: O ideal fechado $\overline{R^*R}$ (em que $R^*R =: span\{r^*s : r,s \in R\}$) contém R, pois se $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para $\overline{R^*R}$ e $r \in R$, temos $\|r - ru_\lambda\|^2 = \|(r^* - u_\lambda r^*)(r - ru_\lambda)\| \to 0$. Logo, o ideal $I = R^*R$ é denso em A. Pela Proposição 4.3.6, A possui uma unidade aproximada crescente consistindo de elementos de I. Vamos mostrar que podemos tomar estes elementos como desejado.

Seja, de forma análoga à Proposição 4.3.6, $\tilde{A}$ a unitização de A e Λ o conjunto de subconjuntos finitos de R ordenados por inclusão.

Para $\lambda = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Lambda$, colocamos

$$v_\lambda = x_1^* x_1 + \cdots + x_n^* x_n \in I$$

e, novamente,

$$u_\lambda = v_\lambda\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-1}.$$

Notemos que $u_\lambda = \sum_{j=1}^{n} r_j^* r_j$, em que $r_j = x_j\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-\frac{1}{2}}$. Pelo que fizemos na Proposição 4.3.6, temos que $\|u_\lambda\| \leq 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é crescente. Desta forma, resta provarmos que $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para A, uma vez que o conjunto de índices Λ

considerado aqui é formado por conjuntos finitos de R, e não mais do ideal R^*R.

Observamos que, dados $a, b \in A$, então $0 \leq (a-b)^*(a-b) = a^*a + b^*b - a^*b - b^*a$ o que implica

$$a^*b + b^*a \leq a^*a + b^*b. \tag{†}$$

Se $x, y \in I$ são elementos da forma r^*s com $r, s \in R$, digamos $x = r^*s$ e $y = r'^*s'$, aplicando (†) para $a = s$ e $b = rr'^*s'$, concluímos que

$$x^*y + y^*x \leq a^*a + b^*b, \tag{‡}$$

em que $a = s$ e $b = rr'^*s'$ pertencem a R. Mais ainda, dado um elemento arbitrário x em I, aplicando (‡) nas parcelas de x^*x, obtemos que existem c_j's em R, $j = 1, \ldots, n$, tais que $x^*x \leq \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^* c_j$.

Logo, tomando $\lambda_0 = \{c_1, \ldots, c_n\}$, temos $v_{\lambda_0} = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^* c_j$ e

$$\begin{aligned}
\|x(1-u_{\lambda_0})\|^2 &= \|(1-u_{\lambda_0})x^*x(1-u_{\lambda_0})\| \\
&\leq \|(1-u_{\lambda_0})\sum_{j=1}^{n} c_j^* c_j (1-u_{\lambda_0})\| \\
&= \|(1-u_{\lambda_0})v_{\lambda_0}(1-u_{\lambda_0})\| \leq \frac{1}{4n},
\end{aligned}$$

como já justificado na Proposição 4.3.6. O mesmo vale para $\lambda \geq \lambda_0$, donde segue que $\lim\limits_{\lambda} u_\lambda x = x$, com $x \in I$. Como I é denso em A, concluímos que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é unidade aproximada para A.

$\blacksquare$

Lema 4.3.8. *Se p é uma projeção cheia em $M(A)$, $e \in A$ e $\varepsilon > 0$, então existem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^* p a_i \leq 1$ e*

$$\|(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^* p a_i)e\| < \varepsilon.$$

Demonstração: Como $p \in M(A)$ é projeção cheia, $R = pA$ é um ideal à direita de A que gera um ideal denso em A. Se $e \in A$ e $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 4.3.7 A possui uma unidade aproximada formada por elementos da forma $\sum a_i^* p a_i$ e, portanto, podemos obter $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^* p a_j \leq 1$ e

$$\left\| \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j^* p a_j \right) e \right\| < \varepsilon.$$

■

Lema 4.3.9. *Seja p uma projeção cheia em $M(A)$ e suponha que A possua um elemento estritamente positivo e. Então, existe uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^* p a_i = 1$, com convergência na topologia estrita de $M(A)$.*

Demonstração: Vamos construir recursivamente $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e a_i, $1 \leq i \leq n_k$, tais que

$$s_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_i^* p a_i \leq 1$$

e

$$\|(1 - s_k)e\| \leq \frac{1}{k}.$$

Para $k = 1$, a existência de s_1 satisfazendo tais condições segue do Lema 4.3.8. Suponha que isto valha para $k > 1$. Pelo Lema 4.3.8, podemos escolher $b_1, b_2, \ldots b_m$ tais que $s' = \sum b_j^* p b_j \leq 1$ e

$$\|(1 - s_k)^{\frac{1}{2}}(1 - s')(1 - s_k)^{\frac{1}{2}} e\| < \frac{1}{k+1}.$$

Seja $n_{k+1} = n_k + m$ e $a_{n_k + j} = b_j (1 - s_k)^{\frac{1}{2}}$, para $1 \leq j \leq m$. Assim,

$$\begin{aligned} 1 - s_{k+1} &= (1 - s_k) - \sum_{j=1}^{m} (1 - s_k)^{\frac{1}{2}} b_j^* p b_j (1 - s_k)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 - s_k)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sum_{j=1}^{m} b_j^* p b_j \right) (1 - s_k)^{\frac{1}{2}} \geq 0, \end{aligned}$$

donde $s_{k+1} \leq 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(1-s_{k+1})e\| &= \|(1-s_k)e - \sum_{j=1}^{m}(1-s_k)^{\frac{1}{2}}b_j^*pb_j(1-s_k)^{\frac{1}{2}}e\| \\
&= \|(1-s_k)^{\frac{1}{2}}(1-s')(1-s_k)^{\frac{1}{2}}e\| < \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 1$ na topologia estrita de $M(A)$. De fato, como e é estritamente positivo, temos que eA é denso em A (Proposição A.2.2), ou equivalentemente, Ae é denso em A. Desta forma, dado $b \in A$ e $\varepsilon > 0$, seja $a \in A$ tal que $\|b - ea\| < \varepsilon$. Temos

$$\begin{aligned}
\|b - s_k b\| &\leq \|b - ea\| + \|ea - s_k ea\| + \|s_k ea - s_k b\| \\
&\leq \|b - ea\| + \|e - s_k e\|\|a\| + \|s_k\|\|ea - b\| < 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

para k suficientemente grande, uma vez que $\|s_k\| \leq 1$, para todo k. Analogamente segue $\|b - bs_k\| < 3\varepsilon$.

Resta provarmos que $\sum a_i^*pa_i = 1$, com convergência na topologia estrita de $M(A)$. Dado $x \in A$, a sequência de elementos positivos $x^*(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^*pa_i)x$ é monótona decrescente e possui uma subsequência convergindo a 0. Logo, $x^*(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^*pa_i)x \to 0$. Como $\|1 - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^*pa_i\| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^*pa_i)x\| \leq \|(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^*pa_i)^{\frac{1}{2}}\|\|(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^*pa_i)^{\frac{1}{2}}x\|,$$

o lema é provado.

■

Lema 4.3.10. *Seja p uma projeção cheia em $M(A)$ e suponha que A possua um elemento estritamente positivo. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma isometria parcial $u_j \in M(A \otimes K)$ tal que $u_j^*u_j = 1 \otimes e_{jj}$ e $u_ju_j^* \leq p \otimes 1$.*

Demonstração: Vamos construir tal isometria parcial para $j = 1$, uma vez que para $j \in \mathbb{N}$ arbitrário a construção é análoga. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no Lema 4.3.9. Assim, $\sum_i a_i^*pa_i = 1$, com convergência na topologia estrita de $M(A)$.

Definimos $u = \sum_i pa_i \otimes e_{i1}$ e mostremos que u está bem definido, ou seja, que a série converge na topologia estrita de $M(A)$.

Notemos que se $u_n = \sum_1^n pa_i \otimes e_{i1}$, então

$$\|u_n\|^2 = \|u_n^* u_n\| = \left\|\sum_1^n a_i^* pa_i \otimes e_{11}\right\| \leq 1.$$

Desta forma, como somas finitas da forma $\sum b_{jk} \otimes e_{jk}$ são densas em $A \otimes K$ e $\|u_n\| \leq 1$ para todo n, é suficiente provarmos que as sequências $(u_n(b \otimes e_{jk}))_{n\in\mathbb{N}}$ e $((b \otimes e_{jk})u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem, para todo $b \in A$ e $j, k \in \mathbb{N}$. Mas,

$$(b \otimes e_{jk})u_n = [n \geq k] bpa_k \otimes e_{j1}$$

donde $\lim_n (b \otimes e_{jk})u_n = bpa_k \otimes e_{j1}$. Para o outro caso, temos

$$\begin{aligned}
\|(u_m - u_n)b \otimes e_{jk}\|^2 &= \|(b^* \otimes e_{kj})(u_m^* - u_n^*)(u_m - u_n)(b \otimes e_{jk})\| \\
&= \left\|(b^* \otimes e_{kj}) \left(\sum_{n+1}^m a_i^* pa_i \otimes e_{11}\right)(b \otimes e_{jk})\right\| \\
&= [j = 1] \left\|\sum_{n+1}^m b^* a_i^* pa_i b \otimes e_{kk}\right\| \\
&= [j = 1] \left\|\sum_{n+1}^m b^* a_i^* pa_i b\right\| \to 0,
\end{aligned}$$

uma vez que $\sum_i a_i^* pa_i$ converge na topologia estrita de $M(A)$.

Resta verificarmos que $u^*u = 1 \otimes e_{11}$ e $uu^* \leq p \otimes 1$. Temos que

$$u^*u = \sum_i a_i^* pa_i \otimes e_{11} = 1 \otimes e_{11}.$$

Além disso, $uu^*(p \otimes 1) = uu^*$ e pelo Teorema 2.3.2 de [20], segue que $uu^* \leq p \otimes 1$, concluindo a prova.

■

O próximo resultado terá como consequência um isomorfismo estável entre uma C^*-álgebra possuindo elemento estritamente positivo e um canto cheio. Com isso em mãos, para duas C^*-álgebras Morita equivalentes, ambas possuindo elementos estritamente positivos, será suficiente tomar a álgebra de ligação de um bimódulo de imprimitividade para obter o principal resultado deste capítulo, a saber o teorema de Brown-Green-Rieffel.

Para fins da próxima demonstração, alertamos o leitor que usaremos amplamente o Teorema 2.3.2 de [20], que, entre outras coisas, diz que se p e q são projeções em um espaço de Hilbert, então $p \leq q$ se, e somente se, $pq = qp = p$.

Lema 4.3.11. *Seja p uma projeção cheia em $M(A)$ e suponha que A possua um elemento estritamente positivo. Então, existe uma isometria parcial $v \in M(A \otimes K)$ tal que $v^*v = 1$ e $vv^* = p \otimes 1$.*

Demonstração: Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, g uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e escrevemos $\mathbb{N} = \cup_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_j$, em que $\mathbb{N}_j = g^{-1}(\mathbb{N} \times \{j\})$. Assim, os $\mathbb{N}_j$'s são subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, disjuntos dois a dois. Para $j \in \mathbb{N}$, seja $f_j = \sum_{i \in \mathbb{N}_j} 1 \otimes e_{ii} \in M(A \otimes K)$. A prova de que f_j está bem definido, para cada j, é feita como no Lema 4.3.10.

Vamos construir indutivamente uma sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de isometrias parciais em $M(A \otimes K)$ tais que as projeções $v_k^* v_k$ são mutuamente ortogonais, as projeções $v_k v_k^*$ são mutuamente ortogonais,

$$\sum_1^{2n-1} v_k^* v_k = \sum_1^n f_j \ , \ \sum_1^{2n} v_k^* v_k \leq \sum_1^{n+1} f_j$$

e

$$\sum_1^{2n-1} v_k v_k^* \leq (p \otimes 1) \sum_1^n f_j \ , \ \sum_1^{2n} v_k v_k^* = (p \otimes 1) \sum_1^n f_j .$$

Uma vez que isto é feito, definimos $v = \sum_1^\infty v_k$, com convergência na topologia estrita.

Para construir v_{2n-1}, precisaremos de um passo intermediário, que consiste na construção de uma outra isometria parcial w satisfazendo $w^*w = f_n$ e $ww^* \leq (p \otimes 1) f_n$. Primeiramente, observamos que $p \otimes 1$ é uma projeção cheia em $M(A \otimes K)$ e $A \otimes K$ possui elemento estritamente positivo, uma vez que A e K possuem. Logo, pelo Lema 4.3.10, para $n \in \mathbb{N}$ existe uma isometria parcial $u \in M(A \otimes K \otimes K)$ tal que $u^*u = 1 \otimes 1 \otimes e_{nn}$ e $uu^* = p \otimes 1 \otimes 1$. Como na Proposição 4.1.3, seja φ o $*$-isomorfismo de $A \otimes K$ e $A \otimes K \otimes K$ tal que $\varphi(a \otimes e_{kl}) = a \otimes e_{k_1 l_1} \otimes e_{k_2 l_2}$, em que $(k_1, k_2) = g(k)$ e $(l_1, l_2) = g(l)$. Seja $\psi = \varphi^{-1}$ e $u' = \psi(u)$. Afirmamos que $u'^* u' = f_n$ e $u' u'^* \leq p \otimes 1$.

De fato, temos que $\sum_1^\infty e_{ii} = 1$, com convergência na topologia estrita. Assim, sendo $\widetilde{\psi}$ a extensão de ψ a $M(A \otimes K \otimes K)$, temos que

$$\begin{aligned} u'^* u' &= \widetilde{\psi}(1 \otimes 1 \otimes e_{nn}) = \widetilde{\psi}(\sum_i 1 \otimes e_{ii} \otimes e_{nn}) \\ &= \sum_i \widetilde{\psi}(1 \otimes e_{ii} \otimes e_{nn}) = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} 1 \otimes e_{ii} = f_n, \end{aligned}$$

pois $\widetilde{\psi}$ é contínuo na topologia estrita (Proposição A.3.3). Além disso,

$$u' u'^* = \widetilde{\psi}(uu^*) \leq \widetilde{\psi}(p \otimes 1 \otimes 1) = p \otimes 1.$$

Seja $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}$ uma bijeção e colocamos $a = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} 1 \otimes e_{i\sigma(i)} \in M(A \otimes K)$. Então, $a^* a = 1 \otimes 1$ e $aa^* = f_n$. Definimos $w = au$ e temos,

$$w^* w = u^* a^* a u = f_n$$

e

$$ww^* = auu^* a^* \leq a(p \otimes 1)a^* = (p \otimes 1)aa^* = (p \otimes 1)f_n.$$

Por fim, colocamos $v_{2n-1} = w(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-2} v_k^* v_k)$. Começamos por mostrar que v_{2n-1} é isometria parcial.

Por hipótese $\sum_1^{2n-3} v_k^* v_k = \sum_1^{n-1} f_j$ e $\sum_1^{2n-2} v_k^* v_k \leq \sum_1^n f_j$, disso segue que $v_{2n-2}^* v_{2n-2} \leq f_n$, donde $v_{2n-2}^* v_{2n-2} = v_{2n-2}^* v_{2n-2} f_n = f_n v_{2n-2}^* v_{2n-2}$. Logo,

$$\begin{aligned} v_{2n-1}^* v_{2n-1} &= \left(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-2} v_k^* v_k\right) f_n \left(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-2} v_k^* v_k\right) \\ &= (f_n - v_{2n-2}^* v_{2n-2}) f_n (f_n - v_{2n-2}^* v_{2n-2}) \\ &= f_n - v_{2n-2}^* v_{2n-2}, \end{aligned}$$

donde $v_{2n-1}^* v_{2n-1}$ é projeção e, portanto, v_{2n-1} é isometria parcial. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \sum_1^{2n-1} v_k^* v_k &= \sum_1^{2n-2} v_k^* v_k + v_{2n-1}^* v_{2n-1} \\ &= \sum_1^{n-1} f_j + v_{2n-2}^* v_{2n-2} + (f_n - v_{2n-2}^* v_{2n-2}) = \sum_1^n f_j \end{aligned}$$

e, novamente por hipótese,

$$\sum_{1}^{2n-1} v_k v_k^* = \sum_{1}^{2n-2} v_k v_k^* + v_{2n-1} v_{2n-1}^* = (p \otimes 1) \sum_{1}^{n-1} f_j + v_{2n-1} v_{2n-1}^*. \quad (\dagger)$$

Agora,

$$\begin{aligned} v_{2n-1} v_{2n-1}^* &= w \left(\sum_{1}^{n} f_j - \sum_{1}^{2n-2} v_k^* v_k \right) \left(\sum_{1}^{n} f_j - \sum_{1}^{2n-2} v_k^* v_k \right) w^* \\ &= w (f_n - \sum_{1}^{2n-2} v_k^* v_k) w^* \\ &= w (f_n - \sum_{1}^{2n-2} v_k^* v_k) w^* w w^*. \end{aligned}$$

Desta forma, como w é isometria parcial satisfazendo $ww^* \leq (p \otimes 1) f_n$, temos que $ww^*(p \otimes 1) f_n = ww^*$. Logo, $v_{2n-1} v_{2n-1}^* (p \otimes 1) f_n = v_{2n-1} v_{2n-1}^*$ e concluímos que $v_{2n-1} v_{2n-1}^* \leq (p \otimes 1) f_n$. De ($\dagger$) segue que $\sum_1^{2n-1} v_k v_k^* \leq (p \otimes 1) \sum_1^n f_j$.

Vamos mostrar agora que $v_{2n-1}^* v_{2n-1}$ é ortogonal a $v_k^* v_k$ e também $v_{2n-1} v_{2n-1}^*$ é ortogonal a $v_k v_k^*$, para $1 \leq k \leq 2n-2$. Inicialmente, como já vimos anteriormente, temos que $v_{2n-2}^* v_{2n-2} f_n = f_n v_{2n-2}^* v_{2n-2} = v_{2n-2}^* v_{2n-2}$, donde

$$v_{2n-1}^* v_{2n-1} v_{2n-2}^* v_{2n-2} = (f_n - v_{2n-2}^* v_{2n-2}) v_{2n-2}^* v_{2n-2} = 0.$$

Além disso, do fato que $\sum_1^{2n-3} v_k^* v_k = \sum_1^{n-1} f_j$, obtemos que

$$\left(\sum_{1}^{2n-3} v_k^* v_k \right) f_n = 0$$

e, portanto, multiplicando por $f_n v_k^* v_k$ pela esquerda concluímos que $v_k^* v_k f_n = 0$, para $1 \leq k \leq 2n-3$. Logo, $v_{2n-1}^* v_{2n-1}$ é ortogonal a $v_k^* v_k$, para $1 \leq k \leq 2n-2$.

Para mostrarmos que $v_{2n-1} v_{2n-1}^*$ é ortogonal a $v_k v_k^*$, para cada $1 \leq k \leq 2n-2$, observamos que, como já justificado, $v_{2n-1} v_{2n-1}^* = v_{2n-1} v_{2n-1}^* (p \otimes 1) f_n$ e, por outro lado, $\sum_1^{2n-2} v_k v_k^* = (p \otimes 1) \sum_1^{n-1} f_j$. Donde $v_{2n-1} v_{2n-1}^* (\sum_1^{2n-2} v_k v_k^*) = 0$ e assim $v_{2n-1} v_{2n-1}^* v_k v_k^* = 0$, para $1 \leq k \leq 2n-2$.

Para construir v_{2n}, precisamos novamente de um passo intermediário que consiste na construção de uma isometria parcial w' tal que $w'^*w' \leq f_{n+1}$ e $w'w'^* = (p \otimes 1)f_n$. Para isso, consideremos $\sigma' : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{n+1}$ uma bijeção e colocamos $w' = (p \otimes 1) \sum_{i \in \mathbb{N}_n} 1 \otimes e_{i\sigma'(i)}$. Então,

$$w'w'^* = (p \otimes 1) \sum_{i \in \mathbb{N}_n} 1 \otimes e_{ii} = (p \otimes 1)f_n$$

e

$$\begin{aligned} w'^*w' &= (p \otimes 1) \sum_{i \in \mathbb{N}_n} 1 \otimes e_{\sigma'(i)\sigma'(i)} \\ &= (p \otimes 1) \sum_{i \in \mathbb{N}_{n+1}} 1 \otimes e_{ii} = (p \otimes 1)f_{n+1} \leq f_{n+1}. \end{aligned}$$

Definimos $v_{2n} = (p \otimes 1)(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-1} v_k v_k^*)w'$. Então, como $\sum_1^{2n-2} v_k v_k^* = \sum_1^{n-1} f_j$, temos que

$$\begin{aligned} v_{2n}v_{2n}^* &= (p \otimes 1) \left(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-1} v_k v_k^* \right) w'w'^* \left(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-1} v_k v_k^* \right) (p \otimes 1) \\ &= (p \otimes 1)(f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^*)(p \otimes 1)f_n(f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^*)(p \otimes 1) \\ &= (p \otimes 1)(f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^*)(p \otimes 1) \\ &= (p \otimes 1)f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^*, \end{aligned}$$

pois, como já observado, $v_{2n-1}v_{2n-1}^* = v_{2n-1}v_{2n-1}^*(p \otimes 1)f_n = (p \otimes 1)f_n v_{2n-1}v_{2n-1}^*$. Logo, $v_{2n}v_{2n}^*$ é projeção e, portanto, v_{2n} é isometria parcial.

Vamos verificar que $\sum_1^{2n} v_k^* v_k \leq \sum_1^{n+1} f_j$ e $\sum_1^{2n} v_k v_k^* = (p \otimes 1) \sum_1^n f_j$. Usando a hipótese de que $\sum_1^{2n-2} v_k v_k^* = (p \otimes 1) \sum_1^{n-1} f_j$, temos

$$\sum_1^{2n} v_k v_k^* = \sum_1^{2n-2} v_k v_k^* + v_{2n-1}v_{2n-1}^* + (p \otimes 1)f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^* = (p \otimes 1) \sum_1^n f_j.$$

Para a desigualdade, temos

$$\begin{aligned} \sum_1^{2n} v_k^* v_k &= v_{2n}^* v_{2n} + \sum_1^{2n-1} v_k^* v_k \\ &= w'^* \left(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-1} v_k v_k^* \right) (p \otimes 1) \left(\sum_1^n f_j - \sum_1^{2n-1} v_k v_k^* \right) w' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \sum_1^n f_j \\
&= \quad w'^*((p\otimes 1)f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^*)w' + \sum_1^n f_j \\
&\leq \quad \sum_1^n f_j + f_{n+1} = \sum_1^{n+1} f_j.
\end{aligned}
$$

Aqui, usamos novamente o fato que $v_{2n-1}v_{2n-1}^* = v_{2n-1}v_{2n-1}^*(p\otimes 1)f_n = (p\otimes 1)f_n v_{2n-1}v_{2n-1}^*$ bem como o fato de $(p\otimes 1)f_n - v_{2n-1}v_{2n-1}^* \leq 1$.

A prova de que $v_{2n}v_{2n}^*$ é ortogonal a $v_kv_k^*$ e $v_{2n}^*v_{2n}$ é ortogonal a $v_k^*v_k$, $1 \leq k \leq 2n-1$, é feita por argumentos semelhantes aos utilizados no caso ímpar.

Finalmente, resta provarmos que $v = \sum_k v_k$ está bem definido e que temos $v^*v = 1$ e $vv^* = p\otimes 1$.

Seja $\beta_n = \sum_1^n v_k$. Como para $k \neq l$ tem-se

$$v_k^*v_l = v_k^*v_kv_k^*v_jv_j^*v_j = 0,$$

temos que β_n é isometria parcial e assim $\|\beta_n\| \leq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que os limites $\lim_n \beta_n(b\otimes e_{ij})$ e $\lim_n (b\otimes e_{ij})\beta_n$ existem, para quaisquer $b \in A$ e $i,j \in \mathbb{N}$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $i \in \mathbb{N}_N$ e seja $n \geq N$. Então, substituindo $\sum_1^{2n} v_kv_k^*$ por $(p\otimes 1)\sum_1^n f_j$ e $v_{2n+1}v_{2n+1}^*$ por $v_{2n+1}v_{2n+1}^*f_{n+1}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\beta_{2n+1}\beta_{2n+1}^*(b\otimes e_{ij}) &= \sum_1^{2n} v_kv_k^*(b\otimes e_{ij}) + v_{2n+1}v_{2n+1}^*(b\otimes e_{ij}) \\
&= (p\otimes 1)(b\otimes e_{ij})
\end{aligned}
$$

e

$$\beta_{2n}\beta_{2n}^*(b\otimes e_{ij}) = \sum_1^n (p\otimes 1)f_j(b\otimes e_{ij}) = (p\otimes 1)(b\otimes e_{ij}).$$

Tomando N' tal que $j \in \mathbb{N}_{N'}$ e repetindo os argumentos acima, concluímos que $\lim_n (b\otimes e_{ij})\beta_n\beta_n^* = (b\otimes e_{ij})(p\otimes 1)$. Agora, para $n \geq N$,

$$\beta_{2n+1}^*\beta_{2n+1}(b\otimes e_{ij}) = \sum_1^{n+1} f_j(b\otimes e_{ij}) = b\otimes e_{ij}$$

e

$$\beta_{2n}^*\beta_{2n}(b\otimes e_{ij}) = \sum_{1}^{2n-1} v_k^* v_k(b\otimes e_{ij}) + v_{2n}^* v_{2n}(b\otimes e_{ij}) = b\otimes e_{ij},$$

uma vez que $\sum_1^{2n-1} v_k^* v_k = \sum_1^n f_j$ e $v_{2n}^* v_{2n} = v_{2n}^* v_{2n} f_{n+1} = f_{n+1} v_{2n}^* v_{2n}$. Logo, $\lim\limits_n \beta_n^*\beta_n(b\otimes e_{ij}) = b\otimes e_{ij}$ e analogamente prova-se que $\lim\limits_n (b\otimes e_{ij})\beta_n^*\beta_n = b\otimes e_{ij}$. Assim, como

$$\|(\beta_n - \beta_m)(b\otimes e_{ij})\|^2 = \|(b\otimes e_{ji})(\beta_n^*\beta_n - \beta_m^*\beta_m)(b\otimes e_{ij})\|$$

e

$$\|(b\otimes e_{ij})(\beta_n - \beta_m)\|^2 = \|(b\otimes e_{ij})(\beta_n\beta_n^* - \beta_m\beta_m^*)(b\otimes e_{ji})\|,$$

segue que $v = \sum_k v_k$ está bem definido e temos $v^*v = 1$ e $vv^* = p\otimes 1$, como desejado.

■

Definição 4.3.12. *Dizemos que duas C^*-álgebras A e B são estavelmente isomorfas se $A\otimes K$ e $B\otimes K$ são isomorfas.*

Corolário 4.3.13. *Se A é uma C^*-álgebra com elemento estritamente positivo e B é um canto cheio de A, então A e B são estavelmente isomorfas.*

Demonstração: Seja $p \in M(A)$ tal que $B = pAp$. Identificamos $B\otimes K$ com $(p\otimes 1)A\otimes K(p\otimes 1)$ e seja $v \in M(A\otimes K)$ uma isometria parcial como no Lema 4.3.11, ou seja, $v^*v = 1$ e $vv^* = p\otimes 1$.

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \pi : A\otimes K & \to & B\otimes K \\ y & \mapsto & vyv^*, \end{array}$$

em que $y \in A\otimes K$.

Notemos que, se $a \in A$ e $x \in K$, então $v(a\otimes x)v^* = vv^*v(a\otimes x)v^*vv^* = (p\otimes 1)v(a\otimes x)v^*(p\otimes 1)$, donde π está bem definida, já que somas finitas da forma $\sum a\otimes x$ formam um conjunto denso em $A\otimes K$. Mais ainda, sendo $v^*v = 1$, temos que π é $*$-homomorfismo. Para ver que π é injetiva, seja $y \in A\otimes K$ tal que $vyv^* = 0$. Então, multiplicando por v pela direita e por v^* pela esquerda, segue que $y = 0$. Dado $b \in B\otimes K$, temos que $b = (p\otimes 1)b(p\otimes) = vv^*bvv^*$. Tomando $y = v^*bv \in A\otimes K$, segue que $\pi(y) = b$ e π é sobrejetora.

Portanto, A e B são estavelmente isomorfas.

■

Teorema 4.3.14. *Seja B uma C^*-álgebra hereditária cheia de A e suponha que A e B possuam elementos estritamente positivos. Então B é estavelmente isomorfa a A.*

Demonstração: Seja C a C^*-subálgebra de $A \otimes M_2(\mathbb{C})$ consistindo de somas $\sum_{i,j} a_{ij} \otimes e_{ij}$ tal que $a_{11} \in B$, $a_{12} \in \overline{BA}$, $a_{21} \in \overline{AB}$ e $a_{22} \in A$, em que $\{e_{ij} : i,j \in \{1.2\}\}$ é um sistema de matrizes unidade para $M_2(\mathbb{C})$.

Observamos que B é isomorfo ao canto cheio $B \otimes e_{11}$ de C, dado pela projeção $1 \otimes e_{11} \in M(C)$.

De fato, para ver que $1 \otimes e_{11}$ é uma projeção cheia, suponha que I seja um ideal fechado de C contendo $B \otimes e_{11}$ e vamos mostrar que $I = C$. Notemos que $B \subseteq \overline{AB} \cap \overline{BA}$ e assim $J = I \cap (A \otimes e_{22})$ é não nulo, pois dado $b \in B$,

$$b \otimes e_{22} = \lim_{\lambda} (u_\lambda \otimes e_{21})(b \otimes e_{11})(u_\lambda \otimes e_{12}),$$

em que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma unidade aproximada para B. Logo, J é um ideal em $A \otimes e_{22}$ contendo $B \otimes e_{22}$. Identificando A com $A \otimes e_{22}$, chegamos a um absurdo, pois B é uma C^*-álgebra hereditária cheia de A. Portanto, $1 \otimes e_{11}$ é projeção cheia.

De mesma forma, se um ideal I contém $A \otimes e_{22}$, prova-se que I contém $B \otimes e_{11}$, e assim $I = C$. Consequentemente, $1 \otimes e_{22}$ é também uma projeção cheia e A é identificado com o canto cheio $A \otimes e_{22}$ de C.

Se $f_1 \in B$ e $f_2 \in A$, então $f = f_1 \otimes e_{11} + f_2 \otimes e_{22}$ é um elemento estritamente positivo de C, pois se $\phi \in C^*$ é um funcional linear positivo, temos que $\phi \mid_A$ e $\phi \mid_B$ são funcionais lineares positivos em A^* e B^*, respectivamente, e portanto $\phi(f) = \phi \mid_B (f_1 \otimes e_{11}) + \phi \mid_A (f_2 \otimes e_{22}) > 0$. Pelo Corolário 4.3.13, temos que A e B são estavelmente isomorfas a C e, consequentemente, A e B são estavelmente isomorfas.

■

A

Teorema 4.3.15 (Brown-Green-Rieffel). *Sejam A e B C^*-álgebras. Se A e B são estavelmente isomorfas, então são Morita equivalentes. Reciprocamente, se A e B são Morita equivalentes e ambas possuem elementos estritamente positivos, então A e B são estavelmente isomorfas.*

Demonstração: Suponha que A e B sejam estavelmente isomorfas. Seja $p = e_{11} \in K$. Então, $A \otimes K(1 \otimes e_{11})A \otimes K$ é denso em $A \otimes K$, pois contém cada elemento da forma $a \otimes e_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Logo, $1 \otimes e_{11}$ é projeção cheia e podemos identificar A com o canto cheio $A \otimes e_{11}$. Similarmente, identificamos B com o canto cheio $B \otimes e_{11}$ de $B \otimes K$. Portanto, A é Morita equivalente a $A \otimes K$ bem como B e $B \otimes K$ são Morita equivalentes, pelo Exemplo 1.3.4. Por transitividade e pelo isomorfismo entre $A \otimes K$ e $B \otimes K$, segue que A e B são Morita equivalentes.

Suponha agora que A e B são Morita equivalentes e ambas possuem elementos estritamente positivos. Seja X um $A - B$ bimódulo de imprimitividade e seja C a álgebra de ligação de X. Então, pelo Teorema 1.4.15, A e B são cantos cheios de C determinados pelas projeções

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Além disso, sendo f_1 e f_2 elementos estritamente positivos de A e B, respectivamente, o elemento f de C dado por

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$$

é estritamente positivo, por um argumento já usado no Teorema 4.3.14. Logo, concluímos do Corolário 4.3.13 que A e B são estavelmente isomorfas a C e, portanto, são estavelmente isomorfas.

$\blacksquare$

A hipótese do Teorema 4.3.15 é indispensável. Em [6] o leitor pode encontrar um exemplo de duas C^*-álgebras Morita equivalentes, mas que não são estavelmente isomorfas, mesmo permitindo produtos tensoriais com $K(H)$, para H não separável.

Capítulo 5

Produtos smash

Neste capítulo, apresentamos o principal resultado deste trabalho. No Capítulo 2, estudamos fibrados de Fell sobre grupos discretos, enquanto no Capítulo 3 mostramos que é possível construir um fibrado de Fell a partir de uma ação parcial. Aqui, queremos mostrar, sob certas hipóteses, uma equivalência entre estes dois conceitos. Em outras palavras, provamos que um fibrado de Fell qualquer, de fato, pode ser obtido através de uma ação parcial do grupo base sobre sua álgebra da fibra unidade. Tais hipóteses consistem na estabilidade do fibrado, enumerabilidade do grupo e separabilidade da álgebra B_e. Veremos exemplos que garantem a necessidade destas hipóteses.

Começamos definindo C^*-álgebras graduadas e para este tipo de C^*-álgebra, definimos o produto smash. Neste contexto, mostramos o teorema da dualidade de Takai para o caso discreto e na última seção, por fim, apresentamos nosso principal resultado.

Ao longo deste capítulo, quando nada for dito ao contrário, G é um grupo discreto com elemento neutro e.

5.1 C^*-álgebras graduadas

Definição 5.1.1. *Seja B uma C^*-álgebra, G um grupo e $\{B_g\}_{g\in G}$ uma coleção de subespaços vetoriais fechados de B. Dizemos que $\{B_g\}_{g\in G}$ é uma* graduação *para B se, para quaisquer $g, h \in G$ tem-se*

i) $B_g^* = B_{g^{-1}}$,

ii) $B_g B_h \subseteq B_{gh}$,

iii) *Os subespaços* $\{B_g\}_{g\in G}$ *são independentes e a soma direta* $\oplus_{g\in G}B_g$ *é densa em* B.

Neste caso, dizemos que B *é uma* C^**-álgebra* G*-graduada.*

Observação 5.1.2. *Dada uma* C^**-álgebra* G*-graduada, então a coleção de subespaços* $\{B_g\}_{g\in G}$ *forma um fibrado de Fell com as operações herdadas de* B.

Exemplo 5.1.3. *Seja* $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ *um fibrado de Fell. Então as* C^**-álgebras seccional cheia e seccional reduzida* $C^*(\mathcal{B})$ *e* $C^*_r(\mathcal{B})$ *são* G*-graduadas.*

Demonstração: Vimos que $C_c(\mathcal{B})$ possui uma representação fiel e $C_c(\mathcal{B}) = \oplus_{g\in G} j_t(B_t)$ (Proposição 2.1.12), donde $C^*(\mathcal{B})$ e $C^*_r(\mathcal{B})$ são graduadas por cópias da coleção de subespaços $\{B_g\}_{g\in G}$.

■

Nem sempre uma C^*-álgebra graduada coincide com a C^*-álgebra seccional cheia ou reduzida do fibrado associado à sua graduação, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 5.1.4. *Como uma consequência do Exemplo 5.1.3, se* A *é uma* C^**-álgebra e* α *é uma ação parcial de* G *em* A*, os produtos cruzados cheio e reduzido* $A \rtimes_\alpha G$ *e* $A \rtimes_{\alpha,r} G$ *são* C^**-álgebras* G*-graduadas, com a graduação dada pela coleção de subespaços* $\{D_g\delta_g\}_{g\in G}$.

Exemplo 5.1.5. *Seja* G *um grupo não amenable (Exemplo VII.2.4,* [8]*) e seja* $B = C^*(G) \oplus C^*_r(G)$*. Então* B *é* G *graduada pela coleção de subespaços* $\{B_g\}_{g\in G}$*, em que* $B_g = \mathbb{C}\delta_g \oplus \mathbb{C}\delta_g$*. Entretanto,* B *não é a* C^**-álgebra seccional cheia ou reduzida de seu fibrado de Fell associado* $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$.

Demonstração: O fato que a coleção de subespaços $\{B_g\}_{g\in G} = \{\mathbb{C}\delta_g \oplus \mathbb{C}\delta_g\}_{g\in G}$ é uma graduação para B segue da definição das operações e norma que fornecem uma estrutura de C^*-álgebra à soma direta de C^*-álgebras e do fato que $\{\mathbb{C}\delta_g\}_{g\in G}$ é uma graduação para $C^*(G)$ e $C^*_r(G)$.

Vamos mostrar que $C^*(\mathcal{B}) \cong C^*(G) \oplus C^*(G)$ e $C^*_r(\mathcal{B}) \cong C^*_r(G) \oplus C^*_r(G)$.

De fato, as $*$-representações π_1 e π_2 de $C^*(G)$ em $C^*(\mathcal{B})$ obtidas, respectivamente, através das inclusões de $\oplus_{g\in G}\mathbb{C}\delta_g$ dadas por

$$\sum_g \lambda_g\delta_g \mapsto \sum_g (\lambda_g\delta_g, 0) \quad \text{e} \quad \sum_g \lambda_g\delta_g \mapsto \sum_g (0, \lambda_g\delta_g)$$

fornecem uma $*$-representação $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ de $C^*(G) \oplus C^*(G)$ em $C^*(\mathcal{B})$. Por outro lado, temos uma $*$-representação ϕ de $C^*(\mathcal{B})$ em $C^*(G) \oplus C^*(G)$ que estende a inclusão

$$\sum_g (\alpha_g \delta_g, \lambda_g \delta_g) \mapsto \left(\sum_g \alpha_g \delta_g, \sum_g \lambda_g \delta_g \right)$$

de $\oplus_{g \in G} B_g$ em $C^*(G) \oplus C^*(G)$. É fácil ver que $\phi = \pi^{-1}$.

Para ver que $C_r^*(\mathcal{B}) \cong C_r^*(G) \oplus C_r^*(G)$, notemos que $C_c(\mathcal{B}) = C_c(\{\mathbb{C}\delta_g\}_{g \in G}) \oplus C_c(\{\mathbb{C}\delta_g\}_{g \in G})$ e observando a construção da representação regular, podemos perceber que, se S e T denotam, respectivamente, as representações regulares de $C_c(\mathcal{B})$ e $C_c(\{\mathbb{C}\delta_g\}_{g \in G})$, temos que $S = T \oplus T$. Donde segue que $C_r^*(\mathcal{B})$ e $C_r^*(G) \oplus C_r^*(G)$ são C^*-álgebras isomorfas.

Assim, B não pode ser a C^*-álgebra seccional cheia ou reduzida de $\mathcal{B}$. Caso contrário, a extensão $\widetilde{S} = \widetilde{T} \oplus \widetilde{T}$ da representação regular de $C_c(\mathcal{B})$ seria injetiva e, portanto, $\widetilde{T}$ seria injetiva, contradizendo o fato de G não ser amenable.

■

Assim como sua demonstração, o próximo exemplo é obtido de [12].

Exemplo 5.1.6. *Seja B uma C^*-álgebra e suponha que B admita uma ação contínua ρ de um grupo compacto abeliano Γ. Seja G o grupo dual de Γ. Então B é G-graduada pela coleção de subespaços $\{B_g\}_{g \in G}$, em que para cada $g \in G$,*

$$B_g = \{b \in B : \rho_\gamma(b) = g(\gamma)b, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Demonstração: Afirmamos que $\{B_g\}_{g \in G}$ é uma graduação para B.

Uma vez que ρ_γ é um $*$-automorfismo, cada subespaço B_g é fechado. Além disso, sejam $r, s \in G$, $a \in B_r$ e $b \in B_s$. Para $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\rho_\gamma(ab) = \rho_\gamma(a)\rho_\gamma(b) = r(\gamma)s(\gamma)ab = rs(\gamma)ab$$

e

$$\rho_\gamma(a^*) = \rho_\gamma(a)^* = \overline{r(\gamma)}a^* = r^{-1}(\gamma)a^*,$$

donde se verificam os itens (i) e (ii) de 5.1.1. Resta mostrarmos que os subespaços $\{B_g\}_{g \in G}$ são independentes e vale que $B = \overline{\oplus}_{g \in G} B_g$.

Suponha que uma soma finita $\sum_h b_h = 0$, em que $b_h \in B_h$ para cada h. Assim, $\gamma \in \Gamma$,

$$\sum_h h(\gamma) b_h = \rho_\gamma \left(\sum_h b_h \right) = 0. \tag{‡}$$

Seja ϕ um funcional linear contínuo sobre B. Aplicando ϕ em ambos os lados da igualdade (‡), segue que

$$\sum_h \phi(b_h) h(\gamma) = 0.$$

No entanto, pela invariância da medida de Haar, se $k, l \in G = \hat{\Gamma}$ e $\gamma \in \Gamma$ temos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma k(\eta) l^{-1}(\eta) \mu(d\eta) &= \int_\Gamma k(\gamma\eta) l^{-1}(\gamma\eta) \mu(d\eta) \\ &= k(\gamma) l^{-1}(\gamma) \int_\Gamma k(\eta) l^{-1}(\eta) \mu(d\eta). \end{aligned}$$

Uma vez que $k(\gamma) l^{-1}(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$ se e somente se $k = l$, concluímos que

$$\int_\Gamma k(\eta) l^{-1}(\eta) \mu(d\eta) = [k = l]$$

e isto implica, em particular, que o conjunto $\{x \in C(\Gamma) : x \in G = \hat{\Gamma}\}$ é linearmente independente. Donde $\phi(b_h) = 0$, para cada h e, como ϕ é um funcional linear contínuo tomado arbitrariamente, segue que $b_h = 0$, para cada h. Como um resultado, os subespaços $\{B_g\}_{g \in G}$ são independentes.

Por fim, mostremos que $\oplus_{g \in G} B_g$ é denso em B. Para isso, seja $P_g : B \to B$ a transformação linear dada por

$$P_g(b) = \int_\Gamma g(\bar{\eta}) \rho_\eta(b) \mu(d\eta),$$

em que $b \in B$ e $g \in G$. A continuidade de P_g segue do seguinte cálculo:

$$\|P_g(b)\| = \left\| \int_\Gamma \overline{g(\eta)} \rho_\eta(b) \mu(d\eta) \right\| \leq \int_\Gamma \|\rho_\eta(b)\| \mu(d\eta) = \|b\|.$$

Notemos que, se $b \in B_g$, então

$$P_g(b) = \int_\Gamma \overline{g(\eta)} \rho_\eta(b) \mu(d\eta) = \int_\Gamma b \mu(d\eta) = b.$$

Mais ainda, $P_g(B) = B_g$, pois para $b \in B$ e $\gamma \in \Gamma$, obtém-se da invariância da medida de Haar μ que

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma(P_g(b)) &= \rho_\gamma\left(\int_\Gamma \overline{g(\eta)}\rho_\eta(b)\mu(d\eta)\right) \\
&= \int_\Gamma \overline{g(\eta)}\rho_{\gamma\eta}(b)\mu(d\eta) \\
&= \int_\Gamma \overline{g(\gamma^{-1}\gamma\eta)}\rho_{\gamma\eta}(b)\mu(d\eta) \\
&= g(\gamma)\int_\Gamma \overline{g(\eta)}\rho_\eta(b)\mu(d\eta) \\
&= g(\gamma)P_g(b),
\end{aligned}$$

donde $P_g(b) \in B_g$.

Logo, P_g é uma projeção contrativa cuja imagem é B_g.

Consideremos agora um funcional linear contínuo ϕ sobre B que se anula em $\overline{\bigoplus}_{g\in G} B_g$ e provemos que ϕ é identicamente nulo.

Dado $b \in B$, associamos a função contínua $\phi' : \Gamma \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto \phi(\rho_\gamma(b))$. A transformada de Fourier de ϕ' avaliada em $g \in G$ é

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi'}(g) &= \int_\Gamma \overline{g(\eta)}\phi'(\eta)\mu(d\eta) \\
&= \int_g \overline{g(\eta)}\phi(\rho_\eta(b))\mu(d\eta) \\
&= \phi\left(\int_\Gamma \overline{g(\eta)}\rho_\eta(b)\mu(d\eta)\right) = \phi(P_g(b)).
\end{aligned}$$

Como ϕ se anula em $\overline{\bigoplus}_{g\in G} B_g$ e $P_g(b) \in B_g$, segue que a transformada de Fourier de ϕ' é identicamente nula e, portanto, pelo teorema de Plancherel (Teorema 1.6.1, [24]) segue que ϕ' é identicamente nula. Em particular, tomando $\gamma = 1$ concluímos que $\phi(b) = 0$. Ou seja, ϕ é identicamente nulo, completando a prova de que $\{B_g\}_{g\in G}$ forma uma graduação para B.

$\blacksquare$

5.2 Produtos smash e dualidade de Takai

Seja $B = \overline{\oplus}_{g\in G} B_g$ uma C^*-álgebra graduada por um grupo G. Consideremos o subconjunto

$$S := \left\{ \sum_{\text{finita}} a_{gh} \otimes e_{g,h} : a_{gh} \in B_{g^{-1}h} \right\} \subseteq B \otimes K(l^2(G)),$$

em que $e_{g,h}(\xi) = \langle \xi, \delta_h \rangle \delta_g$, $\xi \in l^2(G)$ e δ_k denota a função característica no conjunto formado por um único elemento $k \in G$.

Proposição 5.2.1. *S é uma $*$-subálgebra de $B \otimes K(l^2(G))$.*

Demonstração: Para ver que S é subálgebra, é suficiente mostrarmos que $(a \otimes e_{g,h})(b \otimes e_{k,l}) \in S$ para $a \in B_{g^{-1}h}$ e $b \in B_{k^{-1}l}$.

De fato, se $h \neq k$ o resultado é claro. Se $h = k$, então

$$(a \otimes e_{g,h})(b \otimes e_{k,l}) = ab \otimes e_{g,l} \in S,$$

uma vez que

$$ab \in B_{g^{-1}h} B_{h^{-1}l} \subseteq B_{g^{-1}l}.$$

Além disso, S é autoadjunto, pois $a^* \in B^*_{g^{-1}h} = B_{h^{-1}g}$ e $(a \otimes e_{g,h})^* = a^* \otimes e_{h,g}$.

Logo, S é $*$-subálgebra de $B \otimes K(l^2(G))$.

■

Definição 5.2.2. *Seja $B = \overline{\oplus}_{g\in G} B_g$ uma C^*-álgebra graduada por um grupo G. A C^*-álgebra* produto smash *de B, denotada por $B\#C^*(G)$, é o fecho de S em $B \otimes K(l^2(G))$.*

Exemplo 5.2.3. *Seja G um grupo discreto e seja $B = \mathbb{C}$ com a G-graduação trivial, ou seja, $B_e = \mathbb{C}$ e $B_g = \{0\}$, para todo $g \in G \setminus \{e\}$. Então $\mathbb{C}\#C^*(G) \cong C_0(G)$.*

Demonstração: Primeiramente, observamos que, neste caso, $\mathbb{C}\#C^*(G)$ é o fecho de

$$S = \{ \sum_{\text{finita}} \lambda_g \otimes e_{g,g} : \lambda_g \in \mathbb{C} \}.$$

Além disso, cada elemento $b = \sum_g \lambda_g \otimes e_{g,g}$ em S corresponde a uma função $f : G \to \mathbb{C}$ de suporte finito dada por $f(g) = \lambda_g$, bem como qualquer função f de suporte finito tem $b = \sum_g f(g) \otimes e_{g,g}$ como um elemento correspondente em S.

É fácil ver que a aplicação $\widetilde{\varphi} : S \mapsto C_c(G)$, $\sum_g \lambda_g \otimes e_{g,g} \mapsto f$ é um $*$-homomorfismo injetor e sobrejetor. Para ver que $\widetilde{\varphi}$ se estende a um isomorfismo entre $\mathbb{C}\#C^*(G)$ e $C_0(G)$, notemos que S é uma união de C^*-álgebras, uma vez que para cada subconjunto finito F de G, tem-se que

$$C^*(F) = \{\sum_{g\in F} \lambda_g \otimes e_{g,g} : \lambda_g \in \mathbb{C}\}$$

é uma C^*-álgebra. Portanto, $\widetilde{\varphi}$ é também isométrico, donde se estende a um $*$-isomorfismo entre $\mathbb{C}\#C^*(G)$ e $C_0(G)$.

■

Exemplo 5.2.4. *Seja A C^*-álgebra, G discreto e α uma ação (global) de G em A. Então, $(A \rtimes_\alpha G)\#C^*(G) \cong A \otimes K(l^2(G))$. Em particular, tomando $A = \mathbb{C}$, tem-se que $C^*(G)\#C^*(G) \cong K(l^2(G))$.*

Demonstração: Consideremos $A \rtimes_\alpha G$ com a graduação dada pela coleção de subespaços $\{B_g\}_{g\in G}$, em que $B_g = A\delta_g$. Seja S a $*$-subálgebra densa de $(A \rtimes_\alpha G)\#C^*(G)$ e consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S & \to & A \otimes K(l^2(G)) \\ \sum\limits_{finita} a_{gh}\delta_{g^{-1}h} \otimes e_{gh} & \mapsto & \sum\limits_{finita} \alpha_g(a_{gh}) \otimes e_{gh}. \end{array}$$

Afirmação 1: φ está bem definida e é injetiva.

Demonstração. De fato, da Observação 6.3.1 de [20] segue que se $v_1, \ldots v_n \in K(l^2(G))$ são linearmente independentes, $b_1, \ldots, b_n \in A \rtimes_\alpha G$ e $\sum_1^n b_j \otimes v_j = 0$, então $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Logo, uma igualdade entre dois elementos de S, digamos, $x = \sum_{g,h\in F_1} a_{gh}\delta_{g^{-1}h} \otimes e_{g,h} = \sum_{k,l\in F_2} b_{kl}\delta_{k^{-1}l} \otimes e_{k,l} = y$, em que F_1 e F_2 são subconjuntos finitos de G, implica que $F_1 = F_2$ e $a_{gh}\delta_{g^{-1}h} = b_{gh}\delta_{g^{-1}h}$, para cada $g, h \in F_1$. Assim, $x = y$ implica $\varphi(x) = \varphi(y)$, donde φ está bem definida.

Além disso, pelo mesmo argumento aplicado acima, temos que se uma soma finita $\sum \alpha_g(a_{gh}) \otimes e_{g,h} = 0$, então $\alpha_g(a_{gh}) = 0$, ou seja, $a_{gh} = 0$, pois α_g é um automorfismo de A, para cada $g \in G$. Logo, φ é injetiva.

□

Afirmação 2: φ é um $*$-homomorfismo.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$, $g, h, k, l \in G$. Temos que

$$\varphi((a\delta_{g^{-1}h} \otimes e_{g,h})(b\delta_{k^{-1}l} \otimes e_{k,l})) \quad = \quad [h = k]\varphi(a\alpha_{g^{-1}h}(b)\delta_{g^{-1}l} \otimes e_{g,l})$$

$$= \quad [h = k](\alpha_g(a)\alpha_h(b) \otimes e_{g,l}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi(a)\varphi(b) &= (\alpha_g(a) \otimes e_{g,h})(\alpha_h(b) \otimes e_{k,l}) \\ &= [h = k](\alpha_g(a)\alpha_h(b) \otimes e_{g,l}). \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \varphi((a\delta_{g^{-1}h} \otimes e_{g,h})^*) &= \varphi(\alpha_{h^{-1}g}(a^*)\delta_{h^{-1}g} \otimes e_{h,g}) \\ &= \alpha_g(a^*) \otimes e_{h,g} = \varphi(a)^*. \end{aligned}$$

Logo, φ é $*$-homomorfismo. □

Vamos mostrar agora que φ é isométrica e assim se estende a um $*$-homomorfismo injetivo $\widetilde{\varphi}$ de $A \rtimes_\alpha G\#C^*(G)$ em $A \otimes K(l^2(G))$.

Para isso, observamos que S é uma união de C^*-álgebras, uma vez que para cada conjunfo finito F de G tem-se que

$$C^*(F) := \left\{ b \in S : b = \sum_{g,h \in F} a_{gh}\delta_{g^{-1}h} \otimes e_{g,h} \right\}$$

é uma C^*-álgebra. Como já vimos que φ é um $*$-homomorfismo injetivo sobre S e, consequentemente, sobre cada C^*-álgebra $C^*(F)$, concluímos que φ é isométrica.

Desta forma, estendemos φ por continuidade a um $*$-homomorfismo injetivo $\widetilde{\varphi}$ de $A \rtimes_\alpha G\#C^*(G)$ em $A \otimes K(l^2(G))$ e nos resta provar que $\widetilde{\varphi}$ é sobrejetivo.

Dado $a \in A$ e $g, h \in G$, colocamos

$$b = \alpha_{g^{-1}}(a)\delta_{g^{-1}h} \otimes e_{g,h} \in A \rtimes_\alpha G\#C^*(G).$$

Aplicando $\widetilde{\varphi}$ obtemos que $\widetilde{\varphi}(b) = a \otimes e_{g,h}$. Uma vez que somas finitas $\sum_{g,h \in G} a \otimes e_{g,h}$ formam um conjunto denso em $A \otimes K(l^2(G))$, temos que $\widetilde{\varphi}$ é sobrejetivo.

Portanto, segue que $A \rtimes_\alpha G\#C^*(G)$ e $A \otimes K(l^2(G))$ são isomorfos.

■

Exemplo 5.2.5. *Seja B uma C^*-álgebra possuindo uma ação contínua ρ de um grupo compacto abeliano Γ. Consideremos o produto smash $B\#C^*(G)$ de B relativo à graduação pelo grupo discreto $G = \widehat{\Gamma}$ obtida* *no Exemplo 5.1.6, ou seja,*

$$B_g = \{b \in B : \rho_\gamma(b) = g(\gamma)b, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Então $B\#C^*(G)$ é isomorfo ao produto cruzado $B \rtimes_\rho \Gamma$.

Demonstração: Seja S a $*$-subálgebra densa de $B\#C^*(G)$ e seja $\psi : S \to C(\Gamma, B) \subseteq B \rtimes_\rho \Gamma$ dada por $\psi(a \otimes e_{g,h})(\gamma) = h(\gamma)a$, em que $a \in B_{g^{-1}h}$ e $\gamma \in \Gamma$.

A prova de que ψ está bem definida segue como no Exemplo 5.2.4. Vamos mostrar que ψ é injetiva.

Se uma soma finita $a = \sum_{g,h} a_{gh} \otimes e_{g,h} \in B\#C^*(G)$ é tal que $\psi(a) = 0$, então

$$\sum_{g,h} h(\gamma)a_{gh} = \sum_h h(\gamma)\left(\sum_g a_{gh}\right) = 0,$$

para todo $\gamma \in \Gamma$.

Dado ϕ um funcional linear contínuo sobre B, segue que

$$\sum_h h(\gamma)\phi\left(\sum_g a_{gh}\right) = 0, \ \gamma \in \Gamma.$$

No entanto, o conjunto $\{x \in C(\Gamma) : x \in G = \hat{\Gamma}\}$ é linearmente independente, em que x é o caráter contínuo sobre Γ dado por $\gamma \mapsto x(\gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Donde segue que $\phi(\sum_g a_{gh}) = 0$, para cada h. Como ϕ é arbitrário, segue que $\sum_g a_{gh} = 0$ para cada h.

Assim, fixado h, temos que $a_{gh} = 0$, para cada g. Ou seja, $a = \sum_{g,h} a_{gh} \otimes e_{g,h} = 0$ e ψ é injetiva.

Logo, se provarmos que ψ é um $*$-homomorfismo, concluiremos que ψ é isométrica, pois já vimos que S é uma união de C^*-álgebras.

Vamos provar que ψ é $*$-homomorfismo. Para isso, é suficiente mostrarmos que

$$\psi\left((a \otimes e_{g,h})(b \otimes e_{r,s})\right) = \psi(a \otimes e_{g,h})\psi(b \otimes e_{r,s})$$

e

$$\psi(a \otimes e_{g,h})^* = \psi\left((a \otimes e_{g,h})^*\right),$$

para $a \otimes e_{g,h}, b \otimes e_{r,s} \in B\#C^*(G)$.

Para $\gamma \in \Gamma$ temos

$$\psi\left((a \otimes e_{g,h})(b \otimes e_{r,s})\right)(\gamma) = [h = r]s(\gamma)ab.$$

Agora, como $b \in B_{r^{-1}s}$, temos que $\rho_\eta(b) = \eta(r^{-1}s)b$, para cada $\eta \in \Gamma$ e assim temos

$$\begin{aligned}(\psi(a \otimes e_{g,h}) * \psi(b \otimes e_{r,s}))(\gamma) &= \int_{S^1} h(\eta)a\rho_\eta\left(s(\eta^{-1}\gamma)b\right)\mu(d\eta) \\ &= \int_{S^1} h(\eta)as(\eta^{-1}\gamma)r^{-1}s(\eta)b\mu(d\eta) \\ &= \left(\int_{S^1} h(\eta)r^{-1}(\eta)\mu(d\eta)\right)s(\gamma)ab.\end{aligned}$$

O fato que $\int_{S^1} h(\eta)r^{-1}(\eta)\mu(d\eta) = [h = r]$ nos diz que ψ é homomorfismo.

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\psi(a \otimes e_{g,h})^*(\gamma) &= \rho_\gamma\left(\psi(a \otimes e_{g,h})(\gamma^{-1})^*\right) \\ &= h(\gamma)\rho_\gamma(a)^* = h(\gamma)\overline{g^{-1}h(\gamma)}a^* \\ &= g(\gamma)a^* = \psi(a^* \otimes e_{h,g})(\gamma).\end{aligned}$$

Portanto, ψ se estende a um $*$-homomorfismo injetor

$$\widetilde{\psi} : B\#C^*(G) \to B \rtimes_\rho \Gamma$$

e resta provarmos que $\widetilde{\psi}$ é sobrejetivo.

Seja $a\chi_E \in B \rtimes_\rho \Gamma$ uma função característica no conjunto mensurável $E \subseteq \Gamma$. Suponha que $a \in B_h$, para algum $h \in G$. Dado $\varepsilon > 0$, usando a regularidade da medida de Haar μ de Γ obtemos um compacto $K \subseteq \Gamma$ e um aberto $U \subseteq \Gamma$ tais que $K \subseteq E \subseteq U$ e $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.

Pelo lema de Urysohn, obtemos uma função $u \in C(\Gamma)$ tal que $0 \leq u \leq 1$, $u(K) = 1$ e $u(\Gamma \setminus U) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}\|a\chi_E - au\|_{B \rtimes_\rho \Gamma} &\leq \|a\chi_E - au\|_1 = \int_{S^1} \|a\chi_E(\eta) - au(\eta)\|\mu(d\eta) \\ &\leq \int_{U \setminus K} \|a\|\mu(d\eta) < \varepsilon\|a\|.\end{aligned}$$

Pelo teorema de Stone-Weierstrass, temos que span$\{x \in C(\Gamma) : x \in G = \hat{\Gamma}\}$ é denso em $C(\Gamma)$, donde segue que existem escalares c_{g_i}'s,

$i = 1, 2, \ldots, n$ tais que

$$\left\| u - \sum_i c_{g_i} g_i \right\|_\infty < \varepsilon.$$

Logo,

$$\left\| a\chi_E - a\left(\sum_i c_{g_i} g_i\right) \right\|_{B \rtimes_\rho \Gamma} < 2\varepsilon \|a\|.$$

Colocando $b = \sum_i (c_{g_i} a \otimes e_{g_i h^{-1}, g_i})$, temos que

$$\|\widetilde{\psi}(b) - a\chi_E\|_{B \rtimes_\rho \Gamma} < 2\varepsilon \|a\|.$$

Assim, observando que as funções características formam um conjunto denso em $B \rtimes_\rho \Gamma$ e $B = \overline{\oplus}_{g \in G} B_g$, temos que $\widetilde{\psi}(B \# C^*(G))$ é denso em $B \rtimes_\rho \Gamma$, ou seja, $\widetilde{\psi}(B \# C^*(G)) = B \rtimes_\rho \Gamma$.

Portanto, $B \# C^*(G)$ é isomorfo a $B \rtimes_\rho \Gamma$.

■

Muito embora o próximo teorema seja válido para o caso mais geral de grupos localmente compactos abelianos (veja [25]), apresentamos aqui uma demonstração para o caso discreto desenvolvida no contexto de produtos smash.

A fim de provarmos o próximo teorema, lembremos que, se G é um grupo localmente compacto abeliano, então a aplicação $x \mapsto \xi_x$ é um isomorfismo topológico (um isomorfismo e um homeomorfismo) de G em $\hat{\hat{G}}$, em que $\xi_x(\gamma) = \gamma(x)$, para todo $\gamma \in \hat{G}$. Esse resultado é conhecido como *teorema da dualidade de Pontryagin* (Teorema 1.7.2, [24]).

Teorema 5.2.6 (Dualidade de Takai)**.** *Seja A uma C^*-álgebra, G um grupo discreto abeliano e α ação de G em A. Seja $\hat{\alpha}$ a ação dual. Então*

$$(A \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong A \otimes K(l^2(G)).$$

Demonstração: Seja $B = A \rtimes_\alpha G$, $\Gamma = \hat{G}$ e, para cada $g \in G$, seja

$$B_g = \{b \in B : \hat{\alpha}_\gamma(b) = \gamma(g)b, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Pelo que fizemos no Exemplo 5.1.1 e pela observação feita antes de enunciar este resultado, temos que a coleção de subespaços $\{B_g\}_{g \in G}$ é uma graduação para B.

Suponhamos inicialmente que $B_g = A\delta_g$, para todo g em G. Neste caso, vimos no Exemplo 5.2.4 que $B\#C^*(G) \cong A \otimes K(l^2(G))$ e, por outro lado, o Exemplo 5.2.5 nos diz que $B\#C^*(G) \cong B \rtimes_{\hat{\alpha}} \Gamma$. Consequentemente, obtemos que $B \rtimes_{\hat{\alpha}} \Gamma$ e $A \otimes K(l^2(G))$ são isomorfos, como desejamos.

Portanto, o que precisamos fazer é verificar que $B_g = A\delta_g$, para cada g em G. De fato, como $\hat{\alpha}_\gamma(a\delta_g) = \gamma(g)a\delta_g$, para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $a \in A$, a inclusão $A\delta_g \subseteq B_g$ é imediata.

Agora, suponhamos que $b \in B_g$ e seja ϕ um funcional linear contínuo sobre B. Sabemos que $B = \overline{\oplus}_{g\in G} A\delta_g$ e assim podemos obter uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\oplus_{g\in G} A\delta_g$ tal que $x_m \to b$. Neste caso, para $\gamma \in \Gamma$, temos que

$$|\phi(\hat{\alpha}_\gamma(b)) - \phi(\hat{\alpha}_\gamma(x_m))| \leq \|\phi\| \|\hat{\alpha}_\gamma(b - x_m)\| = \|\phi\| \|b - x_m\|,$$

donde a sequência de funções $\gamma \mapsto \phi(\hat{\alpha}_\gamma(x_m))$ converge a $\gamma \mapsto \phi(\hat{\alpha}_\gamma(b))$ na norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$ de $C(\Gamma)$. Em particular, tal convergência também se dá em $L^2(\Gamma)$ com a norma $\|\cdot\|_2$. No entanto, escrevendo $x_m = \sum_i a_{i_m}\delta_{g_{i_m}}$ podemos perceber que tais funções são precisamente $\sum_i \phi(a_{i_m}\delta_{g_{i_m}})\xi_{g_{i_m}}$ e $\phi(b)\xi_g$, respectivamente.

Desta forma,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_m \left\| \phi(b)\xi_g - \sum_i \phi(a_{i_m}\delta_{g_{i_m}})\xi_{g_{i_m}} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \phi(b)\xi_g - \phi(a_{j_m}\delta_{g_{j_m}})\xi_{g_{j_m}} \right\|_2^2 + \sum_{\substack{i \\ i_m \neq j_m}} \left\| \phi(a_{i_m}\delta_{g_{i_m}})\xi_{g_{i_m}} \right\|_2^2, \end{aligned}$$

em que $g_{j_m} = g$ para todo m.

Isso implica que $\|\phi(b)\xi_g - \phi(a_{j_m}\delta_{g_{j_m}})\xi_{g_{j_m}}\|_2^2 \to 0$ e, como ϕ é arbitrário, concluímos que b pertence ao fecho fraco de $A\delta_g$. Mas, uma vez que $A\delta_g$ é convexo e fechado, assim também é na topologia fraca. Ou seja, $b \in A\delta_g$, completando a prova do teorema.

■

5.3 Uma equivalência entre fibrados de Fell e ações parciais

Nesta seção, apresentamos nosso principal resultado. Aplicando o que desenvolvemos neste e no capítulo precedente, mostramos que um fibrado de Fell estável sobre um grupo enumerável cuja álgebra da fibra unidade é separável pode ser obtido através de uma ação parcial do grupo base na álgebra B_e.

Começamos apresentando um exemplo de um fibrado de Fell que não pode ser obtido a partir de uma ação parcial na sua álgebra da fibra unidade.

Primeiramente, observamos que se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell dado por uma ação parcial em B_e, digamos $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G} = \{D_g\delta_g\}_{g\in G}$, então para todo $g \in G$

$$B_{g^{-1}}B_g = D_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}D_g\delta_g = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(D_{g^{-1}})D_g)\delta_e = D_{g^{-1}}\delta_e.$$

Logo, neste caso, os ideais $B_{g^{-1}}B_g$ e $B_gB_{g^{-1}}$ são isomorfos.

Agora, seja $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o fibrado de Fell dado no Exemplo 2.1.4. Ou seja, $B_n = \{0\}$, para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e B_{-1}, B_0, B_1 são os subespaços de $M_3(\mathbb{C})$ gerados, respectivamente, por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que

$$B_{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B_1B_{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue, como justificamos acima, que $\mathcal{B}$ não é um fibrado de Fell dado por uma ação parcial em B_0.

Podemos perceber, entretanto, que $B_{-1}B_1$ e B_1B_{-1} são Morita equivalentes. De fato, dado um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$, o subespaço B_g é um $B_gB_{g^{-1}} - B_{g^{-1}}B_g$-bimódulo de imprimitividade com as operações de multiplicação de $\mathcal{B}$ e produtos internos ${}_{B_gB_{g^{-1}}}\langle x, y\rangle = xy^*$ e $\langle x, y\rangle_{B_{g^{-1}}B_g} = x^*y$.

Desta forma, supondo por um instante que o fibrado de Fell é estável, ou seja, que B_e é uma C^*-álgebra estável, é possível provar que cada ideal $B_{g^{-1}}B_g$ é também estável. Como uma consequência do teorema de Brown-Green-Rieffel, no caso em que B_e é também separável, existe um isomorfismo entre os ideais $B_{g^{-1}}B_g$ e $B_gB_{g^{-1}}$, para cada $g \in G$.

Assim, no caso de um fibrado de Fell (sobre um grupo enumerável) satisfazendo as condições acima, ou seja, para um fibrado de Fell estável tal que B_e é separável, vamos mostrar que $C^*(\mathcal{B})$ é isomorfo, como C^*-

álgebra graduada, a um produto cruzado parcial.

Definição 5.3.1. *Um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ é dito ser* saturado *se* $B_sB_t = B_{st}$*, para quaisquer* $s, t \in G$.

Exemplo 5.3.2. *Seja α uma ação parcial de G em A e seja $\mathcal{B}$ o fibrado de Fell obtido a partir da ação α como na Proposição 3.2.1. Neste caso, temos que $B_g = D_g\delta_g$, para cada $g \in G$. Então $\mathcal{B}$ é saturado se, e somente se, $D_g = A$, para todo $g \in G$. Em outras palavras, $\mathcal{B}$ é saturado se, e somente se, α é uma ação global.*

Demonstração: Observamos que, para $a \in D_g$ e $b \in D_{g^{-1}}$, temos

$$a\delta_g * b\delta_{g^{-1}} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_e \in D_g\delta_e.$$

Por outro lado, tomando $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada para D_g, segue que

$$a\delta_e = \lim_\lambda au_\lambda\delta_e = \lim_\lambda a\delta_g * \alpha_{g^{-1}}(u_\lambda)\delta_{g^{-1}}.$$

Logo, $B_gB_{g^{-1}} = D_g\delta_gD_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = D_g\delta_e$. Donde se $\mathcal{B}$ é saturado, devemos ter $D_g = A$, para cada g. Reciprocamente, se $D_g = A$, para cada $g \in G$, então

$$B_sB_t = A\delta_sA\delta_t = A\delta_{st},$$

pois cada α_g é um automorfismo de A.

■

Proposição 5.3.3. *Seja $B = \overline{\bigoplus}_{g\in G}B_g$ uma C^*-álgebra graduada e seja I o fecho de*

$$S' := \{\sum_{\text{finita}} b_{g^{-1}h} \otimes e_{g,h} : b_{g^{-1}h} \in B_{g^{-1}}B_h\}$$

na norma de $B\#C^*(G)$. Então I é um ideal da C^*-álgebra produto smash $B\#C^*(G)$. Mais ainda, I é Morita equivalente a B_e.

Demonstração: É suficiente mostrarmos que

$$(b_{g^{-1}}b_h \otimes e_{g,h})(a_{kl} \otimes e_{k,l}) \in I \text{ e } (a_{st} \otimes e_{s,t})(b_{g^{-1}}b_h \otimes e_{g,h}) \in I,$$

em que $a_{st} \in B_{s^{-1}t}$, $b_{g^{-1}} \in B_{g^{-1}}$ e $b_h \in B_h$.

De fato,

$$(b_{g^{-1}}b_h \otimes e_{g,h})(a_{st} \otimes e_{s,t}) = [h = s]b_{g^{-1}}b_ha_{st} \otimes e_{g,t}.$$

Se $h \neq s$ o resultado é claro. Suponha que $h = s$, então

$$b_{g^{-1}} b_h a_{st} \in B_{g^{-1}} B_s B_{s^{-1}t} \subseteq B_{g^{-1}} B_t.$$

Similarmente,

$$(a_{st} \otimes e_{s,t})(b_{g^{-1}} b_h \otimes e_{g,h}) = [t = g] a_{st} b_{g^{-1}} b_h \otimes e_{s,h},$$

e no caso em que $g = t$, tem-se $a_{st} b_{g^{-1}} b_h \in B_{s^{-1}} B_h$.

Logo, I é um ideal em $B \# C^*(G)$.

Vamos mostrar agora que $I \sim_M B_e$.

Identificamos B_e com $B_e \otimes e_{e,e} \subseteq I$ e seja $p = 1 \otimes e_{e,e} \in M(I)$. Afirmamos que $B_e \otimes e_{e,e} = pIp$ e p é uma projeção cheia.

De fato, é fácil ver que $B_e \otimes e_{e,e} = pIp$. Para ver que p é projeção cheia, notemos que dado $a = b_{g^{-1}} b_h \otimes e_{g,h} \in I$, tem-se

$$a = (b_{g^{-1}} \otimes e_{g,e}) p (b_h \otimes e_{e,h}),$$

donde concluímos que IpI é denso em I. Logo, p é projeção cheia.

Assim, B_e pode ser visto como um canto cheio de I e, portanto, são C^*-álgebras Morita equivalentes.

■

Observação 5.3.4. *Se $B = \overline{\bigoplus}_{g \in G} B_g$ é uma C^*-álgebra graduada e o fibrado de Fell $\{B_g\}_{g \in G}$ é saturado, segue da proposição anterior que B_e e $B \# C^*(G)$ são Morita equivalentes.*

Nosso objetivo agora é construir uma ação de G na C^*-álgebra produto smash $B \# C^*(G)$, e assim obter uma ação parcial em I por restrição.

Seja $\lambda_g \in B(l^2(G))$ dado por

$$\lambda_g(\xi)(h) = \xi(g^{-1}h),$$

em que $\xi \in l^2(G)$. Então cada λ_g é unitário e $\lambda_g^* = \lambda_{g^{-1}}$. Mais ainda, $\lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h$, para quaisquer $g, h \in G$. A aplicação $\lambda : G \to U(l^2(G))$, $g \mapsto \lambda_g$ é chamada *representação regular à esquerda*.

Na próxima proposição, vamos mostrar que, para cada $g \in G$, o elemento $1 \otimes \lambda_g$ dá origem a um $*$-automorfismo de $B \# C^*(G)$.

Proposição 5.3.5. *Seja $\theta_g : B \# C^*(G) \to B \# C^*(G)$ dada por*

$$a \mapsto (1 \otimes \lambda_g) a (1 \otimes \lambda_{g^{-1}}).$$

Então, θ_g está bem definida e define um $*$-automorfismo de $B\#C^*(G)$. Mais ainda, a aplicação $g \mapsto \theta_g$ é uma ação de G em $B\#C^*(G)$.

Demonstração: Primeiramente, temos de mostrar que $(1 \otimes \lambda_g)a(1 \otimes \lambda_{g^{-1}}) \in B\#C^*(G)$, para todo $a \in B\#C^*(G)$. Observamos que para $h \in G$,

$$e_{s,t}(\lambda_{g^{-1}}(\delta_h)) = e_{s,t}(\delta_{g^{-1}h}) = [g^{-1}h = t]\delta_s = [h = gt]\delta_s,$$

donde segue que $e_{s,t}\lambda_{g^{-1}} = e_{s,gt}$. Analogamente,

$$\lambda_g(e_{s,t}(\delta_h)) = [h = t]\lambda_g(\delta_s) = \delta_{gs}$$

e concluímos que $\lambda_g e_{s,t} = e_{gs,t}$.

Assim, se $a = b \otimes e_{s,t} \in B\#C^*(G)$, segue que

$$(1\otimes\lambda_g)a(1\otimes\lambda_{g^{-1}}) = (1\otimes\lambda_g)b\otimes e_{s,t}(1\otimes\lambda_{g^{-1}}) = b\otimes e_{gs,gt} \in B\#C^*(G),$$

pois $b \in B_{s^{-1}t} = B_{(gs)^{-1}(gt)}$. Como elementos desta forma geram $B\#C^*(G)$, segue que θ_g está bem definida.

Uma vez que cada λ_g é um unitário em $B(l^2(G))$, tem-se que θ_g é um $*$-automorfismo de $B\#C^*(G)$. Portanto, resta verificarmos que a aplicação $g \mapsto \theta_g$ é uma ação de G em $B\#C^*(G)$.

De fato, sejam $a \in B\#C^*(G)$ e g, h em G. Então

$$\begin{aligned}
\theta_g(\theta_h(a)) &= (1 \otimes \lambda_g)(1 \otimes \lambda_h)a(1 \otimes \lambda_{h^{-1}})(1 \otimes \lambda_{g^{-1}}) \\
&= (1 \otimes \lambda_{gh})a(1 \otimes \lambda_{h^{-1}g^{-1}}) = \theta_{gh}(a).
\end{aligned}$$

■

O seguinte é nosso principal resultado:

Teorema 5.3.6. *Seja $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ um fibrado de Fell estável sobre um grupo enumerável G cuja álgebra relativa à fibra unidade é separável. Então, existe uma ação parcial de G na álgebra B_e tal que o fibrado de Fell associado é isomorfo a $\mathcal{B}$.*

Demonstração: Seja $C^*(\mathcal{B})$ a C^*-álgebra seccional cheia do fibrado $\mathcal{B}$. Lembremos que $C^*(\mathcal{B})$ é uma C^*-álgebra G-graduada, com a graduação dada pela coleção de subespaços $\{B_g\}_{g\in G}$. Seja I o ideal da C^*-álgebra produto smash $B\#C^*(G)$ definido como na Proposição 5.3.3 e seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ a ação parcial de G em I, como na Observação 3.1.4. Vamos mostrar que $C^*(\mathcal{B})$ é isomorfa, como C^*-álgebra graduada, ao produto cruzado parcial $(I \otimes K) \rtimes_{\alpha\otimes 1} G$, em que

$\alpha \otimes 1 = (\{D_g \otimes K\}_{g\in G}, \{\alpha_g \otimes 1\}_{g\in G})$ é a ação parcial de G em $I \otimes K$ obtida a partir de α.

Observamos que, como a inclusão ι de I em $I \rtimes_\alpha G$ é não degenerada e injetiva (I contém uma unidade aproximada para $I \rtimes_\alpha G$), podemos ver sua álgebra de multiplicadores $M(I)$ como uma subálgebra de $M(I \rtimes_\alpha G)$, contendo a unidade de $M(I \rtimes_\alpha G)$, através da extensão $\widetilde{\iota}$ (Proposição A.3.2). Além disso, é importante perceber que, se $v \in M(I)$ e $a\delta_h \in D_h\delta_h$,

$$\widetilde{\iota}(v)a\delta_h = \lim_\lambda \iota(vu_\lambda)a\delta_h = \lim_\lambda vu_\lambda\delta_e a\delta_h = \lim_\lambda vu_\lambda a\delta_h = va\delta_h,$$

e

$$\begin{aligned} a\delta_h\widetilde{\iota}(v) &= a\delta_h \lim_\lambda \iota(u_\lambda v) = \lim_\lambda a\delta_h u_\lambda v\delta_e = \lim_\lambda \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)u_\lambda v)\delta_h \\ &= \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)v)\delta_h. \end{aligned}$$

Escrevemos $v\delta_e$ para $\widetilde{\iota}(v)$ e assim,

$$v\delta_e a\delta_h = va\delta_h \quad \text{e} \quad a\delta_h v\delta_e = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)v)\delta_h,$$

para todo $v \in M(I)$. Em particular, isso implica que $v\delta_e D_h\delta_h \subseteq D_h\delta_h$ e $D_h\delta_h v\delta_e \subseteq D_h\delta_h$. Este fato será importante ao longo da demonstração, uma vez que estamos interessados em isomorfismos entre C^*-álgebras graduadas.

Consideremos $p = 1 \otimes e_{e,e} \in M(I)$ e seja $p\delta_e \in M(I \rtimes_\alpha G)$. Mostremos que $p\delta_e$ é projeção cheia e $C^*(\mathcal{B})$ é isomorfa ao canto cheio $p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e$.

De fato, $(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e(I \rtimes_\alpha G) \supseteq (I\delta_e)p\delta_e(I\delta_e) = (IpI)\delta_e$. Já vimos que p é uma projeção cheia vista como um multiplicador de I e assim segue que

$$\overline{(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)} \supseteq I\delta_e.$$

Neste caso, o ideal $\overline{(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)}$ contém uma unidade aproximada para $I \rtimes_\alpha G$, o que nos diz que $p\delta_e$ é também uma projeção cheia.

Afirmamos que $p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e = B'$, em que

$$B' := \overline{\operatorname{span}}\{b_h \otimes e_{e,h}\delta_h : h \in G, b_h \in B_h\}.$$

Seja $y = a\delta_r \in D_r\delta_r$ tal que $y \in p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e$. Por um lado, isso significa que

$$a\delta_r = (1 \otimes e_{e,e}\delta_e)a\delta_r = (1 \otimes e_{e,e})a\delta_r.$$

Ou seja, $a = (1 \otimes e_{e,e})a$ e neste caso, observamos que $a \in \overline{\text{span}}\{b_h \otimes e_{e,h} : h \in G, b_h \in B_h\}$.

Por outro lado,

$$a\delta_r = a\delta_r(p\delta_e) = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)(1 \otimes e_{e,e}))\delta_r,$$

o que implica que $\alpha_{r^{-1}}(a)(1 \otimes e_{e,e}) = \alpha_{r^{-1}}(a)$, donde $\alpha_{r^{-1}}(a) \in \overline{\text{span}}\{b_h \otimes e_{h,e} : h \in G, b_h \in B_{h^{-1}}\}$. Lembrando que $\alpha_{r^{-1}}(a) = \theta_{r^{-1}}(a)$ e $\theta_{r^{-1}}(b_h \otimes e_{e,h}) = b_h \otimes e_{r^{-1},r^{-1}h}$, concluímos que $a = b_r \otimes e_{e,r}$, para algum $b_r \in B_r$.

Agora, seja $a \in I \rtimes_\alpha G$ e $\varepsilon > 0$. Seja $x = \sum_g a_g\delta_g \in \oplus_{g \in G} D_g\delta_g$ tal que $\|a - x\| < \varepsilon$. Desta forma,

$$\|p\delta_e a p\delta_e - p\delta_e x p\delta_e\| < \varepsilon.$$

No entanto,

$$p\delta_e x p\delta_e = p\delta_e \left(\sum_g a_g\delta_g\right) p\delta_e = \sum_g p\delta_e(a_g\delta_g)p\delta_e.$$

Para cada g, $p\delta_e(a_g\delta_g)p\delta_e \in p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e$ é um elemento de $D_g\delta_g$ (aqui entra o fato que $v\delta_e D_h\delta_h \subseteq D_h\delta_h$ e $D_h\delta_h v\delta_e \subseteq D_h\delta_h$, para todo $v \in M(I)$). Pelo que já foi feito, segue que, para cada g, existe $b_g \in B_g$ tal que $p\delta_e(a_g\delta_g)p\delta_e = b_g \otimes e_{e,g}\delta_g$. Logo,

$$p\delta_e x p\delta_e \in \text{span}\{b_h \otimes e_{e,h}\delta_h : b_h \in B_h\} \subseteq B'$$

e

$$\|p\delta_e a p\delta_e - p\delta_e x p\delta_e\| < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $p\delta_e a p\delta_e \in B'$. Donde $p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e \subseteq B'$.

Para a inclusão inversa, é suficiente observarmos que

$$p\delta_e(b_h \otimes e_{eh}\delta_h) = (1 \otimes e_{ee})(b_h \otimes e_{eh})\delta_h = b_h \otimes e_{eh}\delta_h$$

e

$$\begin{aligned} b_h \otimes e_{e,h}\delta_h(1 \otimes e_{e,e}\delta_e) &= \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b_h \otimes e_{e,h})1 \otimes e_{e,e})\delta_h \\ &= \alpha_h(b_h \otimes e_{h^{-1},e})\delta_h = b_h \otimes e_{e,h}\delta_h, \end{aligned}$$

para quaisquer $h \in G$ e $b_h \in B_h$.

Usando a caracterização provada acima, vamos mostrar que $p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e$ é isomorfo a $C^*(\mathcal{B})$ e, consequentemente, teremos que $C^*(\mathcal{B})$ e

$I \rtimes_\alpha G$ são Morita equivalentes. A fim de simplificar a notação, a partir de agora escrevemos B' em vez de $p\delta_e(I \rtimes_\alpha G)p\delta_e$.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \oplus_{g\in G} B_g & \to & B' \\ \displaystyle\sum_{g\in G} b_g & \mapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} b_g \otimes e_{e,g}\delta_g. \end{array}$$

Afirmamos que φ é uma $*$-representação de $\oplus_{g\in G} B_g$.

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \varphi(b_g)\varphi(b_h) & = & (b_g \otimes e_{e,g}\delta_g)(b_h \otimes e_{e,h}\delta_h) \\ & = & \alpha_g((b_g \otimes e_{g^{-1}e})(b_h \otimes e_{e,h}))\delta_{gh} \\ & = & b_g b_h \otimes e_{e,gh}\delta_{gh} = \varphi(b_g b_h), \end{array}$$

e

$$\varphi(b_h)^* = (b_h \otimes e_{e,h}\delta_h)^* = b_h^* \otimes e_{e,h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = \varphi(b_h^*).$$

Portanto, pela propriedade universal de $C^*(\mathcal{B})$, φ se estende a um $*$-homomorfismo $\widetilde{\varphi} : C^*(\mathcal{B}) \to B'$.

Por outro lado, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi : \oplus_{g\in G} D_g\delta_g & \to & C^*(\mathcal{B}) \otimes K(l^2(G)) \\ \sum a_g\delta_g & \mapsto & a_g(1 \otimes \lambda_g), \end{array}$$

e mostremos que ψ é uma $*$-homomorfismo.

De fato, isso segue dos seguintes cálculos:

$$\begin{array}{rcl} \psi(a\delta_r)\psi(b\delta_s) & = & a(1 \otimes \lambda_r)b(1 \otimes \lambda_s) \\ & = & a(1 \otimes \lambda_r)b(1 \otimes \lambda_{r^{-1}})(1 \otimes \lambda_r)(1 \otimes \lambda_s) \\ & = & a\theta_r(b)(1 \otimes \lambda_{rs}) \\ & = & \theta_r(\theta_{r^{-1}}(a)b)(1 \otimes \lambda_{rs}) \\ & = & \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)(1 \otimes \lambda_{rs}) \\ & = & \psi\left((a\delta_r)(b\delta_s)\right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \psi(a\delta_r)^* = [a(1 \otimes \lambda_r)]^* & = & (1 \otimes \lambda_{r^{-1}})a^* \\ & = & (1 \otimes \lambda_{r^{-1}})a^*(1 \otimes \lambda_r)(1 \otimes \lambda_{r^{-1}}) \\ & = & \alpha_{r^{-1}}(a^*)(1 \otimes \lambda_{r^{-1}}) = \psi\left((a\delta_r)^*\right), \end{array}$$

em que $a \in D_r$ e $b \in D_s$.

Agora, pela propriedade universal do produto cruzado parcial $I \rtimes_\alpha G$, ψ se estende a um $*$-homomorfismo $\widetilde{\psi} : I \rtimes_\alpha G \to C^*(\mathcal{B}) \otimes K(l^2(G))$.

Por fim, observamos que para $b_h \in B_h$,

$$\widetilde{\psi}(b_h \otimes e_{e,h}\delta_h) = b_h \otimes e_{e,e} \in C^*(\mathcal{B}) \otimes e_{e,e},$$

e identificando $C^*(\mathcal{B})$ com $C^*(\mathcal{B}) \otimes e_{e,e}$, temos que $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi}^{-1}$. Ou seja, fica provado que $C^*(\mathcal{B})$ e B' são C^*-álgebras isomorfas.

Como G é enumerável e B_e é separável, segue que I é possui elemento estritamente positivo[1]. Como $p = 1 \otimes e_{ee} \in M(I)$ é uma projeção cheia, o Lema 4.3.11 nos diz que existe uma isometria parcial $v \in M(I \otimes K)$ tal que $v^*v = 1 \otimes 1$ e $vv^* = p \otimes 1$.

Seja $\iota \otimes 1$ a inclusão de $I \otimes K$ em $M((I \rtimes_\alpha G) \otimes K)$. Ou seja, em um tensor elementar $a \otimes k$ tem-se $(\iota \otimes 1)(a \otimes k) = a\delta_e \otimes k$. Seja $\widetilde{\iota \otimes 1}$ a extensão de $\iota \otimes 1$ à álgebra de multiplicadores $M(I \otimes K)$. Considerando $u = (\widetilde{\iota \otimes 1})(v) \in M((I \rtimes_\alpha G) \otimes K)$, temos que $u^*u = 1$ e $uu^* = p\delta_e \otimes 1$. Como podemos ver na demonstração do Corolário 4.3.13, a isometria parcial u dá origem a um isomorfismo entre $B' \otimes K$ e $(I \rtimes_\alpha G) \otimes K$ através da aplicação $y \mapsto u^*yu$, para $y \in B' \otimes K$. Tal isomorfismo é um isomorfismo de C^*-álgebras graduadas, pois u é imagem de um multiplicador de $I \otimes K$ por $\widetilde{\iota \otimes 1}$ e, portanto, preserva a graduação (análogo ao feito no início desta demonstração).

Pela Proposição 4.2.7, segue que $(I \rtimes_\alpha G) \otimes K \cong I \otimes K \rtimes_{\alpha \otimes 1} G$ e pela Proposição 4.2.8, $C^*(\mathcal{B})$ é uma C^*-álgebra estável como C^*-álgebra graduada. Como o isomorfismo construído entre $C^*(\mathcal{B})$ e B' também preserva a graduação, concluímos que $C^*(\mathcal{B})$ e $(I \otimes K) \rtimes_{\alpha \otimes 1} G$ são C^*-álgebras graduadas isomorfas.

Considerando a ação parcial de G sobre a C^*-álgebra B_e correspondente a $\alpha \otimes 1$, obtemos um fibrado de Fell isomorfo a $\mathcal{B}$ (Exemplo 4.2.3).

■

Observação 5.3.7. *É possível enfraquecer a hipótese do Teorema 5.3.6, exigindo que cada ideal $B_{g^{-1}}B_g$ possua elemento estritamente positivo, em vez da separabilidade de B_e.*

Assumindo um contra-exemplo para o teorema de Brown-Green-Rieffel (Teorema 4.3.15), fica fácil encontrar um exemplo de um fibrado

[1] Seja $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ uma enumeração para G e seja $(v_n^g)_{n\in\mathbb{N}}$ uma unidade aproximada enumerável para $B_{g^{-1}}B_g$. Para $n \in \mathbb{N}$, colocamos $u_n = \sum_{i=1}^n v_n^{g_i} \otimes e_{g_ig_i}$. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma unidade aproximada para I.

de Fell estável sobre um grupo enumerável que não pode ser obtido a partir de uma ação parcial.

Com efeito, sejam A e B C^*-álgebras Morita equivalentes, mas *não* estavelmente isomorfas. Claro, uma delas não cumpre a hipótese de possuir um elemento estritamente positivo. Seja X um $A\otimes K - B\otimes K$-bimódulo de imprimitividade e seja C a álgebra de ligação de X. Seja $\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o fibrado de Fell como no Exemplo 2.1.6. Ou seja, $B_n = \{0\}$, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, e B_{-1}, B_0, B_1 são os subespaços de C definidos, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{X} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A\otimes K & 0 \\ 0 & B\otimes K \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como já argumentamos ao longo do texto, se $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um fibrado de Fell relativo a uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ em B_e, então deve existir um isomorfismo entre os ideais $B_{-1}B_1$ e B_1B_{-1}. No entanto,

$$B_{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{X} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B\otimes K \end{pmatrix}$$

e

$$B_1B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{X} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\otimes K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que não são C^*-álgebras isomorfas.

Vamos apresentar agora dois corolários do Teorema 5.3.6. No primeiro, aplicamos o teorema para a estabilização de um fibrado de Fell satisfazendo as hipóteses de enumerabilidade do grupo e separabilidade da álgebra da fibra unidade.

Corolário 5.3.8. *Seja $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ um fibrado de Fell sobre um grupo enumerável G cuja álgebra da fibra unidade é separável e seja $\mathcal{B}\otimes K$ sua estabilização. Então existe uma ação parcial de G na álgebra $B_e\otimes K$ tal que o fibrado de Fell associado é isomorfo a $\mathcal{B}\otimes K$.*

Demonstração: Basta observarmos que $\mathcal{B}\otimes K$ satisfaz as hipóteses do Teorema 5.3.6, uma vez que $\mathcal{B}\otimes K$ é estável e $B_e\otimes K$ é separável, uma vez que B_e e K são separáveis.

■

O próximo corolário é um resultado de [7], que neste trabalho obtivemos como uma consequência do Teorema 5.3.6.

Corolário 5.3.9. *Seja $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$ um fibrado de Fell saturado e estável sobre um grupo enumerável G cuja álgebra da fibra unidade é* *separável. Então existe uma ação global de G na álgebra B_e tal que o fibrado de Fell associado é isomorfo a $\mathcal{B}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.3.6, existe uma ação parcial de G em B_e tal que o fibrado de Fell associado é isomorfo a $\mathcal{B}$. Se $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é tal ação parcial, segue do Exemplo 5.3.2 que α é uma ação global.

■

Considerações finais

Combinando o que apresentamos neste trabalho com os resultados obtidos em [10], podemos tirar importantes conclusões envolvendo C^*-álgebras graduadas.

De acordo com [10], uma C^*-álgebra graduada B é dita ser topologicamente graduada se existe uma transformação linear limitada de B em B_e que é a aplicação identidade em B_e e se anula em cada subespaço B_t, para $t \neq e$. Ainda em [10], um importante resultado obtido é que, para um fibrado de Fell amenable $\mathcal{B}$, qualquer C^*-álgebra topologicamente graduada cujo fibrado de Fell associado coincide com $\mathcal{B}$, é isomorfa à C^*-álgebra seccional reduzida de $\mathcal{B}$.

Em particular, através do Teorema 5.3.6 e dos resultados citados acima, temos condições suficientes para determinar se uma C^*-álgebra graduada é um produto cruzado parcial da sua álgebra da fibra unidade pelo grupo base. Em suma, se o fibrado de Fell associado a uma C^*-álgebra topologicamente graduada é amenable e satisfaz as hipóteses do Teorema 5.3.6, então tal C^*-álgebra é, de fato, um produto cruzado parcial como definimos na Seção 3.2.

Apêndice A

Alguns resultados auxiliares

Neste apêndice, apresentamos a construção da C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra admissível, algumas definições equivalentes de elementos estritamente positivos em uma C^*-álgebra, além de alguns fatos sobre a álgebra de multiplicadores de uma C^*-álgebra.

A.1 C^*-álgebra envolvente

Nesta seção, definimos a C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra e mostramos que sempre existe a C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra admissível. Como referências, citamos [9] e [20].

Ao longo desta seção, B é uma $*$-álgebra.

Definição A.1.1. *Uma C^*-*álgebra envolvente *de B é uma C^*-álgebra A equipada com um $*$-homomorfismo $\iota : B \to A$ tal que para toda C^*-álgebra C e para todo $*$-homomorfismo $\varphi : B \to C$, existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\varphi} : A \to C$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

comuta. Em outras palavras, $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

Definição A.1.2. *Dizemos que B é* admissível *se para cada $b \in B$, existe $M > 0$ tal que se C é uma C^*-álgebra e $\varphi : B \to C$ é um $*$-homomorfismo, então $\|\varphi(b)\| \leq M$.*

Se B é uma $*$-álgebra admissível, vamos denotar $\sup_\pi \|\pi(b)\|$ o supremo do conjunto

$$\{\|\pi(b)\| : \pi : B \to C, \ C \text{ é uma } C^*\text{-álgebra}, \ \pi \text{ é um } *\text{-homomorfismo}\}.$$

Teorema A.1.3. *Seja B uma $*$-álgebra admissível. Então existe uma C^*-álgebra envolvente para B, que é única a menos de $*$-isomorfismos.*

Demonstração: Observamos que a aplicação $|||\cdot||| : B \to \mathbb{R}^+$ dada por $b \mapsto \sup_\pi \|\pi(b)\|$ está bem definida e define uma C^*-seminorma em B. Seja $N = \{b \in B : |||b||| = 0\}$. Então, I é um $*$-ideal de B e podemos considerar o quociente B/N, que é uma $*$-álgebra com as operações de multiplicação e involução definidas por

$$(b + N)(b' + N) := bb' + N,$$

e

$$(b + N)^* := b^* + N,$$

para b, $b' \in B$.

Definimos em B/N a aplicação $\|\cdot\| : B/N \to \mathbb{R}^+$ por

$$\|b + N\| = \sup_\pi \|\pi(b)\|.$$

Notemos que $\|\cdot\|$ está bem definida, pois se $b + N = b' + N$, segue que $b - b' \in N$. Logo, $\pi(b) = \pi(b')$, para todo $*$-homomorfismo π de B em uma C^*-álgebra C. Consequentemente, $\|b + N\| = \|b' + N\|$.

É fácil ver que $\|\cdot\|$ define uma C^*-norma em B/N, já que $\|b+N\| = 0$ implica que $\sup_\pi \|\pi(b)\| = 0$ e, portanto, $b \in N$.

Seja A o completamento de $(B/N, \|\cdot\|)$. Segue que A é uma C^*-álgebra. Sendo $\iota : B \to A$ a aplicação quociente, ou seja, $\iota(b) = b + N$, para todo $b \in B$, vamos mostrar que (A, ι) é uma C^*-álgebra envolvente para B.

De fato, seja C uma C^*-álgebra e $\varphi : B \to C$ um $*$-homomorfismo. Definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : B/N &\to C \\ b + N &\mapsto \varphi(b). \end{aligned}$$

Segue que $\widetilde{\varphi}$ está bem definida, pois se $b + N = b' + N$, temos que

$\varphi(b-b')=0$, já que $\sup_\pi \|\pi(b-b')\|=0$. Como φ é linear, obtemos $\varphi(b)=\varphi(b')$. Além disso, $\widetilde{\varphi}$ é um $*$-homomorfismo.

Agora, uma vez que

$$\|\widetilde{\varphi}(b+N)\|=\|\varphi(b)\|\leq \sup_\pi \|\pi(b)\|=\|b+N\|,$$

concluímos que $\widetilde{\varphi}$ se estende a um $*$-homomorfismo de A em C, que continuaremos denotando por $\widetilde{\varphi}$. Mais ainda, para todo $b\in B$,

$$\widetilde{\varphi}(\iota(b))=\widetilde{\varphi}(b+N)=\varphi(b)$$

e assim $\widetilde{\varphi}\circ\iota=\varphi$. A unicidade de $\widetilde{\varphi}$ segue do fato de $\iota(B)$ ser denso em A.

Logo, resta somente mostrarmos a unicidade de A, a menos de $*$-isomorfismos.

Seja $(C,\jmath)$ uma outra C^*-álgebra envolvente para B. Primeiramente, notemos que o $*$-automorfismo identidade Id_C faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\jmath"] \arrow[dr, "\jmath"'] & C \arrow[d, "\mathrm{Id}_C"] \\ & C \end{tikzcd}$$

comutar. Analogamente, o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & A \arrow[d, "\mathrm{Id}_A"] \\ & A \end{tikzcd}$$

comuta.

Por outro lado, usando as propriedades universais de A e C, respectivamente, podemos obter únicos $*$-homomorfismos $\varphi : A\to C$ e $\varphi' : C\to A$ tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\jmath"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ & C \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\jmath"] \arrow[dr, "\iota"'] & C \arrow[d, "\varphi'"] \\ & A \end{tikzcd}$$

comutam. Daí, podemos concluir que $\varphi \circ \varphi' \circ \jmath = \jmath$ e $\varphi' \circ \varphi \circ \iota = \iota$.

Portanto, por unicidade, devemos ter $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{Id}_C$ e $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{Id}_A$, completando a prova do teorema.

■

A.2 Elementos estritamente positivos

Nesta seção, definimos elemento estritamente positivo e, entre outras coisas, mostramos que uma C^*-álgebra possui um elemento estritamente positivo se, e somente se, possui uma unidade aproximada sequencial. Como uma consequência, concluímos que toda C^*-álgebra separável possui elemento estritamente positivo.

A principal referência usada nesta seção é [20].

Definição A.2.1. *Dizemos que um elemento positivo e de uma C^*-álgebra A é* estritamente positivo*, se $\overline{eAe} = A$.*

Proposição A.2.2. *Seja A uma C^*-álgebra e $e \in A$ um elemento positivo. São equivalentes:*

(i) *Ae é denso em A;*

(ii) *$\phi(e) > 0$ para todo estado ϕ de A;*

(iii) *e é estritamente positivo.*

Demonstração: Suponha que valha (i) e seja ϕ um estado de A. Uma vez que e é positivo, escrevemos $e = c^*c$, com $c \in a$. Pelo Teorema 3.3.7 de [20], dizer que $\phi(e) = \phi(c^*c) = 0$, implica que $\phi(ac) = 0$, para todo $a \in A$. Uma vez que Ac é denso em A, temos $\phi = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\phi(e) > 0$ e segue (i)$\Rightarrow$(ii).

Para (ii)$\Rightarrow$(iii), vamos usar o Teorema 5.3.1 de [20] que afirma que se B_1 e B_2 são C^*-subálgebras hereditárias de uma C^*-álgebra A tais que $B_1 \subseteq B_2$, então se todo funcional linear positivo τ de A se anula em B_1 também se anula em B_2, segue que $B_1 = B_2$.

Com este resultado em mãos, se $B = \overline{eAe}$, devemos ter $B = A$. Com efeito, caso contrário existiria um estado ϕ de A tal que $\phi(B) = 0$. Neste caso, $\phi(ee) = 0$ e novamente usando o Teorema 3.3.7 de [20], teríamos $\phi(e) = 0$, contradizendo (ii).

Para (iii)$\Rightarrow$(i) basta observar que $\overline{eAe} \subseteq \overline{Ae}$.

$\blacksquare$

Proposição A.2.3. *Seja A uma C^*-álgebra. São equivalentes:*
(i) *A possui um elemento estritamente positivo;*

(ii) *A possui uma unidade aproximada sequencial.*

Demonstração: Começamos por mostrar a implicação (i)$\Rightarrow$(ii). Seja e um elemento estritamente positivo de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, colocamos

$$u_n = e\left(e + \frac{1}{n}\right)^{-1}.$$

Mostremos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma unidade aproximada enumerável para A.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n : \sigma(e) \to \mathbb{R}$ a função

$$t \mapsto \frac{t^2}{t + \frac{1}{n}}.$$

Então, a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pontualmente crescente e converge pontualmente à função inclusão $z : \sigma(e) \to \mathbb{R}$. Como $\sigma(e)$ é compacto, pelo teorema de Dini, segue que $g_n \to z$ uniformemente.

No entanto, o $*$-isomorfismo φ entre $C(\sigma(e))$ e $C^*(e, 1)$ é tal que $\varphi(z) = e$. Segue que $\varphi(g_n) \to e$. Como $\varphi(g_n) = eu_n$, concluímos que $eu_n \to e$. Mas, Ae é denso em A, e assim obtemos que $au_n \to a$, para todo $a \in A$.

Para (ii)$\Rightarrow$(i), seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma unidade aproximada sequencial para A. Seja

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

e provemos que e é estritamente positivo. Para isso, vamos mostrar que $\phi(e) > 0$, para todo estado ϕ de A, e o resultado segue como uma consequência da Proposição A.2.2.

Suponha que ϕ seja um estado de A. Como $\|\phi\| = \lim_n \phi(u_n) = 1$, deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(u_N) > 0$. Logo, como $\phi(u_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(u_n)}{2^n} \geq \frac{\phi(u_N)}{2^N} > 0.$$

■

Uma C^*-álgebra que possui uma unidade aproximada sequencial é dita ser *σ-unital.*

O seguinte é uma consequência da proposição anterior, e sua demonstração pode ser encontrada em [20], Observação 3.1.1.

Corolário A.2.4. *Seja A uma C^*-álgebra separável. Então A possui elemento estritamente positivo.*

A.3 Álgebra de multiplicadores

Nesta seção, definimos a topologia estrita da álgebra de multiplicadores, mostramos que um $*$-homomorfismo nãodegenerado de uma C^*-álgebra se estende unicamente a um $*$-homomorfismo unital da sua álgebra multiplicadores e tal $*$-homomorfismo é também estritamente contínuo. Além disso, definimos o produto tensorial espacial de C^*-álgebras e, neste contexto, mostramos um resultado que relaciona o produto tensorial das álgebras de multiplicadores com a álgebra de multiplicadores do produto tensorial.

A.3.1 Topologia estrita

Considere a topologia sobre $M(A)$ gerada pelas seminormas

$$\|b\|_a = \|ba\| + \|ab\|,$$

em que $b \in M(A)$ e $a \in A$. Tal topologia é chamada *topologia estrita* de $M(A)$. Assim, um net $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em $M(A)$ converge a μ na topologia estrita se, e somente se, $\mu_\lambda a \to \mu a$ e $a\mu_\lambda \to a\mu$, para todo $a \in A$.

Observação A.3.1. *A é denso em $M(A)$ na topologia estrita.*

Demonstração: De fato, para $\mu \in M(A)$, temos que $u_\lambda\mu$ converge a μ na topologia estrita, em que $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada para A.

■

Proposição A.3.2. *Seja $\pi : A \to M(B)$ um $*$-homomorfismo nãodegenerado ($\overline{\pi(A)B} = B$). Então existe uma única extensão de π a um $*$-homomorfismo unital $\widetilde{\pi} : M(A) \to M(B)$.*

Demonstração: Uma vez que π é não-degenerada, segue que $\pi(u_\lambda)b$ converge a b, para qualquer $b \in B$. Assim, obtemos uma sequência

$\{\pi(a_n)b\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_n \pi(a_n)b = b$. De mesma forma, podemos obter uma sequência $\{b\pi(a'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_n b\pi(a'_n) = b$. Com isso, para $\mu \in M(A)$, definimos $\widetilde{\pi}(\mu) = (\widetilde{\pi}_L(\mu), \widetilde{\pi}_R(\mu))$, em que

$$\widetilde{\pi}_L(\mu)(b) = \lim_n \pi(\mu a_n)b, \quad \text{ e } \widetilde{\pi}_R(\mu)(b) = \lim_n b\pi(a'_n\mu).$$

Provemos que $\widetilde{\pi}(\mu)$ está bem definida e é um elemento de $M(B)$.

Primeiramente, sabemos que $\mu^*\mu \leq \|\mu\|^2$ e consequentemente

$$b^*\pi(a^*\mu^*\mu a)b \leq \|\mu\|^2 b^*\pi(a^*a)b.$$

Logo,

$$\|\pi(\mu a)b\| \leq \|\mu\|\|\pi(a)b\|.$$

Analogamente,

$$\|b\pi(a\mu)\| = \|\pi(\mu^*a^*)b^*\| \leq \|\mu\|\|b\pi(a)\|.$$

Esta desigualdade terá uma importância fundamental ao longo da demonstração.

Dai, segue que

$$\|\pi(\mu a_n)b - \pi(\mu a_m)b\| \leq \|\mu\|\|\pi(a_n)b - \pi(a_m)b\|$$

e, consequentemente, o limite $\lim_n \pi(\mu a_n)b$ existe. Com o mesmo argumento prova-se que tal limite independe da sequência que tomarmos desta forma convergindo a b. Usando que $B\pi(A)$ é denso em B e argumentando similarmente, obtemos que o limite $\lim_n b\pi(a_n\mu)$ existe, em que $b\pi(a_n) \to b$.

Observamos também que se $b, c \in B$, $\pi(a_n)b \to b$, $\pi(a'_n)c \to c$ e $\pi(c_n)(b+c) \to b+c$, em que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências em A, então, para $\lambda \in \Lambda$ fixado,

$$\|\pi(\mu u_\lambda)(\pi(a_n)b + \pi(a'_n)c - \pi(c_n)(b+c))\| \quad \leq \quad (\triangle),$$

em que $(\triangle) = \|\mu\|\|\pi(a_n)b + \pi(a'_n)c - \pi(c_n)(b+c)\|$, e isto segue da desigualdade que apresentamos no início da demonstração.

Passando ao limite sobre λ e depois sobre n, concluímos que a aplicação $\widetilde{\pi}_L(\mu)$ dada por $b \mapsto \lim_n \pi(\mu a_n)b$ é linear. O mesmo vale para $\widetilde{\pi}(\mu)_R$ definida por $b \mapsto \lim_n b\pi(a_n\mu)$, em que $b\pi(a_n) \to b$.

Mais ainda, para quaisquer $b, b' \in B$,

$$\widetilde{\pi}(\mu)_L(bb') = \lim_n \pi(\mu a_n)bb' = \widetilde{\pi}(\mu)_L(b)b',$$

já que $\pi(a_n)bb' \to bb'$, sempre que $\pi(a_n)b \to b$. Também temos que

$$\widetilde{\pi}(\mu)_R(bb') = b\widetilde{\pi}(\mu)_R(b').$$

Por fim, suponha que $b\pi(a_n) \to b$ e $\pi(a'_n)b' \to b'$, Então,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(\mu)_R(b)b' &= \lim_n b\pi(a_n\mu)\pi(a'_n)b' \\ &= \lim_n b\pi(a_n)\pi(\mu a'_n)b' = b\widetilde{\pi}(\mu)_L(b').\end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{\pi}(\mu) = (\widetilde{\pi}_L(\mu), \widetilde{\pi}_R(\mu))$ é um elemento de $M(B)$. Além disso, prova-se que $\widetilde{\pi} : M(A) \to M(B)$, $\mu \mapsto \widetilde{\pi}(\mu)$ é um $*$-homomorfismo. É fácil ver que $\widetilde{\pi}$ é unital e estende π.

Se $\varphi : M(A) \to M(B)$ é outro $*$-homomorfismo unital estendendo π, para cada $a \in A$ e $\mu \in M(A)$, temos que

$$\varphi(\mu)\pi(a) = \varphi(\mu a) = \pi(\mu a) = \widetilde{\pi}(\mu)\pi(a).$$

Usando que π é não-degenerada e unidade aproximada, obtemos que $\varphi(\mu) = \widetilde{\pi}(\mu)$, donde $\varphi = \widetilde{\pi}$.

■

Na próxima proposição, usaremos a Proposição 2.33 de [23], que diz o seguinte: seja X um A-módulo de Banach nãodegenerado, no sentido de que X é um espaço de Banach e $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$, e $\text{span}\{ax : a \in A, x \in X\}$ é denso em X. Então todo elemento de X é da forma ax, para algum $a \in A$ e $x \in X$.

Proposição A.3.3. *Sejam A e B C^*-álgebras e seja $\pi : A \to M(B)$ um $*$-homomorfismo nãodegenerado. Então a extensão de π, $\widetilde{\pi} : M(A) \to M(B)$ é contínuo nas respectivas topologias estritas de $M(A)$ e $M(B)$.*

Demonstração: Seja $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ um net em $M(A)$ tal que $\mu_\lambda \to \mu$ estritamente. Temos de mostrar que $\pi(\mu_\lambda) \to \pi(\mu)$ estritamente.

Com efeito, seja $b \in B$. Neste caso, B é um A-módulo de Banach com a ação de módulo dada por $a \mapsto \pi(a)b$. Assim, pela Proposição que enunciamos acima, temos que $b = \pi(a)c$, para algum $a \in A$ e $c \in B$. Segue que

$$\|\pi(\mu)b - \pi(\mu_\lambda)b\| = \|\pi(\mu a - \mu_\lambda a)c\| \leq \|\mu a - \mu_\lambda a\|\|c\|$$

que converge 0. O mesmo vale para $\|b\pi(\mu) - b\pi(\mu_\lambda)\|$ considerando B como um A-módulo de Banach à direita.

■

A.3.2 Produto tensorial espacial de álgebras de multiplicadores

Lembremos que se A e B são C^*-álgebras, com representações universais (ψ, H) e (φ, K), respectivamente, então existe um único $*$-homomorfismo injetivo $\pi : A \otimes B \to B(H\hat{\otimes}K)$ tal que $\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \pi(b)$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$. A função

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_* : A \otimes B & \to & \mathbb{R}^+ \\ c & \mapsto & \|\pi(c)\| \end{array}$$

é uma C^*-norma sobre $A \otimes B$ chamada C^*-norma *espacial*. O completamento de $A \otimes B$ com relação a $\|\cdot\|_*$ é chamado *produto tensorial espacial* de A e B, e é denotado por $A \otimes_* B$.

Dizemos que A é *nuclear*, se para toda C^*-álgebra B, existe somente uma C^*-norma sobre $A \otimes B$. Neste caso, denotamos a C^*-álgebra produto tensorial de A e B simplesmente por $A \otimes B$. Segue do Exemplo 6.2.3 de [20] que $K(H)$ é nuclear, em que H é um espaço de Hilbert e $K(H)$ denota a C^*-álgebra de todos os operadores compactos sobre H.

A fim de mostrar que, se A e B são C^*-álgebras, então $M(A) \otimes_* M(B) \subseteq M(A \otimes_* B)$, façamos uma proposição que mostra que a álgebra de multiplicadores de uma C^*-álgebra A possui uma propriedade universal:

Proposição A.3.4. *Seja B uma C^*-álgebra unital contendo A como um ideal. Então existe um único $*$-homomorfismo unital $B \to M(A)$ cuja restrição a A coincide com a inclusão canônica $A \to M(A)$. Mais ainda, se A é essencial em B ($bA = 0 \Rightarrow b = 0$), então o $*$-homomorfismo associado $B \to M(A)$ é injetivo.*

Demonstração: Seja B uma C^*-álgebra contendo A como ideal. Dado $b \in B$, notemos que a aplicação $L_b : A \to A$, $a \mapsto ba$ é linear e satisfaz $L_b(ac) = L_b(a)c$, para quaisquer $a, c \in A$. O mesmo vale para $R_b : A \to A$, $a \mapsto ab$ e além disso, $R_b(a)c = aL_b(c)$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \pi : B & \to & M(A) \\ b & \mapsto & (L_b, R_b). \end{array}$$

Então π é unital e estende a inclusão canônica de A em $M(A)$. Para $b, b' \in B$ e $a \in A$, temos

$$L_b(L_{b'}(a)) = bb'a = L_{bb'}(a)$$

e

$$R_{b'}(R_b(a)) = abb' = R_{bb'}(a),$$

donde $\pi(b)\pi(b') = \pi(bb')$.

Além disso,

$$L_b^*(a) = (L_b(a^*))^* = ab^* = R_{b^*}(a), \;\; R_b^*(a) = (R_b(a^*))^* = b^*a = L_{b^*}(a).$$

Portanto,

$$\pi(b)^* = (L_b, R_b)^* = (R_b^*, L_b^*) = (L_{b^*}, R_{b^*}) = \pi(b^*),$$

o que completa a prova de que π é um $*$-homomorfismo.

Para ver que π é único, seja $\varphi : B \to M(A)$ um $*$-homomorfismo unital estendendo a inclusão canônica $\iota : A \to M(A)$. Então, para $a \in A$ e $b \in B$,

$$\varphi(b)\iota(a) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba) = \pi(ba) = \pi(b)\iota(a).$$

Logo,

$$(\varphi(b) - \pi(b))\,\iota(a) = 0, \text{ para todo } a \in A.$$

Como A é um ideal essencial em $M(A)$, segue que $\varphi(b) = \pi(b)$, para todo $b \in B$.

Suponha agora que A seja um ideal essencial em B. Assim, se $b \in B$ é tal que $\pi(b) = 0$ temos que $bA = 0$ e $Ab = 0$, donde $b = 0$. Segue que π é injetivo.

■

O seguinte é uma consequência da Proposição A.3.4:

Proposição A.3.5. *Sejam A e B C^*-álgebras, então existe um $*$-homomorfismo injetor e unital de $\pi : M(A) \otimes_* M(B) \to M(A \otimes_* B)$ estendendo a inclusão canônica de $A \otimes_* B$ em $M(A \otimes_* B)$.*

Demonstração: Sejam (φ, H) e (ψ, K) representações injetivas e não-degeneradas de A e B, respectivamente. Pelo Teorema 6.3.3 de [20], existe um único $*$-homomorfismo injetor $\varphi\hat{\otimes}\psi : A \otimes_* B \to B(H\hat{\otimes}K)$ tal que

$$\varphi\hat{\otimes}\psi(a \otimes b) = \varphi(a)\hat{\otimes}\psi(b),$$

para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Além disso, $\varphi\hat{\otimes}\psi$ é não-degenerada.

Por outro lado, sejam $\widetilde{\varphi} : M(A) \to B(H)$ e $\widetilde{\psi} : M(B) \to B(K)$ as extensões de φ e ψ, respectivamente, a $M(A)$ e $M(B)$, como na Proposição A.3.2. Temos que $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$ são injetivos e, assim, obtemos um

$*$-homomorfismo injetivo $\widetilde{\varphi}\hat{\otimes}\widetilde{\psi} : M(A) \otimes_* M(B) \to B(H\hat{\otimes}K)$ tal que

$$\left(\widetilde{\varphi}\hat{\otimes}\widetilde{\psi}\right)(\mu \otimes \nu) = \widetilde{\varphi}(\mu)\hat{\otimes}\widetilde{\psi}(\nu),$$

para quaisquer $\mu \in M(A)$ e $\nu \in M(B)$.

Observamos que a restrição de $\widetilde{\varphi}\hat{\otimes}\widetilde{\psi}$ a $A \otimes_* B$ é exatamente $\varphi\hat{\otimes}\psi$. Donde se $c \in M(A) \otimes_* M(B)$ é tal que $c(A \otimes_* B) = 0$, temos $\widetilde{\varphi}\hat{\otimes}\widetilde{\psi}(c) = 0$, pois $\varphi\hat{\otimes}\psi$ é não-degenerada. Portanto, o resultado segue da Proposição A.3.4.

■

Referências Bibliográficas

[1] Abadie , F., *Enveloping actions and Takai duality for partial actions*, arXiv:math/0007109v1.

[2] Akemann, C. A., Pedersen, G. K., and Tomiyama, J., *Multipliers of C^*-algebras*, J. Funct. Analysis **13** (1973), 277–301.

[3] Boava, G., *Caracterizações da C^*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática. Florianópolis, 2007.

[4] Boff, P. R, *Coações de grupos e fibrados de Fell*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática. Florianópolis, 2013.

[5] Brown, L. G., *Isomorphism of hereditary subalgebras of C^*-algebras*, Pacific Journal of Mathematics **71** (1977), 335–348.

[6] Brown, L. G., Green, P., and Rieffel, M. A, *Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C^*-algebras*, Pacific Journal of Mathematics **71** (1977), 349–363.

[7] Buss, A., Meyer, R., and Zhu, C., *A Higher Category Approach to Twisted Actions on C^*-algebras*, Edinburgh Mathematical Society **56** (2013), 387–426.

[8] Davidson, K.R., *C^*-algebras by Example*, Fields Institute for Research in Mathematical Sciences Toronto: Fields Institute monographs, American Mathematical Society, 1996.

[9] Dixmier, J., *C^*-algebras*, North-Holland mathematical library, North-Holland, 1982.

[10] Exel, R., *Amenability for Fell bundles*, J. reine angew. Math. **492** (1997), 41–73.

[11] ______, *Twisted partial actions, a classification of regular C^*-algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc. **74** (1997), 417–443.

[12] ______, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence*, J. Funct. Analysis **122** (1994), 361–401.

[13] Exel, R. and Ng, C., *Approximation property of C^*-algebraic bundles*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **132** (2002), 509–522.

[14] Fell, J.M.G. and Doran, R.S., *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$-Algebraic Bundles: Banach $*$-Algebraic Bundles, Induced Representations, and the Generalized Mackey Analysis*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1988.

[15] Fell, J. M. G. and Doran, R. S., *Representations of $*$-algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-algebraic Bundles*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1988.

[16] Folland, G. B., *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, Taylor & Francis, 1994.

[17] Hjelmborg, J. v.B. and Rørdam, M., *On stability of C^*-algebras*, Journal Functional Analysis **155** (1998), 153–170.

[18] Lance, E.C., *Hilbert C^*-Modules: A Toolkit for Operator Algebraists*, Lecture note series: London Mathematical Society, Cambridge University Press, 1995.

[19] McClanahan, K., *K-Theory for partial crossed products by discrete groups*, J. Funct. Analysis **130** (1995), 77–117.

[20] Murphy, G. J., *C^*-algebras and operator theory*, ACADEMIC PressINC, 1990.

[21] Pierce, R. S., *Associative algebras*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1982.

[22] Quigg, J. C., *Discrete C^*-coactions and C^*-algebraic bundles*, J. Austral. Math. Soc.(Series A) **60** (1996), 204–221.

[23] Raeburn, I. and Williams, D.P., *Morita Equivalence and Continuous-trace C^*-algebras*, Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, 1998.

[24] Rudin, W., *Fourier analysis on groups*, Pure and Applied Mathematics Series, Interscience Publishers, 1962.

[25] Takai, H., *On a Duality for Crossed Products of C^*-Algebras*, Journal Functional Analysis **19** (1975), 25–39.

[26] Uggioni, B. B., *Sobre produtos cruzados e equivalência de Morita*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática. Florianópolis, 2013.

[27] Williams, D.P., *Crossed Products of C^*-algebras*, Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, 2007.