Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Atratores para processos em espaços de fase tempo-dependentes

Carlos Pecorari Neto
Orientador: Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan

Florianópolis
Fevereiro de 2017

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Atratores para processos em espaços de fase tempo-dependentes

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Carlos Pecorari Neto
Florianópolis
Fevereiro de 2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pecorari Neto, Carlos
Atratores para processos em espaços de fase tempo dependentes / Carlos Pecorari Neto ; orientador, Matheus Cheque Bortolan - Florianópolis, SC, 2017.
96 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Atratores pullback. 3. Processo de evolução. 4. Equação da onda. 5. Espaços tempo dependentes. I. Cheque Bortolan, Matheus. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Atratores para processos em espaços de fase tempo-dependentes

por

Carlos Pecorari Neto[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
(ICMC - USP)

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
(UFSC)

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira
(UFSC)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
(UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2017.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - PICME

Carpe Diem

Agradecimentos

Dedico este trabalho a meus pais, Alaor e Maria, aos quais sou infinitamente grato pelo apoio incondicional que me deram ao longo de toda minha vida. São as pessoas que mais admiro nesse mundo. Amo muito vocês.

Agradeço aos meus irmãos, Alaor e Fabiana, pelo incentivo e torcida, assim como por todos os momentos felizes que compartilhamos juntos. Esses momentos tornaram essa jornada menos árdua. Vocês são acima de tudo os meus melhores amigos. Aos meus sobrinhos, cunhado, cunhada, primos e tios deixo aqui também meu grande abraço de agradecimento.

Aos meus amigos da USP: Aline Diniz, Alfredo Jorge, Camila Milano, Diego Alecrim, Hugo Ribeiro, Gustavo Doricci, João Carlos, Milenna Midori, Murilo Zigart, Oriana Ortiz e Roberta Nunes, pela companhia diária que tínhamos, das mesas de estudo aos churrascos e bares! Meu forte abraço cheio de saudades a todos vocês. Não menos importante, meus agradecimentos também aos amigos da UFSC: Celso Antunes, Ingrid Mathias, Jéssika Ribeiro e Fabio Casula; e também aos amigos de todos os cantos: André van Drunen, Lívia Chierice, Luiz Cotrim, Roberto Sardinha, Rodolfo Gandara e Wesley Paixão.

Meu agradecimento mais que especial ao David Oviedo e Marcos Abreu.

Profa. Regilene Oliveira, não tenho palavras para expressar o quanto você foi importante para a minha formação acadêmica. Obrigado por toda sua disponibilidade e amizade ao longo do tempo que passei na USP.

Sou imensamente grato também ao meu orientador por todo o tempo dedicado, pela paciência, pelas conversas... Muito obrigado! Eu te admiro muito por sua competência e pela pessoa que você é.

Por fim, meus agradecimentos à CAPES e ao programa PICME pelo apoio financeiro, tornando possível a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria de atratores pullback para processos de evolução tempo-dependentes, onde os espaços de fase variam com o tempo. Como aplicação dos resultados abstratos, encontramos o atrator pullback para a equação da onda com velocidade de propagação dependente do tempo. Além disso, buscamos também compreender o comportamento assintótico deste atrator para tempos finais tendendo ao infinito.

Palavras-chave: Atratores pullback; processo de evolução; equação da onda; espaços tempo-dependentes.

Abstract

In this work we study the theory of pullback attractors for time-dependent evolution processes , in which the phase spaces vary with time. As an application of the abstract results, we find the pullback attractor for the wave equation with time-dependent speed of propagation. Furthermore, we seek to understand the asymptotic behavior of this attractor for final times tending to infinity.

Keywords: Pullback attractors; evolution processes; wave equation; time-dependent spaces.

Sumário

Introdução

O estudo de problemas não-autônomos vem sendo o foco de muitos pesquisadores nas últimas sete décadas, como por exemplo [10, 15] e também em [4, 5, 6, 7, 11, 12, 16, 20]. As equações e sistemas não-autônomos são de fundamental importância na modelagem e compreensão de problemas reais nas áreas de Química, Biologia, Física, Economia e muitas outras, já que naturalmente os termos independentes que aparecem na modelagem são *forças* que dependem do tempo. Parâmetros como a taxa de avanço de uma doença, a velocidade de um objeto, os índices nas Bolsas de Valores, e muitos outros, aparecem ao modelar situações presentes no dia a dia, tornando muito importante tratar estes tipo de equações. Mais especificamente, lidaremos com o *comportamento assintótico* de tais problemas e, para isso, o objeto chave é o *atrator pullback*. Os atratores representam o conjunto de estados limites das soluções das equações não-autônomas, e contém também todas as soluções que estão definidas para todo tempo e são limitadas, isto é, o atrator é o objeto que contém quase a totalidade das soluções que buscamos estudar, tendo em vista o problema real.

Apesar de toda a teoria já desenvolvida nessa área, grande parte dela endereça apenas sistemas definidos sobre um espaço de fase de estados *fixo*, isto é, consideramos evoluções de estados iniciais que permanecem sempre no mesmo espaço. Estes processos são suficientes para modelar a grande maioria das aplicações, porém, não cobrem todas. Em [17], os autores trazem uma importante contribuição para esta área, ao estudar o operador solução de uma equação de Klein-Gordon, com aplicação em teoria cosmológica, que possui uma densidade Hamiltoniana tempo-dependente.

Utilizando-nos dessa abordagem, e seguindo os trabalhos [13] e [14], estudaremos detalhadamente nessa dissertação a equação diferencial parcial

$$\begin{gathered}\epsilon(t)u_{tt}(x,t) + \alpha u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = g(x) \\ \text{num domínio limitado } \Omega \subset \mathbb{R}^3,\end{gathered} \tag{P}$$

com condição de fronteira de Dirichlet. Nela, o coeficiente $\epsilon(t)$ é uma função positiva decrescente que tende a zero para t grande. Se $\epsilon(t) \equiv \epsilon$ é uma constante positiva, a equação (P) se torna um processo autônomo, conhecido como *equação da onda amortecida*, que foi completamente estudada em [9]. É importante notar que a teoria clássica falha ao tentarmos encontrar um atrator pullback para esta equação no espaço de fase natural $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, já que a energia natural deste sistema não tem uma clara dissipação. Portanto é razoável considerarmos o estudo deste problema em espaços que variam de acordo com o tempo a fim de corrigir este problema, introduzindo o parâmetro $\epsilon(t)$ na norma do espaço. Este será então o objetivo do nosso trabalho.

Dividimos a dissertação em quatro capítulos e um apêndice. O primeiro capítulo é uma compilação dos resultados clássicos de atratores pullback para processos de evolução cujo espaço de fase é fixo (um estudo mais completo poderá ser obtido em [10]). Como mencionado anteriormente, essa teoria padrão é muito utilizada em uma série de aplicações, porém se mostra insuficiente em alguns problemas de evolução com coeficientes dependentes do tempo, o que motiva uma generalização para o caso de processos em espaços de fase tempo-dependentes, o que será feito no decorrer do Capítulo 2. Estes dois primeiros capítulos, portanto, caminham em paralelo, permitindo ao leitor entender os resultados do primeiro como casos particulares daqueles apresentados no segundo, e também observar que essa generalização ocorre de maneira natural. Porém, caso prefira, o leitor pode iniciar seu estudo diretamente do Capítulo 2 sem prejuízo algum por falta de definições ou resultados.

No Capítulo 2 apresentamos a teoria abstrata essencial para este trabalho, baseada em [13], no qual definimos os conceitos de processos tempo-dependentes e de $\mathbb{D}-$atratores pullback, e buscamos entender quais condições um processo deve satisfazer para que possamos garantir a existência de um atrator deste tipo.

Nos dois últimos capítulos estudaremos a aplicação de todas essas ferramentas teóricas à equação (P) não-autônoma da onda com velocidade de propagação tempo-dependente. As abordagens porém serão distintas: no Capítulo 3 buscaremos provar a existência do atrator tempo-dependente para este tipo de equação e estudaremos um resultado de regularidade para tal objeto, enquanto que no Capítulo 4 estaremos focados em entender o comportamento assintótico deste atrator, para $t \longrightarrow \infty$. Mais especificamente, mostraremos que tal comportamento está relacionado com o atrator global da equação limite $\alpha u_t(x,t) + Au(x,t) + f(u(x,t)) = g(x)$.

Reunimos no Apêndice A várias demonstrações ou referências de resultados que são frequentemente usados no decorrer do texto, em geral de caráter mais técnico, e que não são essenciais para o entendimento do trabalho.

Capítulo 1

Atratores pullback para processos de evolução

Neste capítulo visamos introduzir o conceito de *processos de evolução*, também chamados *sistemas dinâmicos*, e apresentar a teoria básica de *atratores pullback*. O nosso principal objetivo é estudar quais condições um sistema dinâmico deve satisfazer para que possamos garantir a existência de um atrator desse tipo. Omitiremos neste capítulo todas as demonstrações dos resultados apresentados, pois estes serão corolários imediatos dos resultados do segundo capítulo. O leitor que quiser se aprofundar mais na teoria de processos de evolução e atratores pullback pode ver [10].

Algumas informações importantes sobre nossos objetos de trabalho e também sobre a notação utilizada no decorrer deste texto:

- o espaço X para o qual definiremos os processos de evolução será sempre um espaço métrico, com métrica $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$;
- $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{t \in \mathbb{R} : t \leqslant 0\}$;
- $\mathbb{R}_t^+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geqslant t\}$, $\mathbb{R}_t^- = \{s \in \mathbb{R} : s \leqslant t\}$;
- denotamos por $\mathcal{P}$ o conjunto $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant s\}$;
- $\mathcal{C}(X)$ é o conjunto das aplicações contínuas de X em X;
- se $B \subset X$ e $r > 0$, definimos a r-vizinhança de B como o conjunto

$$\mathcal{O}_r(B) = \{x \in X : d(x, B) < r\},$$

onde $d(x,B) = \inf_{y \in B} d(x,y)$.

Um conceito de fundamental importância para o estudo da dinâmica assintótica de sistemas dinâmicos é o de *semidistância de Hausdorff*.

Definição 1.0.1. *Sejam A e B subconjuntos não-vazios de X. A* **semidistância de Hausdorff** *entre A e B é dada por*

$$dist_H(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B).$$

Note que, para subconjuntos A, B não-vazios de X, temos

$$dist_H(A,B) = 0 \text{ se, e somente se, } \overline{A} \subset \overline{B}.$$

1.1 Processos de evolução

Definição 1.1.1. *Um* **processo de evolução** *em X é uma família de aplicações a dois parâmetros*

$$\mathcal{S} = \{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{C}(X)$$

que satisfaz

(i) *$S(t,t)x = x$ para todos $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$S(t,\sigma)S(\sigma,s)x = S(t,s)x$ para todos $x \in X$ e $s \leqslant \sigma \leqslant t$.*

(iii) *A aplicação $\psi_{\mathcal{S}} : \mathcal{P} \times X \longrightarrow X$ dada por $\psi_{\mathcal{S}}(t,s,x) = S(t,s)x$ é contínua.*

Em linhas gerais, um processo de evolução $\mathcal{S}$ é uma das formas de modelar matematicamente um problema que varia com o tempo. Para todo par $(t,s) \in \mathcal{P}$, a aplicação $S(t,s) : X \longrightarrow X$ toma cada ponto $x \in X$, denominado *estado inicial*, no instante $s \in \mathbb{R}$ e retorna um novo ponto $S(t,s)x \in X$, denominado *estado final*, num instante posterior $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, a aplicação mostra como um estado inicial (em um dado instante s) evoluiu no decorrer do tempo até um instante final t. Daí a motivação para os itens (i) e (ii) da definição acima, que chamamos de condições de compatibilidade.

O primeiro item quer dizer que se o tempo não se altera o ponto inicial também não deve sofrer nenhuma mudança. O segundo item diz que evoluir um ponto de um estado inicial s para um tempo intermediário σ e posteriormente para um tempo final t é equivalente a evoluir tal ponto de s diretamente para t.

Já a terceira condição se mostra necessária em aplicações, e é equivalente à dependência contínua dos dados iniciais em equações diferenciais.

Definição 1.1.2. *Diremos que um processo de evolução* $\mathcal{S}$ *é* **autônomo** *se* $S(t,s) = S(t-s,0)$ *para todo par* $(t,s) \in \mathcal{P}$. *Os processos de evolução que não satisfazem essa condição são chamados* **não-autônomos** .

Note que no caso autônomo o processo de evolução não depende especificamente dos instantes inicial e final, mas sim do tempo decorrido entre eles. Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 1.1.3. *Um* **semigrupo** *é uma família a um parâmetro*

$$\mathcal{T} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$$

que satisfaz

(i) $T(0)x = x$ *para todo* $x \in X$.

(ii) $T(t)T(s)x = T(t+s)x$ *para todo* $x \in X$ *e* $t,s \in \mathbb{R}^+$.

(iii) *A aplicação* $\psi_{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ *dada por* $\psi_{\mathcal{T}}(t,x) = T(t)x$ *é contínua.*

Observe que se $\mathcal{S}$ é um processo de evolução autônomo então a família $\mathcal{T}$ dada por $T(t) = S(t,0)$ para cada $t \geqslant 0$ é um semigrupo. De fato, é claro que para cada t a aplicação $T(t)$ é contínua de X em X e, além disso, temos

Para (i): $T(0)x = S(0,0)x = x$ para todo $x \in X$.

Para (ii): $T(t)T(s)x = S(t,0)S(s,0)x = S(t+s,s)S(s,0)x$
$= S(t+s,0)x = T(t+s)x$ para todo $x \in X$ e $t,s \in \mathbb{R}^+$.

Para (iii): Seja a função $h\colon \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow \mathcal{P} \times X$ dada por $h(t,x) = (t,0,x)$. Como $\psi_{\mathcal{T}} = \psi_{\mathcal{S}} \circ h$ e também $\psi_{\mathcal{S}}$ e h são contínuas, segue que $\psi_{\mathcal{T}}$ é contínua.

Por outro lado, dado um semigrupo $\mathcal{T}$, podemos construir um processo de evolução autônomo $\mathcal{S}$, onde para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$ e $x \in X$, definimos $S(t,s)x = T(t-s)x$.

1.2 Atratores pullback

Nesta seção apresentaremos os conceitos de *imagem* de um subconjunto de X, bem como as definições de *atração*, *absorção* e *invariância* para os processos de evolução sob a ótica da dinâmica pullback. A ideia dessa abordagem é trabalhar com o processo de evolução $\mathcal{S}$ retrocedendo o tempo inicial s e mantendo o tempo final t inalterado. Ao final estaremos aptos a definir um dos conceitos mais importantes de nosso estudo: os *atratores pullback*.

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{S}$ um processo de evolução e B um subconjunto não-vazio de X. Para cada par $(t,s) \in \mathcal{P}$ definimos a* **imagem** *de B por $S(t,s)$ como sendo o conjunto*

$$S(t,s)B = \{S(t,s)x : x \in B\}.$$

Definição 1.2.2. *Sejam $\mathcal{S}$ um processo de evolução, $t \in \mathbb{R}$ e $D \subset X$. Dizemos que*

(a) *um conjunto $B \subset X$* **atrai pullback** *D no instante t sob a ação de $\mathcal{S}$ se*
$$\lim_{s\to-\infty} dist_H(S(t,s)D, B) = 0;$$

(b) *Um conjunto $B \subset X$* **absorve pullback** *D no instante t sob a ação de $\mathcal{S}$ se existe $s_0 = s_0(t,D) \leqslant t$ tal que $S(t,s)D \subset B$ para todo $s \leqslant s_0$.*

Claramente, se B absorve pullback D no instante t então B atrai pullback D no instante t. A recíproca deste resultado não é verdadeira, porém temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. *Se B atrai pullback D no instante t então $\mathcal{O}_r(B)$ absorve pullback D para todo $r > 0$.*

Demonstração: De fato, se B atrai pullback D no instante t, dado $r > 0$ existe $s_0 \leqslant t$ tal que $dist_H(S(t,s)D, B) < r$ para todo $s \leqslant s_0$. Fixe $s \leqslant s_0$ e seja $x \in S(t,s)D$ qualquer. Então

$$d(x,B) \leqslant \sup_{z\in S(t,s)D} d(z,B) = dist_H(S(t,s)D, B) < r,$$

o que implica $x \in \mathcal{O}_r(B)$. Como x é arbitrário segue que $S(t,s)D \subset \mathcal{O}_r(B)$, onde $s \leqslant s_0 \leqslant t$. Portanto $\mathcal{O}_r(B)$ absorve pullback D no instante t. ■

Definição 1.2.4. *Sejam $B \subset X$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ processo de evolução em X. Dizemos que*

(a) *B* **atrai pullback subconjuntos limitados** *no instante t se B atrai pullback D no instante t, para cada $D \subset X$ limitado;*

(b) *B* **absorve pullback subconjuntos limitados** *no instante t se B absorve pullback D no instante t, para cada $D \subset X$ limitado.*

Definição 1.2.5. *Diremos que uma família $\mathcal{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é* **invariante** *pelo processo de evolução $\mathcal{S}$ se tivermos $S(t,s)B(s) = B(t)$ para todo par $(t,s) \in \mathcal{P}$. Se $S(t,s)B(s) \subset B(t)$ para todo par $(t,s) \in \mathcal{P}$, essa família é dita* **positivamente invariante** *e se $S(t,s)B(s) \supset B(t)$ para todo par $(t,s) \in \mathcal{P}$,* **negativamente invariante**.

Neste momento podemos introduzir o conceito de *atrator pullback* para processos de evolução.

Definição 1.2.6. *Seja $\mathcal{S}$ um processo de evolução. Uma família $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é um* **atrator pullback** *para $\mathcal{S}$ se*

(i) *$A(t)$ é compacto em X para cada $t \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$\mathcal{A}$ é invariante.*

(iii) *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\mathcal{S}$.*

(iv) *$\mathcal{A}$ é minimal com respeito à propriedade (iii), isto é, se $\mathcal{C} = \{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de fechados satisfazendo (iii), então $A(t) \subset C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Observação 1.2.7. *A condição (iv) da Definição 1.2.6 é colocada para garantir que se um processo de evolução tem atrator pullback, então ele é único (veja Definição 1.12 de [10]).*

1.3 Existência de atratores pullback

Para enunciarmos o resultado que garante a existência de um atrator pullback para um processo de evolução, precisaremos de mais dois conceitos. O primeiro deles é o de conjunto *ω-limite pullback*, cuja ideia é entender onde um subconjunto do espaço "se acumula" em um dado tempo final t, sob a ação do processo de evolução $\mathcal{S}$.

Definição 1.3.1. *Sejam $\mathcal{S}$ processo de evolução em X e $B \subset X$. O subconjunto de X definido por*

$$\omega(B,t) = \bigcap_{\sigma \leqslant t} \overline{\bigcup_{s \leqslant \sigma} S(t,s)B}$$

é chamado o ω**-limite pullback** *de B em t.*

Observação 1.3.2. *O ω-limite pullback claramente é um fechado em X, pois é uma interseção de conjuntos fechados em X.*

A definição acima é, muita vezes, inviável para aplicação em resultados. Porém temos a seguinte caracterização:

Proposição 1.3.3. *Sejam $B \subset X$ e $t \in \mathbb{R}$. Então*

$$\omega(B,t) = \{y \in X : \text{existem sequências } \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^- \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \text{ tais que } s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ e } y = \lim_{n\to\infty} S(t,s_n)x_n\}.$$

Demonstração: Vide Proposição 2.3.2 no Capítulo 2. ∎

O segundo conceito é o seguinte:

Definição 1.3.4. *Seja $\mathcal{S}$ um processo de evolução. Dizemos que $\mathcal{S}$ é* **pullback assintoticamente compacto** *se para cada $t \in \mathbb{R}$ e sequências $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ satisfazendo $s_n \to -\infty$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada e $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, tivermos que $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente.*

Com estas definições podemos enunciar um dos principais resultados de existência de atrator pullback para processos de evolução.

Teorema 1.3.5. *Seja $\mathcal{S}$ um processo de evolução assintoticamente compacto. Assuma que existe uma família $\mathcal{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que*

(a) $\cup_{t\in\mathbb{R}} B(t)$ *é limitado em X;*

(b) $B(t)$ *absorve pullback limitados de X no instante t, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Então $\mathcal{S}$ possui um atrator pullback $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dado por

$$A(t) = \omega(B(t),t) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Vide Teorema 2.3.15 no Capítulo 2. ∎

Este resultado é um dos mais utilizados para mostrar a existência de atratores pullback para processos de evolução em exemplos concretos, que aparecem nas equações diferenciais. Para mais detalhes sobre estes e outros resultados, o leitor pode ver [10].

Capítulo 2

Atratores para processos em espaços tempo-dependentes

Neste capítulo iremos estudar a existência de atratores pullback para processos em espaços tempo-dependentes. Como no capítulo anterior, faremos algumas definições e estabeleceremos as notações que serão usadas daqui pra frente. Para isto, considere uma família $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de espaços métricos e denote

- d_t a métrica associada ao espaço X_t;
- se $B \subset X_t$ é não-vazio e $x \in X_t$, definimos $dist_t(x, B) = \inf_{y\in B} d_t(x, y)$;
- se A e B são subconjuntos não-vazios de X_t, a semidistância de Hausdorff entre A e B é dada por

$$\delta_t(A, B) = \sup_{x\in A} dist_t(x, B).$$

2.1 Processos em espaços tempo-dependentes

Definição 2.1.1. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de espaços métricos. Um* **processo-TDS** *(da abreviação para time-dependent spaces) é uma família a dois parâmetros*

$$\mathcal{U} = \{U(t, s) : t \geqslant s\},$$

com $U(t,s)\colon X_s \longrightarrow X_t$ satisfazendo:

(i) *$U(t,t)$ é a aplicação identidade em X_t para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$U(t,\sigma)U(\sigma,s) = U(t,s)$ para todos $s \leqslant \sigma \leqslant t$.*

Note que aqui, diferentemente do caso de um único espaço X, omitimos as condições de continuidade. **Não** pedimos que $U(t,s)$ seja contínua de X_τ em X_t e também **não** pedimos nenhuma condição análoga ao item (iii) da Definição 1.1.1. Estas condições serão substituídas por outras mais fáceis de serem aplicadas, mas que estão satisfeitas trivialmente no caso de processos de evolução.

2.2 $\mathbb{D}$-atratores pullback

Para apresentarmos os atratores pullback para processos em espaços tempo-dependentes, precisaremos de uma teoria um pouco mais geral do que a apresentada no Capítulo 1.

Para tanto, consideremos a classe $\mathbb{S}$ de todas as famílias $\hat{D} = \{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ com $D_t \subset X_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Diremos que $\hat{A} \subset \hat{B}$ se $A_t \subset B_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.2.1. *Diremos que uma subclasse $\mathbb{D} \subset \mathbb{S}$ é um* **universo** *se dado $\hat{D}_1 \in \mathbb{D}$ e $\hat{D}_2$ tal que $\hat{D}_2 \subset \hat{D}_1$, então $\hat{D}_2 \in \mathbb{D}$.*

Os conceitos de *atração pullback* e *absorção pullback* ficam assim enunciados:

Definição 2.2.2. *Sejam $\mathcal{U}$ um processo-TDS, $\hat{B}$ uma família em $\mathbb{S}$ e $\mathbb{D}$ um universo. Dizemos que $\hat{B}$ é*

(i) **$\mathbb{D}$-pullback atraente** *se tivermos $\lim\limits_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, B_t) = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\hat{D} \in \mathbb{D}$ dado.*

(ii) **$\mathbb{D}$-pullback absorvente** *se dados $\hat{D} \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $\tau_0 = \tau_0(t,\hat{D}) \leqslant t$ tal que $U(t,\tau)D_\tau \subset B_t$ para todo $\tau \leqslant \tau_0$;*

A invariância também possui um análogo de maneira bem usual.

Definição 2.2.3. *Uma família $\hat{A} \in \mathbb{S}$ é* **invariante** *se $U(t,\tau)A_\tau = A_t$ para todo $t \geqslant \tau$.*

Com estes conceitos, da mesma maneira feita na teoria clássica de atratores pullback, podemos definir aqui o *atrator pullback* para um processo-TDS, levando em consideração um universo fixado.

Definição 2.2.4. *Sejam $\mathcal{U}$ um processo-TDS e $\mathbb{D}$ um universo. Uma família $\hat{A} \in \mathbb{S}$ é* **$\mathbb{D}$-atrator pullback** *se*

(i) *A_t é compacto em X_t para cada $t \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$\hat{A}$ é invariante.*

(iii) *$\hat{A}$ é $\mathbb{D}$-pullback atraente.*

(iv) *$\hat{A}$ é minimal em relação à propriedade (iii), isto é, se $\hat{C} \in \mathbb{S}$ é uma família de fechados $\mathbb{D}$-pullback atraente, então $\hat{A} \subset \hat{C}$.*

Observe que a unicidade do $\mathbb{D}$-atrator pullback fica garantida pelo item (iv) da definição acima, da mesma maneira que na teoria clássica de atratores pullback.

2.3 Existência de $\mathbb{D}$-atratores pullback

Novamente, uma questão natural e pertinente a este estudo é: quais são as condições mínimas que necessitamos impor sobre um processo-TDS para que possamos garantir a existência de um $\mathbb{D}$-atrator pullback? Nesta seção vamos mostrar que os conceitos de *ω-limites pullback* e processos-TDS *$\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compactos* são essenciais (porém não suficientes) para a existência de um atrator deste tipo. Como resultado final, iremos obter um forte "candidato" a $\mathbb{D}$-atrator pullback, sobre o qual apenas nos restará verificar a propriedade da invariância, que é verificada de maneira distinta em relação ao caso clássico, e será deixada para a última seção deste capítulo.

Definição 2.3.1. *Seja $\mathcal{U}$ um processo-TDS. Para cada $\hat{D} \in \mathbb{S}$ e $t \in \mathbb{R}$ definimos o* **ω-limite pullback** *de $\hat{D}$ em t por*

$$\omega(\hat{D}, t) = \bigcap_{\sigma \leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau \leqslant \sigma} U(t, \tau) D_\tau}.$$

Definimos também o **ω-limite pullback** *de $\hat{D}$ como sendo a família $\hat{\omega}(\hat{D}) = \left\{\omega(\hat{D}, t)\right\}_{t \in \mathbb{R}}$.*

Note que $U(t, \tau) D_\tau$ está em X_t para todo $\tau \leqslant t$, assim, como no caso clássico, o ω-limite pullback em t é um subconjunto fechado de X_t, uma vez que é uma interseção de fechados em X_t.

Apresentamos aqui uma caracterização útil do ω-limite pullback via sequências, que generaliza o resultado da teoria clássica (veja Proposição 1.3.3), e que nos permite utilizar esta família de maneira mais natural no que segue.

Proposição 2.3.2. *Sejam $\mathcal{U}$ um processo-TDS e $\hat{D} \in \mathbb{S}$ um universo. Então para cada $t \in \mathbb{R}$ temos*

$$\omega(\hat{D}, t) = \{y \in X_t : \text{existem sequências } \{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^- \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ com } x_n \in D_{\tau_n} \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ tais que } \tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ e } y = \lim_{n\to\infty} U(t, \tau_n)x_n\}.$$

Observação 2.3.3. *Observe que para cada n natural, $U(t, \tau_n)x_n$ é um ponto em X_t. Logo, o limite que aparece na proposição anterior nada mais é do que o limite usual de uma sequência de pontos do espaço métrico X_t.*

Demonstração: Suponha $y \in \omega(\hat{D}, t) = \bigcap_{\sigma\leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau\leqslant\sigma} U(t, \tau)D_\tau}$. Então $y \in \overline{\bigcup_{\tau\leqslant\sigma} U(t, \tau)D_\tau}$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}_t^-$. Então para cada $\sigma \in \mathbb{R}_t^-$, existe uma sequência $\{y_n^\sigma\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{\tau\leqslant\sigma} U(t, \tau)D_\tau$ tal que $y_n^\sigma \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in X_t$. Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in \mathbb{R}_t^-$, existem $\tau_n^\sigma \leqslant \sigma$ e $x_n^\sigma \in D_{\tau_n^\sigma}$ tais que $y_n^\sigma = U(t, \tau_n^\sigma)x_n^\sigma$. Considere uma sequência $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = -\infty$ e defina $\tau_n = \tau_n^{\sigma_n}$ e $x_n = x_n^{\sigma_n} \in D_{\tau_n^{\sigma_n}} = D_{\tau_n}$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n \leqslant \sigma_n$ e $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = -\infty$, segue que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = -\infty$. Além disso, sabemos que as sequências $\left\{y_n^{\sigma_j}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para y quando $n \to \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e portanto a sequência $\{y_1^{\sigma_1}, y_2^{\sigma_2}, y_3^{\sigma_3}, ...\}$ também converge para y. Concluímos então que $y = \lim_{n\to\infty} U(t, \tau_n)x_n$, com $\tau_n \to -\infty$ e $x_n \in D_{\tau_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, sejam $y \in X_t$ e sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (com $x_n \in D_{\tau_n}$ para todo n) tais que $\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} U(t, \tau_n)x_n$. Fixe $\sigma \leqslant t$. Como $\tau_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_n \leqslant \sigma$ para todo $n \geqslant n_0$. Logo $U(t, \tau_n)x_n \in \bigcup_{\tau\leqslant\sigma} U(t, \tau)D_\tau$ para todo $n \geqslant n_0$. Como $U(t, \tau_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, segue que $y \in \overline{\bigcup_{\tau\leqslant\sigma} U(t, \tau)D_\tau}$. Como isso ocorre para todo $\sigma \leqslant t$ fixado, temos $y \in \bigcap_{\sigma\in\mathbb{R}_t^-} \overline{\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}_\sigma^-} U(t, \tau)D_\tau} = \omega(\hat{D}, t)$. ∎

Apresentaremos agora uma sequência de resultados que nos permitirão encontrar hipóteses para garantir a existência de um $\mathbb{D}$-atrator pullback para um processo-TDS $\mathcal{U}$, fixado um universo $\mathbb{D}$.

Proposição 2.3.4. *Sejam $\mathcal{U}$ um processo-TDS e $\mathbb{D}$ um universo. Se $\hat{B} \in \mathbb{S}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente, então $\omega(\hat{D}, t) \subset \omega(\hat{B}, t)$ para todo $\hat{D} \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$. Adicionalmente se $\hat{B} \in \mathbb{D}$ então $\omega(\hat{B}, t) \subset \overline{B_t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Fixe $\hat{D} \in \mathbb{D}$, $t \in \mathbb{R}$ e seja $y \in \omega(\hat{D}, t)$. Então existem sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ com $\tau_n \to -\infty$ e $x_n \in D_{\tau_n}$ tais que $U(t,\tau_n)x_n \to y$ quando $n \to \infty$. Como $\hat{B}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente, para cada $k \geqslant 1$ inteiro existe $\tau_0(k) \leqslant t - k$ tal que $U(t-k,\tau)D_\tau \subset B_{t-k}$ para todo $\tau \leqslant \tau_0(k)$. Além disso, para cada $k \geqslant 1$ inteiro, existe $\tau_{n_k} \in \{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\tau_{n_k} \leqslant \tau_0(k)$, o que implica que $U(t-k,\tau_{n_k})D_{\tau_{n_k}} \subset B_{t-k}$. Como para cada k temos $x_{n_k} \in D_{\tau_{n_k}}$, então $y_k = U(t-k,\tau_{n_k})x_{n_k} \in B_{t-k}$ para cada $k \geqslant 1$ inteiro.

Agora, definindo a sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ por $s_k = t-k$, observe que $U(t,s_k)y_k = U(t,t-k)y_k = U(t,t-k)U(t-k,\tau_{n_k})x_{n_k} = U(t,\tau_{n_k})x_{n_k} \to y$, onde $s_k \to -\infty$ e $y_k \in B_{s_k}$ para todo $k \geqslant 1$. Pela Proposição 2.3.2, $y \in \omega(\hat{B}, t)$ e consequentemente $\omega(\hat{D},t) \subset \omega(\hat{B},t)$.

Fixe $t \in \mathbb{R}$ e seja $y \in \omega(\hat{B},t)$. Então existem sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ com $\tau_n \to -\infty$ e $x_n \in B_{\tau_n}$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} U(t,\tau_n)x_n$. Como $\hat{B}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente e $\hat{B} \in \mathbb{D}$, existe $\tau_0 \leqslant t$ tal que $U(t,\tau)B_\tau \subset B_t$ para todo $\tau \leqslant \tau_0$. Além disso, como $\tau_n \to -\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_n \leqslant \tau_0$ para todo $n \geqslant n_0$. Logo $U(t,\tau_n)x_n \in B_t$ para todo $n \geqslant n_0$, de onde concluímos que $y \in \overline{B_t}$. Portanto $\omega(\hat{B},t) \subset \overline{B_t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. ∎

Observação 2.3.5. *Segue imediatamente da proposição anterior que se $\hat{B} \in \mathbb{D}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente e $\left\{\overline{B_t}\right\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathbb{D}$ então $\hat{\omega}(\hat{B}) \in \mathbb{D}$.*

Proposição 2.3.6. *Se $\hat{C}$ é uma família de conjuntos fechados $\mathbb{D}$-pullback atraente então $\omega(\hat{D},t) \subset C_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $\hat{D} \in \mathbb{D}$.*

Demonstração: Sejam $\hat{D} \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$. Como $\hat{C}$ é $\mathbb{D}$-pullback atraente temos

$$\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, C_t) = 0.$$

Sejam $y \in \omega(\hat{D},t)$ e sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ com $\tau_n \to -\infty$ e $x_n \in D_{\tau_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} U(t,\tau_n)x_n$.

Logo

$$\begin{aligned} dist_t(y, C_t) &= dist_t\Big(\lim_{n\to\infty} U(t,\tau_n)x_n, C_t\Big) = \lim_{n\to\infty} dist_t(U(t,\tau_n)x_n, C_t) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \delta_t(U(t,\tau_n)D_{\tau_n}, C_t) = 0, \end{aligned}$$

o que implica que $y \in \overline{C_t}$. Como C_t é fechado para cada t segue que $y \in C_t$, e além disso, uma vez que a escolha de $\hat{D}$ e $t \in \mathbb{R}$ foi arbitrária, concluímos que $\omega(\hat{D},t) \subset C_t$, para todo t e para todo $\hat{D} \in \mathbb{D}$. ∎

Como no caso clássico, precisaremos também da definição de *compacidade assintótica* para processos em espaços tempo-dependentes. Esta definição, como todas as outras deste capítulo, também dependerá de um universo fixado.

Definição 2.3.7. *O processo-TDS $\mathcal{U}$ é chamado* **$\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto** *se para cada $\hat{D} \in \mathbb{D}$, $t \in \mathbb{R}$ e sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ e $x_n \in D_{\tau_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\tau_n \to -\infty$, tivermos que $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta em X_t.*

Note que esta definição é um pouco mais geral que a Definição 1.3.4, mesmo considerando o universo das famílias $\hat{D}$ com $\cup_{t\in\mathbb{R}} D(t)$ limitada em X, já que não pedimos aqui que a sequência $\{U(t,\tau_n)x_n\}$ seja limitada em X_t. Entretanto, nos resultados a seguir, isto será verificado utilizando outras hipóteses sobre o processo-TDS e o universo envolvido.

Proposição 2.3.8. *Se o processo-TDS $\mathcal{U}$ é $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, então para $\hat{D} \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$, temos:*

1. $\omega(\hat{D},t)$ *não-vazio.*

2. $\omega(\hat{D},t)$ *compacto em X_t.*

3. $\lim\limits_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, \omega(\hat{D},t)) = 0$

Demonstração: De (1): Considere as sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$ com $\tau_n \to -\infty$ e $x_n \in D_{\tau_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{U}$ é $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, a sequência $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ têm subsequência convergente para algum ponto y de X_t. Segue da Proposição 2.3.2 que $y \in \omega(\hat{D},t)$ e portanto $\omega(\hat{D},t) \neq \varnothing$.

De (2): Vamos mostrar inicialmente que $\omega(\hat{D},t)$ é relativamente compacto. Seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\omega(\hat{D},t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tau_n \leqslant -n$ e $x_n \in D_{\tau_n}$ tais que $d_t(U(t,\tau_n)x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Como $\mathcal{U}$ é $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, a sequência $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente ($k \in \mathbb{N}$), digamos $U(t,\tau_{n_k})x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y \in X_t$. Considere a subsequência $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Temos então que $\lim\limits_{k\to\infty} d_t(y_{n_k}, y) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} d_t(y_{n_k}, U(t,\tau_{n_k})x_{n_k}) + \lim\limits_{k\to\infty} d_t(U(t,\tau_{n_k})x_{n_k}, y) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, ou seja, $y_{n_k} \to y \in X_t$.

Como a sequência que tomamos inicialmente é qualquer, concluímos que $\omega(\hat{D},t)$ é relativamente compacto, o que implica $\overline{\omega(\hat{D},t)}$ compacto. Por outro lado, como $\omega(\hat{D},t)$ é fechado, segue que $\omega(\hat{D},t)$ é compacto.

De (3): Queremos provar que $\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, \omega(\hat{D},t)) = 0$. Suponha que isso não ocorra. Então existem $\epsilon > 0$ e sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_t^-$, $x_n \in D_{\tau_n}$ tais que $dist_t(U(t,\tau_n)x_n, \omega(\hat{D},t)) \geqslant \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\mathcal{U}$ é $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, a sequência $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente $U(t,\tau_{n_k})x_{n_k} \to y \in X_t$ e segue da Proposição 2.3.2 que $y \in \omega(\hat{D},t)$.

Temos então $0 = dist_t(y, \omega(\hat{D},t)) = \lim_{k\to\infty} dist_t(U(t,\tau_{n_k})x_{n_k}, \omega(\hat{D},t)) \geqslant \epsilon > 0$, o que é um absurdo. ■

Proposição 2.3.9. *Se $\mathcal{U}$ é um processo-TDS $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto e $\hat{B} \in \mathbb{S}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente, então a família $\hat{\omega}(\hat{B})$ é $\mathbb{D}$-pullback atraente.*

Demonstração: Sejam $\hat{D} \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$ fixados. Como $\hat{B}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente, pela Proposição 2.3.4 temos $\omega(\hat{D},t) \subset \omega(\hat{B},t)$, de onde segue que

$$\delta_t(U(t,\tau)D_\tau, \omega(\hat{B},t)) \leqslant \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, \omega(\hat{D},t)) \quad \text{para todo} \quad \tau \leqslant t$$

Além disso, como $\mathcal{U}$ é $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, segue do item (3) da Proposição 2.3.8 que $\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, \omega(\hat{D},t)) = 0$ e então $\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)D_\tau, \omega(\hat{B},t)) = 0$. Como $\hat{D} \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$ foram tomados arbitrários, concluímos que a família $\hat{\omega}(\hat{B})$ é $\mathbb{D}$-pullback atraente. ■

A proposição a seguir é uma consequência imediata dos resultados anteriores.

Proposição 2.3.10. *Sejam $\mathcal{U}$ um processo-TDS $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto e $\hat{B} \in \mathbb{D}$ uma família $\mathbb{D}$-pullback absorvente. Então*

1. $\omega(\hat{B},t) \neq \varnothing$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

2. $\omega(\hat{B},t)$ *é compacto para todo* $t \in \mathbb{R}$.

3. *A família* $\hat{\omega}(\hat{B})$ *é* $\mathbb{D}$*-pullback atraente.*

4. *Se* $\hat{C} \in \mathbb{S}$ *é uma família de fechados* $\mathbb{D}$*-pullback atraente, então* $\omega(\hat{B},t) \subset C_t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Se $\hat{B} \in \mathbb{D}$ é $\mathbb{D}$-pullback absorvente, considere a família $\hat{A}$ dada por

$$A_t = \omega(\hat{B},t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pelo que vimos anteriormente, se $\mathcal{U}$ é um processo-TDS $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, essa família $\hat{A}$ satisfaz as condições (i), (iii) e (iv) da Definição 2.2.4 de $\mathbb{D}$-atrator pullback. Para que de fato $\hat{A}$ seja um atrator desse tipo, resta provarmos a propriedade (ii), de invariância. Recorde que no capítulo anterior (onde os espaços não eram variáveis) consideramos as aplicações dos processos de evolução em $\mathcal{C}(X)$ e isso era fortemente usado para provar a invariância. Note que aqui isso não é possível. O que faremos a seguir é justamente contornar esta situação no caso em que os espaços variam.

2.3.1 Processos-TDS T-fechados

Começamos com a definição de aplicação fechada entre dois espaços métricos.

Definição 2.3.11. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Diremos que f é* **fechada** *se para cada sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \to x \in X$ e $f(x_n) \to y \in Y$, temos $f(x) = y$.*

Note que esta definição é equivalente a dizer que f é fechada se o seu *gráfico*
$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$
é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

Definição 2.3.12. *Um processo-TDS $\mathcal{U}$ é chamado* **T-fechado** *se existe $T > 0$ tal que $U(t, t-T) : X_{t-T} \to X_t$ é aplicação fechada para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Com esta definição somos capazes de mostrar a invariância do ω-limite pullback nos dois próximos resultados.

Proposição 2.3.13. *Seja $\mathcal{U}$ um processo-TDS $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto e T-fechado. Se $\hat{B} \in \mathbb{D}$ então a família $\hat{\omega}(\hat{B})$ satisfaz*
$$\omega(\hat{B}, t) \subset U(t, t-T)\omega(\hat{B}, t-T), \quad \text{para todo} \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Fixe $t \in \mathbb{R}$. Se $y \in \omega(\hat{B}, t)$, existem sequências $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\tau_n \leqslant t - T < t$ e $x_n \in B_{\tau_n}$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} U(t, \tau_n)x_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $w_n = U(t-T, \tau_n)x_n \subset X_{t-T}$. Como $\mathcal{U}$ é $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto, a sequência $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ têm subsequência convergente para $w \in \omega(\hat{B}, t-T)$ que, renomeando os índices se necessário, denotaremos também por $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Então, $U(t, t-T)w_n = U(t, t-T)U(t-T, \tau_n)x_n = U(t, \tau_n)x_n \to y$. Como $\mathcal{U}$ é T-fechado, a aplicação $U(t, t-T)$ é fechada, e consequentemente $y = U(t, t-T)w \in U(t, t-T)\omega(\hat{B}, t-T)$. Como $t \in \mathbb{R}$ é qualquer e

y foi tomado arbitrariamente, segue que $\omega(\hat{B}, t) \subset U(t, t-T)\omega(\hat{B}, t-T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Proposição 2.3.14. *Seja $\hat{F} \in \mathbb{D}$ uma família de fechados $\mathbb{D}$-pullback atraente. Se existe $T > 0$ tal que $F_t \subset U(t, t-T)F_{t-T}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\hat{F}$ é invariante.*

Demonstração: Fixe $t \in \mathbb{R}$. Para $s \geqslant t$ temos

$$U(s,t)F_t \subset U(s,t)U(t,t-T)F_{t-T} = U(s,t-T)F_{t-T}.$$

Substituindo t na expressão anterior por $t-T$, obtemos

$$U(s,t-T)F_{t-T} \subset U(s,t-2T)F_{t-2T},$$

e assim prosseguindo indutivamente chegamos a

$$U(s,t)F_t \subset U(s,t-nT)F_{t-nT}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Com isso temos

$$\delta_s(U(s,t)F_t, F_s) \leqslant \delta_s(U(s,t-nT)F_{t-nT}, F_s).$$

Como $\hat{F}$ é $\mathbb{D}$-pullback atraente e $\hat{F} \in \mathbb{D}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \delta_s(U(s,t-nT)F_{t-nT}, F_s) = 0,$$

e consequentemente $\delta_s(U(s,t)F_t, F_s) = 0$. Por fim, concluímos que $U(s,t)F_t \subset \overline{U(s,t)F_t} \subset \overline{F_s} = F_s$, para todos $s \geqslant t$. Em particular, $U(t,t-nT)F_{t-nT} \subset F_t$.

Por outro lado, $F_t = U(t,t)F_t \subset U(t,t-nT)F_{t-nT}$. Deste fato e do que concluímos no paragráfo anterior temos $F_t = U(t,t-nT)F_{t-nT}$. Seja agora $\tau \leqslant t$. Tomando n suficientemente grande, $t-nT \leqslant \tau$ e então $F_t = U(t,t-nT)F_{t-nT} = U(t,\tau)U(\tau,t-nT)F_{t-nT} \subset U(t,\tau)F_\tau \subset F_t$. Portanto, $U(t,\tau)F_\tau = F_t$ para todos $\tau \leqslant t$, ou seja, $\hat{F}$ é invariante. ■

Estes resultados combinados concluem a invariância do ω-limite (veja a demonstração abaixo) e nos permitem enunciar e demonstrar o resultado mais importante deste capítulo, que nos dá condições suficientes para a existência de um $\mathbb{D}$-atrator pullback.

Teorema 2.3.15. *Suponha $\mathcal{U}$ um processo-TDS $\mathbb{D}$-pullback assintoticamente compacto e T-fechado. Se $\hat{B} \in \mathbb{D}$ é uma família $\mathbb{D}$-pullback absorvente e $\left\{\overline{B_t}\right\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathbb{D}$, então $\mathcal{U}$ possui $\mathbb{D}$-pullback atrator que, ademais, é único.*

Demonstração: Segue diretamente da Observação 2.3.5 que $\hat{\omega}(\hat{B}) \in \mathbb{D}$, e assim a invariância da família $\hat{\omega}(\hat{B})$ segue das Proposições 2.3.13 e 2.3.14. ■

Finalmente, assuma agora que a família $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família de espaços de Banach, cada um com sua norma $\|\cdot\|_{X_t}$ respectivamente, e considere as seguintes definições:

Definição 2.3.16. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos a $R-$**bola** de X_t como*

$$\mathbb{B}_t(R) = \left\{x \in X_t : \|x\|_{X_t} \leqslant R\right\}.$$

Definição 2.3.17. *Uma família $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de conjuntos limitados $C_t \subset X_t$ é chamada **uniformemente limitada** se existe $R > 0$ tal que*

$$C_t \subset \mathbb{B}_t(R) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se tomamos $\mathbb{D}_b$ como o **universo das famílias uniformemente limitadas** , os resultados da parte teórica do artigo de Conti, Pata e Temam [13] sobre a existência e unicidade do atrator pullback seguem como casos particulares do que fizemos neste capítulo.

Com estas definições, a partir de agora, seguiremos a abordagem feita pelo artigo [13], sendo mais conveniente usarmos a denominação **atrator pullback tempo-dependente** em vez de $\mathbb{D}_b$**-atrator pullback**.

Temos também a seguinte definição, que será utilizada mais adiante.

Definição 2.3.18. *Um processo-TDS $\mathcal{U}$ é dito* **fortemente contínuo** *se $U(t,\tau): X_\tau \to X_t$ é uma aplicação contínua.*

Note que, claramente, todo processo-TDS fortemente contínuo é também T-fechado. Assim, todos os resultados acima de aplicam para este tipo de processo-TDS.

Capítulo 3

Aplicação à equação da onda

Todo este capítulo é baseado no artigo de Conti, Pata e Temam [13], no qual os autores apresentam uma aplicação da teoria de atratores pullback para espaços de fase tempo-dependentes (vista no capítulo anterior). Nosso objetivo aqui é apresentar em detalhes os resultados do artigo, tornando-o mais acessível.

3.1 O problema e suas hipóteses

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio (aberto e conexo) limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave (pelo menos C^2) e $\tau \in \mathbb{R}$ um tempo inicial. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\epsilon(t)u_{tt}(x,t) + \alpha u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = g(x), \quad t > \tau$$

na variável $u = u(x,t) : \Omega \times [\tau, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, sujeita às restrições

1. $u(x,t) = 0$ para todos $x \in \partial\Omega$ e $t \in [\tau, \infty)$ (condição de fronteira de Dirichlet).

2. $u(x,\tau) = a(x)$ e $u_t(x,\tau) = b(x)$ (condições iniciais).

onde $\alpha > 0$ é uma constante e $a, b \colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, com a satisfazendo a condição de compatibilidade $a(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$.

Tal problema é a conhecido como **equação da onda com velocidade de propagação variável com o tempo**. Claramente a dependência de t da função ϵ dá um caráter não-autônomo a esta equação.

3.1.1 Hipóteses sobre ϵ

A função $\epsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ é uma função decrescente tal que

$$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0. \tag{3.1}$$

$$\text{existe } L > 0 \text{ tal que } \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(|\epsilon(t)| + |\epsilon'(t)| \Big) \leqslant L. \tag{3.2}$$

Note que com estas hipóteses temos $\epsilon(t) \geqslant 0$ e $\epsilon'(t) \leqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Hipóteses sobre f

Fixamos f uma função em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$, existe constante $c \geqslant 0$ tal que

$$|f''(s)| \leqslant c(1 + |s|) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

e além disso temos

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1, \tag{3.4}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet, cujo domínio é $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, onde o símbolo $\subset\subset$ denota uma inclusão compacta.

Pedimos que f satisfaça uma condição adicional (vide (3.5)), que apresentaremos mais adiante.

3.1.3 Hipóteses sobre g

Pedimos que $g = g(x) \in L^2(\Omega)$. Note que a função g não depende do tempo.

Denotaremos o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ por H e nele definiremos o produto interno e a sua norma associada da seguinte maneira:

$$\langle v, w \rangle = \int_\Omega v(x)w(x)dx, \quad \|v\| = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

e denotaremos $A = -\Delta$ o operador Laplaciano negativo com condição de fronteira de Dirichlet. Neste caso[1], $A\colon D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é um operador positivo e auto-adjunto, onde $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Podemos então construir uma cadeia de espaços de Hilbert $H_\sigma = D(A^{\frac{\sigma}{2}})$ para $\sigma \in [0,2]$ de modo que se $0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 \leqslant 2$, temos $H_0 = H$, $H_2 = D(A)$ e

$$H_2 \subset\subset H_{\sigma_2} \subset\subset H_{\sigma_1} \subset\subset H.$$

Para cada um destes espaços H_σ definimos o produto interno e sua norma associada como:

$$\langle v, w \rangle_\sigma = \left\langle A^{\frac{\sigma}{2}} v, A^{\frac{\sigma}{2}} w \right\rangle, \quad \|v\|_\sigma = \left\| A^{\frac{\sigma}{2}} v \right\|.$$

Agora para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in [0,2]$ fixos, definimos o espaço $\mathcal{H}_t^\sigma$ por

$$\mathcal{H}_t^\sigma = H_{\sigma+1} \times H_\sigma \text{ com norma } \|(a,b)\|_{\mathcal{H}_t^\sigma}^2 = \|a\|_{\sigma+1}^2 + \epsilon(t)\|b\|_\sigma^2.$$

Quando $\sigma = 0$ denotaremos $\mathcal{H}_t^0$ simplesmente por $\mathcal{H}_t$. Claramente $\mathcal{H}_t = H_1 \times H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e

$$\|(a,b)\|_{\mathcal{H}_t}^2 = \|a\|_1^2 + \epsilon(t)\|b\|^2.$$

Estes espaços formam uma família tempo-dependente, que será a ideal para o nosso problema, como veremos a seguir. Porém, antes de continuarmos, listaremos alguns resultados técnicos (cujas demonstrações, ou referências, se encontram no Apêndice A) que serão utilizados frequentemente no que segue.

[1] Recomendamos ao leitor que veja [8] para resultados sobre operadores positivos auto-adjuntos, potências fracionárias e decomposição espectral.

Lema 3.1.1. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *então* $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Lema 3.1.2. *Sejam* h *e* k *funções contínuas para* $t \geqslant \tau$ *e* v *uma função absolutamente contínua para* $t \geqslant \tau$ *tais que*

$$v'(t) \leqslant k(t)v(t) + h(t) \text{ para quase todo } t \geqslant \tau$$

Então para $t \geqslant \tau$ *temos*

$$v(t) \leqslant v(\tau)\exp\left(\int_\tau^t k(s)ds\right) + \int_\tau^t h(s)\exp\left(\int_s^t k(r)dr\right)ds$$

Proposição 3.1.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Se* λ_1 *é o primeiro autovalor do operador* A *e* Ω *é domínio limitado com fronteira suave, então para todo* $u \in H_1$ *temos*

$$\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\left\|A^{1/2}u\right\|^2 = \frac{1}{\lambda_1}\|u\|_1^2.$$

Proposição 3.1.4. *Seja* $F(s) = \int_0^s f(y)dy$. *Existem constantes* $\kappa, c > 0$ *tais que*

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \geqslant -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa)|t|^2 - c, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.1.5. *Para algum* $\mu \in (0,1)$ *e algum* $c \geqslant 0$ *temos*

$$2\langle F(u), 1\rangle \geqslant -(1-\mu)\|u\|_1^2 - c.$$

Lema 3.1.6. *Nas condições do Lema 3.1.5, para algum* $\mu \in (0,1)$ *e algum* $c \geqslant 0$ *também vale a desigualdade*

$$\langle f(u), u\rangle \geqslant -(1-\mu)\|u\|_1^2 - c.$$

Lema 3.1.7. *Se* f *satisfaz* (3.3) *então dado* $R > 0$ *existe* $C = C(R) > 0$ *tal que*

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leqslant C\|u_1 - u_2\|_1, \text{ para todo } u_1, u_2 \in H_1,$$

satisfazendo $\|u_1\|_1 \leqslant R$ *e* $\|u_2\|_1 \leqslant R$.

Adicionalmente às hipóteses pedidas para f na Subseção 3.1.2, pediremos que f também satisfaça a seguinte condição:

$$2\langle F(u), 1\rangle \leqslant 2\langle f(u), u\rangle + (1-\mu)\|u\|_1^2 + c \tag{3.5}$$

Lema 3.1.8. *Seja* $\Psi : [\tau, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma função contínua e diferenciável tal que*

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) + 2\omega\Psi(t) \leqslant q(t)\Psi(t) + k,$$

para algum $\omega > 0$*, algum* $k \geqslant 0$ *e onde a função* $q : [\tau, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *satisfaz, para algum* $m \geqslant 0$*,*

$$\int_\tau^\infty q(y)dy \leqslant m.$$

Então vale a desigualdade

$$\Psi(t) \leqslant \Psi(\tau)e^m e^{-\omega(t-\tau)} + \frac{ke^m}{\omega}.$$

Lema 3.1.9. *Se* $k > 0$ *então* $(1+x)^k \leqslant 2^k(1+x^k)$ *para todo* $x \geqslant 0$*.*

Também no decorrer do trabalho, a não ser quando especificado o contrário, C e c denotarão constantes positivas, que podem tomar valores diferentes de uma linha para a outra.

3.2 O processo associado à equação da onda

Neste momento queremos associar o problema da equação da onda a um certo processo de modo que possamos aplicar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. A maneira mais natural de fazer isso é considerar que o processo associa a um instante inicial τ os dados $(u(\tau), u_t(\tau)) = (a, b) \in \mathcal{H}_\tau = H_1 \times H$ e retorna em um instante posterior t o par $(u(t), u_t(t)) \in \mathcal{H}_t$.

A existência local, a unicidade e a dependência contínua dos dados iniciais para este problema segue a técnica clássica do método de Faedo-Galerkin. O estudo deste método não é objetivo deste trabalho, porém o leitor interessado pode encontrá-lo em detalhes em [22, Teorema 33.A].

Teorema 3.2.1. *A equação de evolução não-autônoma dada por*

$$\begin{cases} \epsilon u_{tt} + \alpha u_t + Au + f(u) = g, & t > \tau, \\ u(\tau) = a \in H_1 \ \text{e}\ u_t(\tau) = b \in H, \end{cases} \tag{3.6}$$

gera um processo-TDS fortemente contínuo[2] $\mathcal{U}$*.*

Além do teorema acima, no que diz respeito à continuidade com relação aos dados iniciais, temos também o seguinte resultado.

[2] Veja Definição 2.3.18

Lema 3.2.2. *Dado $R > 0$ existe uma constante $K = K(R) \geqslant 0$ tal que*

$$\|U(t,\tau)z_1 - U(t,\tau)z_2\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant e^{K(t-\tau)} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}_\tau},$$

para todos $z_1, z_2 \in \mathcal{H}_\tau$ com $\|z_i\|_{\mathcal{H}_\tau} \leqslant R$, $i = 1, 2$.

Demonstração: Sejam

$$\begin{cases} U(t,\tau)z_i = (u_i(t), \partial_t u_i(t)), & i = 1,2. \\ \overline{z}(t) = (\overline{u}(t), \overline{u}_t(t)) = U(t,\tau)z_1 - U(t,\tau)z_2. \end{cases}$$

Então $\overline{u} = u_1 - u_2$, $\overline{u}_t = \partial_t u_1 - \partial_t u_2$ e como u_1, u_2 são soluções de (3.6), segue que

$$\epsilon \overline{u}_{tt} + \alpha \overline{u}_t + A\overline{u} + f(u_1) - f(u_2) = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $2\overline{u}_t$ e integrando em Ω obtemos

$$2\epsilon \langle \overline{u}_t, \overline{u}_{tt} \rangle + 2\alpha \|\overline{u}_t\|^2 + 2\langle \overline{u}_t, A\overline{u} \rangle = -2\langle f(u_1) - f(u_2), \overline{u}_t \rangle \tag{3.7}$$

Agora observe que

$$\frac{d}{dt}\|\overline{z}\|^2_{\mathcal{H}_t} = \frac{d}{dt}\left(\|\overline{u}\|_1^2 + \epsilon(t)\|\overline{u}_t\|^2\right) = 2\langle \overline{u}, \overline{u}_t \rangle_1 + \epsilon'(t)\|\overline{u}_t\|^2 + 2\epsilon(t)\langle \overline{u}_t, \overline{u}_{tt} \rangle$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\overline{z}\|^2_{\mathcal{H}_t} + [2\alpha - \epsilon']\|\overline{u}_t\|^2 &= 2\alpha\|\overline{u}_t\|^2 + 2\langle \overline{u}, \overline{u}_t \rangle_1 + 2\epsilon\langle \overline{u}_t, \overline{u}_{tt} \rangle \\ &\overset{(1)}{=} 2\epsilon\langle \overline{u}_t, \overline{u}_{tt} \rangle + 2\alpha\|\overline{u}_t\|^2 + 2\langle \overline{u}_t, A\overline{u} \rangle \overset{(2)}{=} -2\langle f(u_1) - f(u_2), \overline{u}_t \rangle \end{aligned}$$

Na igualdade (1) acima consideramos que

$$\langle \overline{u}, \overline{u}_t \rangle_1 = \left\langle A^{1/2}\overline{u}, A^{1/2}\overline{u}_t \right\rangle = \left\langle A^{1/2}A^{1/2}\overline{u}, \overline{u}_t \right\rangle = \langle A\overline{u}, \overline{u}_t \rangle$$

enquanto que em (2) aplicamos diretamente (3.7).

Antes de prosseguirmos vamos considerar que $\|U(t,\tau)z_i\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant C$ e $i = 1, 2$. De momento usaremos esse fato sem demonstração, mas isso será verificado posteriormente na Observação 3.2.6.

Note que

$$-2\langle f(u_1) - f(u_2), \overline{u}_t \rangle \leqslant C\|\overline{u}\|_1 \|\overline{u}_t\|,$$

usando a Desigualdade de Hölder, a limitação para $U(t,\tau)z_i$ acima e o Lema 3.1.7.

Agora, usando o Lema 3.1.1 temos

$$C\|\overline{u}\|_1\|\overline{u}_t\| = \left(2\sqrt{\alpha}\|\overline{u}_t\|\right)\cdot\left(\frac{C}{2\sqrt{\alpha}}\|\overline{u}\|_1\right) \leqslant 2\alpha\|\overline{u}_t\|^2 + \frac{C^2}{8\alpha}\|\overline{u}\|_1^2$$
$$= 2\alpha\|\overline{u}_t\|^2 + M\|\overline{u}\|_1^2.$$

Assim concluímos que

$$\frac{d}{dt}\|\overline{z}\|_{\mathcal{H}_t}^2 + 2\alpha\|\overline{u}_t\|^2 - \epsilon'\|\overline{u}_t\|^2 \leqslant 2\alpha\|\overline{u}_t\|^2 + M\|\overline{u}\|_1^2,$$

logo

$$\frac{d}{dt}\|\overline{z}\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leqslant \epsilon'\|\overline{u}_t\|^2 + M\|\overline{u}\|_1^2 \overset{(3)}{\leqslant} M\epsilon\|\overline{u}_t\|^2 + M\|\overline{u}\|_1^2 = M\|\overline{z}\|_{\mathcal{H}_t}^2, \quad (3.8)$$

onde para (3) observe que $\epsilon'(t) \leqslant 0 \leqslant M\epsilon(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora aplicando o Lema 3.1.2 com $k(t) = M$, $h(t) \equiv 0$ e $v(t) = \|\overline{z}(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2$ obtemos

$$\|\overline{z}(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leqslant \|\overline{z}(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}^2 \exp\left(\int_\tau^t M ds\right) = e^{M(t-\tau)}\|\overline{z}(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}^2,$$

ou seja

$$\|U(t,\tau)z_1 - U(t,\tau)z_2\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant e^{K(t-\tau)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}_\tau} \text{ para todo } t \geqslant \tau,$$

onde $K = \frac{M}{2}$, terminando a demonstração do lema. ∎

Lema 3.2.3. *Existem $\rho > 0$, $k \geqslant 0$ e uma função positiva crescente $\mathcal{Q}$ tal que*

$$\|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant \mathcal{Q}(\|z\|_{\mathcal{H}_\tau})e^{-\rho(t-\tau)} + k, \textit{ para todo } t \geqslant \tau.$$

Demonstração: Inicialmente denotemos

$$E(t) = \|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t}^2 = \|u\|_1^2 + \epsilon(t)\|u_t\|^2.$$

e considere a função

$$\Psi = E + \delta\alpha\|u\|^2 + 2\delta\epsilon\langle u_t, u\rangle + 2\langle F(u), 1\rangle - 2\langle g, u\rangle \quad (3.9)$$

onde $\delta > 0$ é uma constante (que será convenientemente escolhida adiante).

Afirmação 1: Se δ é suficientemente pequeno, existe $\hat{\mu} \in (0,1)$ tal que

$$\hat{\mu}E(t) - C \leqslant \Psi(t) \leqslant CE(t) + C \quad (3.10)$$

Antes de verificarmos isso, porém, precisamos explorar algumas desigualdades:

$$\begin{aligned}
2\delta\epsilon\left|\langle u_t, u\rangle\right| &\leqslant 2\delta\epsilon\left\|u_t\right\|\left\|u\right\| = 2\epsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_t\right\|.\delta\sqrt{2}\left\|u\right\|\right)\\
&\overset{(1)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|u_t\right\|^2 + 2\epsilon\delta^2\left\|u\right\|^2 \overset{(2)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|u_t\right\|^2 + 2L\delta^2\left\|u\right\|^2 \qquad (3.11)\\
&\overset{(3)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|u_t\right\|^2 + \frac{\delta\alpha}{2}\left\|u\right\|^2
\end{aligned}$$

Em (1) aplicamos a desigualdade do Lema 3.1.1 fazendo $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_t\right\|$ e $b = \delta\sqrt{2}\left\|u\right\|$, na desigualdade (2) usamos (3.2) e por fim, em (3), usamos que se δ é suficientemente pequeno então $2L\delta \leqslant \frac{\alpha}{2}$, o que implica $2L\delta^2\left\|u\right\|^2 \leqslant \frac{\delta\alpha}{2}\left\|u\right\|^2$. Portanto, de (3.11), também concluímos que

$$2\delta\epsilon\left\langle u_t, u\right\rangle \geqslant -\frac{\epsilon}{2}\left\|u_t\right\|^2 - \frac{\delta\alpha}{2}\left\|u\right\|^2. \qquad (3.12)$$

Agora se $\eta > 0$ é uma constante fixada, temos

$$\begin{aligned}
2\left|\langle g, u\rangle\right| &\leqslant 2\left\|g\right\|\left\|u\right\| = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\eta}}\left\|g\right\|.\sqrt{\lambda_1\eta}\left\|u\right\|\right)\\
&\overset{(4)}{\leqslant} \frac{1}{\lambda_1\eta}\left\|g\right\|^2 + \lambda_1\eta\left\|u\right\|^2 \overset{(5)}{\leqslant} \frac{1}{\lambda_1\eta}\left\|g\right\|^2 + \eta\left\|u\right\|_1^2,
\end{aligned} \qquad (3.13)$$

onde em (4) novamente fizemos uso da desigualdade do Lema 3.1.1, agora com $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\eta}}\left\|g\right\|$ e $b = \sqrt{\lambda_1\eta}\left\|u\right\|$. Para obter (5) basta aplicar a Desigualdade de Poincaré (Proposição 3.1.3). Logo,

$$-2\left\langle g, u\right\rangle \geqslant -\frac{1}{\lambda_1\eta}\left\|g\right\|^2 - \eta\left\|u\right\|_1^2. \qquad (3.14)$$

De (3.12), (3.14) e do Lema 3.1.5, segue que

$$\begin{aligned}
\Psi &= \|u\|_1^2 + \epsilon(t)\|u_t\|^2 + \delta\alpha\|u\|^2 + 2\delta\epsilon\langle u_t, u\rangle + 2\langle F(u), 1\rangle - 2\langle g, u\rangle \\
&\geqslant \|u\|_1^2 + \epsilon(t)\|u_t\|^2 + \delta\alpha\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\|u_t\|^2 - \frac{\delta\alpha}{2}\|u\|^2 + \\
&- (1-\mu)\|u\|_1^2 - c - \frac{1}{\lambda_1\eta}\|g\|^2 - \eta\|u\|_1^2 \\
&\geqslant (\mu-\eta)\|u\|_1^2 + \frac{\epsilon}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\delta\alpha}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{\lambda_1\eta}\|g\|^2 - c \\
&\overset{(6)}{\geqslant} (\mu-\eta)\|u\|_1^2 + \frac{\epsilon}{2}\|u_t\|^2 - C,
\end{aligned}$$

onde em (6) consideramos que $\frac{\delta\alpha}{2}\|u\|^2$ pode ser eliminado da desigualdade por ser positivo. Além disso consideramos $\frac{1}{\lambda_1\eta}\|g\|^2 + c \leqslant C$. Como $\eta > 0$ é qualquer, podemos escolhê-lo de tal forma que $0 \leqslant \mu - \eta \leqslant \mu$, onde $\mu \in (0,1)$ é proveniente do Lema 3.1.5. Seja então $\hat{\mu} = \min\left\{\mu - \eta, \frac{1}{2}\right\}$. É claro que $\hat{\mu} \in (0,1)$ e, além disso

$$(\mu-\eta)\|u\|_1^2 + \frac{\epsilon}{2}\|u_t\|^2 - C \geqslant \hat{\mu}\|u\|_1^2 + \hat{\mu}\epsilon\|u_t\|^2 - C = \hat{\mu}E(t) - C,$$

o que mostra que $\Psi(t) \geqslant \hat{\mu}E(t) - C$.

Vamos agora provar a desigualdade da direita em (3.10). Usando a hipótese (3.5), o Lema 3.1.7 e a Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
2\langle F(u), 1\rangle &\leqslant 2\langle f(u), u\rangle + (1-\mu)\|u\|_1^2 + c \\
&\leqslant 2\|f(u)\|\|u\| + (1-\mu)\|u\|_1^2 + c \\
&\leqslant \|f(u)\|^2 + \|u\|^2 + (1-\mu)\|u\|_1^2 + c \\
&\leqslant C^2\|u\|_1^2 + \frac{1}{\lambda_1}\|u\|_1^2 + (1-\mu)\|u\|_1^2 + c \\
&= \left(C^2 + \frac{1}{\lambda_1} + 1 - \mu\right)\|u\|_1^2 + c
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Aplicando as desigualdades (3.11), (3.15) e utilizando a Desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}
\Psi \leqslant{}& \|u\|_1^2 + \epsilon\|u_t\|^2 + \frac{\delta\alpha}{\lambda_1}\|u\|_1^2 + \frac{\epsilon}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\delta\alpha}{2\lambda_1}\|u\|_1^2 + \\
&+ \left(C^2 + \frac{1}{\lambda_1} + 1 - \mu\right)\|u\|_1^2 + c - 2\langle g, u\rangle.
\end{aligned}$$

De (3.13), obtemos $-2\langle g,u\rangle \leqslant |2\langle g,u\rangle| \leqslant \frac{1}{\lambda_1\eta}\|g\|^2+\eta\|u\|_1^2 \leqslant k+\eta\|u\|_1^2$, para qualquer $\eta>0$ e algum $k=k(\eta,\|g\|)>0$. Logo, usando esse fato e agrupando os termos em comum na inequação anterior, temos

$$\begin{aligned}\Psi &\leqslant \left(2+\frac{3\delta\alpha+2}{2\lambda_1}+C^2+\eta-\mu\right)\|u\|_1^2+\frac{3\epsilon}{2}\|u_t\|^2+c+k\\ &\leqslant C\|u\|_1^2+C\epsilon\|u_t\|^2+C=CE(t)+C,\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração das desigualdades da Afirmação 1.

Afirmação 2: Vale a igualdade abaixo.

$$\frac{d}{dt}\Psi+(2\alpha-\epsilon'-2\delta\epsilon)\|u_t\|^2+2\delta\|u\|_1^2+2\delta\langle f(u),u\rangle-2\delta\langle g,u\rangle=2\delta\epsilon'\langle u_t,u\rangle.$$

De fato, multiplicando $\epsilon u_{tt}+\alpha u_t+Au+f(u)=g$ por $2u_t+2\delta u$, obtemos

$$\begin{aligned}&2\epsilon u_tu_{tt}+2\alpha u_tu_t+2u_tAu+2u_tf(u)+2\delta\epsilon uu_{tt}+\\ &\quad+2\delta\alpha uu_t+2\delta uAu+2\delta uf(u)=2u_tg+2\delta ug,\end{aligned}$$

e integrando em Ω ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}2\epsilon\langle u_t,u_{tt}\rangle+2\alpha\|u_t\|^2+2\langle u_t,Au\rangle+2\langle u_t,f(u)\rangle+2\delta\epsilon\langle u,u_{tt}\rangle+\\ +2\delta\alpha\langle u,u_t\rangle+2\delta\langle u,Au\rangle+2\delta\langle u,f(u)\rangle-2\langle u_t,g\rangle+\\ -2\delta\langle u,g\rangle=0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}\Psi=\frac{d}{dt}E+\delta\alpha\frac{d}{dt}\langle u,u\rangle+2\delta\frac{d}{dt}(\epsilon\langle u_t,u\rangle)+2\frac{d}{dt}\langle F(u),1\rangle-2\frac{d}{dt}\langle g,u\rangle,$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E&=\frac{d}{dt}\left(\|u\|_1^2+\epsilon\|u_t\|^2\right)=\frac{d}{dt}\langle u,u\rangle_1+\epsilon'\|u_t\|^2+\epsilon\frac{d}{dt}\langle u_t,u_t\rangle\\ &=2\langle u,u_t\rangle_1+\epsilon'\|u_t\|^2+2\epsilon\langle u_t,u_{tt}\rangle,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\langle u,u\rangle=2\langle u,u_t\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}(\epsilon\langle u_t,u\rangle)=\epsilon'\langle u,u_t\rangle+\epsilon\|u_t\|^2+\epsilon\langle u,u_{tt}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle F(u),1\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}F(u),1\right\rangle + \langle F(u),0\rangle = \left\langle F'(u)\frac{du}{dt},1\right\rangle$$
$$= \langle f(u)u_t,1\rangle = \langle f(u),u_t\rangle,$$

e

$$\frac{d}{dt}\langle g,u\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}g,u\right\rangle + \langle g,u_t\rangle = \langle g,u_t\rangle.$$

Recorde que g não depende de t, por isso na última equação usamos $\frac{d}{dt}g = 0$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}\Psi = 2\langle u,u_t\rangle_1 + \epsilon'\|u_t\|^2 + 2\epsilon\langle u_t,u_{tt}\rangle + 2\delta\alpha\langle u,u_t\rangle + 2\delta\epsilon'\langle u,u_t\rangle$$
$$+ 2\delta\epsilon\|u_t\|^2 + 2\delta\epsilon\langle u,u_{tt}\rangle + 2\langle f(u),u_t\rangle - 2\langle g,u_t\rangle,$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Psi + (2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon)\|u_t\|^2 + 2\delta\|u\|_1^2 + 2\delta\langle f(u),u\rangle - 2\delta\langle g,u\rangle - 2\delta\epsilon'\langle u_t,u\rangle \\
&\quad = 2\langle u,u_t\rangle_1 + \epsilon'\|u_t\|^2 + 2\epsilon\langle u_t,u_{tt}\rangle + 2\delta\alpha\langle u,u_t\rangle + 2\delta\epsilon'\langle u,u_t\rangle \\
&\quad + 2\delta\epsilon\|u_t\|^2 + 2\delta\epsilon\langle u,u_{tt}\rangle + 2\langle f(u),u_t\rangle - 2\langle g,u_t\rangle + 2\alpha\|u_t\|^2 \\
&\quad - \epsilon'\|u_t\|^2 - 2\delta\epsilon\|u_t\|^2 + 2\delta\|u\|_1^2 + 2\delta\langle f(u),u\rangle - 2\delta\langle g,u\rangle - 2\delta\epsilon'\langle u_t,u\rangle \\
&\quad \overset{(7)}{=} 2\epsilon\langle u_t,u_{tt}\rangle + 2\alpha\|u_t\|^2 + 2\langle u_t,Au\rangle + 2\langle u_t,f(u)\rangle + 2\delta\epsilon\langle u,u_{tt}\rangle \\
&\quad + 2\delta\alpha\langle u,u_t\rangle + 2\delta\langle u,Au\rangle + 2\delta\langle u,f(u)\rangle - 2\langle u_t,g\rangle - 2\delta\langle u,g\rangle \overset{(8)}{=} 0,
\end{aligned}$$

onde na igualdade (7) cancelamos os termos em comum, usamos que

$$2\langle u,u_t\rangle_1 = 2\left\langle A^{1/2}u, A^{1/2}u_t\right\rangle = 2\left\langle A^{1/2}A^{1/2}u,u_t\right\rangle = 2\langle Au,u_t\rangle,$$

e também que

$$2\delta\|u\|_1^2 = 2\delta\langle u,u\rangle_1 = 2\delta\left\langle A^{1/2}u,A^{1/2}u\right\rangle = 2\delta\langle Au,u\rangle,$$

e na igualdade (8) usamos (3.16), o que conclui a verificação da Afirmação 2.

Afirmação 3: Para δ suficientemente pequeno e $\nu > 0$ qualquer temos:

$$\frac{d}{dt}\Psi + \left(\frac{3}{2}\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon\right)\|u_t\|^2 + \delta\left(2 - \frac{\nu}{2}\right)\|u\|_1^2 + \\ + 2\delta\langle f(u),u\rangle - 2\delta\langle g,u\rangle \leqslant 0 \tag{3.17}$$

De fato, de (3.2) segue que $2\delta\left|\epsilon'\langle u_t,u\rangle\right| \leqslant 2\delta L\|u_t\|\|u\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
2\delta L\|u_t\|\|u\| &= \left(\sqrt{\alpha}\|u_t\|\right).\left(\frac{2\delta L}{\sqrt{\alpha}}\|u\|\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha\|u_t\|^2 + \frac{4\delta^2L^2}{\alpha}\|u\|^2\right)\\
&\leqslant \frac{\alpha}{2}\|u_t\|^2 + \frac{4\delta^2L^2}{2\alpha\lambda_1}\|u\|_1^2 = \frac{\alpha}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4\delta^2L^2}{\alpha\lambda_1\nu}\right)\nu\|u\|_1^2,
\end{aligned}$$

onde $\nu > 0$ é uma constante qualquer. Observe que para δ suficientemente pequeno temos $\frac{4\delta^2L^2}{\alpha\lambda_1\nu} \leqslant \delta$, o que implica

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\delta^2L^2}{\alpha\lambda_1\nu}\right)\nu\|u\|_1^2 \leqslant \frac{1}{2}\delta\nu\|u\|_1^2,$$

e concluímos que

$$2\delta L\|u_t\|\|u\| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\delta\nu\|u\|_1^2$$

Portanto, vale a desigualdade

$$2\delta\left|\epsilon'\langle u_t,u\rangle\right| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\delta\nu\|u\|_1^2, \tag{3.18}$$

e usando a Afirmação 2 e a estimativa anterior chegamos diretamente na Afirmação 3.

Afirmação 4: Temos

$$\frac{d}{dt}\Psi + \delta\Psi + \alpha\|u_t\|^2 + \Gamma \leqslant \delta c,$$

onde

$$\Gamma = \left(\frac{\alpha}{2} - \epsilon' - 3\delta\epsilon\right)\|u_t\|^2 + \frac{\delta\mu}{2}\|u\|_1^2 - \delta^2\alpha\|u\|^2 - 2\delta^2\epsilon\langle u_t,u\rangle,$$

e μ é uma constante apropriada proveniente de (3.5).

Para demonstrarmos esta afirmação, primeiramente observe que

$$\begin{aligned}
\delta\Psi &= \delta E + \delta^2\alpha\|u\|^2 + 2\delta^2\epsilon\langle u_t,u\rangle + 2\delta\langle F(u),1\rangle - 2\delta\langle g,u\rangle\\
&\overset{(9)}{\leqslant} \delta E + \delta^2\alpha\|u\|^2 + 2\delta^2\epsilon\langle u_t,u\rangle - 2\delta\langle g,u\rangle + 2\delta\langle f(u),u\rangle \qquad (3.19)\\
&+ \delta(1-\mu)\|u\|_1^2 + \delta c,
\end{aligned}$$

onde em (9) usamos (3.5). Como em (3.17) temos que ν é uma constante qualquer, podemos escolher $\nu = \mu$ para obter

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi \leqslant &-\left(\frac{3}{2}\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon\right)\|u_t\|^2 - \delta\left(2 - \frac{\mu}{2}\right)\|u\|_1^2 + \\ &- 2\delta\langle f(u), u\rangle + 2\delta\langle g, u\rangle\end{aligned} \tag{3.20}$$

Agora, usando (3.19), (3.20) e a expressão para Γ, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi + \delta\Psi + \alpha\|u_t\|^2 + \Gamma &\leqslant -\delta\epsilon\|u_t\|^2 - \delta\|u\|_1^2 + \delta E + \delta c \\ &= -\delta\epsilon\|u_t\|^2 - \delta\|u\|_1^2 + \delta\left(\|u\|_1^2 + \epsilon\|u_t\|^2\right) + \delta c = \delta c,\end{aligned}$$

concluindo assim a verificação da Afirmação 4.

Afirmação 5: $\Gamma \geqslant 0$ para δ suficientemente pequeno.

Observe que

$$\begin{aligned}2\delta^2\epsilon\langle u_t, u\rangle &\leqslant 2\delta^2\epsilon\|u_t\|\,\|u\| = 2\left(\delta\sqrt{\epsilon}\|u_t\|\right)\left(\delta\sqrt{\epsilon}\|u\|\right) \\ &\leqslant \delta^2\epsilon\|u_t\|^2 + \delta^2\epsilon\|u\|^2 \leqslant \delta^2\epsilon\|u_t\|^2 + \delta^2 L\|u\|^2,\end{aligned}$$

logo $-2\delta^2\epsilon\langle u_t, u\rangle \geqslant -\delta^2\epsilon\|u_t\|^2 - \delta^2 L\|u\|^2$.
Utilizando a expressão para Γ e a conta acima segue que

$$\Gamma \geqslant \left(\frac{\alpha}{2} - \epsilon' - 3\delta\epsilon - \delta^2\epsilon\right)\|u_t\|^2 + \delta\left(\frac{\mu\lambda_1}{2} - \delta\alpha - \delta L\right)\|u\|^2.$$

Agora note que se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno então as expressões entre parênteses acima são positivas, o que nos dá $\Gamma \geqslant 0$.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\Psi + \delta\Psi + \alpha\|u_t\|^2 \leqslant \delta c \tag{3.21}$$

Ademais, como $\alpha\|u_t\|^2 \geqslant 0$, segue que

$$\frac{d}{dt}\Psi + \delta\Psi \leqslant \delta c,$$

e aplicando diretamente o Lema 3.1.8 com $\omega = \frac{\delta}{2}$, $q(t) \equiv 0$ (logo, podemos escolher $m = 0$) e $k = \delta c$, temos

$$\Psi(t) \leqslant \Psi(\tau)e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)} + 2c.$$

Da Afirmação 1 temos $\Psi(\tau) \leqslant CE(\tau) + C = C\,\|U(\tau,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} + C = C\,\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} + C$, o que nos dá

$$\Psi(t) \leqslant \left(C\,\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} + C\right) e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)} + 2c.$$

Também da Afirmação 1 obtemos $\hat{\mu}E(t) - C \leqslant \Psi(t)$, o que implica $E(t) \leqslant \frac{1}{\hat{\mu}}\Psi(t) + \frac{C}{\hat{\mu}}$. Logo

$$\|U(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} = E(t) \leqslant \left[\frac{C}{\hat{\mu}}\left(\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} + 1\right) e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)}\right] + \frac{2c + C}{\hat{\mu}},$$

e consequentemente

$$\|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant \left[\frac{C}{\hat{\mu}}\left(\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + k,$$

onde $k = \sqrt{\frac{2c+C}{\hat{\mu}}} \geqslant 0$. Finalmente, fazendo $\rho = \frac{\delta}{4}$ e observando que

$$\mathcal{Q}(\|z\|_{\mathcal{H}_\tau}) = \left[\frac{C}{\hat{\mu}}\left(\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

é uma função crescente positiva, terminamos a demonstração do lema.
■

Daqui pra frente, como já havíamos especificado no final do Capítulo 2, consideraremos $\mathbb{D}_b$ como sendo o universo das famílias uniformemente limitadas (veja Definição 2.3.17).

Claramente, uma família $\hat{B}$ é $\mathbb{D}_b$-pullback absorvente se, e somente se, dado $R \geqslant 0$ existe $\theta = \theta(R) \geqslant 0$ tal que se $\tau \leqslant t - \theta$, então vale que $U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset B_t$.

Definição 3.2.4. *Uma família $\hat{B} \in \mathbb{D}_b$ e $\mathbb{D}_b$-pullback absorvente é chamada de* **família TD-absorvente** *para $\mathcal{U}$.*

Com esta definição, usando o lema acima, somos capazes de demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.5. *Existe $R_0 > 0$ tal que $\hat{B}_0 = \{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é família TD-absorvente para $\mathcal{U}$.*

Demonstração: Note que, por definição, a família $\hat{B}_0$ é uniformemente limitada. Pelo Lema 3.2.3 existem $\rho > 0$, $k \geqslant 0$ e uma função positiva crescente $\mathcal{Q}$ tal que para todo $t \geqslant \tau$ e $z \in \mathcal{H}_\tau$ vale

$$\|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant \mathcal{Q}\left(\|z\|_{\mathcal{H}_\tau}\right) e^{-\rho(t-\tau)} + k.$$

Agora, sejam $R_0 = 1+2k$ e $\theta(R) = \max\left\{0, \rho^{-1}\log\frac{\mathcal{Q}(R)}{1+k}\right\}$. Se $\tau \leqslant t-\theta$ e $z \in \mathbb{B}_\tau(R)$, temos

$$\begin{aligned} \|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} &\overset{(1)}{\leqslant} \mathcal{Q}(R)e^{-\rho(t-\tau)} + k \\ &\leqslant \mathcal{Q}(R)e^{-\rho\theta} + k \overset{(2)}{\leqslant} 1 + k + k = R_0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Se $z \in \mathbb{B}_\tau(R)$, temos $\|z\|_{\mathcal{H}_\tau} \leqslant R$ e consequentemente $\mathcal{Q}\left(\|z\|_{\mathcal{H}_\tau}\right) \leqslant \mathcal{Q}(R)$, justificando a desigualdade (1). Para a desigualdade (2) apenas note que $\log\frac{\mathcal{Q}(R)}{1+k} \leqslant \rho\theta$ implica $e^{-\rho\theta} \leqslant e^{-\log\frac{\mathcal{Q}(R)}{1+k}}$ e portanto,

$$\mathcal{Q}(R)e^{-\rho\theta} \leqslant \mathcal{Q}(R)e^{-\log\frac{\mathcal{Q}(R)}{1+k}} = \mathcal{Q}(R)\frac{1+k}{\mathcal{Q}(R)} = 1 + k.$$

Concluímos de (3.22) que $U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathbb{B}_t(R_0)$ para todo $\tau \leqslant t-\theta$, ou seja, $\hat{B}_0$ é família TD-absorvente para $\mathcal{U}$. ∎

Observação 3.2.6. *A limitação para $\|U(t,\tau)z_i\|_{\mathcal{H}_t}$ utilizada na demonstração do Lema 3.2.2 agora segue diretamente do Lema 3.2.3 e da demonstração do teorema anterior, pois z_1 e z_2 foram tomados em $\mathbb{B}_\tau(R)$.*

Teorema 3.2.7. *Para algum $I_0 \geqslant R_0$ e todo $\tau \in \mathbb{R}$ vale*

$$\sup_{z\in\mathbb{B}_\tau(R_0)}\left[\|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} + \int_\tau^\infty \|u_t(y)\|^2\,dy\right] \leqslant I_0$$

Demonstração: Tendo em vista a demonstração do Teorema 3.2.5, nos resta apenas verificar a limitação para a integral que aparece no enunciado.

Multiplicando a equação (3.6) por u_t e considerando a função Ψ em (3.9) com $\delta = 0$ obtemos a desigualdade (3.21) com $\delta = 0$, ou seja

$$\frac{d}{dt}\Psi + \alpha\|u_t\|^2 \leqslant 0.$$

Integrando de τ a t obtemos

$$\Psi(t) - \Psi(\tau) + \alpha\int_\tau^t \|u_t(y)\|^2\,dy \leqslant 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_\tau^t \|u_t(y)\|^2\,dy &\leqslant \frac{1}{\alpha}\left[\Psi(\tau) - \Psi(t)\right] \overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{\alpha}\left[CE(\tau) - \hat{\mu}E(t) + 2C\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[C\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} - \hat{\mu}\|U(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} + 2C\right] \\ &\leqslant \frac{C}{\alpha}\|z\|^2_{\mathcal{H}_t} + \frac{1}{\alpha}\|U(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} + \frac{2C}{\alpha}, \end{aligned}$$

onde notamos que a desigualdade (1) segue diretamente de (3.10). Como $z \in \mathbb{B}_\tau(R_0)$ segue que $\|z\|^2_{\mathcal{H}_\tau} \leqslant R_0^2$. Além disso,

$$\|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_\tau} \leqslant \mathcal{Q}(\|z\|_{\mathcal{H}_\tau})e^{-\rho(t-\tau)} + k \leqslant \mathcal{Q}(R_0)e^{-\rho(t-\tau)} + k.$$

Temos então

$$\int_\tau^t \|u_t(y)\|^2 \, dy \leqslant \frac{C}{\alpha}R_0^2 + \frac{1}{\alpha}\left[\mathcal{Q}(R_0)e^{-\rho(t-\tau)} + k\right]^2 + \frac{2C}{\alpha},$$

e tomando o limite para $t \to \infty$, concluímos que

$$\int_\tau^\infty \|u_t(y)\|^2 \, dy \leqslant \frac{C}{\alpha}R_0^2 + \frac{k^2}{\alpha} + \frac{2C}{\alpha},$$

mostrando a limitação que queríamos. ■

3.3 Existência de atrator pullback

No que segue, faremos uma decomposição do processo $\mathcal{U}$ associado à equação da onda em dois novos processos $\mathcal{U}_0$ e $\mathcal{U}_1$, na qual o primeiro deles apresenta decaimento exponencial na norma de $\mathcal{H}_t$ e o segundo apresenta uma limitação na norma $\mathcal{H}_t^{1/3}$. Esses fatos serão verificados nos próximos dois lemas, que serão essenciais para provarmos a existência do atrator pullback.

Assim como feito em [1], precisaremos primeiramente do seguinte lema.

Lema 3.3.1. *Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função com $f(0) = 0$ e satisfazendo (3.3) e (3.4). Então existem funções $f_0, f_1 \in C^2(\mathbb{R})$ com $f = f_0 + f_1$ satisfazendo $f_0(0) = f_0'(0) = 0$*

$$\begin{cases} |f_1'(s)| \leqslant k, \\ |f_0''(s)| \leqslant k(1+|s|), \\ f_0(s)s \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

para algum $k \geqslant 0$ e todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Veja Apêndice. ■

Considerando as condições para f_0 que aparecem no lema anterior e definindo $F_0(s) = \int_0^s f_0(y)dy$ obtemos o próximo resultado, cuja demonstração será vista no Apêndice A.

Proposição 3.3.2. *Existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$0 \leqslant \langle F_0(v), 1\rangle \leqslant \int_\Omega |F_0(v)|\, dx \leqslant K(1 + \|v\|_1^2)\, \|v\|_1^2\,, \text{ para cada } v \in H_1.$$

Sejam $\hat{B}$ a família TD-absorvente dada no Teorema 3.2.5 e $\tau \in \mathbb{R}$ fixado, fazemos a decomposição do processo $\mathcal{U}$ da seguinte maneira: para cada $z \in \mathbb{B}_\tau(R_0)$, escreva $U(t,\tau)z = U_0(t,\tau)z + U_1(t,\tau)z$ onde os processos $U_0(t,\tau)z = (v(t), v_t(t))$ e $U_1(t,\tau)z = (w(t), w_t(t))$ são respectivamente soluções de

$$\begin{cases} \epsilon v_{tt} + \alpha v_t + Av + f_0(v) = 0, \ t > \tau \\ U_0(\tau,\tau) = z \end{cases} \tag{3.24}$$

e

$$\begin{cases} \epsilon w_{tt} + \alpha w_t + Aw + f(u) - f_0(v) = g, t > \tau \\ U_1(\tau,\tau) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Lema 3.3.3. *Existem $\hat{\delta} = \hat{\delta}(R_0) > 0$ tal que para todo $t \geqslant \tau$,*

$$\|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant Ce^{-\hat{\delta}(t-\tau)}.$$

Demonstração:

Afirmação 1: $\|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant C$.

A verificação deste fato é análoga ao que foi feito nas demonstrações do Lema 3.2.3 e do Teorema 3.2.5 com f_0 no lugar de f e $g \equiv 0$.

Afirmação 2: Defina

$$\Psi_0 = \|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t}^2 + \delta\alpha\, \|v\|^2 + 2\delta\epsilon\, \langle v_t, v\rangle + 2\,\langle F_0(v), 1\rangle\,,$$

onde $F_0(s) = \int_0^s f_0(y)dy$. Então para $\delta > 0$ suficientemente pequeno vale a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 + \delta\, \|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leqslant 0.$$

De fato, multiplicando a primeira equação de (3.24) por $2v_t + 2\delta v$ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned} 2\epsilon\,\langle v_t, v_{tt}\rangle + 2\alpha\,\langle v_t, v_t\rangle + 2\,\langle v_t, Av\rangle + 2\,\langle v_t, f_0(v)\rangle + 2\delta\epsilon\,\langle v, v_{tt}\rangle \\ + 2\delta\alpha\,\langle v, v_t\rangle + 2\delta\,\langle v, Av\rangle + 2\delta\,\langle v, f_0(v)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi_0 &= \frac{d}{dt}\|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} + \delta\alpha\frac{d}{dt}\langle v,v\rangle \\ &+ 2\delta\frac{d}{dt}\left[\epsilon\langle v_t,v\rangle\right] + 2\frac{d}{dt}\langle F_0(v),1\rangle \\ &\overset{(1)}{=} 2\langle v,v_t\rangle_1 + \epsilon'\|v_t\|^2 + 2\epsilon\langle v_t,v_{tt}\rangle + 2\delta\alpha\langle v,v_t\rangle \\ &+ 2\delta\epsilon'\langle v,v_t\rangle + 2\delta\epsilon\|v_t\|^2 + 2\delta\epsilon\langle v,v_{tt}\rangle + 2\langle f_0(v),v_t\rangle,\end{aligned} \tag{3.27}$$

onde em (1) calculamos as derivadas como feito abaixo:

$$\frac{d}{dt}\|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} = \frac{d}{dt}\left(\|v\|_1^2 + \epsilon(t)\|v_t\|^2\right) = 2\langle v,v_t\rangle_1 + \epsilon'\|v_t\|^2 + 2\epsilon\langle v_t,v_{tt}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle v,v\rangle = 2\langle v,v_t\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\epsilon\langle v,v_t\rangle\right] = \epsilon'\langle v,v_t\rangle + \epsilon\|v_t\|^2 + \epsilon\langle v,v_{tt}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle F_0(v),1\rangle = \left\langle\frac{d}{dt}F_0(v),1\right\rangle = \langle f_0(v)v_t,1\rangle = \langle f_0(v),v_t\rangle.$$

Usando (3.27), chegamos a

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Psi_0 + [2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon]\|v_t\|^2 + 2\delta\|v\|_1^2 + 2\delta\langle f_0(v),v\rangle \\ &= 2\langle Av,v_t\rangle + \epsilon'\|v_t\|^2 + 2\epsilon\langle v_t,v_{tt}\rangle + 2\delta\alpha\langle v,v_t\rangle \\ &+ 2\delta\epsilon'\langle v,v_t\rangle + 2\delta\epsilon\|v_t\|^2 + 2\delta\epsilon\langle v,v_{tt}\rangle + 2\langle f_0(v),v_t\rangle \\ &+ 2\alpha\|v_t\|^2 - \epsilon'\|v_t\|^2 - 2\delta\epsilon\|v_t\|^2 + 2\delta\|v\|_1^2 + 2\delta\langle f_0(v),v\rangle \\ &\overset{(2)}{=} 2\delta\epsilon'\langle v,v_t\rangle \overset{(3)}{\leqslant} \frac{\alpha}{2}\|v_t\|^2 + \frac{\delta}{2}\nu\|v\|_1^2,\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde na igualdade (2) aplicamos (3.26). Em (3) procedemos de maneira análoga ao que foi feito em (3.18), onde $\nu > 0$ *a priori* é uma constante qualquer.

De (3.28) segue que

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 + \left[\frac{3}{2}\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon\right]\|v_t\|^2 + \delta\left[2 - \frac{\nu}{2}\right]\|v\|_1^2 + 2\delta\langle f_0(v),v\rangle \leqslant 0.$$

Agora recorde que $2\delta\langle f_0(v),v\rangle = 2\delta\int_\Omega f_0(v)v\,dx \geqslant 0$ (usando a terceira condição de (3.23)). Aplicando isso à desigualdade anterior, temos:

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 + \left[\frac{3}{2}\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon\right]\|v_t\|^2 + \delta\left[2 - \frac{\nu}{2}\right]\|v\|_1^2 \leqslant 0.$$

Por fim,

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 + \delta \|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} \leqslant -\left[\frac{3}{2}\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon\right]\|v_t\|^2 - \delta\left[2 - \frac{\nu}{2}\right]\|v\|_1^2$$
$$+ \delta\left[\|v\|_1^2 + \epsilon\|v_t\|^2\right] = \left[3\delta\epsilon + \epsilon' - \frac{3}{2}\alpha\right]\|v_t\|^2 + \delta\left[\frac{\nu}{2} - 1\right]\|v\|_1^2 \overset{(4)}{\leqslant} 0,$$

onde notamos que em (4) basta tomarmos $0 < \nu < 2$ e δ suficientemente pequeno.

<u>Afirmação 3</u>: $\frac{1}{2}\|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t} \leqslant \Psi_0 \leqslant C_0\|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t}$.

Observe que procedendo de maneira análoga ao que foi feito em (3.11) com $2L\delta \leqslant \alpha$ obtemos

$$|2\delta\epsilon\langle v_t, v\rangle| \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|v_t\|^2 + \delta\alpha\|v\|^2 \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|v_t\|^2 + \frac{\delta\alpha}{\lambda_1}\|v\|_1^2, \tag{3.29}$$

e logo,

$$\Psi_0 = \|v\|_1^2 + \epsilon\|v_t\|^2 + \delta\alpha\|v\|^2 + 2\delta\epsilon\langle v_t, v\rangle + 2\langle F_0(v), 1\rangle$$
$$\overset{(5)}{\leqslant} \|v\|_1^2 + \epsilon\|v_t\|^2 + \frac{\delta\alpha}{\lambda_1}\|v\|_1^2 + \frac{\epsilon}{2}\|v_t\|^2 + \frac{\delta\alpha}{\lambda_1}\|v\|_1^2 + \widehat{C}\|v\|_1^2$$
$$= \left(1 + \frac{2\delta\alpha}{\lambda_1} + \widehat{C}\right)\|v\|_1^2 + \frac{3\epsilon}{2}\|v_t\|^2 \leqslant C_0\|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t}$$

onde $C_0 = \max\left\{1 + \frac{2\delta\alpha}{\lambda_1} + \widehat{C}, \frac{3}{2}\right\}$ e em (5) usamos a Proposição 3.3.2 e a limitação da Afirmação 1 para fazer aparecer a constante $\widehat{C} > 0$.

Por outro lado, temos

$$\Psi_0 \overset{(6)}{\geqslant} \|v\|_1^2 + \epsilon\|v_t\|^2 + \delta\alpha\|v\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\|v_t\|^2 - \frac{\delta\alpha}{\lambda_1}\|v\|_1^2$$
$$\overset{(7)}{\geqslant} \left(1 - \frac{\delta\alpha}{\lambda_1}\right)\|v\|_1^2 + \frac{1}{2}\epsilon\|v_t\|^2 \overset{(8)}{\geqslant} \frac{1}{2}\|U_0(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t},$$

onde em (6) usamos a Proposição 3.3.2 e também (3.29). Em (7) o termo $\delta\alpha\|v\|^2$ desaparece por ser positivo e não interferir na desigualdade, enquanto que em (8) tomamos δ suficientemente pequeno tal que $\delta\alpha \leqslant \frac{\lambda_1}{2}$. Com isso terminamos a verificação da Afirmação 3.

Agora, segue imediatamente das Afirmações 2 e 3 que

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 + \frac{\delta}{C_0}\Psi_0 \leqslant 0,$$

e aplicando o Lema 3.1.8 com $2\omega = \frac{\delta}{C_0}$, $q(t) \equiv 0$ e $k = 0$ obtemos

$$\Psi_0(t) \leqslant \Psi_0(\tau) e^{-\frac{\delta}{2C_0}(t-\tau)}.$$

Usando novamente a Afirmação 3 e também que $z \in \mathbb{B}_\tau(R_0)$, chegamos a

$$\Psi_0(\tau) \leqslant C_0 \left\| U_0(\tau,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_\tau}^2 = C_0 \left\| z \right\|_{\mathcal{H}_\tau}^2 \leqslant C_0 R_0^2,$$

e portanto

$$\left\| U_0(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leqslant 2\Psi_0(t) \leqslant 2C_0 R_0^2 e^{-\frac{\delta}{2C_0}(t-\tau)}.$$

Assim temos

$$\left\| U_0(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant \sqrt{2C_0 R_0^2} e^{-\frac{\delta}{4C_0}(t-\tau)} = C e^{-\hat{\delta}(t-\tau)}$$

onde $C = \sqrt{2C_0 R_0^2}$ e $\hat{\delta} = \frac{\delta}{4C_0}$. ■

Observação 3.3.4. *Com os resultados que vimos até agora temos que para $z \in \mathbb{B}_\tau(R_0)$ vale*

$$\sup_{t \geqslant \tau} \left[\left\| U(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t} + \left\| U_0(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t} + \left\| U_1(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t} \right] \leqslant C.$$

Lema 3.3.5. *Existe $M > 0$ tal que $\sup_{t \geqslant \tau} \left\| U_1(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant M$.*

Demonstração: Novamente, como a demonstração deste resultado é extensa, a dividiremos em partes.

Afirmação 1: Denotando

$$\begin{aligned} \Lambda = {} & \left\| U_1(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 + \delta\alpha \left\| w \right\|_{1/3}^2 + 2\delta\epsilon \left\langle w_t, A^{1/3} w \right\rangle + \\ & + 2 \left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3} w \right\rangle + C, \end{aligned} \tag{3.30}$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $C > 0$ suficientemente grande, temos:

$$\frac{1}{2} \left\| U_1(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 \leqslant \Lambda(t) \leqslant 2 \left\| U_1(t,\tau) z \right\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 + 2C. \tag{3.31}$$

Para verificar isso, vamos precisar de algumas desigualdades. Começaremos com a seguinte:

$$\begin{aligned}
2\delta\epsilon\left|\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle\right| &= 2\delta\epsilon\left|\left\langle w_t, A^{1/6}A^{1/6}w\right\rangle\right| = 2\delta\epsilon\left|\left\langle A^{1/6}w_t, A^{1/6}w\right\rangle\right| \\
&\leqslant 2\delta\epsilon\left\|A^{1/6}w_t\right\|\left\|A^{1/6}w\right\| = 2\delta\epsilon\left\|w_t\right\|_{1/3}\left\|w\right\|_{1/3} \\
&= 2\epsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|w_t\right\|_{1/3}.\delta\sqrt{2}\left\|w\right\|_{1/3}\right) \\
&\overset{(1)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + 2\delta^2\epsilon\left\|w\right\|_{1/3}^2 \\
&\overset{(2)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + 2L\delta^2\left\|w\right\|_{1/3}^2 \\
&\overset{(3)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + \frac{\delta\alpha}{2}\left\|w\right\|_{1/3}^2 \\
&\overset{(4)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + \frac{\delta\alpha}{2\lambda_1}\left\|w\right\|_{4/3}^2,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde na desigualdade (1) usamos o Lema 3.1.1 com $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|w_t\right\|_{1/3}$ e $b = \delta\sqrt{2}\left\|w\right\|_{1/3}$. Em (2) usamos (3.2). Já na desigualdade (3) observamos que se δ é suficientemente pequeno então $2L\delta \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Por fim, concluímos (4) usando a Desigualdade de Poincaré como feito abaixo:

$$\begin{aligned}
\left\|w\right\|_{1/3}^2 &= \left\|A^{1/6}w\right\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\left\|A^{1/6}w\right\|_1^2 = \frac{1}{\lambda_1}\left\|A^{1/2}A^{1/6}w\right\|^2 \\
&= \frac{1}{\lambda_1}\left\|A^{2/3}w\right\|^2 = \frac{1}{\lambda_1}\left\|w\right\|_{4/3}^2 .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Também iremos precisar da desigualdade a seguir:

$$\begin{aligned}
2\left|\left\langle f(u) - f_0(v), A^{1/3}w\right\rangle\right| &\leqslant 2\left\|f(u) - f_0(v)\right\|\left\|A^{1/3}w\right\| \\
&\overset{(5)}{\leqslant} C_1\left\|w\right\|_{2/3} \overset{(6)}{\leqslant} \frac{1}{4}\left\|w\right\|_{4/3}^2 + C_2,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde $C_1, C_2 > 0$ são constantes adequadas.

Para verificar a desigualdade (5) basta usar o Lema 3.1.7 para f e f_0 e também a Observação 3.3.4:

$$\begin{aligned}
2\left\|f(u) - f_0(v)\right\| &\leqslant 2\left\|f(u) - f(0)\right\| + 2\left\|f_0(v) - f_0(0)\right\| \\
&\leqslant 2K_1\left\|u\right\|_1 + 2K_2\left\|v\right\|_1 \leqslant C_1
\end{aligned}$$

Ademais, é claro que $\left\|w\right\|_{2/3} = \left\|A^{1/3}w\right\|$.

Além disso, como $H_{\frac{4}{3}} \subset\subset H_{\frac{2}{3}}$, existe $k > 0$ tal que $\|w\|_{2/3} \leqslant k \|w\|_{4/3}$, o que implica em

$$\begin{aligned} C_1 \|w\|_{2/3} &\leqslant kC_1 \|w\|_{4/3} = 2kC_1 . \frac{1}{2} \|w\|_{4/3} \leqslant (kC_1)^2 + \frac{1}{4} \|w\|_{4/3}^2 \\ &= \frac{1}{4} \|w\|_{4/3}^2 + C_2, \end{aligned}$$

onde $C_2 = (kC_1)^2 > 0$. Disso obtemos a desigualdade (6).

Por fim, note ainda que

$$\begin{aligned} \left|2 \left\langle g, A^{1/3} w \right\rangle\right| &\leqslant 2 \|g\| \left\|A^{1/3} w\right\| = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \|g\|\right) \left(\sqrt{\delta} \left\|A^{1/3} w\right\|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\delta} \|g\|^2 + \delta \left\|A^{1/3} w\right\|^2 = \frac{1}{\delta} \|g\|^2 + \delta \|w\|_{2/3}^2 \\ &\leqslant C_3 + \delta k^2 \|w\|_{4/3}^2 , \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde $C_3 = C_3(\delta, \|g\|) > 0$.

Comecemos então verificando a segunda desigualdade da Afirmação 1. Usando as desigualdades (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) e também que $\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 = \|w\|_{4/3}^2 + \epsilon \|w_t\|_{1/3}^2$, temos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \|w\|_{4/3}^2 + \epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 + \delta\alpha \|w\|_{1/3}^2 + 2\delta\epsilon \left\langle w_t, A^{1/3} w\right\rangle - 2 \left\langle g, A^{1/3} w \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle f(u) - f_0(v), A^{1/3} w \right\rangle + C \\ &\leqslant \|w\|_{4/3}^2 + \epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 + \frac{\delta\alpha}{\lambda_1} \|w\|_{4/3}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|w_t\|_{1/3}^2 + \frac{\delta\alpha}{2\lambda_1} \|w\|_{4/3}^2 \\ &\quad + C_3 + \delta k^2 \|w\|_{4/3}^2 + \frac{1}{4} \|w\|_{4/3}^2 + C_2 + C \\ &\leqslant \left[\frac{5}{4} + \delta \left(\frac{3\alpha}{2\lambda_1} + k^2\right)\right] \|w\|_{4/3}^2 + \frac{3}{2}\epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 + 2C, \end{aligned}$$

onde C foi escolhida em (3.30) tal que $C \geqslant C_2 + C_3$ na inequação anterior.

Agora, para δ suficientemente pequeno temos $\left[\frac{5}{4} + \delta \left(\frac{3\alpha}{2\lambda_1} + k^2\right)\right] \leqslant 2$. Logo,

$$\begin{aligned} \left[\frac{5}{4} + \delta \left(\frac{3\alpha}{2\lambda_1} + k^2\right)\right] \|w\|_{4/3}^2 + \frac{3}{2}\epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 + 2C &\leqslant 2 \|w\|_{4/3}^2 + 2\epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 + 2C \\ &= 2 \|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 + 2C, \end{aligned}$$

finalizando assim a demonstração da segunda desigualdade da Afirmação 1. Nos resta agora verificar a primeira desigualdade. De (3.32), (3.34) e (3.35), respectivamente, seguem as desigualdades a seguir:

$$2\delta\epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle \geqslant -\frac{\epsilon}{2}\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 - \frac{\delta\alpha}{2}\left\|w\right\|_{1/3}^2,$$

$$2\left\langle f(u) - f_0(v), A^{1/3}w\right\rangle \geqslant -\frac{1}{4}\left\|w\right\|_{4/3}^2 - C_2,$$

e

$$-2\left\langle g, A^{1/3}w\right\rangle \geqslant -C_3 - \delta k^2\left\|w\right\|_{4/3}^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Lambda &\geqslant \|w\|_{4/3}^2 + \epsilon\|w_t\|_{1/3}^2 + \delta\alpha\|w\|_{1/3}^2 - \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_{1/3}^2 - \frac{\delta\alpha}{2}\|w\|_{1/3}^2 + \\
&\quad - \frac{1}{4}\|w\|_{4/3}^2 - C_2 - C_3 - \delta k^2\|w\|_{4/3}^2 + C \\
&= \left(\frac{3}{4} - \delta k^2\right)\|w\|_{4/3}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_{1/3}^2 + \frac{\delta\alpha}{2}\|w\|_{1/3}^2 + C - C_2 - C_3 \\
&\geqslant \left(\frac{3}{4} - \delta k^2\right)\|w\|_{4/3}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_{1/3}^2 + C - C_2 - C_3 \\
&\overset{(7)}{\geqslant} \frac{1}{2}\|w\|_{4/3}^2 + \frac{1}{2}\epsilon\|w_t\|_{1/3}^2 = \frac{1}{2}\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2
\end{aligned}$$

onde em (7) tomamos $0 < \delta \leqslant \frac{1}{4k^2}$ e $C \geqslant C_2 + C_3$.

Afirmação 2: Temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Lambda + (2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon)\|w_t\|_{1/3}^2 + 2\delta\|w\|_{4/3}^2 + 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad = 2\delta\epsilon'\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + P_1 + P_2 + P_3,
\end{aligned}$$

onde $P_1 = 2\left\langle [f_0'(u) - f_0'(v)]\,u_t, A^{1/3}w\right\rangle$, $P_2 = 2\left\langle f_0'(v)w_t, A^{1/3}w\right\rangle$ e $P_3 = 2\left\langle f_1'(u)u_t, A^{1/3}w\right\rangle$.

De fato, multiplicando a primeira equação de (3.25) por $2A^{1/3}w_t + 2\delta A^{1/3}w$, temos

$$\begin{aligned}
2A^{1/3}w_t\epsilon w_{tt} + 2A^{1/3}w_t\alpha w_t + 2A^{1/3}w_tAw + 2A^{1/3}w_tf(u)& \\
- 2A^{1/3}w_tf_0(v) + 2\delta A^{1/3}w\epsilon w_{tt} + 2\delta A^{1/3}w\alpha w_t& \\
+ 2\delta A^{1/3}wAw + 2\delta A^{1/3}wf(u) - 2\delta A^{1/3}wf_0(v)& \\
= 2A^{1/3}w_tg + 2\delta A^{1/3}wg&,
\end{aligned}$$

e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned}2\epsilon\left\langle A^{1/3}w_t, w_{tt}\right\rangle + 2\alpha\left\langle A^{1/3}w_t, w_t\right\rangle + 2\left\langle A^{1/3}w_t, Aw\right\rangle \\ + 2\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w_t\right\rangle + 2\delta\epsilon\left\langle A^{1/3}w, w_{tt}\right\rangle \\ + 2\delta\alpha\left\langle A^{1/3}w, w_t\right\rangle + 2\delta\left\langle A^{1/3}w, Aw\right\rangle \\ + 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle = 0.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Lambda = \frac{d}{dt}\left\|U_1(t,\tau)z\right\|^2_{\mathcal{H}_t^{1/3}} + \delta\alpha\frac{d}{dt}\left\|w\right\|^2_{1/3} + 2\delta\frac{d}{dt}\left(\epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle\right) \\ + 2\frac{d}{dt}\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|U_1(t,\tau)z\right\|^2_{\mathcal{H}_t^{1/3}} &= \frac{d}{dt}\left(\left\|w\right\|^2_{4/3} + \epsilon(t)\left\|w_t\right\|^2_{1/3}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left\langle w, w\right\rangle_{4/3} + \epsilon'(t)\left\|w_t\right\|^2_{1/3} + \epsilon(t)\frac{d}{dt}\left\langle w_t, w_t\right\rangle_{1/3} \\ &= 2\left\langle w_t, w\right\rangle_{4/3} + \epsilon'\left\|w_t\right\|^2_{1/3} + 2\epsilon\left\langle w_{tt}, w_t\right\rangle_{1/3},\end{aligned}$$

e também

$$\frac{d}{dt}\left\|w\right\|^2_{1/3} = \frac{d}{dt}\left\langle w, w\right\rangle_{1/3} = 2\left\langle w_t, w\right\rangle_{1/3},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle\right) = \epsilon'\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + \epsilon\left\langle w_{tt}, A^{1/3}w\right\rangle + \epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w_t\right\rangle,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\left[f(u) - f_0(v) - g\right], A^{1/3}w\right\rangle \\ + \left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w_t\right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Lambda + (2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon)\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + 2\delta\left\|w\right\|_{4/3}^2 \\
&\quad + 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad = 2\left\langle w_t, w\right\rangle_{4/3} + \epsilon'\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + 2\epsilon\left\langle w_{tt}, w_t\right\rangle_{1/3} + 2\delta\alpha\left\langle w_t, w\right\rangle_{1/3} \\
&\quad + 2\delta\epsilon'\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + 2\delta\epsilon\left\langle w_{tt}, A^{1/3}w\right\rangle + 2\delta\epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w_t\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle \frac{d}{dt}\left[f(u) - f_0(v) - g\right], A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w_t\right\rangle \\
&\quad + 2\alpha\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 - \epsilon'\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 - 2\delta\epsilon\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 + 2\delta\left\|w\right\|_{4/3}^2 \\
&\quad + 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad \overset{(8)}{=} 2\left\langle A^{1/3}w_t, Aw\right\rangle + 2\epsilon\left\langle A^{1/3}w_t, w_{tt}\right\rangle + 2\delta\alpha\left\langle A^{1/3}w, w_t\right\rangle \\
&\quad + 2\delta\epsilon'\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + 2\delta\epsilon\left\langle A^{1/3}w, w_{tt}\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle \frac{d}{dt}\left[f(u) - f_0(v) - g\right], A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w_t\right\rangle + 2\alpha\left\langle A^{1/3}w_t, w_t\right\rangle \\
&\quad + 2\delta\left\langle A^{1/3}w, Aw\right\rangle + 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad \overset{(9)}{=} 2\delta\epsilon'\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + 2\left\langle \frac{d}{dt}\left[f(u) - f_0(v) - g\right], A^{1/3}w\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

onde na igualdade (8) usamos

$$
\begin{aligned}
2\left\langle w_t, w\right\rangle_{4/3} &= 2\left\langle A^{2/3}w_t, A^{2/3}w\right\rangle = 2\left\langle w_t, A^{2/3}A^{2/3}w\right\rangle = 2\left\langle w_t, A^{4/3}w\right\rangle \\
&= 2\left\langle w_t, A^{1/3}Aw\right\rangle = 2\left\langle A^{1/3}w_t, Aw\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\epsilon\left\langle w_{tt}, w_t\right\rangle_{1/3} &= 2\epsilon\left\langle A^{1/6}w_{tt}, A^{1/6}w_t\right\rangle = 2\epsilon\left\langle w_{tt}, A^{1/6}A^{1/6}w_t\right\rangle \\
&= 2\epsilon\left\langle w_{tt}, A^{1/3}w_t\right\rangle = 2\epsilon\left\langle A^{1/3}w_t, w_{tt}\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\delta\alpha\left\langle w_t, w\right\rangle_{1/3} &= 2\delta\alpha\left\langle A^{1/6}w_t, A^{1/6}w\right\rangle = 2\delta\alpha\left\langle w_t, A^{1/6}A^{1/6}w\right\rangle \\
&= 2\delta\alpha\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle = 2\delta\alpha\left\langle A^{1/3}w, w_t\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\delta\epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w_t\right\rangle &= 2\delta\epsilon\left\langle w_t, A^{1/6}A^{1/6}w_t\right\rangle = 2\delta\epsilon\left\langle A^{1/6}w_t, A^{1/6}w_t\right\rangle \\
&= 2\delta\epsilon\left\langle w_t, w_t\right\rangle_{1/3} = 2\delta\epsilon\left\|w_t\right\|_{1/3}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\alpha\left\|w_t\right\|_{1/3}^2 &= 2\alpha\left\langle w_t, w_t\right\rangle_{1/3} = 2\alpha\left\langle A^{1/6}w_t, A^{1/6}w_t\right\rangle \\
&= 2\alpha\left\langle A^{1/6}A^{1/6}w_t, w_t\right\rangle = 2\alpha\left\langle A^{1/3}w_t, w_t\right\rangle,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
2\delta \|w\|_{4/3}^2 &= 2\delta \langle w, w\rangle_{4/3} = 2\delta \left\langle A^{2/3}w, A^{2/3}w\right\rangle = 2\delta \left\langle A^{2/3}A^{2/3}w, w\right\rangle \\
&= 2\delta \left\langle AA^{1/3}w, w\right\rangle = 2\delta \left\langle A^{1/3}w, Aw\right\rangle,
\end{aligned}
$$

e na igualdade (9) aplicamos diretamente (3.36).

Agora, como $f = f_0 + f_1$ e $u = v + w$, temos

$$
\frac{d}{dt}\left[f(u) - f_0(v) - g\right] = f_0'(u)u_t + f_1'(u)u_t - f_0'(v).\left[u_t - w_t\right],
$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
2\left\langle \frac{d}{dt}\left[f(u) - f_0(v) - g\right], A^{1/3}w\right\rangle &= 2\left\langle \left[f_0'(u) - f_0'(v)\right]u_t, A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle f_0'(v)w_t, A^{1/3}w\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle f_1'(u)u_t, A^{1/3}w\right\rangle \\
&= P_1 + P_2 + P_3.
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

Finalmente, de (3.37) e (3.38) concluímos a Afirmação 2.

Afirmação 3: Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos

$$
\frac{d}{dt}\Lambda + \delta\Lambda + \alpha \|w_t\|_{1/3}^2 \leqslant P_1 + P_2 + P_3 + \delta C.
$$

De fato, usando a Afirmação 2 obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda + \delta\Lambda + \alpha \|w_t\|_{1/3}^2 &= 2\delta\epsilon' \left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + P_1 + P_2 + P_3 \\
&- (2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon)\|w_t\|_{1/3}^2 - 2\delta\|w\|_{4/3}^2 - 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle \\
&+ \delta\|w\|_{4/3}^2 + \delta\epsilon\|w_t\|_{1/3}^2 + \delta^2\alpha\|w\|_{1/3}^2 + 2\delta^2\epsilon\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle \\
&+ 2\delta\left\langle f(u) - f_0(v) - g, A^{1/3}w\right\rangle + \delta C + \alpha\|w_t\|_{1/3}^2 \\
&= \left(2\delta\epsilon' + 2\delta^2\epsilon\right)\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + (-\alpha + \epsilon' + 3\delta\epsilon)\|w_t\|_{1/3}^2 - \delta\|w\|_{4/3}^2 \\
&+ \delta^2\alpha\|w\|_{1/3}^2 + P_1 + P_2 + P_3 + \delta C.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\frac{d}{dt}\Lambda + \delta\Lambda + \alpha \|w_t\|_{1/3}^2 + \Gamma = P_1 + P_2 + P_3 + \delta C,
$$

onde

$$\Gamma = (\alpha - \epsilon') \|w_t\|_{1/3}^2 - 3\delta\epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 - \left(2\delta\epsilon' + 2\delta^2\epsilon\right)\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle$$
$$+ \delta \|w\|_{4/3}^2 - \delta^2\alpha \|w\|_{1/3}^2 .$$

Observe que quando $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, o sinal de Γ fica determinado apenas pelo termo $(\alpha - \epsilon') \|w_t\|_{1/3}^2$, que no caso é positivo, pois $\alpha > 0$ e ϵ é função decrescente. Logo. para δ pequeno temos $\Gamma \geqslant 0$ e, consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\Lambda + \delta\Lambda + \alpha \|w_t\|_{1/3}^2 \leqslant \frac{d}{dt}\Lambda + \delta\Lambda + \alpha \|w_t\|_{1/3}^2 + \Gamma = P_1 + P_2 + P_3 + \delta C,$$

concluindo a verificação da Afirmação 3.

Afirmação 4: Temos as seguintes estimativas para P_1, P_2 e P_3:

$$\begin{aligned} P_1 &\leqslant \frac{\delta}{2}\Lambda + C_1 \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 , \\ P_2 &\leqslant \frac{\alpha}{2} \|w_t\|_{1/3}^2 + C_2 \|v\|_1^2 \|w\|_{4/3}^2 , \\ P_3 &\leqslant \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 + C_3, \end{aligned} \tag{3.39}$$

para $C_1, C_2, C_3 > 0$ constantes apropriadas.

De fato,

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\left\langle \left[f_0'(u) - f_0'(v)\right] u_t, A^{1/3}w\right\rangle = 2\int_\Omega \left[f_0'(u) - f_0'(v)\right] u_t A^{1/3} w dx \\ &\leqslant 2\int_\Omega |f_0'(u) - f_0'(v)|\,|u_t|\left|A^{1/3}w\right| dx \\ &\overset{(10)}{\leqslant} 2k\int_\Omega (1 + |u| + |v|)\,|w|\,|u_t|\left|A^{1/3}w\right| dx \\ &\overset{(11)}{\leqslant} 2k\left(K_1 + \|u\|_{L^6} + \|v\|_{L^6}\right)\|w\|_{L^{18}}\|u_t\|\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}} \\ &\overset{(12)}{\leqslant} c_1 \|u_t\| \|w\|_{4/3}^2 \overset{(13)}{\leqslant} \frac{\delta}{2}\Lambda + C_1 \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 \end{aligned}$$

A seguir apresentamos os cálculos feitos para obter as desigualdades (10), (11), (12) e (13). Para (10): Se r, s são reais quaisquer temos

$$\begin{aligned} |f_0'(s) - f_0'(r)| = \left|\int_r^s f_0''(\xi)d\xi\right| \leqslant \int_r^s |f_0''(\xi)|d\xi \leqslant \\ \int_r^s k(1 + |\xi|)d\xi \leqslant k\left(1 + |s| + |r|\right)|s - r| , \end{aligned} \tag{3.40}$$

e aplicando isso às funções u, v temos $|f_0'(u) - f_0'(v)| \leqslant k\,(1 + |u| + |v|)\,|w|$.

Para (11), aplicando a Desigualdade de Hölder e usando a imersão $L^{18}(\Omega) \hookrightarrow L^{9/2}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w|\,|u_t|\,\left|A^{1/3}w\right|dx &\leqslant \|w\|_{L^{9/2}}\,\|u_t\|\,\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}}\\ &\leqslant K_1\,\|w\|_{L^{18}}\,\|u_t\|\,\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}},\end{aligned}$$

também

$$\int_\Omega |u|\,|w|\,|u_t|\,\left|A^{1/3}w\right|dx \leqslant \|u\|_{L^6}\,\|w\|_{L^{18}}\,\|u_t\|\,\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}},$$

e

$$\int_\Omega |v|\,|w|\,|u_t|\,\left|A^{1/3}w\right|dx \leqslant \|v\|_{L^6}\,\|w\|_{L^{18}}\,\|u_t\|\,\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}},$$

onde notamos que para aplicar Hölder usamos $\frac{1}{9/2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{18/5}=1$, também $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}+\frac{1}{18/5}=1$ e K_1 é uma constante positiva da imersão $L^{18}(\Omega)$ em $L^{9/2}(\Omega)$.

Para (12) note que se $p > 2$ temos $H_{(3p-6)/(2p)} \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Então das inclusões $H_1 \hookrightarrow L^6(\Omega)$, $H_{4/3} \hookrightarrow L^{18}(\Omega)$ e $H_{2/3} \hookrightarrow L^{18/5}(\Omega)$, concluímos que existem constantes k_1, k_2 e k_3 positivas tais que $\|u\|_{L^6} \leqslant k_1\,\|u\|_1$, $\|v\|_{L^6} \leqslant k_1\,\|v\|_1$, $\|w\|_{L^{18}} \leqslant k_2\,\|w\|_{4/3}$ e

$$\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}} \leqslant k_3\,\left\|A^{1/3}w\right\|_{2/3} \leqslant k_3\,\left\|A^{1/3}A^{1/3}w\right\| = k_3\,\left\|A^{2/3}w\right\| = k_3\,\|w\|_{4/3},$$

e aplicando a Observação (3.3.4), mostramos que existe $c_1 > 0$ tal que a desigualdade (12) ocorra. Para (13) observemos primeiramente que para $\eta > 0$ (*a priori* tomamos η qualquer) temos

$$c_1\,\|u_t\| = \eta\,\frac{c_1}{\eta}\,\|u_t\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\eta^2 + \frac{c_1^2}{\eta^2}\,\|u_t\|^2\right).$$

Usando isso e a primeira desigualdade da Afirmação 1, chegamos a

$$\begin{aligned}c_1\,\|u_t\|\,\|w\|_{4/3}^2 - \frac{\delta}{2}\Lambda &\leqslant c_1\,\|u_t\|\,\|w\|_{4/3}^2 - \frac{\delta}{4}\,\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2\\ &\leqslant \frac{c_1^2}{2\eta^2}\,\|u_t\|^2\,\|w\|_{4/3}^2 + \frac{\eta^2}{2}\,\|w\|_{4/3}^2 - \frac{\delta}{4}\,\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2\\ &\leqslant C_1\,\|u_t\|^2\,\|w\|_{4/3}^2,\end{aligned}$$

onde na útima desigualdade denotamos $C_1 = \frac{c_1^2}{2\eta^2}$ e tomamos $0 < \eta \leqslant \sqrt{\frac{\delta}{2}}$ tal que

$$\frac{\eta^2}{2}\,\|w\|_{4/3}^2 - \frac{\delta}{4}\,\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 \leqslant 0.$$

Portanto

$$c_1 \|u_t\| \|w\|_{4/3}^2 \leqslant \frac{\delta}{2}\Lambda + C_1 \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 .$$

Para P_2, lembrando que $f_0'(0) = 0$ e usando o cálculo feito em (3.40), temos

$$|f_0'(v)| \leqslant k(1 + |v|) |v| ,$$

e assim

$$\begin{aligned}
P_2 &= 2\left\langle f_0'(v)w_t, A^{1/3}w\right\rangle = 2\int_\Omega f_0'(v)w_t A^{1/3}w dx \\
&\leqslant 2\int_\Omega |f_0'(v)| |w_t| \left|A^{1/3}w\right| dx \leqslant 2k\int_\Omega (1+|v|) |v| |w_t| \left|A^{1/3}w\right| dx \\
&= 2k\left(\int_\Omega |v| |w_t| \left|A^{1/3}w\right| dx + \int_\Omega |v| |v| |w_t| \left|A^{1/3}w\right| dx\right) \\
&\overset{(14)}{\leqslant} 2k\left(c_2 + \|v\|_{L^6}\right) \|v\|_{L^6} \|w_t\|_{L^{18/7}} \left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}} \\
&\overset{(15)}{\leqslant} K_2 \|v\|_1 \|w_t\|_{1/3} \|w\|_{4/3} \overset{(16)}{\leqslant} \frac{\alpha}{2}\|w_t\|_{1/3}^2 + C_2 \|v\|_1^2 \|w\|_{4/3}^2
\end{aligned}$$

Em (14), usando que $L^6(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ e também a desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v| |w_t| \left|A^{1/3}w\right| dx &\leqslant \|v\|_{L^3} \|w_t\|_{L^{18/7}} \left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}} \\
&\leqslant c_2 \|v\|_{L^6} \|w_t\|_{L^{18/7}} \left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}} ,
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\int_\Omega |v| |v| |w_t| \left|A^{1/3}w\right| dx \leqslant \|v\|_{L^6}^2 \|w_t\|_{L^{18/7}} \left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}}$$

lembrando que $\frac{1}{3} + \frac{1}{18/7} + \frac{1}{18/5} = 1$ e $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18/7} + \frac{1}{18/5} = 1$.

Para (15) notamos que $H_1 \hookrightarrow L^6(\Omega)$, $H_{1/3} \hookrightarrow L^{18/7}(\Omega)$ e $H_{2/3} \hookrightarrow L^{18/5}(\Omega)$, e assim concluímos que existem constantes k_1, k_2 e k_3 positivas tais que $\|v\|_{L^6} \leqslant k_1 \|v\|_1$, $\|w_t\|_{L^{18/7}} \leqslant k_2 \|w_t\|_{1/3}$ e

$$\left\|A^{1/3}w\right\|_{L^{18/5}} \leqslant k_3 \left\|A^{1/3}w\right\|_{2/3} \leqslant k_3 \left\|A^{1/3}A^{1/3}w\right\| = k_3 \left\|A^{2/3}w\right\| = k_3 \|w\|_{4/3} .$$

Aplicando então a Observação 3.3.4, segue a desigualdade (15).

Em (16) aplicamos a Observação 3.1.1 para obter

$$
\begin{aligned}
K_2 \|v\|_1 \|w_t\|_{1/3} \|w\|_{4/3} &= \left(\sqrt{\alpha} \|w_t\|_{1/3}\right)\left(\frac{K_2}{\sqrt{\alpha}} \|v\|_1 \|w\|_{4/3}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha \|w_t\|_{1/3}^2 + \frac{K_2^2}{\alpha} \|v\|_1^2 \|w\|_{4/3}^2\right) \\
&= \frac{\alpha}{2} \|w_t\|_{1/3}^2 + C_2 \|v\|_1^2 \|w\|_{4/3}^2 ,
\end{aligned}
$$

onde denotamos $C_2 = \frac{K_2^2}{2\alpha}$.

Finalmente, vamos verificar a estimativa para P_3. Temos

$$
\begin{aligned}
P_3 &= 2\left\langle f_1'(u)u_t, A^{1/3}w\right\rangle = 2\int_\Omega f_1'(u)u_t A^{1/3} w dx \\
&\leqslant 2\int_\Omega |f_1'(u)|\,|u_t|\left|A^{1/3}w\right| dx \overset{(17)}{\leqslant} 2k\int_\Omega |u_t|\left|A^{1/3}w\right| dx \\
&\leqslant 2k \|u_t\| \left\|A^{1/3}w\right\| \overset{(18)}{\leqslant} 2c_3 k \|u_t\| \|w\|_{4/3} \\
&\leqslant 2\left[\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 + c_3^2 k^2\right)\right] = \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 + C_3,
\end{aligned}
$$

onde denotamos $C_3 = c_3^2 k^2$, na desigualdade (17) usamos a limitação de f_1' e na desigualdade (18) notamos que $H_{4/3} \subset\subset H_{2/3}$, logo existe $c_3 > 0$ tal que $\left\|A^{1/3}w\right\| = \|w\|_{2/3} \leqslant c_3 \|w\|_{4/3}$.

Agora, usando as estimativas de (3.39) e também a Afirmação 3, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda + \delta\Lambda \leqslant{}& \frac{\delta}{2}\Lambda + C_1 \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 + \frac{\alpha}{2} \|w_t\|_{1/3}^2 + C_2 \|v\|_1^2 \|w\|_{4/3}^2 \\
&+ \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 + C_3 + \delta C - \alpha \|w_t\|_{1/3}^2 ,
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda + \frac{\delta}{2}\Lambda \leqslant{}& -\frac{\alpha}{2} \|w_t\|_{1/3}^2 + (C_1 + 1) \|u_t\|^2 \|w\|_{4/3}^2 \\
&+ C_2 \|v\|_1^2 \|w\|_{4/3}^2 + C_3 + \delta C \\
\leqslant{}& \left[(C_1 + 1) \|u_t\|^2 + C_2 \|v\|_1^2\right] \|w\|_{4/3}^2 + k,
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

onde $k = C_3 + \delta C$ e o termo $-\frac{\alpha}{2} \|w_t\|_{1/3}^2$ desaparece na última desigualdade por ser negativo.

Por outro lado, da Afirmação 1, extraímos que

$$
\|w\|_{4/3}^2 \leqslant \|w\|_{4/3}^2 + \epsilon \|w_t\|_{1/3}^2 = \|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 \leqslant 2\Lambda,
$$

o que juntando com (3.41) nos dá

$$\frac{d}{dt}\Lambda + \frac{\delta}{2}\Lambda \leqslant \left[2(C_1+1)\|u_t\|^2 + 2C_2\|v\|_1^2\right]\Lambda + K = q\Lambda + k, \tag{3.42}$$

onde $q = 2(C_1+1)\|u_t\|^2 + 2C_2\|v\|_1^2$.

Nosso intuito agora é aplicar o Lema 3.1.8 à desigualdade (3.42). Para isso, nos resta verificar que existe $m \geqslant 0$ tal que

$$\int_\tau^\infty q(y)dy \leqslant m$$

De fato,

$$\int_\tau^\infty q(y)dy = 2(C_1+1)\int_\tau^\infty \|u_t(y)\|^2 dy + 2C_2\int_\tau^\infty \|v(y)\|_1^2 dy,$$

e notamos que a primeira integral do lado direito da igualdade acima é limitada (de acordo com o Teorema 3.2.7). Já a segunda integral segue do Lema 3.3.3, como explicado a seguir. Temos

$$\|v(t)\|_1^2 \leqslant \|v\|_1^2 + \epsilon(t)\|v_t\|^2 = \|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant Ce^{-\delta(t-\tau)} \qquad \forall t \geqslant \tau,$$

e logo,

$$\int_\tau^\infty \|v(y)\|_1^2 dy \leqslant \int_\tau^\infty Ce^{-\delta(y-\tau)}dy = \frac{C}{\delta}.$$

Finalmente, aplicando o Lema 3.1.8 à desigualdade (3.42), com $2\omega = \frac{\delta}{2}$, chegamos a

$$\Lambda(t) \leqslant \Lambda(\tau)e^m e^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + \frac{4ke^m}{\delta}.$$

Pela Afirmação 1 temos

$$\Lambda(\tau) \leqslant 2\|U_1(\tau,\tau)z\|_{\mathcal{H}_\tau^{1/3}}^2 + 2C = 2C,$$

e consequentemente,

$$\Lambda(t) \leqslant 2Ce^m e^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + \frac{4ke^m}{\delta} \leqslant 2Ce^m + \frac{4ke^m}{\delta} = K, \quad \forall t \geqslant \tau.$$

Novamente pela Afirmação 1 segue que

$$\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 \leqslant 2\Lambda \leqslant 2K, \quad \forall t \geqslant \tau,$$

ou seja

$$\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant \sqrt{2K} = M, \quad \forall t \geqslant \tau,$$

e segue disso que $\sup_{t\geqslant\tau}\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant M$, terminando a demonstração do Lema. ∎

__Teorema__ **3.3.6.** *O processo $\mathcal{U}$ gerado por* (3.6) *possui atrator pullback tempo-dependente.*

Demonstração: Defina $K_t = \left\{ z \in \mathcal{H}_t^{1/3} : \|z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant M \right\} \subset \mathcal{H}_t^{1/3}$, onde M é a constante obtida no Lema 3.3.5. Como $\mathcal{H}_t^{1/3} \subset\subset \mathcal{H}_t$, os conjuntos limitados de $\mathcal{H}_t^{1/3}$ são precompactos em $\mathcal{H}_t$. Portanto $\overline{K_t}$ é compacto em $\mathcal{H}_t$ para todo t. Além disso, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|.\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant c\|.\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}$, logo para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $\|z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant cM$, ou seja, $z \in \mathbb{B}_t(cM)$. Portanto a família $\hat{K} = \left\{\overline{K_t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}_t$.

Suponha $z \in \mathbb{B}_\tau(R_0)$. Do Lema 3.3.5 segue que $U_1(t,\tau)z \in K_t$ para todo $t \geqslant \tau$, logo

$$\begin{aligned} \inf_{w\in K_t} \|U(t,\tau)z - w\|_{\mathcal{H}_t} &\leqslant \|U(t,\tau)z - U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \\ &= \|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \overset{(1)}{\leqslant} Ce^{-\hat{\delta}(t-\tau)}, \end{aligned}$$

onde em (1) aplicamos o Lema 3.3.3. Portanto para todo $t \geqslant \tau$

$$\delta_t(U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R_0), \overline{K_t}) \leqslant \sup_{z\in\mathbb{B}_\tau(R_0)} \inf_{w\in K_t} \|U(t,\tau)z - w\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant Ce^{-\hat{\delta}(t-\tau)},$$

e tomando o limite $\tau \to -\infty$ vem que

$$\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R_0), \overline{K_t}) \leqslant \lim_{\tau\to-\infty} Ce^{-\hat{\delta}(t-\tau)} = 0.$$

Usando isso e o Teorema 3.2.5 concluímos que $\hat{K}$ é $\mathbb{D}_b$-pullback atraente. Portanto o processo $\mathcal{U}$ é assintoticamente compacto. Além disso, como $\mathcal{U}$ é fortemente contínua, temos $\mathcal{U}$ T-fechado. Segue do Teorema 2.3.15 que existe atrator pullback tempo-dependente para $\mathcal{U}$. ∎

__Corolário__ **3.3.7.** *O atrator pullback tempo-dependente $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ do processo $\mathcal{U}$ é tal que A_t é limitado em $\mathcal{H}_t^{1/3}$, e tal limitação independe de t.*

Demonstração: Como $\hat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família de fechados pullback atraente e $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é atrator pullback tempo-dependente, segue que $A_t \subset K_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como cada K_t é limitado em $\mathcal{H}_t^{1/3}$, segue que A_t é limitado em $\mathcal{H}_t^{1/3}$, e a limitação de K_t em $\mathcal{H}_t^{1/3}$ independe de t. ∎

3.3.1 Regularidade do atrator pullback tempo-dependente

No próximo lema e no teorema posterior vamos provar que A_t é limitado em $\mathcal{H}_t^1$. Antes disso, fixe τ e tome $z \in A_\tau$. Vamos agora decompor $\mathcal{U}$ como $U(t,\tau)z = U_0(t,\tau)z + U_1(t,\tau)z$, onde $U_0(t,\tau)z = (v(t), v_t(t))$ e $U_1(t,\tau)z = (w(t), w_t(t))$ são soluções de

$$\begin{cases} \epsilon v_{tt} + \alpha v_t + Av = 0 \\ U_0(\tau,\tau) = z \end{cases}, \tag{3.43}$$

e

$$\begin{cases} \epsilon w_{tt} + \alpha w_t + Aw + f(u) = g \\ U_1(\tau,\tau) = 0 \end{cases}, \tag{3.44}$$

respectivamente, e notamos que esta decomposição é distinta da usada na seção anterior. Começaremos com o seguinte resultado:

Lema 3.3.8. *Existe $M_1 \geqslant 0$ tal que* $\sup_{t\geqslant\tau} \|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^1} \leqslant M_1$.

Demonstração: Inicialmente, definimos

$$\Psi_1 = \|U_1(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t^1} + \delta\alpha \|w\|_1^2 + 2\delta\epsilon \langle w_t, Aw\rangle - 2\langle g, Aw\rangle + c.$$

Afirmação 1: Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $c > 0$ suficientemente grande na expressão acima, temos

$$\frac{1}{4}\|U_1(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t^1} \leqslant \Psi_1 \leqslant 2\|U_1(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}_t^1} + 2c.$$

Vamos começar verificando a segunda desigualdade. Como $H_2 \subset\subset H_1$, existe $k > 0$ tal que $\|w\|_1 \leqslant k\|w\|_2$. Além disso, note que $\langle w_t, Aw\rangle = \left\langle w_t, A^{1/2}A^{1/2}w\right\rangle = \left\langle A^{1/2}w_t, A^{1/2}w\right\rangle = \langle w_t, w\rangle_1$, de onde segue que

$$\begin{aligned} &|2\delta\epsilon\langle w_t, Aw\rangle| = 2\delta\epsilon|\langle w_t, w\rangle_1| \\ &\leqslant 2\delta\epsilon\|w_t\|_1\|w\|_1 = 2\epsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|w_t\|_1 . \sqrt{2}\delta\|w\|_1\right) \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 + 2\delta^2\epsilon\|w\|_1^2 \overset{(1)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 + 2\delta^2 L\|w\|_1^2 \\ &\overset{(2)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 + \frac{\delta\alpha}{2}\|w\|_1^2 \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 + \frac{\delta\alpha k^2}{2}\|w\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.45}$$

onde em (1) usamos (3.2) e em (2) tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $2L\delta^2 \leqslant \frac{\delta\alpha}{2}$. Temos também

$$\begin{aligned} |2\langle g, Aw\rangle| &\leqslant 2\|g\|\,\|Aw\| = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\|g\|\right).\left(\sqrt{\delta}\,\|Aw\|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\delta}\|g\|^2 + \delta\|Aw\|^2 \leqslant c_1 + \delta\|w\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $c_1 = c_1(\delta, \|g\|) \geqslant 0$. Com isso concluímos

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\leqslant \|w\|_2^2 + \epsilon\|w_t\|_1^2 + \delta\alpha k^2\|w\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 + \frac{\delta\alpha k^2}{2}\|w\|_2^2 + c_1 + \delta\|w\|_2^2 + c \\ &= \left[1 + \delta\left(\frac{3\alpha k^2}{2} + 1\right)\right]\|w\|_2^2 + \frac{3}{2}\epsilon\|w_t\|_1^2 + c_1 + c \\ &\overset{(3)}{\leqslant} 2\|w\|_2^2 + 2\epsilon\|w_t\|_1^2 + 2c = 2\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^1}^2 + 2c, \end{aligned}$$

onde na desigualdade (3) tomamos δ suficientemente pequeno tal que $1 + \delta\left(\frac{3\alpha k^2}{2} + 1\right) \leqslant 2$ e $c > 0$ suficientemente grande tal que $c \geqslant c_1$.

Por outro lado, para verificar a primeira desigualdade da Afirmação 1 observe que $-2\langle g, Aw\rangle \geqslant -\delta\|w\|_2^2 - c_1$ (isso vem diretamente de (3.46)) e que $2\delta\epsilon\langle w_t, Aw\rangle \geqslant -\frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 - \frac{\delta\alpha k^2}{2}\|w\|_2^2$ (segue da desigualdade (3.45)). Logo,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\geqslant \|w\|_2^2 + \epsilon\|w_t\|_1^2 + \delta\alpha\|w\|_1^2 - \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 - \frac{\delta\alpha k^2}{2}\|w\|_2^2 - \delta\|w\|_2^2 - c_1 + c \\ &\overset{(4)}{\geqslant} \left[1 - \delta\left(\frac{\alpha k^2}{2} + 1\right)\right]\|w\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\|w_t\|_1^2 + c - c_1 \overset{(5)}{\geqslant} \frac{1}{4}\|w\|_2^2 + \frac{1}{4}\epsilon\|w_t\|_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^1}^2, \end{aligned}$$

onde notamos que o termo $\delta\alpha\|w\|_1^2$ não interfere na desigualdade (4) por ser positivo e em (5) tomamos δ pequeno tal que $1-\delta\left(\frac{\alpha k^2}{2} + 1\right) \geqslant \frac{1}{4}$ e $c > 0$ suficientemente grande tal que $c - c_1 \geqslant 0$. Finalizamos assim a verificação da Afirmação 1.

<u>Afirmação 2</u>: Vale a igualdade abaixo:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Psi_1 + [2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon]\|w_t\|_1^2 + 2\delta\|w\|_2^2 - 2\delta\langle g, Aw\rangle \\ &\qquad = 2\delta\epsilon'\langle w_t, Aw\rangle - 2\langle f(u), Aw_t\rangle - 2\delta\langle f(u), Aw\rangle \end{aligned}$$

Para começarmos a prova, multiplicamos a primeira equação de (3.44) por $2Aw_t + 2\delta Aw$ para obter

$$
\begin{aligned}
2Aw_t\epsilon w_{tt} + 2Aw_t\alpha w_t + 2Aw_tAw + 2Aw_tf(u) + 2\delta Aw\epsilon w_{tt}\\
+ 2\delta Aw\alpha w_t + 2\delta AwAw + 2\delta Awf(u) = 2Aw_tg + 2\delta Awg,
\end{aligned}
$$

e integrando ambos os lados da expressão acima em Ω temos

$$
\begin{aligned}
2\epsilon\langle Aw_t, w_{tt}\rangle + 2\alpha\langle Aw_t, w_t\rangle + 2\langle Aw_t, Aw\rangle&\\
+ 2\langle Aw_t, f(u)\rangle + 2\delta\epsilon\langle Aw, w_{tt}\rangle&\\
+ 2\delta\alpha\langle Aw, w_t\rangle + 2\delta\langle Aw, Aw\rangle + 2\delta\langle Aw, f(u)\rangle&\\
= 2\langle Aw_t, g\rangle + 2\delta\langle Aw, g\rangle .&
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Por outro lado,

$$
\frac{d}{dt}\Psi_1 = \frac{d}{dt}\|U_1(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}^1_t} + \delta\alpha\frac{d}{dt}\|w\|_1^2 + 2\delta\frac{d}{dt}[\epsilon\langle w_t, Aw\rangle] - 2\frac{d}{dt}\langle g, Aw\rangle ,
$$

e calculando as derivadas na expressão acima, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U_1(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}^1_t} &= \frac{d}{dt}\left(\|w\|_2^2 + \epsilon(t)\|w_t\|_1^2\right)\\
&= 2\langle w, w_t\rangle_2 + \epsilon'(t)\|w_t\|_1^2 + 2\epsilon(t)\langle w_t, w_{tt}\rangle_1 ,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{d}{dt}\|w\|_1^2 = \frac{d}{dt}\langle w, w\rangle_1 = 2\langle w, w_t\rangle_1,
$$

$$
\frac{d}{dt}[\epsilon(t)\langle w_t, Aw\rangle] = \epsilon'(t)\langle w_t, Aw\rangle + \epsilon(t)[\langle w_{tt}, Aw\rangle + \langle w_t, Aw_t\rangle],
$$

e

$$
\frac{d}{dt}\langle g, Aw\rangle = \langle 0, Aw\rangle + \langle g, Aw_t\rangle = \langle g, Aw_t\rangle .
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_1 = 2\langle w, w_t\rangle_2 + \epsilon'\|w_t\|_1^2 + 2\epsilon\langle w_t, w_{tt}\rangle_1 + 2\delta\alpha\langle w, w_t\rangle_1 + 2\delta\epsilon'\langle w_t, Aw\rangle\\
+ 2\delta\epsilon\langle w_{tt}, Aw\rangle + 2\delta\epsilon\langle w_t, Aw_t\rangle - 2\langle g, Aw_t\rangle ,
\end{aligned}
$$

e então

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Psi_1 + [2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon] \|w_t\|_1^2 + 2\delta \|w\|_2^2 - 2\delta \langle g, Aw\rangle \\
&\quad = 2\langle w, w_t\rangle_2 + \epsilon' \|w_t\|_1^2 + 2\epsilon \langle w_t, w_{tt}\rangle_1 + 2\delta\alpha \langle w, w_t\rangle_1 + 2\delta\epsilon' \langle w_t, Aw\rangle \\
&\quad + 2\delta\epsilon \langle w_{tt}, Aw\rangle + 2\delta\epsilon \langle w_t, Aw_t\rangle - 2\langle g, Aw_t\rangle + 2\alpha \|w_t\|_1^2 - \epsilon' \|w_t\|_1^2 \\
&\quad - 2\delta\epsilon \|w_t\|_1^2 + 2\delta \|w\|_2^2 - 2\delta \langle g, Aw\rangle \\
&\quad \overset{(6)}{=} 2\langle Aw_t, Aw\rangle + 2\epsilon \langle Aw_t, w_{tt}\rangle + 2\delta\alpha \langle Aw, w_t\rangle \\
&\quad + 2\delta\epsilon' \langle w_t, Aw\rangle + 2\delta\epsilon \langle w_{tt}, Aw\rangle - 2\langle g, Aw_t\rangle \\
&\quad + 2\alpha \langle w_t, Aw_t\rangle + 2\delta \langle Aw, Aw\rangle - 2\delta \langle g, Aw\rangle \\
&\quad \overset{(7)}{=} 2\delta\epsilon' \langle w_t, Aw\rangle - 2\langle f(u), Aw_t\rangle - 2\delta \langle f(u), Aw\rangle,
\end{aligned}
$$

onde em (6) efetuamos os possíveis cancelamentos entre os termos e também usamos as seguintes igualdades:

$$
\begin{gathered}
2\langle w, w_t\rangle_2 = 2\langle Aw, Aw_t\rangle, \\
2\epsilon \langle w_t, w_{tt}\rangle_1 = 2\epsilon \left\langle A^{1/2}w_t, A^{1/2}w_{tt}\right\rangle = 2\epsilon \langle Aw_t, w_{tt}\rangle, \\
2\delta\alpha \langle w, w_t\rangle_1 = 2\delta\alpha \left\langle A^{1/2}w, A^{1/2}w_t\right\rangle = 2\delta\alpha \langle Aw, w_t\rangle, \\
2\delta\epsilon \|w_t\|_1^2 = 2\delta\epsilon \langle w_t, w_t\rangle_1 = 2\delta\epsilon \left\langle A^{1/2}w_t, A^{1/2}w_t\right\rangle = 2\delta\epsilon \langle Aw_t, w_t\rangle, \\
2\alpha \|w_t\|_1^2 = 2\alpha \langle Aw_t, w_t\rangle,
\end{gathered}
$$

e

$$
2\delta \|w\|_2^2 = 2\delta \langle w, w\rangle_2 = 2\delta \langle Aw, Aw\rangle,
$$

e em seguida, na igualdade (7), aplicamos (3.47) finalizando a demonstração da Afirmação 2.

<u>Afirmação 3</u>: Para $z \in A_\tau$ temos $\|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant C$.

Recorde que $U(t,\tau)A_\tau = A_t$ para todo $t \geqslant \tau$, pois $\mathcal{A}$ é invariante. Logo $U(t,\tau)z \in A_t$. Porém do Corolário 3.3.7 temos que A_t é limitado em $\mathcal{H}_t^{1/3}$, de onde concluímos que a norma de $U(t,\tau)z$ em $\mathcal{H}_t^{1/3}$ é limitada.

<u>Afirmação 4</u>: $\|f(u)\|_1 \leqslant C$ para alguma constante $C \geqslant 0$.

Inicialmente observando que $\frac{1}{9} + \frac{1}{18/7} = \frac{1}{2}$ e aplicando Hölder chegamos a

$$
\|f(u)\|_1 = \left\|A^{1/2}[f(u) - f(0)]\right\| \leqslant \left\|f'(\xi)A^{1/2}u\right\| \leqslant \|f'(\xi)\|_{L^9} \left\|A^{1/2}u\right\|_{L^{18/7}},
$$

onde $0 \leqslant |\xi(x)| \leqslant |u(x)|$ para todo x.

Agora note que para $s \in \mathbb{R}$, temos $|f'(s) - f'(0)| \leqslant |f''(\eta)|\,|s-0|$, onde η é algum valor em $(0,s)$ ou $(s,0)$. Então

$$\begin{aligned}
|f'(s)| &\leqslant |f'(s) - f'(0)| + |f'(0)| \leqslant |f''(\eta)|\,|s| + k \overset{(8)}{\leqslant} c(1+|\eta|)\,|s| + k \\
&\leqslant c(1+|s|)\,|s| + k = c\,|s| + c\,|s|^2 + k \leqslant \frac{1}{2}\left(c^2 + |s|^2\right) + c\,|s|^2 + k \\
&= \left(\frac{1}{2}c^2 + k\right) + \left(\frac{1}{2} + c\right)|s|^2 \leqslant m(1+|s|^2),
\end{aligned}$$

onde $k = |f'(0)|$, $m = \max\left\{\frac{1}{2}c^2 + k, \frac{1}{2} + c\right\}$ e em (8) usamos (3.3).

Com isso temos

$$\begin{aligned}
\|f'(\xi)\|_{L^9}^9 &= \int_\Omega |f'(\xi)|^9 dx \leqslant \int_\Omega m^9 \left(1 + |\xi|^2\right)^9 dx \leqslant \int_\Omega m^9 q_1 \left(1 + |\xi|^{18}\right) dx \\
&= \int_\Omega m^9 q_1 dx + m^9 q_1 \int_\Omega |\xi|^{18} dx = m^9 q_1\,|\Omega| + m^9 q_1\,\|\xi\|_{L^{18}}^{18} \\
&\leqslant M(1 + \|\xi\|_{L^{18}}^{18}) \leqslant M(1 + \|u\|_{L^{18}}^{18}),
\end{aligned}$$

onde q_1 é uma constante apropriada que aparece quando aplicamos a Observação 3.1.9 à expressão $\left(1+|\xi|^2\right)^9$ e $M = \max\left\{m^9 q_1\,|\Omega|, m^9 q_1\right\}$. Logo

$$\begin{aligned}
\|f'(\xi)\|_{L^9} &\leqslant M^{1/9}\left(1 + \|u\|_{L^{18}}^{18}\right)^{1/9} \overset{(9)}{\leqslant} M^{1/9} q_2 \left(1 + \|u\|_{L^{18}}^2\right) \\
&\overset{(10)}{\leqslant} M^{1/9} q_2 \left(1 + K_1^2\,\|u\|_{4/3}^2\right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde em (9) usamos novamente a Observação 3.1.9 e q_2 é uma constante adequada que vem deste resultado. Além disso, como $H_{4/3} \hookrightarrow L^{18}(\Omega)$ existe uma constante $K_1 > 0$ tal que $\|u\|_{L^{18}} \leqslant K_1\,\|u\|_{4/3}$, e aplicamos isso em (10).

Por outro lado, usando que $H_{1/3} \hookrightarrow L^{18/7}(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|A^{1/2}u\right\|_{L^{18/7}} &\leqslant K_2\left\|A^{1/2}u\right\|_{1/3} = K_2\left\|A^{1/6}A^{1/2}u\right\| \\
&= K_2\left\|A^{2/3}u\right\| = K_2\,\|u\|_{4/3},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

para algum $K_2 > 0$. Por fim, as desigualdades (3.48) e (3.49) nos levam a

$$\begin{aligned}
\|f(u)\|_1 &\leqslant \|f'(\xi)\|_{L^9}\left\|A^{1/2}u\right\|_{L^{18/7}} \leqslant M^{1/9} q_2 \left(1 + K_1^2\,\|u\|_{4/3}^2\right) K_2\,\|u\|_{4/3} \\
&\overset{(11)}{\leqslant} M^{1/9} q_2 \left(1 + K_1^2 K\right) K_2 K^{1/2} = C,
\end{aligned}$$

onde em (11) usamos que $\|u\|_{4/3}^2 \leqslant \|u\|_{4/3}^2 + \epsilon \|u_t\|_{1/3}^2 = \|U(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2 \leqslant K$.

Afirmação 5: Temos

$$-2\langle f(u), Aw_t\rangle - 2\delta \langle f(u), Aw\rangle \leqslant 2C\|w_t\|_1 + 2C\|w\|_1$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

De fato,

$$\begin{aligned}
-2\langle f(u), Aw_t\rangle - 2\delta\langle f(u), Aw\rangle &\leqslant 2|\langle f(u), Aw_t\rangle| + 2\delta|\langle f(u), Aw\rangle| \\
&= 2\left|\left\langle A^{1/2}f(u), A^{1/2}w_t\right\rangle\right| + 2\delta\left|\left\langle A^{1/2}f(u), A^{1/2}w\right\rangle\right| \\
&\leqslant 2\left\|A^{1/2}f(u)\right\|\left\|A^{1/2}w_t\right\| + 2\delta\left\|A^{1/2}f(u)\right\|\left\|A^{1/2}w\right\| \\
&= 2\|f(u)\|_1\|w_t\|_1 + 2\delta\|f(u)\|_1\|w\|_1 \\
&\overset{(12)}{\leqslant} 2\|f(u)\|_1(\|w_t\|_1 + \|w\|_1) \\
&\leqslant 2C\|w_t\|_1 + 2C\|w\|_1,
\end{aligned}$$

onde na desigualdade (12) tomamos δ suficientemente pequeno (na verdade aqui basta que δ seja menor que 1).

Afirmação 6: Para δ suficientemente pequeno e para algum $\hat{C} > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}\Psi_1 + \frac{\delta}{2}\Psi_1 \leqslant \hat{C}$$

De fato, usando a Afirmação 2 e a Afirmação 5 obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Psi_1 + [2\alpha - \epsilon' - 2\delta\epsilon]\|w_t\|_1^2 + 2\delta\|w\|_2^2 - 2\delta\langle g, Aw\rangle \\
&\quad\leqslant 2\delta\epsilon'\langle w_t, Aw\rangle + 2C\|w_t\|_1 + 2C\|w\|_1 \\
&\quad\overset{(13)}{\leqslant} 2\delta\epsilon'\langle w_t, Aw\rangle + \eta\|w_t\|_1^2 + \zeta\|w\|_1^2 + C_1,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde *a priori* consideramos η e ζ constantes positivas quaisquer (posteriormente essas constantes serão escolhidas adequadamente), e aplicamos o seguinte cálculo na desigualdade (13):

$$
\begin{aligned}
2C\left\|w_t\right\|_1+2C\left\|w\right\|_1 &= \frac{2C}{\sqrt{2\eta}}\sqrt{2\eta}\left\|w_t\right\|_1+\frac{2C}{\sqrt{2\zeta}}\sqrt{2\zeta}\left\|w\right\|_1\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4C^2}{2\eta}+2\eta\left\|w_t\right\|_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4C^2}{2\zeta}+2\zeta\left\|w\right\|_1^2\right)\\
&= \frac{C^2}{\eta}+\frac{C^2}{\zeta}+\eta\left\|w_t\right\|_1^2+\zeta\left\|w\right\|_1^2\\
&= \eta\left\|w_t\right\|_1^2+\zeta\left\|w\right\|_1^2+C_1,
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = \frac{C^2}{\eta}+\frac{C^2}{\zeta}$. Agora, usando a desigualdade (3.50) e a expressão para Ψ_1 obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_1+\frac{\delta}{2}\Psi_1 \leqslant{}& 2\delta\epsilon'\left\langle w_t, Aw\right\rangle+\eta\left\|w_t\right\|_1^2+\zeta\left\|w\right\|_1^2+C_1-2\alpha\left\|w_t\right\|_1^2+\epsilon'\left\|w_t\right\|_1^2\\
&+2\delta\epsilon\left\|w_t\right\|_1^2-2\delta\left\|w\right\|_2^2+2\delta\left\langle g, Aw\right\rangle+\frac{\delta}{2}\left\|w\right\|_2^2+\frac{\delta}{2}\epsilon\left\|w_t\right\|_1^2\\
&+\frac{\delta^2}{2}\alpha\left\|w\right\|_1^2+\delta^2\epsilon\left\langle w_t, Aw\right\rangle-\delta\left\langle g, Aw\right\rangle+\frac{\delta c}{2},
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Psi_1+\frac{\delta}{2}\Psi_1-\left[2\delta\epsilon'+\delta^2\epsilon\right]\left\langle w_t, Aw\right\rangle-\left[\eta-2\alpha+\epsilon'+\frac{5\delta\epsilon}{2}\right]\left\|w_t\right\|_1^2\\
&\quad-\left[\zeta+\frac{\delta^2\alpha}{2}\right]\left\|w\right\|_1^2+\frac{3\delta}{2}\left\|w\right\|_2^2-\delta\left\langle g, Aw\right\rangle\leqslant\hat{C},
\end{aligned}
$$

onde $\hat{C} = C_1+\dfrac{\delta c}{2}$.

Definamos agora

$$
\begin{aligned}
\Gamma ={}& -\left[2\delta\epsilon'+\delta^2\epsilon\right]\left\langle w_t, Aw\right\rangle-\left[\eta-2\alpha+\epsilon'+\frac{5\delta\epsilon}{2}\right]\left\|w_t\right\|_1^2\\
&-\left[\zeta+\frac{\delta^2\alpha}{2}\right]\left\|w\right\|_1^2+\frac{3\delta}{2}\left\|w\right\|_2^2-\delta\left\langle g, Aw\right\rangle,
\end{aligned}
$$

e observe que tomando $\eta < 2\alpha$ e $\delta, \zeta > 0$ suficientemente pequenos, temos $\Gamma \geqslant 0$. Neste caso,

$$
\frac{d}{dt}\Psi_1+\frac{\delta}{2}\Psi_1\leqslant\frac{d}{dt}\Psi_1+\frac{\delta}{2}\Psi_1+\Gamma\leqslant\hat{C} \tag{3.51}
$$

o que conclui a verificação da Afirmação 6.

Aplicando agora o Lema 3.1.8 à desigualdade (3.51) com $2\omega = \frac{\delta}{2}$, $q(t) \equiv 0$ e $k = \hat{C}$ chegamos a

$$\Psi_1(t) \leqslant \Psi_1(\tau)e^0 e^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + \frac{4\hat{C}e^0}{\delta} = \Psi_1(\tau)e^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + \frac{4\hat{C}}{\delta}, \tag{3.52}$$

Da Afirmação 1 extraímos que $\Psi_1(\tau) \leqslant 2\|U_1(\tau,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau} + 2c = 2c$, o que unindo com (3.52) nos dá $\Psi_1(t) \leqslant 2ce^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + \frac{4\hat{C}}{\delta}$. Usando a Afirmação 1 novamente temos

$$\|U_1(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant 4\Psi_1(t) \leqslant 8ce^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)} + \frac{16\hat{C}}{\delta} \leqslant 8c + \frac{16\hat{C}}{\delta}.$$

Por fim,

$$\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant \sqrt{8c + \frac{16\hat{C}}{\delta}} = M_1, \quad \forall t \geqslant \tau$$

e

$$\sup_{t\geqslant\tau} \|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant M_1,$$

o que conclui a demonstração do lema. ■

Observação 3.3.9. *De maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 3.3.3, chegamos a*

$$\|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant Ce^{-\delta(t-\tau)} \text{ para todo } t \geqslant \tau,$$

para o processo $\mathcal{U}_0$ obtido nessa nova decomposição.

Teorema 3.3.10. *O atrator pullback tempo-dependente $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ do processo $\mathcal{U}$ é tal que A_t é limitado em $\mathcal{H}^1_t$, com limitação independente de t.*

Demonstração: Defina $K^1_t = \left\{z \in \mathcal{H}^1_t : \|z\|_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant M_1\right\} \subset \mathcal{H}^1_t$ onde M_1 é a mesma constante do Lema 3.3.8. Deste mesmo lema temos $\|U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant M_1$ para todo $t \geqslant \tau$, de onde segue que $U_1(t,\tau)z \in K^1_t$ para todo $t \geqslant \tau$. Logo

$$\begin{aligned}\inf_{w\in K^1_t} \|U(t,\tau)z - w\|_{\mathcal{H}_t} &\leqslant \|U(t,\tau)z - U_1(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \\ &= \|U_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t} \overset{(1)}{\leqslant} Ce^{-\delta(t-\tau)},\end{aligned}$$

onde em (1) aplicamos a Observação 3.3.9. Segue disso que

$$\delta_t(U(t,\tau)A_\tau, K_t^1) = \sup_{z\in A_\tau} \inf_{w\in K_t^1} \|U(t,\tau)z - w\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant Ce^{-\delta(t-\tau)},$$

e tomando o limite quando $\tau \longrightarrow -\infty$ na desigualdade acima obtemos

$$\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t,\tau)A_\tau, K_t^1) \leqslant \lim_{\tau\to-\infty} Ce^{-\delta(t-\tau)} = 0.$$

Usando a invariância de $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ concluímos que $\delta_t\left(A_t, K_t^1\right) = 0$. Portanto, $A_t \subset \overline{A_t} \subset \overline{K_t^1} = K_t^1$, de onde segue que A_t é limitado em $\mathcal{H}_t^1$, com limitação independente do tempo t. ∎

Capítulo 4

Comportamento do atrator pullback para processos TDS

Neste capítulo final da dissertação faremos um estudo do artigo [14] o qual aborda a relação entre o atrator pullback tempo-dependente para processos e o *atrator global* de um semigrupo limite. Na Seção 4.2 será feita uma abordagem puramente teórica desta questão, enquanto a Seção 4.3 traz uma aplicação deste estudo aos atratores que aparecem nas equações de onda.

4.1 Atratores para semigrupos

Nesta seção apresentaremos algumas definições básicas da teoria de semigrupos (análogas àquelas feitas na parte de processos de evolução), bem como um resultado de caracterização do atrator global através de *soluções globais.*

Vejamos como ficam as definições de invariância (Definição 1.2.5) e atração (Definição 1.2.4) no caso de semigrupos[1].

Definição 4.1.1. *Invariância: um conjunto $B \subset X$ é **invariante** pelo semigrupo $\mathcal{T}$ se $T(t)B = B$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Atração: Sejam $A, B \subset X$ e $\mathcal{T}$ semigrupo. Então B **atrai** *A sob a ação de $\mathcal{T}$ se $\lim\limits_{t\to\infty} dist_H(T(t)A, B) = 0$.*

[1] Veja Definição 1.1.3

Definição 4.1.2. *Seja $\mathcal{T}$ semigrupo em X. Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um* ***atrator global*** *para o semigrupo $\mathcal{T}$ se $\mathcal{A}$ é compacto, invariante e atrai conjuntos limitados de X sob a ação de $\mathcal{T}$, ou seja, $\lim_{t\to\infty} dist_H(T(t)D, \mathcal{A}) = 0$ para todo $D \subset X$ limitado.*

Aqui, diferentemente do caso não-autônomo, não precisamos da hipótese de minimalidade para garantir que o atrator global seja único. De fato, suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sejam atratores globais de $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}$ é compacto em X, segue que $\mathcal{B}$ é limitado em X. Do fato que $\mathcal{A}$ atrai subconjuntos limitados de X concluímos que $\mathcal{A}$ atrai $\mathcal{B}$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(T(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0. \tag{4.1}$$

Por outro lado, como $\mathcal{B}$ é invariante, temos

$$dist_H(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = dist_H(T(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}), \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.2}$$

e de (4.1) e (4.2) segue que $dist_H(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$ e concluímos que $\overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Analogamente se verifica que $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{B}}$, o que implica $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$. Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fechados, segue que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Definição 4.1.3. *Uma* ***solução global*** *de $\mathcal{T}$ por $x \in X$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para $t \in \mathbb{R}^+$ e $s \in \mathbb{R}$.*

Temos o seguinte resultado de caracterização para o atrator global de um semigrupo.

Teorema 4.1.4. *Quando $\mathcal{A}$ existe, temos*

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe solução global limitada por } x\}.$$

Demonstração: Como nos Capítulos 1 e 2, faremos adiante um resultado mais geral para processos-TDS, que dará este resultado como caso particular. ■

A partir de agora o atrator global para um semigrupo $\mathcal{T}$, quando existe, será denotado por A_∞. A razão para isso ficará clara mais adiante.

4.2 Evolução do atrator pullback

Nosso foco nesta seção é apresentar um resultado que nos garante, de certa forma, a convergência dos elementos A_t do atrator pullback tempo-dependente $\mathcal{A}$ para o conjunto A_∞ (que é o atrator global para semigrupo).

Proposição 4.2.1. *Suponha que a família* $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *seja um atrator pullback tempo-dependente. Se* $\hat{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é uma família invariante uniformemente limitada, então* $\hat{C} \subset \mathcal{A}$.

Demonstração: Como $\mathcal{A}$ é pullback atraente e $\mathcal{C}$ é uniformemente limitada, segue que $\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t\left(U(t,\tau)C_\tau, A_t\right) = 0$ e da invariância de $\mathcal{C}$ temos $U(t,\tau)C_\tau = C_t$, logo $\delta_t\left(C_t, A_t\right) = 0$ e consequentemente $\overline{C}_t \subset \overline{A}_t$ para todo t. Como A_t é fechado para todo t, segue que $C_t \subset \overline{C}_t \subset \overline{A}_t = A_t$ e portanto $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. ■

A seguir definimos o conceito de *trajetória completa limitada*, que em certo sentido é uma generalização da ideia de solução global para semigrupos, no contexto de processos-TDS, que vimos na seção anterior.

Definição 4.2.2. *Uma* ***trajetória completa limitada (TCL)*** *de* $\mathcal{U}$ *é uma função* ϕ *tal que* $t \longmapsto \phi(t) \in X_t$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|_{X_t} < \infty$ *e* $\phi(t) = U(t,\tau)\phi(\tau)$ *para todos* $\tau, t \in \mathbb{R}$ *com* $t \geqslant \tau$.

Com isso apresentamos um resultado análogo ao Teorema 4.1.4, agora exibindo uma caracterização para o atrator pullback tempo-dependente envolvendo trajetórias completas limitadas.

Teorema 4.2.3. *Se* $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é atrator pullback tempo-dependente de* $\mathcal{U}$ *então*

$$A_t = \{\phi(t) \in X_t : \phi \text{ é TCL de } \mathcal{U}\}.$$

Demonstração: Seja $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ onde $\tilde{A}_t = \{\phi(t) \in X_t : \phi \text{ é TCL de } \mathcal{U}\}$. Comecemos provando que $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ e para isso fixe $s \in \mathbb{R}$ e tome $y \in A_s$ qualquer. Construa a sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \text{Denote } y_0 = y \in A_s. \\ \text{ Tome } y_1 \in A_{s-1} \text{ onde } y_0 = U(s,s-1)y_1. \\ \text{ Tome } y_2 \in A_{s-2} \text{ onde } y_1 = U(s-1,s-2)y_2. \\ \qquad \vdots \\ y_{n+1} \in A_{s-(n+1)} \text{ onde } y_n = U(s-n, s-(n+1))y_{n+1}. \end{cases}$$

Observe que na construção acima usamos o tempo todo a invariância de $\mathcal{A}$. Note ainda que se $n \geqslant m$ temos $y_m = U(s-m, s-n)y_n$, com $y_n \in A_{s-n}$ e $y_m \in A_{s-m}$. Defina $\phi(t) = U(t, s-n)y_n$ para $t \geqslant s-n$ e observe que se $n \geqslant m$ (sem perda de generalidade) e $t \geqslant s-m$, temos

$U(t,s-n)y_n = U(t,s-m)U(s-m,s-n)y_n = U(t,s-m)y_m$, mostrando que ϕ está bem definida.

Vejamos que ϕ é TCL de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{A}$ é uniformemente limitado existe $R > 0$ tal que $A_t \subset \mathbb{B}_t(R)$ para todo t. Além disso, como $\phi(t) \in A_t$ segue que $\phi(t) \in \mathbb{B}_t(R)$ para todo t, ou seja, $\|\phi(t)\|_{X_t} \leqslant R$, o que implica $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|_{X_t} < \infty$.

Ademais, para $t \geqslant \tau$ temos

$$\phi(t) = U(t,s-n)y_n = U(t,\tau)U(\tau,s-n)y_n = U(t,\tau)\phi(\tau),$$

onde n foi tomado suficientemente grande tal que $\tau \geqslant s-n$. Logo $\phi(s) \in \tilde{A}_s$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\phi(s) &= U(s,s-n)y_n = U(s,s-1)U(s-1,s-2)...U(s-(n-1),s-n)y_n \\ &= y_0 = y \in \tilde{A}_s,\end{aligned}$$

e como y é qualquer em A_s, concluímos que $A_s \subset \tilde{A}_s$. Como s foi fixado aleatoriamente, finalizamos com $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$.

Agora seja ϕ uma *TCL* qualquer de $\mathcal{U}$ fixa e defina a família $\mathcal{F}_\phi = \{\phi(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Como ϕ é TCL temos $\phi(t) = U(t,\tau)\phi(\tau)$, o que nos dá a invariância da família $\mathcal{F}_\phi$. Além disso da segunda condição da definição de TCL segue que para cada $t \in \mathbb{R}$ temos $\|\phi(t)\|_{X_t} \leqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|_{X_t} < \infty$. Ou seja, existe $R > 0$ tal que $\phi(t) \in \mathbb{B}_t(R)$ para todo t, mostrando que $\mathcal{F}_\phi$ é uniformemente limitada. Concluímos, usando a Proposição 4.2.1, que $\mathcal{F}_\phi \subset \mathcal{A}$ e como ϕ é uma TCL qualquer, segue que $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. ■

Considere $\mathcal{X}$ espaço normado e $\{\mathcal{Y}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ família de espaços normados. Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ família de espaços da forma $X_t = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_t$, cuja norma é definida por

$$\|(a,b)\|^2_{X_t} = \|a\|^2_{\mathcal{X}} + \|b\|^2_{\mathcal{Y}_t}$$

Definimos a função **projeção sobre a primeira coordenada** $\Pi_t \colon X_t \longrightarrow \mathcal{X}$ por $\Pi_t(a,b) = a$, para cada par $(a,b) \in X_t$. Se $A \subset X_t$, então definimos $\Pi_t A = \{a \in \mathcal{X} : (a,b) \in A\} \subset \mathcal{X}$. Além disso, se temos uma família $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ com $A_t \subset X_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então denotamos $\Pi\mathcal{A} = \{\Pi_t A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Considere um processo-TDS $\mathcal{U}$ atuando na família $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ com atrator pullback tempo-dependente $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ e um semigrupo $\mathcal{T}$ atuando em $\mathcal{X}$ possua atrator global A_∞. Dos Teoremas 4.1.4 e 4.2.3, respectivamente, temos

$$A_\infty = \{x \in \mathcal{X} : \text{ existe solução global limitada por } x\}$$

e

$$\Pi\mathcal{A} = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{X} \text{ tal que } u = \Pi\phi \text{ com } \phi \text{ TCL de } \mathcal{U}\}. \tag{4.3}$$

<u>**Teorema**</u> **4.2.4.** *Suponha que dadas uma sequência* $\{\phi_n\}$ *de* TCLs *do processo* $\mathcal{U}$*, com* $\phi_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$*, e* $t_n \to \infty$ *existam uma solução global limitada* ψ *de* $\mathcal{T}$*,* $s \in \mathbb{R}$ *e uma subsequência* $\{t_{n_k}\}$ *de* $\{t_n\}$ *tais que* $\|x_{n_k}(s + t_{n_k}) - \psi(s)\|_{\mathcal{X}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \delta_{\mathcal{X}}(\Pi_t A_t, A_\infty) = 0.$$

Demonstração: Suponha por contradição que $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_{\mathcal{X}}(\Pi_t A_t, A_\infty) > 0$. Então existem sequências $t_n \to \infty$, $a_n \in \Pi_{t_n} A_{t_n}$ e $\mu > 0$ tais que $\inf\limits_{w\in A_\infty} \|a_n - w\|_{\mathcal{X}} \geqslant \mu$.

Para cada n, temos $a_n \in \mathcal{X}$ com $(a_n, b_n) \in A_{t_n}$, onde b_n é algum elemento em $\mathcal{Y}_{t_n}$. Pelo Teorema 4.2.3 existe $\phi_n = (x_n, y_n)$ TCL de $\mathcal{U}$ tal que $(a_n, b_n) = \phi_n(t_n) = (x_n(t_n), y_n(t_n))$, ou seja, $a_n = x_n(t_n)$. Definamos a função $\hat{\phi}_n = (\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ como $\hat{\phi}_n(t) = \phi_n(t - s)$.

<u>Afirmação:</u> $\hat{\phi}_n$ é TCL de $\mathcal{U}$.

De fato, usando que ϕ_n é TCL é imediato que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\hat{\phi}_n(t)\|_{X_t} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\hat{\phi}_n(t - s)\|_{X_t} < \infty$, e como $\hat{\phi}_n(t) \in A_{t-s}$ temos $U(t, t - s)\hat{\phi}_n(t) = U(t, t - s)\phi_n(t - s) = \phi_n(t) = \hat{\phi}_n(t + s) \in A_t$. Agora veja que

$$(x_n(t - s), y_n(t - s)) = \phi_n(t - s) = \hat{\phi}_n(t) = (\hat{x}_n(t), \hat{y}_n(t)),$$

o que implica $x_n(t) = x_n(t-s)$. Logo $\hat{x}_n(s+t_n) = x_n(s+t_n-s) = x_n(t_n) = a_n$, e por hipótese, existe ψ solução global limitada de $\mathcal{T}$ tal que $\|a_n - \psi(s)\|_{\mathcal{X}} = \|\hat{x}_n(s + t_n) - \psi(s)\|_{\mathcal{X}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, passando a uma subsequência se necessário. Portanto $\inf_{w\in A_\infty} \|a_n - w\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|a_n - \psi(s)\|_{\mathcal{X}} \to 0$, e chegamos a um absurdo, provando assim o resultado. ■

4.3 Aplicação às equações da onda

As condições sobre a equação da onda com velocidade de propagação variável com o tempo foram apresentadas na Seção 3.1. Além disso um estudo sobre a existência do atrator pullback tempo-dependente para o processo associado a essa equação foi feito em detalhes no decorrer do Capítulo 3.

Recorde que o processo $\mathcal{U}$ em questão é dado por

$$U(t, \tau) : \mathcal{H}_\tau \longrightarrow \mathcal{H}_t \text{ com } U(t, \tau)z = (u(t), u_t(t))$$

onde u é a única solução de (3.6) e $z = (a,b) \in \mathcal{H}_\tau$ é a condição inicial para o problema. Pelo Teorema 4.2.3, o atrator para este processo tem a seguinte forma:

$$\mathcal{A} = \{\phi : t \longrightarrow \phi(t) = (u(t), u_t(t)) \in \mathcal{H}_t \text{ com } \phi \text{ TCL de } \mathcal{U}\}$$

Por outro lado, como pode ser visto em [2, 19], a equação

$$\alpha u_t + Au + f(u) = g, \text{ para } t > 0, \tag{4.4}$$

com $u(0) = a \in H_1 = H_0^1(\Omega)$ gera um semigrupo $\mathcal{T}$ em H_1. Esse semigrupo admite atrator global A_∞, e é então caracterizado de acordo com o Teorema 4.1.4.

Note que a equação (4.4) corresponde à situação limite (quando $t \longrightarrow \infty$) de (3.6). Uma pergunta natural a se fazer é: existe alguma relação entre o atrator global do semigrupo $\mathcal{T}$ e o atrator pullback tempo-dependente para o processo-TDS $\mathcal{U}$ apresentado no Capítulo 3?

O objetivo desta seção é justamente o de responder a essa questão. Comecemos apresentando o seguinte resultado extraído de [18] e que será útil mais adiante, na demonstração do Lema 4.3.4.

Proposição 4.3.1. *Sejam X, B e Y espaços de Banach com $X \subset B \subset Y$ e $X \subset\subset B$. Se F é um conjunto limitado em $L^\infty([-T,T];X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} : f \in F\right\}$ é limitado em $L^r([-T,T];Y)$ onde $r > 1$, então F é relativamente compacto em $C([-T,T];B)$.*

Demonstração: Veja [18, Corolário 4]. ■

Para o que faremos a seguir, precisaremos da seguinte limitação:

Teorema 4.3.2. *Seja $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ atrator pullback tempo-dependente para o processo-TDS $\mathcal{U}$. Existe $c \geqslant 0$ tal que*

$$\sup_{z\in A_\tau} \sup_{t\geqslant\tau} \left[\|U(t,\tau)z\|^2_{\mathcal{H}^1_t} + \int_\tau^\infty \|u_t(y)\|^2 dy \right] \leqslant c, \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.3.3. *O resultado anterior é consequência do Teorema 3.2.7 e do Teorema 3.3.10 vistos no Capítulo 3.*

Lema 4.3.4. *Para qualquer sequência $\phi_n = (u_n, \partial_t u_n)$ de trajetórias completas limitadas do processo $\mathcal{U}$ e qualquer $t_n \to \infty$ existe uma solução global ψ do semigrupo $\mathcal{T}$ tal que para todo $T > 0$ vale*

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u_n(t+t_n) - \psi(t)\|_{H_1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ao longo de alguma subsequência.

Demonstração: Pelo Teorema 4.3.2, para cada $T > 0$, a sequência $u_n(\cdot + t_n)$ é limitada em $L^\infty([-T,T]\,;H_2)$ e a sequência $\partial_t u_n(\cdot + t_n)$ é limitada em $L^2([-T,T]\,;H)$. Aplicando a Proposição 4.3.1 com $X = H_2$, $B = H_1$, $Y = H$ e $r = 2$, concluímos que a sequência $u_n(\cdot + t_n)$ é relativamente compacta em $\mathcal{C}([-T,T]\,;H_1)$ e então existe uma solução global $\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow H_1$ tal que, passando para subsequência se necessário, temos

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u_n(t+t_n) - \psi(t)\|_{H_1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.5}$$

Assim, usando novamente o Teorema 4.3.2, concluímos que $\psi \in C(\mathbb{R}, H_1)$ e que $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\psi(t)\|_1 < \infty$. Vejamos agora que ψ é solução global de $\mathcal{T}$. Reescrevendo a equação da Seção 3.1 para u_n em $t + t_n$, temos

$$\epsilon(t+t_n)\,[u_n(t+t_n)]_{tt} + \alpha\,[u_n(t+t_n)]_t - \Delta u_n(t+t_n) + f(u_n(t+t_n)) = g,$$

e denotando $v_n(t) = u_n(t+t_n)$ e $\epsilon_n(t) = \epsilon(t+t_n)$ obtemos

$$\epsilon_n(v_n)_{tt} + \alpha(v_n)_t - \Delta v_n + f(v_n) = g,$$

e consequentemente

$$\alpha(v_n)_t = -\epsilon_n(v_n)_{tt} + \Delta v_n - f(v_n) + g. \tag{4.6}$$

Nosso próximo passo é mostrar que, em certo sentido, $\epsilon_n(v_n)_{tt}$ converge para zero, Δv_n converge para $\Delta\psi$, $f(v_n)$ para $f(\psi)$ e $(v_n)_t$ para ψ_t, quanto fazemos $n \to \infty$. Para isso, fixe $T > 0$ e φ com valores em H e suporte $(-T,T)$. Temos

$$\begin{aligned}\int \epsilon_n'(t)\,\langle \partial_t v_n(t), \varphi(t)\rangle dt \overset{(1)}{=} {}& \epsilon_n(t)\,\langle \delta_t v_n(t), \varphi(t)\rangle \\ & - \int \epsilon_n(t)\,\langle \partial_{tt} v_n(t), \varphi(t)\rangle dt + \\ & - \int \epsilon_n(t)\,\langle \partial_t v_n(t), \partial_t\varphi(t)\rangle dt,\end{aligned}$$

onde em (1) aplicamos diretamente integração por partes, e aplicando os limites de integração de $-T$ a T, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \epsilon_n(t)\,\langle \partial_{tt} v_n(t), \varphi(t)\rangle dt \overset{(2)}{=} {}& -\int_{-T}^{T} \epsilon_n'(t)\,\langle \partial_t v_n(t), \varphi(t)\rangle dt + \\ & - \int_{-T}^{T} \epsilon_n(t)\,\langle \partial_t v_n(t), \partial_t\varphi(t)\rangle dt,\end{aligned}$$

onde em (2) usamos que

$$\epsilon_n(T)\,\langle \delta_t v_n(T), \varphi(T)\rangle - \epsilon_n(-T)\,\langle \delta_t v_n(-T), \varphi(-T)\rangle = 0,$$

já que $\varphi(T) = \varphi(-T) = 0$. Então

$$\begin{aligned}\left|\int_{-T}^{T} \epsilon_n(t)\, \langle \partial_{tt} v_n(t), \varphi(t)\rangle dt\right| &\leqslant \int_{-T}^{T} \frac{|\epsilon_n'(t)|}{\sqrt{\epsilon_n(t)}} \sqrt{\epsilon_n(t)}\, \|\partial_t v_n(t)\|\, \|\varphi(t)\| dt \\ &+ \int_{-T}^{T} \sqrt{\epsilon_n(t)}\sqrt{\epsilon_n(t)}\, \|\partial_t v_n(t)\|\, \|\partial_t \varphi(t)\| dt \\ &\overset{(3)}{\leqslant} c \int_{-T}^{T} \frac{|\epsilon_n'(t)|}{\sqrt{\epsilon_n(t)}} \sqrt{\epsilon_n(t)}\, \|\partial_t v_n(t)\|_1 dt \\ &+ c \int_{-T}^{T} \sqrt{\epsilon_n(t)}\sqrt{\epsilon_n(t)}\, \|\partial_t v_n(t)\|_1 dt,\end{aligned}$$

onde em (3) usamos a Desigualdade de Poincaré e a limitação para as normas $L^2([-T,T];H)$ de φ e $\partial_t \varphi$, já que elas têm suporte em $(-T,T)$.

Usando o Teorema 4.3.2 novamente temos $\sqrt{\epsilon_n(t)}\, \|\partial_t v_n(t)\|_1 \leqslant K$ para alguma constante $K > 0$, logo

$$\begin{aligned}\left|\int_{-T}^{T} \epsilon_n(t)\, \langle \partial_{tt} v_n(t), \varphi(t)\rangle dt\right| &\leqslant cK \int_{-T}^{T} \sqrt{\epsilon_n(t)} dt \\ &+ cK \int_{-T}^{T} \frac{|\epsilon_n'(t)|}{\sqrt{\epsilon_n(t)}} dt \\ &\overset{(4)}{\leqslant} 2cKT \sup_{t\in[-T,T]} \sqrt{\epsilon_n(t)} \\ &+ 2cK\left[\sqrt{\epsilon_n(-T)} - \sqrt{\epsilon_n(T)}\right],\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde em (4) usamos

$$\int_{-T}^{T} \sqrt{\epsilon_n(t)} dt \leqslant 2T \sup_{t\in[-T,T]} \sqrt{\epsilon_n(t)}$$

e também que

$$\int_{-T}^{T} \frac{|\epsilon_n'(t)|}{\sqrt{\epsilon_n(t)}} dt = \int_{-T}^{T} \frac{-\epsilon_n'(t)}{\sqrt{\epsilon_n(t)}} dt = \left(-2\sqrt{\epsilon_n(t)}\right)_{-T}^{T} = 2\left[\sqrt{\epsilon_n(-T)} - \sqrt{\epsilon_n(T)}\right].$$

Agora note que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in[-T,T]} \sqrt{\epsilon_n(t)} = 0$, o que juntamente com 4.7 nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T}^{T} \epsilon_n(t)\, \langle \partial_{tt} v_n(t), \varphi(t)\rangle dt = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}\|-Av_n(t)-f(v_n(t))+A\psi(t)+f(\psi(t))\|_{-1} &\leqslant \|Av_n(t)-A\psi(t)\|_{-1}\\ &+\|f(v_n(t))-f(\psi(t))\|_{-1}\leqslant \|v_n(t)-\psi(t)\|_1\\ &+C\|f(v_n(t))-f(\psi(t))\|,\end{aligned}$$

e como $\sup_{t\in[-T,T]}\|f(v_n(t))-f(\psi(t))\| \leqslant C\sup_{[-T,T]}\|v_n(t)-\psi(t)\|_1$ pelo Lema 3.1.7, usando (4.5), temos $-Av_n-f(v_n)$ converge para $-A\psi-f(\psi)$ em $L^\infty([-T,T];H^{-1})$.

Finalmente, se $\varphi:[-T,T]\to H$ é uma função suave com suporte em (-T,T), usando as convergências acima e (4.6), obtemos

$$\int_{-T}^{T}\langle\alpha(v_n)_t(t),\varphi(t)\rangle dt=-\int_{-T}^{T}\langle\alpha v_n(t),\varphi_t(t)\rangle dt,$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}\langle\alpha(v_n)_t(t),\varphi(t)\rangle dt=-\int_{-T}^{T}\langle\alpha\psi(t),\varphi_t(t)\rangle dt,$$

mas

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}\langle\alpha(v_n)_t(t),\varphi(t)\rangle dt\\ &=\int_{-T}^{T}\langle-\epsilon_t(t)(v_n)_{tt}(t)-Av_n(t)-f(v_n(t))+g,\varphi(t)\rangle dt\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_{-T}^{T}\langle-A\psi(t)-f(\psi(t))+g,\varphi(t)\rangle dt,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{-T}^{T}\langle\alpha\psi(t),\varphi_t(t)\rangle dt=-\int_{-T}^{T}\langle-A\psi(t)-f(\psi(t))+g,\varphi(t)\rangle dt.$$

Concluímos então que ψ tem uma derivada fraca e além disso $\alpha\psi_t-\Delta\psi+f(\psi)=g$, o que mostra que ψ é solução global de $\mathcal{T}$ e conclui a demonstração. ■

<u>Teorema</u> 4.3.5.

$$\lim_{t\to\infty}\delta_{H_1}\left(\Pi_t A_t, A_\infty\right)=0$$

Demonstração: Segue diretamente da aplicação do lema anterior e o Teorema 4.2.4. ■

Note que o teorema acima nos diz que o atrator tempo-dependente para o processo-TDS $\mathcal{U}$ se comporta assintoticamente como o atrator global para o semigrupo limite $\mathcal{T}$.

Apêndice A

Resultados técnicos

Neste apêndice demonstraremos ou apresentaremos as referências para alguns resultados técnicos que usamos frequentemente no decorrer do trabalho. Estes resultados, embora muito importantes, pertencem a temas transversais ao escopo desta dissertação. Isso justifica a nossa opção por explorá-los nesta seção a parte.

Demonstração do Lema 3.1.1: Temos

$$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

o que mostra o resultado. ∎

Demonstração do Lema 3.1.2: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [3, pg. 2], assumindo v diferenciável. O caso absolutamente contínuo segue diretamente deste. ∎

Demonstração da Proposição 3.1.3: O operador $A\colon D(A) \subset H \to H$ possui um sistema ortonormal completo de autovetores $\{v_n\}$ em H onde $Av_n = \lambda_n v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ são os autovalores para este operador, contados de acordo com sua multiplicidade. Além disso, de [21, pg. 296] temos $A^{1/2}u = \sum_n \lambda_n^{1/2} \langle u_n, u\rangle\, u_n$ e assim

$$\begin{aligned}\left\|A^{1/2}u\right\|^2 &= \sum_n \lambda_n \left|\langle u_n, u\rangle\right|^2 \left\|u_n\right\|^2 = \sum_n \lambda_n \left|\langle u_n, u\rangle\right|^2 \\ &\geqslant \lambda_1 \sum_n \left|\langle u_n, u\rangle\right|^2 = \lambda_1 \left\|u\right\|^2\end{aligned}$$

Portanto, $\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\left\|A^{1/2}u\right\|^2 = \frac{1}{\lambda_1}\|u\|_1^2$. ∎

Demonstração da Proposição 3.1.4: Defina $\tilde{f}(s) = -f(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. De (3.4) segue que

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} < \lambda_1.$$

Logo para alguns $\kappa > 0$ e $M > 0$ vale

$$\frac{\tilde{f}(s)}{s} \leqslant \lambda_1 - \kappa \text{ para todo } |s| \geqslant M.$$

onde $\lambda_1 - \kappa > 0$.

Disso segue que $\tilde{f}(s) \leqslant (\lambda_1 - \kappa)s$ para $s \geqslant M$ e $\tilde{f}(s) \geqslant (\lambda_1 - \kappa)s$ para $s \leqslant -M$.

Usando a continuidade de $\tilde{f}$ temos $\int_0^M \tilde{f}(\tau)d\tau \leqslant C_1$ e $\int_{-M}^0 \tilde{f}(\tau)d\tau \leqslant C_2$ para alguns $C_1, C_2 > 0$. Separando em casos:

Caso 1 ($s \geqslant 0$):

$$\begin{aligned}\int_0^s \tilde{f}(\tau)d\tau = \int_0^M \tilde{f}(\tau)d\tau + \int_M^s \tilde{f}(\tau)d\tau \leqslant C_1 + \int_0^s (\lambda_1 - \kappa)\tau d\tau \\ \leqslant C_1 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa)s^2.\end{aligned}$$

Caso 2 ($s < 0$):

$$\begin{aligned}\int_0^s \tilde{f}(\tau)d\tau = -\int_s^0 \tilde{f}(\tau)d\tau &= -\int_{-M}^0 \tilde{f}(\tau)d\tau - \int_s^{-M} \tilde{f}(\tau)d\tau \\ &\leqslant C_2 - \int_s^{-M} (\lambda_1 - \kappa)\tau d\tau \\ &\leqslant C_2 - \int_s^0 (\lambda_1 - \kappa)\tau d\tau = C_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa)s^2.\end{aligned}$$

Se $c = \max\{C_1, C_2\}$ concluímos que

$$F(s) = -\tilde{F}(s) \geqslant -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa)|s|^2 - c$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. ■

Demonstração do Lema 3.1.5: Usando a Proposição 3.1.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
2\langle F(u),1\rangle &= 2\int_\Omega F(u)dx \geqslant -2\int_\Omega \frac{1}{2}(\lambda_1-\kappa)\left|u\right|^2 + c\ dx \\
&= -(\lambda_1-\kappa)\int_\Omega \left|u\right|^2 dx - 2\int_\Omega cdx = -(\lambda_1-\kappa)\left\|u\right\|^2 - 2c\left|\Omega\right| \\
&\overset{(1)}{\geqslant} -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1-\kappa)\left\|u\right\|_1^2 - c_1 = -\left(1-\frac{\kappa}{\lambda_1}\right)\left\|u\right\|_1^2 - c_1 \\
&= -(1-\mu)\left\|u\right\|_1^2 - c_1
\end{aligned}
$$

onde $\kappa > 0$ é algum valor tal que $\lambda_1 - \kappa > 0$ e consequentemente $0 < \mu = \frac{\kappa}{\lambda_1} < 1$. Além disso denotamos $c_1 = 2c|\Omega|$. Em (1) aplicamos diretamente a Desigualdade de Poincaré. ■

Demonstração do Lema 3.1.6: Da hipótese (3.4) seque que dado $\eta > 0$, existe constante $C > 0$ tal que $f(s)s \geqslant (\eta-\lambda_1)s^2 + C$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f(u)udx &\geqslant \int_\Omega (\eta-\lambda_1)|u|^2dx + C|\Omega| = (\eta-\lambda_1)\|u\|^2 + C|\Omega| \\
&\overset{(1)}{\geqslant} -\left(1-\frac{\eta}{\lambda_1}\right)\|u\|_1^2 + C|\Omega|,
\end{aligned}
$$

onde em (1) usamos a Desigualdade de Poincaré. O resultado segue escolhendo $0 < \eta < \lambda_1$ e definindo $\mu = \frac{\eta}{\lambda_1}$. ■

Demonstração do Lema 3.1.7: Inicialmente vejamos que para $s, t \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
|f(s)-f(t)| &\leqslant |f'(\xi)|\,|s-t| = |f'(\xi)+f'(0)-f'(0)|\,|s-t| \\
&\leqslant |f'(\xi)-f'(0)|\,|s-t| + |f'(0)|\,|s-t| \\
&\leqslant |f''(\eta)|\,|\xi|\,|s-t| + k\,|s-t| \overset{(1)}{\leqslant} c(1+|\eta|)\,|\xi|\,|s-t| + k\,|s-t| \\
&\leqslant [c(1+|\xi|)\,|\xi| + k]\,|s-t| \overset{(2)}{\leqslant} \left[c_1(1+|\xi|^2)+k\right]|s-t|
\end{aligned}
$$

onde $|\eta| \leqslant |\xi| \leqslant |s| + |t|$ e denotamos $k = |f'(0)|$. Em (1) usamos a hipótese (3.3) para f e em (2) a constante c_1 surge ao observarmos que $[(1+x)x]/[1+x^2]$ é limitado para $x \geqslant 0$. Além disso, observe que $|\xi|^2 \leqslant (|s|+|t|)^2 \leqslant |s|^2 + 2\,|s|\,|t| + |t|^2 \leqslant 2\,|s|^2 + 2\,|t|^2$. Logo,

$$
|f(s)-f(t)| \leqslant \left[c_1 + 2c_1\,|s|^2 + 2c_1\,|t|^2 + k\right]|s-t| \leqslant M(1+|s|^2+|t|^2)\,|s-t|,
$$

onde $M = \max\{c_1 + k, 2c_1\}$. Aplicando isso às funções u_1 e u_2 no lugar de s e t e considerando as imersões $H_1 \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $H_1 \hookrightarrow L^8(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\|f(u_1) - f(u_2)\| &\leqslant M_1 \left(1 + \|u_1\|_{L^8}^2 + \|u_2\|_{L^8}^2\right) \|u_1 - u_2\|_{L^4} \\ &\leqslant M_2 \left(1 + \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2\right) \|\overline{u}\|_1 \leqslant C \|\overline{u}\|_1 ,\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ■

Para a demonstração do Lema 3.1.8, precisaremos antes do seguinte resultado:

Lema A.0.1. *Seja $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ função absolutamente contínua que satisfaz para algum $\omega > 0$ e quase todo $t \geqslant 0$*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) + 2\omega\varphi(t) \leqslant h_1(t)\varphi(t) + h_2(t), \tag{A.1}$$

onde

$$\int_s^t h_1(y)dy \leqslant m_1 + \omega(t - s) \text{ para todo } s \in [0, t] \tag{A.2}$$

e

$$\sup_{t \geqslant 0} \int_t^{t+1} |h_2(y)| \, dy \leqslant m_2,$$

para algumas constantes $m_1, m_2 \geqslant 0$. Então

$$\varphi(t) \leqslant e^{m_1} |\varphi(0)| e^{-\omega t} + e^{m_1} e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega s} |h_2(s)| \, ds.$$

Demonstração: Vamos provar este resultado aplicando o Lema 3.1.2 à desigualdade (A.1). Podemos reescrever (A.1) como

$$\varphi'(t) \leqslant (h_1(t) - 2\omega)\, \varphi(t) + h_2(t) \text{ para quase todo } t \geqslant 0.$$

Pelo Lema 3.1.2 segue que

$$\begin{aligned}\varphi(t) \leqslant{}& \varphi(0) \exp\left(\int_0^t (h_1(s) - 2\omega)\, ds\right) \\ &+ \int_0^t h_2(s) \exp\left(\int_s^t (h_1(r) - 2\omega)\, dr\right) ds \\ \leqslant{}& |\varphi(0)| \exp\left(\int_0^t (h_1(s) - 2\omega)\, ds\right) \\ &+ \int_0^t |h_2(s)| \exp\left(\int_s^t (h_1(r) - 2\omega)\, dr\right) ds.\end{aligned} \tag{A.3}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_0^t h_1(s) - 2\omega ds\right) &= \exp\left(\int_0^t h_1(s)ds\right).e^{-2\omega t}\\ &\overset{(1)}{\leqslant} e^{m_1+\omega t}e^{-2\omega t} = e^{m_1}e^{-\omega t},\end{aligned} \tag{A.4}$$

e também que

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_s^t h_1(r) - 2\omega dr\right) &= \exp\left(\int_s^t h_1(r)dr\right)e^{-2\omega(t-s)}\\ &\overset{(2)}{\leqslant} e^{m_1+\omega(t-s)}e^{-2\omega(t-s)} = e^{m_1}e^{-\omega t}e^{\omega s},\end{aligned}$$

onde em (1) e (2) apenas usamos (A.2). Logo

$$\begin{aligned}&\int_0^t |h_2(s)|\exp\left(\int_s^t h_1(r) - 2\omega dr\right)ds\\ &\leqslant e^{m_1}e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}|h_2(s)|\,ds.\end{aligned} \tag{A.5}$$

Portanto, aplicando (A.4) e (A.5) em (A.3) obtemos

$$\varphi(t) \leqslant |\varphi(0)|\,e^{m_1}e^{-\omega t} + e^{m_1}e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}|h_2(s)|\,ds.$$

■

Demonstração do Lema 3.1.8: Para um certo τ fixado defina

$$\begin{cases}\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } \varphi(t) = \psi(t+\tau),\\ h_1 : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } h_1(t) = q(t+\tau),\\ h_2 : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } h_2(t) = k.\end{cases}$$

Note que

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}|h_2(y)|\,dy = \sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1} kdy = \sup_{t\geqslant 0}\left[k(t+1) - kt\right] = \sup_{t\geqslant 0} k = k = m_2$$

e, para todo $s \in [0,t]$, temos:

$$\begin{aligned}\int_s^t h_1(y)dy = \int_s^t q(y+\tau)dy &= \int_{s+\tau}^{t+\tau} q(z)dz\\ &\leqslant \int_\tau^\infty q(z)dz \leqslant m \leqslant m_1 + \omega(t-s),\end{aligned}$$

para $m_1 = m$. Além disso para $t \geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}\varphi'(t) + 2\omega\varphi(t) &= \psi'(t+\tau) + 2\omega\psi(t+\tau)\\ &\leqslant q(t+\tau)\psi(t+\tau) + k = h_1(t)\varphi(t) + h_2(t),\end{aligned}$$

e portanto estamos em condições de aplicar o Lema $A.0.1$, que nos dá

$$\begin{aligned}\psi(t+\tau) = \varphi(t) &\leqslant e^{m_1}\left|\varphi(0)\right| e^{-\omega t} + e^{m_1}e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}\left|h_2(s)\right| ds\\ &= e^m\psi(\tau)e^{-\omega t} + e^m e^{-\omega t}k\omega^{-1}\left(e^{\omega t} - 1\right)\\ &= e^m\psi(\tau)e^{-\omega t} - ke^m e^{-\omega t}\omega^{-1} + ke^m\omega^{-1} \leqslant e^m\psi(\tau)e^{-\omega t} + ke^m\omega^{-1}\end{aligned}$$

Fazendo $s = t+\tau$ chegamos a

$$\psi(s) \leqslant \psi(\tau)e^m e^{-\omega(s-\tau)} + k\omega^{-1}e^m.$$

■

Demonstração do Lema 3.1.9: Para $0 \leqslant x \leqslant 1$ temos

$$\frac{(1+x)^k}{1+x^k} \leqslant (1+x)^k \leqslant 2^k.$$

Já para $x \geqslant 1$ temos

$$\frac{(1+x)^k}{1+x^k} \leqslant \frac{(1+x)^k}{x^k} = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^k \leqslant 2^k,$$

e conclui a demonstração. ■

Demonstração do Lema 3.3.1: De (3.4) existe $M > 0$ tal que

$$\frac{f(s)}{s} \geqslant -\lambda_1 \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ com } |s| \geqslant M,$$

e logo

$$\left(f(s) + s\lambda_1\right)s \geqslant 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ com } |s| \geqslant M.$$

Agora seja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant h \leqslant 1$, $h \equiv 1$ em $[-M, M]$ e $h \equiv 0$ em $[-2M, 2M]^c$. Defina $f_0(s) = (1 - h(s))(f(s) + s\lambda_1)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Temos

$$f_0'(s) = -h'(s)\left(f(s) + s\lambda_1\right) + (1 - h(s))(f'(s) + \lambda_1)$$

e

$$
\begin{aligned}
&f_0''(s) = \\
&= [-h''(s)(f(s)+s\lambda_1) - h'(s)(f'(s)+\lambda_1) - h'(s)(f'(s)+\lambda_1)] \quad \text{(A.6)}\\
&+ (1-h(s))f''(s).
\end{aligned}
$$

Como $f(0)=0$ obtemos $f_0(0)=(1-h(0))f(0)=0$. Como $h(0)=1$ concluímos também que $f_0'(0) = -h'(0)f(0) + (1-h(0))\left(f'(0)+\lambda_1\right) = 0$. Note ainda que a expressão entre colchetes em (A.6) se anula em $[-2M,2M]^c$, o que implica que será limitada em $\mathbb{R}$. Como $0 \leqslant 1-h(s) \leqslant 1$, usando (3.3) concluímos que existe $k \geqslant 0$ tal que $|f_0''(s)| \leq k(1+|s|)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Observe ainda que

$$
f_0(s)s = \begin{cases} 0, & |s| \leqslant M \\ (1-h(s))(f(s)s+s^2\lambda_1), & M < |s| < 2M \\ f(s)s+s^2\lambda_1, & |s| \geqslant 2M \end{cases}
$$

e como $1-h(s) \geqslant 0$ para todo s, segue que $f_0(s)s \geqslant 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por fim, defina

$$
\begin{aligned}
f_1(s) &= f(s) - f_0(s) = f(s) - (1-h(s))(f(s)+s\lambda_1)\\
&= h(s)f(s) + s\lambda_1(h(s)-1).
\end{aligned}
$$

Derivando obtemos

$$
f_1'(s) = h'(s)f(s) + h(s)f'(s) + \lambda_1(h(s)-1) + s\lambda_1 h'(s),
$$

e como h se anula fora de $[-2M,2M]$, concluímos que $|f_1'(s)| \leqslant k$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e conclui a demonstração do lema. ■

Demonstração da Proposição 3.3.2: Primeiramente observemos que

$$
\begin{aligned}
|f_0(s)| &\leqslant |f_0'(\xi)|\,|s| \leqslant |f_0''(\eta)|\,|\xi|\,|s| \overset{(1)}{\leqslant} k(1+|\eta|)\,|\xi|\,|s|\\
&\leqslant k(1+|s|)\,|s|^2 \overset{(2)}{\leqslant} k_1\left(|s|+|s|^3\right),
\end{aligned}
$$

onde $|\eta| \leqslant |\xi| \leqslant |s|$ e em (1) usamos (3.23). Além disso, note que $[(1+x)x^2]/[x+x^3]$ é limitado para $x \geqslant 0$, logo tomando $x=|s|$ existe uma constante k_1 que satisfaz a desigualdade (2).

Portanto, existe uma constante $\widehat{K} \geqslant 0$ tal que

$$\int_\Omega |F_0(v)|\,dx \leqslant \int_\Omega \widehat{K}(|v|^2 + |v|^4)dx = \widehat{K}\left(\|v\|^2 + \|v\|_{L^4}^4\right)$$
$$\overset{(3)}{\leqslant} K(\|v\|_1^2 + \|v\|_1^4) \leqslant K(1 + \|v\|_1^2)\,\|v\|_1^2$$

onde na desigualdade (3) a constante K surge ao usarmos as imersões $H_1 \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $H_1 \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Para a primeira desigualdade, defina $\tilde{f}_0(s) = -f_0(s)$ para todo s. De (3.23) segue que $\tilde{f}_0(s)s \leqslant 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e consequentemente $\frac{\tilde{f}_0(s)}{s} \leqslant 0$ para $s \neq 0$. Logo se $\eta > 0$ temos $\frac{\tilde{f}_0(s)}{s} \leqslant \eta$ para todo $s \neq 0$.

Ou seja, se s é não nulo vale

$$\int_0^s \tilde{f}_0(\tau)d\tau = \int_0^s \frac{\tilde{f}_0(\tau)}{\tau}\tau d\tau \leqslant \left|\int_0^s \eta\,|\tau|\,d\tau\right| = \frac{\eta}{2}s^2,$$

e se $s = 0$ isso segue trivialmente. Então definindo $\tilde{F}_0(s) = \int_0^s \tilde{f}_0(y)dy$, para $v \in H_1$, temos

$$-\langle F_0(v), 1\rangle = \left\langle \tilde{F}_0(v), 1\right\rangle = \int_\Omega \tilde{F}_0(v)dx \leqslant \int_\Omega \frac{\eta}{2}|v|^2\,dx = \frac{\eta}{2}\|v\|^2 \leqslant \frac{\eta}{2\lambda_1}\|v\|_1^2,$$

e como $\eta > 0$ é arbitrário, o resultado segue. ■

Referências Bibliográficas

[1] J. Arrieta, A. N. Carvalho and J. Hale, *A damped hyperbolic equation with critical exponent*, Commun. in Partial Differential Equations **17**, 841-866 (1992).

[2] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam (1992).

[3] D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Integral Inequalities and Applications*, Mathematics and its applications, Springer Netherlands (1992).

[4] T. Caraballo, R. Colucci, and X. Han, Non-autonomous dynamics of a semi-Kolmogorov population model with periodic forcing. Nonlinear Anal. Real World Appl. **31**, 661-680 (2016).

[5] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos and P. Marín-Rubio, Robustness of nonautonomous attractors for a family of nonlocal reaction-diffusion equations without uniqueness. Nonlinear Dynam. **84**, 35-50 (2016).

[6] T. Caraballo, J.A. Langa and J. Valero, Structure of the pullback attractor for a non-autonomous scalar differential inclusion. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser.**4**, 979-994 (2016).

[7] C. A. Cardoso, J.A. Langa and R. Obaya, Characterization of cocycle attractors for nonautonomous reaction-diffusion equations. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **26** (2016).

[8] A. N. Carvalho, *Análise Funcional II*, Notas de Aula ICMC-USP, `http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/AnaliseFuncional-II/AnaliseFuncional-II.pdf` (2016).

[9] A. N. Carvalho and J. Cholewa, Strongly damped wave equations in $W_0^{1,p}(\Omega)\times L^p(\Omega)$, Discrete Contin. Dyn. Syst, *Dynamical systems and differential equations. Proceeding of the 6*$^{\text{th}}$ *AIMS International Conference*, 230-239 (2007).

[10] A. N. Carvalho, J. A. Langa and J. Robinson, *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences **182**, Springer-Verlag (2012).

[11] D. N. Cheban, Global attractors of non-autonomous quasi-homogeneous dynamical systems. Electron. J. Differential Equations **10**, (2002).

[12] D. N. Cheban, Upper semicontinuity of attractors of non-autonomous dynamical systems for small perturbations. Electron. J. Differential Equations **42** (2002).

[13] M. Conti, V. Pata, R. Temam, *Attractors for processes on time-dependent spaces. Applications to wave equations*, J. Differential Equations **255** , 1254-1277 (2013).

[14] M. Conti, V. Pata, *Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **19**, 1-10 (2014).

[15] P. Kloeden and M. Rasmussen, *Nonautonomous dynamical systems*, Mathematical Surveys and Monographs **176**, Am. Math. Society (2011).

[16] J. A. Langa, J. Robinson and A. C. Suárez, Antonio Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations, Nonlinearity **15**, 887-903 (2002).

[17] F. Di Plinio, G. S. Duane, R. Temam, *Time dependent attractor for the oscillon equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **29** 141-167 (2011).

[18] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica pura ed applicata **146**, 65-96 (1987).

[19] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, New York (1997).

[20] I.M. Volk, A generalization of the method of small parameter in the theory of non-linear oscillations of non-autonomous systems, Acad. Sci. URSS **51** 437-440 (1946).

[21] E. Zeilder, *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences **108**, Springer-Verlag (1995).

[22] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its applications II/B: Nonlinear monotone operators*, Springer-Verlag (1990).