Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Existência e Taxas de Decaimento para uma Equação Semilinear de Segunda Ordem com Derivadas Fracionárias

Claunei Kayser

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis
Abril de 2018

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Existência e Taxas de Decaimento para uma Equação Semilinear de Segunda Ordem com Derivadas Fracionárias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Claunei Kayser

Florianópolis

Abril de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Kayser, Claunei
Existência e Taxas de Decaimento para uma Equação Semilinear de Segunda Ordem com Derivadas Fracionárias / Claunei Kayser ; orientador, Ruy Coimbra Charão, 2018.
200 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equação tipo placas/Boussinesq. 3. Laplaciano fracionário. 4. Existência e unicidade de solução. 5. Taxas de decaimento. I. Charão, Ruy Coimbra. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Existência e Taxas de Decaimento para uma Equação Semilinear de Segunda Ordem com Derivadas Fracionárias

por

Claunei Kayser

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, área de concentração Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. **Ruy Coimbra Charão**
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. **Ruy Coimbra Charão** (Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. **Marcio Antonio Jorge da Silva**
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. **Cleverson Roberto da Luz**
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. **Paulo Mendes de Carvalho Neto**
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, abril de 2018.

De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?
(Augustin Louis Cauchy)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, mestre supremo do universo, pelo conhecimento, por iluminar minha mente e me guiar em Seu caminho.

Ao professor Ruy, pela orientação e por sua dedicação em toda a minha trajetória acadêmica e o mesmo tempo, pelo carinho e amizade demonstrados em todos os momentos, fundamentais para conclusão com êxito, de mais essa etapa.

Agradeço aos mestres do departamento de Matemática com quem tive a honra de conviver e ser discipulado. Sobretudo aos professores Cleverson, Danilo e Ruy, que me motivaram e encaminharam ao estudo da Análise e das Equações Diferenciais.

Aos meus pais Teodoro (em memória) e Maria e aos meus irmãos Ronei e Valmei, pelo estímulo e inabalável esteio e mansidão que me encorajaram a seguir adiante em meus propósitos.

Um agradecimento especial à minha namorada Elizandra, pela paciência, compreensão, carinho e incondicional apoio emocional e espiritual, sobretudo quando as tribulações turvaram o horizonte.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina – FAPESC, pelo apoio financeiro, o que possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência e unicidade de soluções para um problema de Cauchy associado a uma equação semilinear do tipo placas/Boussinesq generalizada, com efeitos dissipativos e potências fracionárias do operador Laplaciano. Além disso, estudamos taxas de decaimento da solução na norma L^2 e da energia associada ao sistema. Mostramos que as taxas de decaimento dependem das potências fracionárias do operador Laplaciano que definem a equação de evolução de segunda ordem no tempo.

Palavras-chave: Equação tipo placas/Boussinesq. Laplaciano fracionário. Existência e unicidade de solução. Taxas de decaimento.

Abstract

In this work we study the existence and uniqueness of solutions for a Cauchy problem associated with a generalized plate/Boussinesq semilinear type equation with dissipative effects and fractional Laplacian operators. In addition, we study decay rates of the solution in L^2 norm and of the energy associated with the system. We show that the decay rates depend on the fractional powers of the operators that define the fractional second order evolution equation.

Keywords: Plate/Boussinesq type equation. Fractional Laplacian. Existence and uniqueness of solution. Decay rates.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy em (1) a seguir, associado a uma equação diferencial parcial semilinear dissipativa generalizada de segunda ordem no tempo, envolvendo potências fracionárias do operador Laplaciano.

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = \beta(-\Delta)^{\gamma} \left(u^p\right), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$, $p > 1$ inteiro e as potências do operador Laplaciano α, δ, θ e γ satisfazem

$$0 \leq \delta \leq \alpha \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Esse problema de Cauchy generaliza diversos tipos de fenômenos físicos como por exemplo, vibrações de placas, propagação de ondas, além de problemas de hidrodinâmica como por exemplo, ondas em águas rasas. Também em [21] Maugin propôs um tipo de modelo de Boussinesq para tratar dinâmica de redes não lineares em cristais elásticos. Sander-Hutter [27] relatam resumidamente a história da evolução desses problemas em hidrodinâmica, em especial na teoria de ondas solitárias.

A primeira tentativa de modelagem matemática de ondas em águas rasas, foi feita por Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) em 1871, que levou em consideração as acelerações verticais das partículas fluidas e admitiu uma onda solitária como solução, mas negligenciou um certo número de termos de produtos de derivadas considerando apenas os efeitos de primeira ordem não lineares. Essas equações são chamadas equações clássicas de Boussinesq.

Para melhor modelar alguns desses fenômenos hidrodinâmicos, foram desenvolvidas outras equações, com origem nas equações clássicas, considerando termos de ordem superior que Boussinesq ignorou, chamadas equações da classe Boussinesq. Entre elas estão as equações de Korteweg-de Vries, Green-Naghdi [9] e Peregrine [25]. Outras equações relacionadas às de Boussinesq, são as chamadas IBq (Boussinesq melhorada) e IMBq (Boussinesq melhorada modificada).

Para o modelo que consideramos neste trabalho, quando $\delta = \alpha = 2$, $\gamma = 1$ e $p = 2$, temos uma equação de Boussinesq de sexta ordem e quando, além disso, $\theta = 1$, temos uma equação de Boussinesq sob efeitos de uma dissipação hidrodinâmica. Mais detalhes sobre equações de Boussinesq e suas características, podem ser encontradas nos artigos de Esfahani-Farah-Wang [4], Wang-Chen [31], Wang-Xu [33] e [34] e Wang-Xue [35], citados nas referências bibliográficas deste trabalho.

Por outro lado, quando $\delta = 1$, $\alpha = 2$, $\theta = 0$, $\gamma = 0$ ou $\gamma = \dfrac{1}{2}$ e $n = 2$, temos uma equação (linear se $\beta = 0$) para vibrações não lineares de placas sob efeitos de inércia rotacional (ver Geredeli-Lasiecka [7]) e de uma dissipação friccional. Resultados particulares sobre problemas associados a equações com essas propriedades, podem ser encontrados nos artigos de Charão-Luz-Ikehata [3], Luz-Charão [18] e Sugitani-

Kawashima [29], citados nas referências deste trabalho.

Além disso, quando $\alpha = 1$, $\delta = \theta = 0$, $\beta \neq 0$ e $\gamma = 0$, temos uma equação de ondas semilinear com dissipação friccional. Quando $\alpha = 1$, $\delta = \theta = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 1$ e $p = 2$, temos uma equação clássica de Boussinesq dissipativa.

Os resultados apresentados neste trabalho generalizam e/ou recuperam resultados obtidos anteriormente na literatura. Em particular citamos os trabalhos de Charão-Luz-Ikehata [3], Horbach [11], Horbach-Charão [12], Ikehata [13], Ikehata-Natsume [14], Luz-Charão [18], Matsumura [20], Schnaubelt [28] e Sugitani-Kawashima [29], citados nas referências deste trabalho.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo que no Capítulo 1 apresentamos algumas definições e alguns resultados importantes de análise funcional, teoria de distribuições, espaços de Sobolev, além de resultados relativos à teoria de semigrupos.

Esses resultados são usados para mostrarmos a existência e a unicidade de soluções, bem como, para encontrar taxas de decaimento para a energia e para a norma L^2 da solução do problema (1), tanto para o problema associado à equação linear ($\beta = 0$), quanto para o problema associado à equação semilinear.

Usando resultados de análise funcional e da teoria de semigrupos, mostramos no Capítulo 2, a existência e a unicidade de soluções para o problema definido em (1), quando consideramos $\beta = 0$. Concluímos o capítulo, enunciando o teorema de existência e unicidade de solução global para o problema associado à equação linear (Teorema 2.1).

Provada a existência e unicidade de solução global para o problema linear, estudamos no Capítulo 3, o decaimento da energia e da norma L^2 da solução do problema linear, usando o método da energia no espaço de Fourier e o método proposto por Luz-Ikehata-Charão no artigo [19] citado nas referências deste trabalho. Esses métodos tem apoio basilar no estudo de taxas de decaimento para o problema, na região de baixa frequência no espaço de Fourier ($|\xi| \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$) e na região de alta frequência nesse espaço ($|\xi| \geq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$).

Para o estudo do problema proposto, na região de alta frequência, trabalhamos separadamente o caso em que $\delta \leq \theta$ e o caso em que $\theta < \delta$, dado que neste último caso, a equação diferencial em (1) apresenta uma estrutura de perda de regularidade, o que não ocorre para a equação na região de baixa frequência.

Devido a essa estrutura da equação, a obtenção de taxas de decaimento na região de alta frequência iguais às taxas válidas na região de baixa frequência, exige assumir maior regularidade sobre os dados iniciais do problema. As taxas obtidas através desse estudo, estão sistematicamente reunidas ao final do Capítulo 3.

Análogo à forma como provamos o teorema de existência e unicidade para o problema linear, mostramos no Capítulo 4 deste trabalho, a existência e a unicidade de soluções para o problema associado à equação semilinear que aparece no problema (1). Na primeira seção desse capítulo, mostramos através dos Teoremas 4.1 e 4.2, a existência de solução local para o problema semilinear. Na seção seguinte, supondo inicialmente que a solução está definida para intervalos limitados da forma $[0, T)$, com T finito, concluímos que, na verdade, a solução está definida globalmente para todo $t > 0$. Formalizamos esses resultados através dos Teoremas 4.3 e 4.4.

Por fim, no Capítulo 5, usando novamente o método da energia no espaço de Fourier, obtemos taxas de decaimento da energia e da norma L^2 da solução do problema associado à equação semilinear em (1).

Observamos que, para o caso em que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, a taxa obtida para a norma L^2 da solução do problema semilinear, é diferente das taxas obtidas para a norma L^2 da solução do problema linear. Neste caso, as taxas dependem também do intervalo a que pertence a constante da dimensão espacial n, em relação aos expoentes do Laplaciano.

Com relação às taxas de decaimento da energia, no caso em que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, embora tenha sido necessário impôr mais regularidade nos dados iniciais, as taxas obtidas para a energia associada ao sistema semilinear foram piores. Isso se deve ao fato de usarmos outro método para a obtenção das taxas no caso linear que é mais eficiente quando $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$ (ver o artigo de Luz-Ikehata-Charão [19]).

Naturalmente que poderíamos obter taxas para o problema semilinear, usando as taxas obtidas para o problema linear e a fórmula de variação dos parâmetros. Entretanto, preferimos trabalhar diretamente com a equação semilinear como pode ser observado nas Seções 5.1 e 5.2. Observamos que a obtenção de taxas ótimas, para o caso em que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, em comparação com o caso $\theta > \dfrac{\alpha}{2}$, apresenta maior dificuldade, mesmo no caso mais simples da equação da onda com dissipação estrutural.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina – FAPESC.

Capítulo 1

Resultados Importantes

Neste capítulo apresentamos alguns resultados importantes sobre Teoria de Distribuições, Espaços de Sobolev e Teoria de Semigrupos. Ao final deste capítulo, apresentamos ainda, alguns lemas técnicos que serão usados no decorrer do trabalho, para obtermos taxas de decaimento para a norma L^2 da solução do problema de Cauchy que estudamos e para a energia associada esse sistema.

Omitimos as demonstrações de alguns lemas, por se tratarem de resultados conhecidos e que podem ser facilmente encontrados em literaturas relacionadas ao assunto. No entanto, sempre que julgamos necessário, citamos as referências.

Neste trabalho, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, representa um subconjunto aberto, podendo inclusive ser todo o espaço $\mathbb{R}^n$. Além disso, em desenvolvimentos de estimativas, representamos as constantes positivas por C, de modo que, diferentes constantes são representadas por esta mesma letra.

1.1 Notações

Neste trabalho usamos as notações padrão, relacionadas a seguir.

- $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$ e $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq 0\}$;
- $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária dos números complexos;
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, com $n \in \mathbb{N}$;
- $x \cdot \xi$ representa o produto interno usual entre x e ξ em $\mathbb{R}^n$;
- $|x|$ ou $\|x\|$, representa a norma usual de x no espaço $\mathbb{R}^n$;
- $D_i u$ representa a derivada da função u, em relação à i-ésima variável, ou seja, $D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, onde $u = u\,(x_1, \ldots, x_n)$;
- $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}, ..., \partial x_n^{\alpha_n}}$, onde $u = u(x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$;
- Se $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ é uma função vetorial de classe $C^1(\Omega)$, denotamos o divergente de F por $div(F)$ e definimos

$$div(F) = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

  onde ∇ é o operador gradiente definido por $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$;
- Se $f(x)$ é uma função escalar de classe $C^2(\Omega)$, definimos o Laplaciano de f por

$$\Delta f = div(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

  É conhecido que o operador $-\Delta$ é positivo definido e auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R}^n)$, com domínio $H^2(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Espaços Importantes

Nesta seção definimos os espaços de funções que usamos para o desenvolvimento deste trabalho e apresentamos alguns dos principais resultados válidos nesses espaços.

Os resultados que apresentamos nesta seção, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [2], Kesavan [16], Kreyszig [17], Medeiros-Rivera [22] e [23] e Rivera [26], citados nas referências bibliográficas deste trabalho.

1.2.1 Espaço das Distribuições

Seja u uma função numérica mensurável, definida sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\{A_i\}_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos A_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre sobre A_i. Então

$$u = 0 \quad \text{quase sempre sobre} \quad A = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Considerando isso, definimos o suporte de u, denotado por $supp(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω, dado por

$$supp(u) = \Omega \setminus A.$$

Definição 1.1 *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções*

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e multiplicação de funções por escalar.

A seguir, definimos uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$, quando $k \to \infty$, se*

i) $\exists\, K \subset \Omega$, compacto, tal que supp$\,(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$, uniformemente para $x \in \Omega$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência estabelecida no Definição 1.2, é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e chamado espaço das funções testes.*

A partir da definição de $\mathcal{D}(\Omega)$, definimos o espaço das distribuições.

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuo em relação à noção de convergência estabelecida na Definição 1.2. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Sendo assim, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e pode ser representado na forma

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Por convenção, denotamos a aplicação de um funcional $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em um elemento $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, por $\langle T, \varphi\rangle$. Com isso, definimos a noção de convergência no espaço das distribuições.

Definição 1.5 *Sejam $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando $k \to \infty$, se*

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2.2 Espaço de Schwartz

Definição 1.6 *Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito, se para todo polinômio $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, verifica-se que*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} P(x)\,(D^\alpha \varphi)\,(x) = 0.$$

O espaço das funções que satisfaz essa propriedade, é denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e é chamado espaço de Schwartz.

A seguir, enunciamos um lema que fornece uma caracterização útil para identificar funções contidas no espaço de Schwartz.

Lema 1.1 *Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então são equivalentes as afirmações:*

i) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C = C_k$ tal que

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^k |D^\alpha \varphi(x)| \leq C_k,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$.

Considerando o Lema 1.1, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos a seminorma

$$\rho_m(\varphi) = \sup_{|\alpha|\leq m} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^m |D^\alpha \varphi(x)| \right),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A partir das seminormas ρ_m definidas acima, temos uma noção de convergência de funções no espaço de Schwartz, conforme mostramos no lema a seguir.

Lema 1.2 *Sejam* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *sequência de funções em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *A sequência* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* φ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *quando* $k \to \infty$, *se para todo* $m \in \mathbb{N}$,

$$\rho_m(\varphi_k - \varphi) \to 0.$$

Definição 1.7 *Uma distribuição temperada sobre* $\mathbb{R}^n$, *é um funcional linear* $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{K}$, *contínuo em relação à noção de convergência definida acima, no Lema 1.2.*

O conjunto de todas as distribuições temperadas sobre o espaço $\mathbb{R}^n$, é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Assim como para distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$, denotamos a aplicação de um funcional $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ em um elemento $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por $\langle T, \varphi\rangle$.

A noção de convergência no espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é análoga à noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$, como mostramos a seguir.

Definição 1.8 *Sejam* $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Dizemos que* $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* T *em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *quando* $k \to \infty$, *se*

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.3 Espaços $L^p(\Omega)$, $L^p_{loc}(\Omega)$

Consideramos a mensurabilidade de funções e o cálculo de integrais sobre conjuntos mensuráveis $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, no sentido de Lebesgue.

Observação 1.1 *Seja e* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função.*

a) Dizemos que u *é limitada quase sempre em* Ω, *se* u *é limitada a menos de um conjunto de medida nula, ou seja,* u *é limitada se,* *e somente se existe $M > 0$ e existe $\Omega_0 \subset \Omega$ com $med(\Omega_0) = 0$, tal que $|u(x)| \leq M$, para todo $x \in (\Omega \backslash \Omega_0)$, onde $med(\Omega)$ representa a medida de Lebesgue do conjunto mensurável Ω;*

b) Definimos o supremo essencial da uma função u, por

$$\begin{aligned}\sup\operatorname{ess}|u(x)| &= \inf\{M > 0;\ med\,(x \in \mathbb{R}^n;\ |u(x)| > M) = 0\} \\ &= \inf\{M > 0;\ |u(x)| \leq M \text{ quase sempre em } \Omega\}.\end{aligned}$$

Definição 1.9 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o conjunto das funções p-integráveis por*

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty\right\},$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ u \text{ mensurável e } \sup\operatorname{ess}|u(x)| < \infty\}.$$

Os conjuntos $L^p(\Omega)$ assim definidos, munidos com as normas

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^p} = \sup\operatorname{ess}\{|u(x)|;\ x \in \Omega\}, \quad p = \infty,$$

respectivamente, definem espaços vetoriais normados.

De acordo com o Teorema de Riesz-Ficher, para $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ munidos com as normas definidas acima, são espaços de Banach. Em particular, $L^2(\Omega)$ munido com o produto interno usual

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x)\, dx,$$

para $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, é um espaço de Hilbert.

Além disso, para $1 < p < \infty$, os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ são reflexivos.

Teorema 1.1 (Interpolação de Espaços L^p) *Sejam $p, q, r \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$. Então $u \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^{\lambda} \|u\|_{L^q}^{1-\lambda},$$

onde $\lambda \in (0,1)$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{(1-\lambda)}{q}$.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p < \infty$ e $q = \dfrac{p}{p-1}$ ou $p = 1$ e $q = \infty$ ou $p = \infty$ e $q = 1$. Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $uv \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Definição 1.10 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Definimos o conjunto das funções localmente p-integráveis por*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ u \text{ mensurável e } u\chi_K \in L^p(\Omega),\ \forall\, K \subset\subset \Omega\},$$

onde χ_K é a função característica sobre $K \subset \Omega$, compacto.

Da definição de espaços $L^p(\Omega)$, temos que uma função $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, se e somente se $u\chi_K \in L^p(\Omega)$ ou, equivalentemente,

$$\int_\Omega |u\chi_K(x)|^p dx < \infty \quad \text{ou} \quad \int_K |u(x)|^p dx < \infty,$$

para todo K subconjunto compacto contido em Ω.

Dado $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos o funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$, por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x) dx,$$

que define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.3 (Du Bois Reymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então* $T_u = 0$, *se e somente se* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Observação 1.2 *Como consequência do Lema de Du Bois Reymond, temos que a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} T: & L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & u & \longmapsto & T_u, \end{array}$$

é linear, injetiva e contínua, de modo que podemos identificar a distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *com a respectiva função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Assim, $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *e, como* $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, *segue que toda função em* $L^p(\Omega)$, *define uma distribuição sobre* Ω.

A maioria dos problemas envolvendo equações diferenciais parciais, requerem um conceito mais amplo de derivada do que o conceito clássico. A definição a seguir, generaliza o conceito de derivada.

Definição 1.11 *Sejam* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *A derivada distribucional de ordem* α *de* T, *denotada por* $D^\alpha T$, *é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ *e, para cada* $k = 1, \ldots, n$, α_k *indica a ordem da derivada da função* φ *em relação à* k*-ésima variável.*

Esse conceito é global, no sentido que funções não deriváveis em grande parte do seu domínio, são deriváveis sob esse novo conceito.

1.2.4 Transformada de Fourier

Para estudar a existência e unicidade de soluções e encontrar taxas de decaimento da energia e da norma L^2 da solução do problema de

Cauchy em (1), usamos como ferramenta a transformada de Fourier.

Definição 1.12 *Definimos a transformada de Fourier de uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por*

$$\widehat{u}(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} u(x)\, dx,$$

onde $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Notamos que, para todo $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos $\mathcal{F}u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e o operador $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é linear e contínuo.

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq \infty$, podemos restringir o domínio de $\mathcal{F}$, ao espaço de Schwartz. Então, dado $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}$ é um operador linear, contínuo e bijetivo.

Dessa forma, a transformada de Fourier é inversível e definimos a transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$u(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\widehat{u}\right)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi)\, d\xi.$$

Além disso, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, de modo que podemos estender a transformada de Fourier ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para funções nesse espaço, vale o teorema enunciado a seguir.

Teorema 1.3 (Identidade de Plancherel/Parseval) *Sejam u e v funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então valem as identidades*

$$(u, v)_{L^2} = (\widehat{u}, \widehat{v})_{L^2} \quad e \quad \|u\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^2}.$$

O teorema acima, estabelece uma relação entre a função e sua transformada de Fourier, através da norma no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Essa relação permite obtermos informações sobre o comportamento de uma dada função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a partir do estudo de suas propriedades no espaço de Fourier.

Neste ponto, usando a transformada de Fourier e o fato que

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)u(\,\cdot\,)\right)(\xi) = |\xi|^2\widehat{u}(\xi),$$

introduzimos a noção de derivada fracionária para funções definidas em todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.13 *Seja $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Definimos a derivada fracionária de $(-\Delta)^\alpha u$ da seguinte forma*

$$(-\Delta)^\alpha u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[|\cdot|^{2\alpha}\widehat{u}(\,\cdot\,)\right](x),$$

onde $|\cdot|^{2\alpha} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $|\cdot|^{2\alpha}(\xi) = |\xi|^{2\alpha}$.

A definição acima, permite caracterizar a transformada de Fourier de funções $(-\Delta)^\alpha u$, na forma

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^\alpha u(\,\cdot\,)\right)(\xi) = |\xi|^{2\alpha}\widehat{u}(\xi),$$

para funções $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Outros resultados com aplicações da transformada de Fourier a problemas associados a equações diferenciais parciais, podem ser encontrados em Figueiredo [6], Guenther-Lee [10], Kesavan [16] e Luz-Charão [18], citados nas referências bibliográficas deste trabalho.

1.2.5 Espaços $W^{m,p}(\Omega)$ e $\dot{W}^{m,p}(\Omega)$

Lembramos que, conforme mencionamos no início deste capítulo, neste trabalho consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um subconjunto aberto.

Definição 1.14 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$ por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \text{com } |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ é o operador de derivação dado pela Definição 1.11.

Os conjuntos $W^{m,p}(\Omega)$ assim definidos, munidos com as normas

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty,$$
$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \quad p = \infty,$$

respectivamente, definem espaços vetoriais normados.

Observação 1.3 *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ possuem as seguintes propriedades:*

i) Quando $m = 0$, temos que $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

ii) Quando $p = 2$, representamos $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in H^m(\Omega).$$

iii) Para cada $0 \leq m \leq \infty$ e cada $1 \leq p \leq \infty$, os espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são densos em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

iv) Para cada $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach em relação à norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$.

Teorema 1.4 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um subconjunto aberto. Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é separável e se $1 < p < \infty$, então o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo e uniformemente convexo.*

Outro espaço que usamos com certa frequência neste trabalho, é o espaço que definimos por

$$\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \exists\, v \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \text{tal que } u = (-\Delta)^{-\frac{m}{2}} v\right\},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{R}$, o que implica que $(-\Delta)^{\frac{m}{2}} u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, de modo que definimos a norma no espaço $\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, por

$$\|u\|_{\dot{W}^{m,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|(-\Delta)^{\frac{m}{2}} u(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2.6 Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$

Conforme mencionamos anteriormente na introdução deste trabalho, para mostrarmos a existência e unicidade de soluções e estudar o decaimento da solução do problema associado à equação semilinear, usamos o método da energia no espaço de Fourier. Por essa razão, nos capítulos relativos ao estudo dessas propriedades, usamos frequentemente a definição de espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, que definimos a seguir.

Definição 1.15 *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Devido à forma como definimos o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, podemos definir uma norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ a partir da norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pela identidade

$\|u\|_{H^s} = \left\| \left(1+|\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}$, de modo que

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\cdot|^2\right)^s |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para o desenvolvimento deste trabalho usamos uma norma no espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, diferente norma usual definida acima. O lema a seguir, permite estabelecer uma equivalência entre essas duas normas.

Lema 1.4 *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$. Então valem as seguintes relações:*

i) $\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^{2s}\right) \leq \left(1+|\xi|^2\right)^s \leq 2^s\left(1+|\xi|^{2s}\right)$;

ii) $2^{-s}\left(1+|\xi|^{2s}\right)^{-1} \leq \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} \leq 2\left(1+|\xi|^{2s}\right)^{-1}$.

Demonstração. Mostramos cada item do lema, dividindo-o em dois casos, quando $|\xi| \leq 1$ e quando $|\xi| \geq 1$.

i) Para $|\xi| \leq 1$, temos que

$$\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^{2s}\right) \leq 1 \leq \left(1+|\xi|^2\right)^s \leq 2^s \leq 2^s\left(1+|\xi|^{2s}\right).$$

Por outro lado, para $|\xi| \geq 1$, temos

$$\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^{2s}\right) \leq |\xi|^{2s} \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s\left(1+|\xi|^{2s}\right).$$

ii) Para $|\xi| \leq 1$, temos $\left(1+|\xi|^2\right)^s \leq 2^s$ e $1+|\xi|^{2s} \leq 2$. Isso implica

$$2^{-s}\left(1+|\xi|^{2s}\right)^{-1} \leq 2^{-s} \leq \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} \leq 1 \leq 2\left(1+|\xi|^{2s}\right)^{-1}.$$

Agora, para $|\xi| \geq 1$, temos $\left(1+|\xi|^2\right)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s\left(1+|\xi|^{2s}\right)$ e $\left(1+|\xi|^{2s}\right) \leq 2|\xi|^{2s} \leq 2\left(1+|\xi|^2\right)^s$, de onde segue que

$$2^{-s}\left(1+|\xi|^{2s}\right)^{-1} \leq \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} \leq 2\left(1+|\xi|^{2s}\right)^{-1}.$$

$\blacksquare$

A partir desse lema, concluímos que a norma usual em $H^s(\mathbb{R}^n)$, dada acima, é equivalente à norma

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) |\widehat{u}|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O produto interno associado e essa norma é

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi.$$

Para espaços $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, com $s \geq 0$ usamos a norma

$$\|u\|_{H^{-s}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right)^{-1} |\widehat{u}|^2 \, d\xi$$

e produto interno associado

$$(u, v)_{H^{-s}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right)^{-1} \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi.$$

Usando a norma e o produto interno definidos a partir das relações do Lema 1.4, mostramos algumas propriedades em espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Essas propriedades são fundamentais para mostrarmos a existência e unicidade de soluções para o problema proposto neste trabalho, bem como para obtermos taxas de decaimento , tanto para o problema linear quanto para o problema semilinear definido em (1).

Lema 1.5 *Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Se $s > \frac{n}{2}$, então existe $C > 0$, tal que*

$$|u(x)| \leq C \|u\|_{H^s}, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Da definição da transformada de

Fourier inversa e do fato que $\left|e^{ix\cdot\xi}\right| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\xi\right| \leq C\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\xi\right| \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|\,d\xi = C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi.
\end{aligned}$$

Além disso, usando a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2) e o Lema 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{s}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2s}\right)|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

No entanto, para $s > \dfrac{n}{2}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s}d\xi = C < \infty.$$

Segue da estimativa acima e da definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, que

$$|u(x)| \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2s}\right)|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = C\,\|u\|_{H^s}.$$

■

Outro resultado importante para o estudo que propusemos neste trabalho é o fato que, para $s > \dfrac{n}{2}$, o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra. Formalizamos esse resultado através do lema a seguir.

Lema 1.6 *Seja $s > \dfrac{n}{2}$. Então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|uw\|_{H^s} \leq C\,\|u\|_{H^s}\,\|w\|_{H^s},$$

para todo $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

A demonstração desse lema pode ser encontrada nos artigos de Kato-Ponce [15] e de Wang-Chen [32], citados nas referências bibliográficas ao final deste trabalho.

De modo geral, para $mp > n$, o espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ também define uma álgebra. Esse resultado, bem como sua demonstração, pode ser encontrado em Adams [1], também nas referências deste trabalho.

Lema 1.7 *Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $p \geq 1$ um número inteiro. Então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u^p\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s}^p, \quad \textit{para todo } u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstramos este lema usando indução finita sobre p.

Para $p = 1$, o resultado é imediato. Suponhamos agora, que o resultado valha para p, ou seja, que

$$\|u^p\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s}^p.$$

Então, para $k = p + 1$, segue do Lema 1.6 e da hipótese de indução

$$\left\|u^{p+1}\right\|_{H^s} = \|u^p u\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s}^p \|u\|_{H^s} = C \|u\|_{H^s}^{p+1}.$$

Portanto, se $s > \dfrac{n}{2}$, o lema é válido para todo $p \geq 1$ inteiro.

∎

Lema 1.8 *Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ um número inteiro. Então, dado $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u^p\|_{L^1} \leq C \|u\|_{H^s}^p.$$

Demonstração. Sejam $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $p > 1$ um número inteiro.

Pela definição de norma em $L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\|u^p\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |u^p(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|u^{p-1}(x)\right| |u(x)|\, dx.$$

Então, usando a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2) com $p = 2$ e $q = 2$ e a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^p\|_{L^1} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|u^{p-1}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{u^{p-1}}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) \left|\widehat{u^{p-1}}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|u^{p-1}\right\|_{H^s} \|u\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Assim, como $p > 1$ é um número inteiro, temos que $p - 1 \geq 1$ e então, para $s > \dfrac{n}{2}$, segue do Lema 1.7 que

$$\|u^p\|_{L^1} \leq C\, \|u\|_{H^s}^{p-1} \|u\|_{H^s} = C\, \|u\|_{H^s}^{p}.$$

■

Lema 1.9 *Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ um número inteiro. Então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u^p - w^p\|_{H^s} \leq C \left(\|u\|_{H^s}^{p-1} + \|w\|_{H^s}^{p-1}\right) \|u - w\|_{H^s},$$

para todo $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Sejam $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ um inteiro. Definido a função $h(v) = v^p$, temos que $h'(v) = p\, v^{p-1}$.

Assim, segue do teorema do valor médio, que

$$(u^p - w^p) = p\, v^{p-1}\,(u-w)\,,$$

onde $v = ((1-\epsilon)u + \epsilon\, w) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, para algum $\epsilon \in (0,1)$.

Então, como $s > \dfrac{n}{2}$ e $p-1 \geq 1$, segue dos Lemas 1.6 e 1.7, que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\|u^p - w^p\|_{H^s} &= p\left\|v^{p-1}\,(u-w)\right\|_{H^s} \leq C\left\|v^{p-1}\right\|_{H^s}\|u-w\|_{H^s} \\ &\leq C\,\|v\|_{H^s}^{p-1}\,\|u-w\|_{H^s} \leq C\,\|(1-\epsilon)u + \epsilon\, w\|_{H^s}^{p-1}\,\|u-w\|_{H^s}\,.\end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade triangular e o fato que $\epsilon \in (0,1)$, temos

$$\|u^p - w^p\|_{H^s} \leq C\left(\|u\|_{H^s}^{p-1} + \|w\|_{H^s}^{p-1}\right)\|u-w\|_{H^s}\,,$$

onde $C > 0$ é a constante decorrente dos lemas usados.

■

1.3 Teorema de Existência e Unicidade: Problema Linear

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes relativos à teoria de semigrupos, que usamos neste trabalho para mostrar a existência e unicidade de soluções do problema proposto em (1), associado à equação linear (quando $\beta = 0$).

Os resultados de análise funcional e relativos à teoria de semigrupos de operadores lineares, que apresentamos nesta seção, podem ser encontrados em Brezis [2], Gomes [8], Kesavan [16], Kreyszig [17] e Pazy [24], citados nas referências bibliográficas deste trabalho.

1.3.1 Teorema de Lax-Milgram

Para os resultados que apresentamos nesta subseção, consideramos o espaço de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, sobre os números reais, munido com a norma $\| \cdot \|_H$ definida pelo produto interno no espaço H.

Definição 1.16 *Uma aplicação $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma forma bilinear se, para cada $x \in H$, $B(x, \cdot)$ é linear e além disso, para cada $y \in H$, $B(\cdot y)$ é linear.*

Definição 1.17 *Uma forma bilinear $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser limitada, se existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$|B(x, y)| \leq C \|x\|_H \|y\|_H, \quad \textit{para todo } x, y \in H.$$

Segue da Definição 1.17, que toda forma bilinear limitada é contínua.

Definição 1.18 *Uma forma bilinear $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser coerciva, se existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$|B(x, x)| \geq C \|x\|_H^2, \quad \textit{para todo } x \in H.$$

Teorema 1.5 (Lax-Milgram) *Seja $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, limitada e coerciva. Então para cada funcional linear e contínuo $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$, existe um único $u \in H$, tal que*

$$B(u, x) = F(x), \quad \textit{para todo } x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [2], citado nas referências deste trabalho.

1.3.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta subseção consideramos $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach, sobre o corpo dos números reais, e o conjunto $\mathcal{B}(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados sobre X.

Definição 1.19 *Uma aplicação $S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é dita ser um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:*

i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{B}(X)$;

ii) $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 1.20 *Um semigrupo de operadores lineares limitados S é dito ser fortemente contínuo, se*

$$\lim_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Definição 1.21 *Um semigrupo de operadores lineares limitados S é dito ser uniformemente contínuo, se*

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0.$$

Um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuo, é chamado semigrupo de classe C_0 ou simplesmente, C_0 semigrupo.

Teorema 1.6 *Se S é um semigrupo de classe C_0, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 0$, tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Definição 1.22 *Um semigrupo S de classe C_0, satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \textit{para todo } \ t \geq 0,$$

com $\omega = 0$, é dito ser um semigrupo uniformemente limitado. Se, além disso, $M = 1$, é dito ser um semigrupo de contrações de classe C_0.

Definição 1.23 *O operador $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$, definido por*

$$Bx = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - Ix}{t},$$

com domínio dado por

$$D(B) = \left\{ x \in X;\ \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - Ix}{t} \ \text{existe} \right\},$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Teorema 1.7 *Um operador $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, B é um operador linear limitado em X.*

Teorema 1.8 *Se $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, então B é um operador linear fechado e $D(B)$ é um subespaço linear denso em X.*

1.3.3 Teorema Lumer-Phillips

Nesta subseção consideramos $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach sobre o corpo dos números complexos, e $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares sobre X.

Definição 1.24 *Seja $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. O conjunto dos elementos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que o operador $(\lambda I - B)^{-1}$ existe, é limitado e está definido sobre um subconjunto denso em X, é chamado conjunto resolvente de B e é denotado por $\rho(B)$. O operador $(\lambda I - B)^{-1}$, é chamado resolvente de B e é denotado por $R(\lambda, B)$.*

Definição 1.25 *Seja X um espaço de Banach e X^* o espaço dual associado. Denotamos o valor de um operador $x^* \in X^*$ em um elemento $x \in X$, por $\langle x^*, x\rangle$. Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dual*

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^*;\ \langle x^*, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2 \right\}.$$

Observação 1.4 *Como consequência do Teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$, temos que $J(x) \neq \emptyset$.*

Definição 1.26 *Um operador linear $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para cada $x \in D(B)$, existe $x^* \in J(x)$, tal que*

$$Re\langle Bx, x^*\rangle \leq 0.$$

Para operadores definidos sobre espaços de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, a definição de operador dissipativo é a seguinte:

Definição 1.27 *Um operador linear $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ é dissipativo se, para todo $x \in D(B)$ temos que*

$$Re\langle Bx, x\rangle \leq 0.$$

Na sequência apresentamos um resultado para a caracterização de operadores lineares dissipativos definidos em espaços de Banach.

Teorema 1.9 *Um operador linear $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, e somente, se existe $\lambda > 0$, tal que*

$$\|(\lambda I - B)\, x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \textit{para todo } x \in D(B).$$

Teorema 1.10 (Lumer-Phillips) *Seja $B : D(B) \longrightarrow X$ um operador linear, com $D(B)$ denso em X.*

a) Se B é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$, tal que $Im\,(\lambda_0 I - B) = X$, então B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0;

b) Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, então B é dissipativo e $Im\,(\lambda I - B) = X$, para $\lambda > 0$.

Teorema 1.11 (Perturbação de Geradores) *Sejam B o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, definido em um espaço de Banach X e J é um operador linear limitado em X. Então $B + J$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X.*

1.3.4 Problema de Cauchy Abstrato

Nesta subseção definimos o problema de Cauchy abstrato e apresentamos um teorema para provar a existência e unicidade de soluções para o problema linear, bem como caracterizar a solução desse problema, usando a teoria de semigrupos.

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = BU(t), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

para todo $t > 0$, com $U_0 \in X$.

Definição 1.28 *Seja B o operador linear definido no problema (1.1). Uma função $U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ contínua, continuamente diferenciável e $U(t) \in D(B)$, para todo $t > 0$, satisfazendo o sistema em (1.1), é dita ser uma solução forte do problema (1.1).*

Teorema 1.12 *Seja B o operador definido no problema (1.1), gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X. Então, para cada dado inicial $U_0 \in D(B)$, existe uma única solução forte $U(t) = S(t)U_0$ para o problema de Cauchy em (1.1), definida para $t \geq 0$, com*

$$U(t) \in C([0, \infty), D(B)) \cap C^1([0, \infty), X),$$

onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador B.

Considerando somente $U_0 \in X$, dizemos que a solução dada no Teorema 1.12, é uma solução fraca (mild solution) do problema (1.1).

1.4 Teorema de Existência e Unicidade: Problema Semilinear

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e B um operador linear definido sobre X. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU(t) + F(U(t)), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

para todo $t > 0$, com $U_0 \in X$ e F um operador não linear sobre $D(B)$.

Definição 1.29 *Um operador $F : Y \subset X \longrightarrow X$ é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados, se para todo conjunto limitado $A \subset Y$, existe uma constante (de Lipschitz) $L > 0$, tal que*

$$\|F(U) - F(V)\|_X \leq L \|U - V\|_X ,$$

para todo $U, V \in A$.

Para estudar existência e unicidade de soluções do problema semilinear no Capítulo 4 deste trabalho, usamos a Definição 1.30 a seguir, que é equivalente à Definição 1.29 para operadores Lipschitz contínuos sobre conjuntos limitados do domínio.

Definição 1.30 *Seja B um operador definido sobre um espaço de Banach X. Um operador $F : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ é dito ser Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B)$ se dado $M > 0$, existe uma constante (de Lipschitz) $L_M = L(M) > 0$, tal que*

$$\begin{aligned}&\|F(U) - F(W)\|_X + \|B\left(F(U) - F(W)\right)\|_X \\ &\leq L_M\left(\|U - W\|_X + \|B(U - W)\|_X\right),\end{aligned}$$

para todo $U, W \in D(B)$, tais que

$$\|U\|_X + \|BU\|_X \leq M \quad e \quad \|W\|_X + \|BW\|_X \leq M.$$

Enunciamos a seguir, o teorema que usamos no Capítulo 4, para mostrarmos a existência e unicidade de solução (local) do problema semilinear dado em (1).

Teorema 1.13 *Sejam B o operador definido no problema (1.2), gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e $F : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B)$. Então, para cada dado inicial $U_0 \in D(B)$, existe uma única solução forte $U = U(t)$ para problema de Cauchy em (1.2), definida em um intervalo maximal $[0, T)$, com*

$$U \in C\left([0, T), D(B)\right) \cap C^1\left([0, T), X\right),$$

de modo que vale uma e somente uma das seguintes condições:

a) $T = \infty$,

b) $T < \infty$ *e* $\lim_{t \to T} (\|U(t)\|_X + \|BU(t)\|_X) = \infty$.

O Teorema 1.13, bem como sua demonstração, podem ser encontrados no livro de Pazy, indicado em [24] nas referências bibliográficas ao final deste trabalho.

1.5 Lemas Técnicos

Nesta seção apresentamos alguns resultados que usamos para demonstrar teoremas de existência e unicidade de soluções do problema que estudamos neste trabalho, bem como para obter taxas de decaimento da norma L^2 da solução e da energia associada ao sistema.

Seja Ω um subconjunto aberto, conexo e regular, no espaço $\mathbb{R}^n$. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} A_1 u_{tt} + A_2 u_t + A_3 u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in (0,\infty) \times \Omega$ e A_1, A_2 e A_3 operadores autoadjuntos pseudo-diferenciais, com símbolos $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ e $P_3(\xi)$.

Para obter taxas de decaimento da energia e da norma L^2 da solução de problemas de Cauchy associados a equações de evolução de segunda ordem, estudamos o problema no espaço de Fourier

$$\begin{cases} P_1 \widehat{u}_{tt} + P_2 \widehat{u}_t + P_3 \widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}(0,x) = \widehat{u}_0(x), \\ \widehat{u}_t(0,x) = \widehat{u}_1(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t, \xi)$, com $(t, \xi) \in (0, \infty) \times \Omega$.

A energia global associada à equação diferencial em (1.4), depende do parâmetro $\xi \in \Omega$, sendo definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(P_3(\xi) \left| \widehat{u} \right|^2 + P_1(\xi) \left| \widehat{u}_t \right|^2 \Big) d\xi, \tag{1.5}$$

para todo $t \geq 0$.

A partir da definição da energia no espaço de Fourier em (1.5), o objetivo é encontrar taxas de decaimento para esse funcional, assumindo que $E(t)$ esteja bem definido e seja contínuo para $t \geq 0$.

Posto isso, encontramos no artigo de Luz-Ikehata-Charão [19] das referências bibliográficas deste trabalho, resultados válidos mediante satisfação da Hipótese 1 que apresentamos adiante.

Para isso, definimos a seguir a função $\rho = \rho(x)$ a partir das funções $P_1, P_2, P_3 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ mencionadas no início desta seção.

Definição 1.31 *Considerando a equação diferencial linear em (1.4), definimos a função $\rho = \rho(\xi)$ por*

$$\rho(\xi) = \min_{\xi \in \Omega} \left\{ \varepsilon P_3(\xi) P_2^{-1}(\xi), \varepsilon P_2(\xi) P_1^{-1}(\xi) \right\},$$

onde $\varepsilon > 0$ é uma constante que depende da equação.

Hipótese 1 *Existe um número $\beta > 0$ tal que, para as funções mensuráveis e positivas (exceto em um subconjunto de medida nula) $P_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$, definidas sobre $\Omega \in \mathbb{R}^n$, pelo menos uma das duas condições a seguir é satisfeita:*

i) $C_\beta^3 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi) d\xi < \infty$ *e* $C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi < \infty;$

ii) $C_\beta^1 = \int_\Omega P_2(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi < \infty;$ $C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi < \infty;$

$$C_\beta^5 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi)^2 d\xi < \infty;$$
$$C_\beta^6 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi) P_3(\xi)^2 d\xi < \infty.$$

Considerando a hipótese acima, enunciamos o teorema a seguir, proposto por Luz-Ikehata-Charão [19] citado nas referências deste trabalho.

Teorema 1.14 *Sejam* $(\widehat{u}_0, \widehat{u}_1) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e sejam* $P_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$ *e* $\beta > 0$ *satisfazendo a Hipótese 1. Então a energia total associada ao problema em (1.4), sobre* Ω*, satisfaz*

$$\int_S^T E(t)^{1+\beta} dt \leq C_\beta \left(\|\widehat{u}_0\|^2_{L^\infty} + \|\widehat{u}_1\|^2_{L^\infty} \right)^\beta E(S),$$

para $0 \leq S < T < \infty$*, onde* $C_\beta > 0$ *é uma constante que depende de* β*.*

A partir do Teorema 1.14 e usando o Lema de Haraux-Komornik (Teorema 1.12) enunciado mais adiante, Luz-Ikehata-Charão [19] mostraram o corolário a seguir, que usamos neste trabalho para obtermos taxas de decaimento na região de baixa frequência.

Corolário 1.1 *Mediante as hipóteses do Teorema 1.14, a energia total associada ao problema em (1.4) possui o seguinte decaimento assintótico*

$$E(t) \leq C t^{-\frac{1}{\beta}},$$

para $t \to \infty$*, onde* $\beta > 0$ *é a constante dada na Hipótese 1 e* $C > 0$ *depende dos dados inicias do problema.*

As demonstrações do Teorema 1.14 e do Corolário 1.1, podem ser encontradas no artigo [19] das referências bibliográficas deste trabalho.

Usamos o lema a seguir, para obtermos taxas de decaimento para o problema associado à equação linear, na região de alta frequência.

Lema 1.10 *Sejam c, r números positivos e $a \in \mathbb{R}$. Então existe uma constante $C = C(c, r) > 0$, tal que*

$$t^r e^{-c|\xi|^a t} \leq C|\xi|^{-ar},$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $\xi \neq 0$.

Demonstração. Sejam c, r números positivos, $a \in \mathbb{R}$ e considere a função $s = c|\xi|^a t$, para $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $\xi \neq 0$. Então

$$t^r = c^{-r} s^r |\xi|^{-ar},$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $\xi \neq 0$.

Notamos que, para cada $r > 0$ fixo, a função $f(s) = s^r e^{-s}$, com $s \geq 0$, é limitada. Logo, existe $C > 0$, tal que

$$t^r e^{-c|\xi|^a t} = c^{-r} s^r |\xi|^{-ar} e^{-s} \leq C|\xi|^{-ar},$$

sendo que a constante C depende de c e r.

■

O próximo lema é usado para encontrar taxas de decaimento para o problema associado à equação linear, tanto na região de baixa frequência quanto na região de alta frequência.

Lema 1.11 *Sejam $n > 0$ um número inteiro, $k > -n$, $\vartheta > 0$ e $C > 0$. Então existe uma constante $K = K(n, k, \vartheta) > 0$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k \, d\xi \leq K t^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Sejam $k > -n$, $\vartheta > 0$ e $C > 0$. Então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^{\vartheta} t}|\xi|^k \, d\xi &= \int_0^{\infty} \int_{|\xi|=r} e^{-Cr^{\vartheta} t} r^k \, dS_{\xi} \, dr \\ &= \int_0^{\infty} e^{-Cr^{\vartheta} t} r^k \left(\omega_n r^{n-1}\right) \, dr = \omega_n \int_0^{\infty} e^{-Cr^{\vartheta} t} r^{k+n-1} \, dr,\end{aligned}$$

com a constante ω_n definida por $\omega_n = \text{med}\,\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$.

Usando a mudança de variável $s = rt^{\frac{1}{\vartheta}}$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^{\vartheta} t}|\xi|^k \, d\xi &= \omega_n \int_0^{\infty} e^{-Cs^{\vartheta}} s^{k+n-1} t^{-\frac{n+k-1}{\vartheta}} t^{-\frac{1}{\vartheta}} \, ds \\ &= \omega_n t^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \int_0^{\infty} e^{-Cs^{\vartheta}} s^{k+n-1} \, ds.\end{aligned}$$

Observamos que, para $k + n > 0$, temos

$$\int_0^{\infty} e^{-Cs^{\vartheta}} s^{k+n-1} \, ds < \infty.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^{\vartheta} t}|\xi|^k \, d\xi \leq Kt^{-\frac{k+n}{\vartheta}},$$

onde $K > 0$ é uma constante dependendo de n, k e ϑ.

$\blacksquare$

Quando buscamos taxas de decaimento para o problema associado à equação linear na região de baixa frequência, para o caso em que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, esse lema não é suficiente para obtermos a taxa ótima.

Conforme comentamos anteriormente, para o desenvolvimento deste trabalho, usamos resultados propostos por Luz-Ikehata-Charão no artigo [19] citado nas referências deste trabalho.

Referimo-nos aqui, ao Teorema 1.14 e ao Corolário 1.1 cuja demonstração usa o Lema de Haraux-Komornik, que enunciamos a seguir.

Lema 1.12 (Haraux-Komornik) *Seja* $E : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *uma função não-crescente. Assuma que existam constantes* $r > 0$ *e* $T_0 > 0$*, tais que*

$$\int_S^\infty (E(t))^{1+r}\, dt \leq T_0\, (E(0))^r\, E(S),$$

para todo $S \geq 0$*. Então, para todo* $t \geq T_0$*, vale a estimativa*

$$E(t) \leq E(0) T_0^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r}} t^{-\frac{1}{r}}.$$

Lema 1.13 *Seja* $k > -n$*,* $\vartheta > 0$ *e* $C > 0$*. Então existe* $K > 0$*, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k\, d\xi \leq K\,(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para todo $t > 0$*, com* K *uma constante dependendo de* n*.*

Demonstração. Sejam $k > -n$, $\vartheta > 0$, $C > 0$ e considere

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k\, d\xi,$$

para todo $t \geq 0$.

Inicialmente, mostramos que o lema é válido para $t \in (0,1]$.

Nesse sentido, como $I(t)$ é uma função contínua sobre $(0,1]$, existe uma constante $C_0 > 0$, tal que

$$I(t) \leq C_0, \quad \text{para } t \in (0,1].$$

Como $0 < t \leq 1$, existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$C_0 (1+t)^{\frac{n+k}{\vartheta}} \leq C_0\, 2^{\frac{n+k}{\vartheta}} \leq C_1,$$

de onde segue que

$$I(t) \leq C_0 \leq C_1(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para t no intervalo $(0,1]$.

Mostramos agora, que o lema também é válido para $t \in [1,\infty)$.

No entanto, já sabemos do Lema 1.11, que

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^{\vartheta}t}|\xi|^k\, d\xi \leq Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}},$$

para todo $t > 0$ e em particular, para $t \geq 1$.

Considerando isso e o fato que $t \in [1,\infty)$, temos que

$$I(t) \leq Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C2^{\frac{k+n}{\vartheta}}(2t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C2^{\frac{k+n}{\vartheta}}(1+t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}}.$$

Portanto, definindo $C_2 := C2^{\frac{k+n}{\vartheta}}$ e tomando $K = \max\{C_1, C_2\}$, concluímos a demonstração do lema.

■

Usamos a estimativa do lema a seguir, para obter taxas de decaimento para o problema associado à equação semilinear.

Lema 1.14 *Sejam $a > 1$ e $p > 1$ um número inteiro. Então*

$$(1+t)^a \int_0^t (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a}d\tau \leq C,$$

para todo $t > 0$, onde $C = C(a,p)$ é uma constante positiva.

Demonstração. Dividimos a demonstração do lema, em duas partes.

Na primeira parte consideramos a integral sobre o intervalo $\left[0, \frac{t}{2}\right]$ e na segunda parte a integral sobre $\left[\frac{t}{2}, t\right]$.

i) Notamos que, para $\tau \in \left[0, \dfrac{t}{2}\right]$, temos

$$1 + t = 1 + 2t - t \leq 2 + 2t - 2\tau = 2(1 + t - \tau),$$

e como $a > 1$, segue que $(1 + t - \tau)^{-a} \leq 2^a (1 + t)^{-a}$.

Então, como $ap > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&(1+t)^a \int_0^{\frac{t}{2}} (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \\
&\leq 2^a \int_0^{\frac{t}{2}} (1+\tau)^{-pa} d\tau = 2^a \left(\frac{(1+\tau)^{1-ap}}{1-ap} \right) \Bigg|_0^{\frac{t}{2}} \\
&= 2^a \left(-\frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-ap}}{ap-1} + \frac{1}{ap-1} \right) \leq \frac{2^a}{ap-1}.
\end{aligned}$$

ii) Agora, para $\tau \in \left[\dfrac{t}{2}, t\right]$, temos $1 + t \leq 2(1 + \tau)$, que implica em

$$(1+\tau)^{-pa} \leq 2^{ap}(1+t)^{-ap}.$$

Então, como $ap > a$, obtemos

$$\begin{aligned}
&(1+t)^a \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1+\tau)^{-ap}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \\
&\leq 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1+t-\tau)^{-a} d\tau \\
&= -2^{ap}(1+t)^{a-ap} \left(\frac{(1+t-\tau)^{1-a}}{1-a} \right) \Bigg|_{\frac{t}{2}}^{t} \\
&= -2^{ap}(1+t)^{a-ap} \left(-\frac{1}{a-1} + \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-a}}{a-1} \right) \\
&\leq 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{1}{a-1} \leq \frac{2^{ap}}{a-1},
\end{aligned}$$

sendo que $\dfrac{2^{ap}}{a-1} > 0$ pois, por hipótese, $a > 1$.

Considerando agora, as estimativas obtidas nos itens (i) e (ii) acima e definindo

$$C = C(a,p) := \max\left\{\frac{2^a}{ap-1}, \frac{2^{ap}}{a-1}\right\},$$

concluímos que, para qualquer $t \geq 0$ fixado, vale

$$(1+t)^a \int_0^t (1+\tau)^{-pa} (1+t-\tau)^{-a} d\tau \leq C.$$

$\blacksquare$

Por último, enunciamos um lema auxiliar que usamos para mostrar a existência e unicidade de solução global para o problema semilinear e também, para obter taxas de decaimento para esse problema.

Lema 1.15 *Seja $F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva definida por*

$$F(M) = aI_0 + bTM^p - M,$$

onde a, b, I_0, T são constantes positivas e $p > 1$ um número real. Então F possui um único ponto de mínimo global $M_0 \in (0,\infty)$ e além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, então $F(M_0) < 0$.

Demonstração. Pelo teste da derivada primeira, temos que os pontos críticos de F são da forma

$$M_0 = \left(\frac{1}{bTp}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Observamos que M_0 é positivo, pois $b, T > 0$ e $p > 1$ e como F está definida sobre $[0,\infty)$, M_0 é o único ponto crítico da função.

Além disso, o teste da derivada segunda, implica que F assim definida, é uma função convexa, de onde concluímos que $M_0 > 0$ é ponto de mínimo global, conforme sugere o gráfico da Figura 1.1.

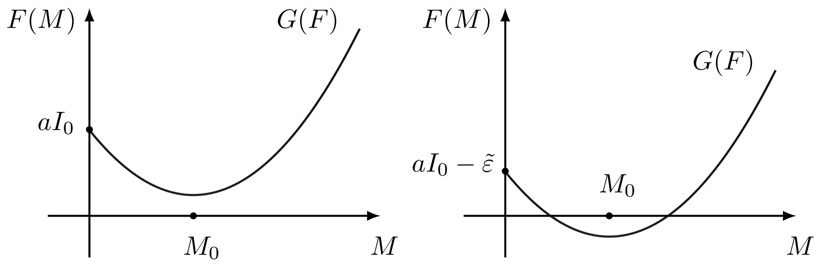

Figura 1.1: No segundo gráfico, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon a$.

Além disso, $F(0) = aI_0 > 0$, pois $a, I_0 > 0$. Portanto, para I_0 suficientemente próximo de zero, ou seja, se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, então temos que $F(M_0) < 0$.

■

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções: Problema Linear

Neste capítulo mostramos a existência e a unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado à equação linear

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ e as potências fracionárias do operador Laplaciano satisfazem $0 \leq \delta \leq \alpha \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Calculando formalmente o produto interno usual em $L^2(\mathbb{R}^n)$, da equação diferencial em (2.1) com a função u_t, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t \Big) u_t \, dx = 0. \tag{2.2}$$

Desenvolvendo o primeiro termo a integral acima, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}u_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_t^2\right)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2\,dx. \tag{2.3}$$

Agora, usando a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\delta} u_{tt}u_t\,dx = \big((-\Delta)^{\delta}u_{tt}, u_t\big)_{L^2} = \big(|\xi|^{2\delta}\widehat{u_{tt}}, \widehat{u_t}\big)_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\delta}\widehat{u_{tt}}\,\widehat{u_t}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\delta}\widehat{u_{tt}}\,|\xi|^{\delta}\widehat{u_t}\,d\xi = \big(|\xi|^{\delta}\widehat{u_{tt}}, |\xi|^{\delta}\widehat{u_t}\big)_{L^2} \\
&= \Big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_{tt}, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_t\Big)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_{tt}(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_t\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(-\Delta)^{\delta}u_t^2\right)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \left|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_t\right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Analogamente, temos também que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\alpha}u\,u_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\alpha}\widehat{u}\,\widehat{u_t}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\alpha}\widehat{u}\,|\xi|^{\alpha}\widehat{u_t}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u_t\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \left|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\right|^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

assim como

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\theta}u_t u_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\theta}\widehat{u_t}\,\widehat{u_t}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\theta}\widehat{u_t}\,|\xi|^{\theta}\widehat{u_t}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t\right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo as identidades obtidas em (2.3) a (2.6), na equação acima em (2.2), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_{L^2}^2 + \left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_t\right\|_{L^2}^2 + \left\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\right\|_{L^2}^2\right) + \left\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t\right\|_{L^2}^2 = 0, \tag{2.7}$$

para todo $t > 0$.

Definimos a energia total do sistema (2.1) por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|_{L^2}^2 + \left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t\right\|_{L^2}^2 + \left\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u\right\|_{L^2}^2 \right) \tag{2.8}$$

e então reescrevemos a equação em (2.7) na forma

$$\frac{d}{dt}E(t) + \left\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u_t\right\|_{L^2}^2 = 0, \quad \text{para } t > 0. \tag{2.9}$$

Observamos na equação (2.9), que a função energia $E(t)$ é não crescente no tempo e que o termo $(-\Delta)^{\theta} u_t$ na equação diferencial em (2.1), representa uma dissipação de energia do sistema.

Considerando a função em (2.8), definimos o espaço da energia por

$$X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n). \tag{2.10}$$

Observamos que, para os casos em que $\delta > \alpha \geq 0$, temos que $u_t \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, de modo que a regularidade exigida da função u_t, é maior do que a regularidade da função u e além disso, o espaço para os dados iniciais do problema (2.1), também exige maior regularidade.

Neste trabalho estudamos somente os casos em que $0 \leq \delta \leq \alpha$, situação em que $(u, u_t) \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, e o espaço X está definido de forma adequada e é o mais importante, pois é o espaço onde ocorrem grande parte das aplicações físicas. Considerando $\alpha \in [0, 2]$ e $\delta, \theta \in [0, \alpha]$, a maior potência para o operador Laplaciano na equação diferencial do problema (2.1), é dois.

Considerando a relação entre as potências δ e θ do operador Laplaciano, dividimos o estudo da existência e unicidade de soluções do problema associado à equação linear, nos casos

1) Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$;

2) Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Com o objetivo de usar resultados da teoria de semigrupos, enunciados no Capítulo 1 deste trabalho, consideramos o espaço da energia definido em (2.10) e reduzimos a ordem do problema de Cauchy dado em (2.1), reescrevendo-o na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = BU + J(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $U = (u, u_t)$, $U_0 = (u_0, u_1)$, com B e J operadores definidos adequadamente para cada um dos dois casos citados acima, conforme mostramos nas próximas seções deste capítulo.

Em seguida, usando o Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.10), mostramos que B é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e mostramos também, que J é um operador linear limitado sobre o espaço X.

A partir disso, usando resultados da teoria de semigrupos, decorre do Teorema de Perturbação de Geradores (Teorema 1.11), que $B + J$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e portanto, pelo Teorema 1.12, existe uma única solução para o problema (2.11) e equivalentemente, para o problema (2.1).

Apresentamos formalmente esse resultado através do Teorema 2.1, que enunciamos ao final deste capítulo. Para a demostração desse teorema, definimos e analisamos inicialmente, as propriedades de um operador que chamamos A_σ, que usamos para definir o operador B dado no problema de Cauchy em (2.11), de modo que B seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

2.1 Operador A_σ

Nesta seção consideramos $0 \leq \delta \leq \sigma$ e definimos o operador A_σ de modo que seu domínio seja um subespaço de $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
D(A_\sigma) = \Big\{ & u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n);\ \exists\, y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n), \\
& (u,\varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi\right) = (y,\varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right), \\
& \forall\, \varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n) \Big\}.
\end{aligned}
$$

A partir da condição imposta sobre $D(A_\sigma)$, é natural definirmos o operador A_σ na forma

$$
\begin{array}{rccc}
A_\sigma : & D(A_\sigma) & \longrightarrow & H^\delta(\mathbb{R}^n) \\
 & u & \longmapsto & y,
\end{array}
\tag{2.12}
$$

com $y = A_\sigma u = \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(I + (-\Delta)^\sigma\right) u$.

Mostramos a seguir, que $D(A_\sigma) \neq \emptyset$ e que, para cada $u \in D(A_\sigma)$, existe um único elemento $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, tal que $A_\sigma u = y$, concluindo que o operador A_σ está bem definido.

De forma mais geral, mostramos no Lema 2.1 que cada $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ está associado a, no máximo, um elemento $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, através das igualdades propostas, satisfazendo as propriedades em $D(A_\sigma)$.

Lema 2.1 *Para todo $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, existe no máximo um elemento $y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, tal que $A_\sigma u = y$, ou seja,*

$$
(u,\varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi\right) = (y,\varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right),
$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Claro que a equação variacional do lema é satisfeita para $u = v = 0$. Assim, $0 \in D(A_\sigma)$ e então $D(A_\sigma) \neq \emptyset$.

Seja $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos que existam $y_1, y_2 \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo a equação do lema. Então temos

$$(y_1, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y_1, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right) = (y_2, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y_2, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right),$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$(y_1 - y_2, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} (y_1 - y_2), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right) = 0,$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ está densamente imerso em $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, em particular

$$(y_1 - y_2, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} (y_1 - y_2), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right) = 0, \tag{2.13}$$

para qualquer $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Definindo $y = y_1 - y_2$, segue da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ no espaço $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, que existe uma sequência $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi_\nu \longrightarrow y$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, quando $\nu \to \infty$, ou seja,

$$\|\varphi_\nu - y\|_{H^\delta} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \nu \to \infty,$$

assim como,

$$\|\varphi_\nu - y\|_{H^\delta}^2 = \|\varphi_\nu\|_{H^\delta}^2 - 2\,(\varphi_\nu, y)_{H^\delta} + \|y\|_{H^\delta}^2 \longrightarrow 0, \tag{2.14}$$

quando $\nu \to \infty$. Além disso, como $\left|\|\varphi_\nu\|_{H^\delta} - \|y\|_{H^\delta}\right| \leq \|\varphi_\nu - y\|_{H^\delta}$, temos que

$$\|\varphi_\nu\|_{H^\delta} \longrightarrow \|y\|_{H^\delta}, \quad \text{quando } \nu \to \infty. \tag{2.15}$$

Assim, dos resultados em (2.14) e em (2.15), segue que

$$(y, \varphi_\nu)_{H^\delta} \longrightarrow \|y\|^2_{H^\delta}, \quad \text{quando } \nu \to \infty. \tag{2.16}$$

Por outro lado, pela definição do produto interno no espaço $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e considerando o resultado em (2.13), temos também que

$$(y, \varphi_\nu)_{H^\delta} = (y, \varphi_\nu) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi_\nu\right) = 0, \tag{2.17}$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

Portanto, de (2.16) e (2.17), resulta que

$$\|y\|^2_{H^\delta} = \lim_{\nu \to \infty} (y, \psi_\nu)_{H^\delta} = 0,$$

de onde concluímos que $y = 0 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $y_1 = y_2 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

■

Como consideramos $\delta \leq \sigma$, temos $\sigma \leq 2\sigma - \delta$ e então,

$$H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^\sigma(\mathbb{R}^n) \subseteq H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Posto isso, determinamos na sequência uma caracterização para o domínio do operador A_σ, mostrando nos Lemas 2.2 e 2.3 que

$$D(A_\sigma) = H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Lema 2.2 *Se $0 \leq \delta \leq \sigma$, então $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}} \leq C \, \|A_\sigma u\|_{H^\delta} \, ,$$

para todo $u \in D(A_\sigma)$.

Demonstração. Seja $u \in D(A_\sigma)$. Pela definição de $D(A_\sigma)$, dada no início desta seção, existe um $y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$(u, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi\right) = (y, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right), \quad (2.18)$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Definimos o funcional $F : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, na forma

$$\langle F, \varphi \rangle = (y, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right).$$

Dessa forma, o funcional F está bem definido e é linear.

Além disso, F é contínuo pois, dado $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} |\langle F, \varphi \rangle| &\leq |(y, \varphi)| + \left|\left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right)\right| \\ &\leq \|y\|_{H^\delta} \, \|\varphi\|_{H^\delta} + \left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y\right\|_{H^\delta} \, \left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\right\|_{H^\delta}. \end{aligned}$$

Então, considerando a definição de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e usando a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3), temos que

$$\begin{aligned} |\langle F, \varphi \rangle| &\leq \|\widehat{y}\| \, \|\widehat{\varphi}\| + \left\||\xi|^\delta \widehat{y}\right\| \, \left\||\xi|^\delta \widehat{\varphi}\right\| \\ &\leq 2 \left\|\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{1/2} \widehat{y}\right\| \, \left\|\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{1/2} \widehat{\varphi}\right\| \\ &\leq 2 \, \|y\|_{H^\delta} \, \|\varphi\|_{H^\delta}, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\|F\| \leq 2\,\|y\|_{H^{\delta}}$. Logo, F é um funcional limitado e portanto, contínuo em $H^{\delta}\,(\mathbb{R}^n)$.

Assim, dado $u \in D(A_\sigma)$, existe $F \in (H^{\delta}(\mathbb{R}^n))' = H^{-\delta}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(u, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi\right) = \langle F, \varphi \rangle, \tag{2.19}$$

para todo $\varphi \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$, em particular,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall p \geq 1,$$

o resultado é válido em $H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ e também

$$(u, \varphi) + \left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi\right) = \langle F, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, de onde concluímos que a equação

$$u + (-\Delta)^{\sigma} u = F, \tag{2.20}$$

é válida no espaço dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a Transformada de Fourier na equação (2.20) e considerando a definição do funcional F, temos que

$$\left(1 + |\xi|^{2\sigma}\right) \widehat{u} = \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) \widehat{y},$$

para $u \in D(A_\sigma) \subset H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ e $y \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, ou ainda,

$$\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |\xi|^{2\sigma}\right) \widehat{u} = \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{y}. \tag{2.21}$$

No entanto, da definição de A_σ, temos que $y = A_\sigma u$ e então

$$\widehat{y} = \widehat{A_\sigma u} = \frac{1+|\xi|^{2\sigma}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}. \tag{2.22}$$

Por outro lado, tomando o quadrado da norma L^2 de cada um dos membros da equação em (2.21), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{-1} \left(1+|\xi|^{2\sigma}\right)^2 |\widehat{u}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{y}|^2 d\xi.$$

Como consideramos $0 \leq \delta \leq \sigma$ e então também $2\sigma - \delta \geq 0$, segue do Lema 1.4 apresentado do Capítulo 1, a equivalência

$$\begin{aligned} &\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{-1} \left(1+|\xi|^{2\sigma}\right)^2 \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{-\delta}\left(1+|\xi|^2\right)^{2\sigma} \\ &= C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\sigma-\delta} \leq C\left(1+|\xi|^{2(2\sigma-\delta)}\right), \end{aligned}$$

onde C é uma constante que depende de σ e δ.

Assim, a equação integral acima, pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2(2\sigma-\delta)}\right)|\widehat{u}|^2 d\xi \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}|\widehat{y}|^2 d\xi. \tag{2.23}$$

Portanto, considerando a definição de $\widehat{A_\sigma}$ em (2.22), concluímos da inequação em (2.23) e da Identidade de Plancherel (Teorema 1.3) que

$$\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}} \leq C\|y\|_{H^\delta} = C\left\|A_\sigma u\right\|_{H^\delta},$$

para todo $u \in D(A_\sigma)$, ou seja, $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

■

Observação 2.1 *Lembramos que, por definição,* $D(A_\sigma) \subset H^\sigma(\mathbb{R}^n)$. *Isso justifica a condição* $0 \leq \delta \leq \sigma$, *imposta no início desta seção, pois ela garante que* $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.3 *Se $0 \leq \delta \leq \sigma$, então $H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subseteq D(A_\sigma)$, ou seja, dado $u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ existe $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$(u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big) = (y,\varphi) + \Big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\Big), \quad (2.24)$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Sejam $u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $G : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$\langle G,\varphi\rangle = (u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big).$$

Dessa forma, o funcional G está bem definido e é linear, pois

$$u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, G é contínuo, pois dado $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}|\langle G,\varphi\rangle| &\leq |(u,\varphi)| + \left|\Big((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\Big)\right| \\ &\leq \|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \left\|(-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u\right\|_{L^2}\left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Então, considerando a definição de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e usando a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3), temos que

$$\begin{aligned}|\langle G,\varphi\rangle| &\leq \|\widehat{u}\|_{L^2}\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \left\||\xi|^{2\sigma-\delta}\widehat{u}\right\|_{L^2}\left\||\xi|^{\delta}\widehat{\varphi}\right\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|\widehat{u}\|_{L^2} + \left\||\xi|^{2\sigma-\delta}\widehat{u}\right\|_{L^2}\right)\|\varphi\|_{H^\delta} \\ &\leq 2\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}}\|\varphi\|_{H^\delta},\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\|G\| \leq 2\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}}$.

Logo, G é um funcional linear contínuo e então

$$G \in \left(H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right)' = H^{-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Com objetivo de usar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5), definimos a aplicação

$$\begin{aligned} &b : H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &b(\varphi, \phi) = (\varphi, \phi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\phi\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim, a aplicação $b(\cdot,\cdot)$ está bem definida, é uma forma bilinear e é contínua pois, dado $(\varphi, \phi) \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} |b(\varphi, \phi)| &\leq |(\varphi, \phi)| + \left|\left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\phi\right)\right| \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} + \left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right\|_{L^2}\left\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\phi\right\|_{L^2} \\ &\leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}\left\|\widehat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\||\xi|^{\delta}\widehat{\varphi}\right\|_{L^2}\left\||\xi|^{\delta}\widehat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\leq 2\,\|\varphi\|_{H^{\delta}}\|\phi\|_{H^{\delta}}. \end{aligned}$$

Além disso, $b(\cdot,\cdot)$ é coerciva pois, para todo $\varphi \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$,

$$b(\varphi, \varphi) = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2 + \left\||\xi|^{2\delta}\widehat{\varphi}\right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n}\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{\varphi}|^2 d\xi = \|\varphi\|_{H^{\delta}}^2.$$

Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5) que, para o funcional linear e contínuo G, existe um único $y \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, que é solução para o problema variacional

$$b(y, \varphi) = \langle G, \varphi\rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n). \tag{2.26}$$

Assim, para a forma bilinear contínua e coerciva $b(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear e contínuo G, conforme definidos nesta demonstração, existe um único $y \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, de modo que

$$(y,\varphi)+\left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right)=(u,\varphi)+\left((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right), \quad (2.27)$$

para todo $\varphi \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

No entanto, como $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, em particular a equação variacional em (2.27), vale para todo $\varphi \in H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, usando a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3), temos

$$\left((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right)=\left(|\xi|^{2\sigma-\delta}\widehat{u},|\xi|^{\delta}\widehat{\varphi}\right)=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2\sigma-\delta}\widehat{u}\,|\xi|^{\delta}\widehat{\varphi}\,d\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2\sigma}\widehat{u}\,|\xi|\widehat{\varphi}\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{\sigma}\widehat{u}\,|\xi|^{\sigma}\widehat{\varphi}\,d\xi=\left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\right).$$

Como isso, segue de (2.27), que existe $y \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$(y,\varphi)+\left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right)=(u,\varphi)+\left((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\right),$$

para todo $\varphi \in H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, a identidade que define $D(A_\sigma)$ é satisfeita para $u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $u \in D(A_\sigma)$, o que implica que $H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_\sigma)$.

■

Observação 2.2 *Lembramos que, conforme justificamos anteriormente, o espaço definido para a energia do sistema apresentado em (2.1) é*

$$X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$$

munido com os produtos internos

$$(u,v)_{H^{\alpha}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi, \tag{2.28}$$

$$(u,v)_{H^{\delta}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi, \tag{2.29}$$

e respectivas normas, que são equivalentes às normas usuais nesses espaços, devido às desigualdades provadas no Lema 1.4 do Capítulo 1.

2.2 Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$

Nesta seção, reescrevemos o problema de Cauchy (2.1) na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_1 U + J_1(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.30}$$

onde $U = (u, u_t)\,, U_0 = (u_0, u_1) \in X$, com B_1 e J_1 adequados, de modo que B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X, J_1 é um operador linear e limitado sobre X.

Em seguida, usando resultados da teoria de semigrupos, mostramos que $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e portanto, o problema admite uma única solução.

Com o objetivo de determinarmos os operadores B_1 e J_1, de modo que atendam às hipóteses desejadas, somamos e subtraímos o termo u à equação diferencial em (2.1), obtendo assim,

$$\left(I + (-\Delta)^{\delta}\right) u_{tt} = -\left(I + (-\Delta)^{\alpha}\right) u + \left(u - (-\Delta)^{\theta} u_t\right).$$

A definição do operador A_σ estudado na Seção 2.1, implica que

$\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)$ é inversível. Então, definindo $v = u_t$, segue que

$$v_t = -\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^{\alpha}\right)u + \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u-(-\Delta)^{\theta}v\right).$$

Relacionando o expoente α com σ que ocorre na definição do operador A_σ na seção anterior, reescrevemos a equação na forma

$$v_t = -A_\alpha u + \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u-(-\Delta)^{\theta}v\right),$$

com $A_\alpha = \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^{\alpha}\right)$ e conforme mostramos nos Lemas 2.2 e 2.3 daquela seção,

$$D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, a equação diferencial em (2.30) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u + \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u-(-\Delta)^{\theta}v\right) \end{pmatrix} \\ &= B_1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + J_1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\end{aligned}$$

onde $B_1 : D(A_\alpha)\times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$B_1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u \end{pmatrix}$$

e $J_1 : H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ operador definido por

$$J_1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u-(-\Delta)^{\theta}v\right) \end{pmatrix}.$$

Observação 2.3 *Conforme mostramos anteriormente na Seção 2.1,* $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$. *Assim, como* $D(B_1) = D(A_\alpha) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, *temos que* $B_1 U \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, *ou seja,* $B_1(D(B_1)) \subset X$.

Mostramos nesta seção, que o operador $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X, digamos $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$.

Então, usando a teoria de semigrupos, concluímos que

$$U(t) = S_1(t)U_0, \quad t \geq 0,$$

é a solução para o problema de Cauchy em (2.30).

Assim, para dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos

$$U \in C\left([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)\right).$$

Dessa forma, a primeira componente de $U(t) = S_1(t)U_0$, é a (única) solução do problema linear (2.1) e satisfaz

$$u \in C\Big([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Além disso, para dados iniciais

$$U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n),$$

temos que

$$u \in C\Big([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^2\Big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\Big).$$

2.2.1 B_1 é Gerador Infinitesimal de um Semigrupo de Contrações de Classe C_0

Mostramos nesta subseção, que B_1 é um operador bem definido e que é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

De acordo com os Lemas 2.2 e 2.3 na seção anterior deste capítulo,

$$D\left(A_\alpha\right) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, tomando $u \in D\left(A_\alpha\right)$, temos que $A_\alpha u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Posto isso, segue que o operador

$$\begin{array}{rccc} B_1: & D\left(A_\alpha\right) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n), \\ & (u,v) & \longmapsto & (v, -A_\alpha u) \end{array} \tag{2.31}$$

está bem definido.

Lema 2.4 *O operador B_1 definido em (2.31), é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que o operador B_1 satisfaz as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.10) e portanto, é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

Naturalmente que o conjunto $D(B_1)$ é denso em X, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$,

$$D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Para mostrar que B_1 é dissipativo, consideramos o produto interno no espaço $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, definido a partir da soma dos produtos internos em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Nesse sentido, dados $(u,v) \in D(B_1)$,

$$\begin{aligned}\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^\alpha\times H^\delta} &= ((v,-A_\alpha u),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta}\\ &= (v,u)_{H^\alpha} - (A_\alpha u, v)_{H^\delta}\,.\end{aligned}$$

Considerando os produtos internos definidos em (2.28) e (2.29), para os espaços $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}(B_1(u,v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta} = &\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi\\ &-\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{A_\alpha u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\end{aligned}$$

e usando o resultado em (2.22), ou seja, $\widehat{A_\alpha u} = \dfrac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}&(B_1(u,v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\Big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}} - \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\Big)\,d\xi\\ &= 2i\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})Im\big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\big)\,d\xi,\end{aligned}$$

onde o termo $Im\big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\big)$ representa a parte imaginária de $\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}$.

Assim, para todo $(u,v) \in D(B_1)$, temos que

$$Re\,\big((B_1(u,v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta}\big) = 0$$

e portanto, segue da definição, que B_1 é dissipativo.

Além disso, conforme mostramos a seguir,

$$Im(I-B_1) = H^\alpha(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

De fato, $Im(I - B_1) \subset H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, pois dado $(f,g) \in Im(I - B_1)$, existe $(u,v) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$(u,v) - B_1(u,v) = (I - B_1)(u,v) = (f,g).$$

Entretanto, como $0 \leq \delta \leq \alpha$, temos $(u,v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e além disso, por definição,

$$B_1 : H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n),$$

ou seja $B_1(u,v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, de onde segue que

$$(f,g) = (I - B_1)(u,v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, dado $(f,g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, existe um par $(u,v) \in D(B_1)$, tal que $(I - B_1)(u,v) = (f,g)$, ou seja,

$$\big(u - v, v + A_\alpha u\big) = (f,g).$$

No entanto, provar a identidade acima, é equivalente a mostrar que existe $(u,v) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo

$$\begin{cases} u - v = f \ \in H^\alpha(\mathbb{R}^n), \\ v + A_\alpha u = g \ \in H^\delta(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.32}$$

Da primeira equação do sistema, temos que $v = u - f$ e então, substituindo na segunda equação, obtemos

$$A_\alpha u + u = f + g. \tag{2.33}$$

Assim, dado $(f,g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, devemos mostrar que existe

$u \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a equação (2.33).

Usando a definição de $A_\alpha = \big(I+(-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(I+(-\Delta)^\alpha\big)$ e aplicando o operador $\big(I+(-\Delta)^\delta\big)$ a ambos os lados da equação variacional em (2.33), temos que

$$(I+(-\Delta)^\alpha)u + (I+(-\Delta)^\delta)u = (I+(-\Delta)^\delta)(f+g).$$

Com o objetivo de usar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5) para mostrar a existência de solução para a equação em (2.33), definimos uma forma bilinear b e um funcional linear F e mostramos que b é contínua e coerciva e que F é contínuo.

Seja $b(\cdot,\cdot) : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, a forma definida por

$$b(u,\varphi) = (u,\varphi)_{H^\alpha} + (u,\varphi)_{H^\delta}.$$

Notamos que $b(\cdot,\cdot)$ está bem definida, pois $0 \le \delta \le \alpha$, e é bilinear, pois é definida como soma de produtos internos.

Além disso, dados $u, \varphi \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, como $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \big|b(u,\varphi)\big| &\le \big|(u,\varphi)_{H^\alpha}\big| + \big|(u,\varphi)_{H^\delta}\big| \\ &\le \|u\|_{H^\alpha}\|\varphi\|_{H^\alpha} + \|u\|_{H^\delta}\|\varphi\|_{H^\delta} \\ &\le 2\,\|u\|_{H^\alpha}\|\varphi\|_{H^\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, $b(\cdot,\cdot)$ é limitada e portanto, contínua.

Além disso, $b(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois para todo $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned} b(u,u) &= (u,u)_{H^\alpha} + (u,u)_{H^\delta} \\ &= \|u\|_{H^\alpha}^2 + \|u\|_{H^\delta}^2 \ \ge\ \|u\|_{H^\alpha}^2. \end{aligned}$$

Agora, seja $F : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, o funcional definido por

$$\langle F, \varphi \rangle = (f, \varphi)_{H^\delta} + (g, \varphi)_{H^\delta}.$$

Naturalmente que F está bem definido e é linear, pois é definido como soma de produtos internos e $f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, para $f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ dados, temos

$$\begin{aligned}
\big|\langle F, \varphi \rangle\big| &\leq \big|(f, \varphi)_{H^\delta}\big| + \big|(g, \varphi)_{H^\delta}\big| \\
&\leq \|f\|_{H^\delta} \|\varphi\|_{H^\delta} + \|g\|_{H^\delta} \|\varphi\|_{H^\delta} \\
&\leq \big(\|f\|_{H^\alpha} + \|g\|_{H^\delta}\big) \|\varphi\|_{H^\delta},
\end{aligned}$$

para $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Logo F é limitado e portanto, contínuo em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Também, como F é um funcional linear e limitado sobre $H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$F \in \big(H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)' = H^{-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5), que existe um único elemento $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$b(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Assim, pela definição de $b(\cdot, \cdot)$ e de F, existe um único elemento $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo a equação

$$(u, \varphi)_{H^\alpha} + (u, \varphi)_{H^\delta} = (f, \varphi)_{H^\delta} + (g, \varphi)_{H^\delta}$$

e considerando a definição de produto interno em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\left((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\right)+\left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right)+2(u,\varphi)=(f,\varphi)_{H^\delta}+(g,\varphi)_{H^\delta},$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ denso em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, a equação variacional acima é válida para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e portanto,

$$A_\alpha u + u = f + g \tag{2.34}$$

no sentido das distribuições, ou seja, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então, aplicando a transformada de Fourier em (2.34), obtemos

$$\widehat{A_\alpha u} + \widehat{u} = \widehat{f} + \widehat{g}$$

ou ainda,

$$\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{A_\alpha u} = \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{f}+\widehat{g}-\widehat{u}\right)$$

Agora, tomando a integral sobre $\mathbb{R}^n$ em cada lado da identidade acima, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{A_\alpha u}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi)-\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Então segue da definição de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ que

$$\|A_\alpha u\|^2_{H^\delta} \leq \|f\|^2_{H^\delta} + \|g\|^2_{H^\delta} + \|u\|^2_{H^\delta}\,. \tag{2.35}$$

Como $u, f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, a soma das normas em (2.35) é finita e então usando o Lema 2.2, resulta

$$\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} \leq \|A_\alpha u\|^2_{H^\delta} < \infty,$$

de onde concluímos que $u \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, do sistema definido em 2.32 temos que $u = f + v$ e $v = g - A_\alpha u$. Logo, para todo $(f,g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ existe $(u,v) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que $(I - B_1)(u,v) = (f,g)$, ou seja,

$$(f,g) \in Im(I - B_1).$$

Concluímos assim, que $D(B_1)$ é denso em $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, que B_1 é um operador dissipativo e $Im(I - B_1) = X$.

Portanto, segue do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.10), que B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço da energia X.

■

2.2.2 J_1 é um Operador Limitado

Mostramos a seguir, através do Lema 2.5, que o operador

$$\begin{array}{rccc} J_1 : & X & \longrightarrow & H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n), \\ & (u,v) & \longmapsto & \Big(0,\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big)\Big) \end{array} \tag{2.36}$$

é linear e limitado no espaço da energia $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Observamos que J_1 está bem definido, pois $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$.

Lema 2.5 *O operador J_1 definido em (2.36), é linear e limitado.*

Demonstração. A linearidade de J_1, segue da linearidade do operador Laplaciano e suas potências fracionárias.

Além disso, para todo $(u,v) \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|J_1(u,v)\right\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} &= \left\|\left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(u - (-\Delta)^\theta v\right)\right\|^2_{H^\delta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)\left|\frac{\widehat{u} - |\xi|^{2\theta}\widehat{v}}{1 + |\xi|^{2\delta}}\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |\xi|^{2\delta}} |\widehat{u}|^2 \, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{4\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}} |\widehat{v}|^2 \, d\xi.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.4 dado no Capítulo 1, valem as seguintes estimativas:

i) Para $\xi \in \mathbb{R}^n$: $\displaystyle \frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq \frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq 1 + |\xi|^{2\alpha}$;

ii) Para $0 < |\xi| \leq 1$: $\displaystyle \frac{|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq \frac{1+|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\theta-\delta}$

e então como $\theta < \delta$, $\displaystyle \frac{|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \leq C\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)$;

Para $|\xi| \geq 1$: $\displaystyle \frac{|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq \frac{|\xi|^{4\theta}}{|\xi|^{2\delta}} \leq \frac{|\xi|^{4\delta}}{|\xi|^{2\delta}} \leq 1 + |\xi|^{2\delta}$;

Para $|\xi| = 0$, a relação é verificada de maneira imediata.

Considerando as estimativas mostradas nos itens (i) e (ii), temos

$$\begin{aligned}
\left\|J_1(u,v)\right\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}|^2 \, d\xi + C\int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{v}|^2 \, d\xi \\
&= \|u\|_{H^\alpha} + C\|v\|_{H^\delta} \leq C\|U\|_{H^\alpha \times H^\delta}.
\end{aligned}$$

Concluímos assim, que J_1 é um operador linear limitado em X.

■

Reunindo os resultados obtidos nos Lemas 2.4 e 2.5, segue do Teorema de Perturbação de Geradores (Teorema 1.11), que $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e portanto, concluímos do Teorema 1.12, que existe uma única solução para o problema de Cauchy dado em (2.30).

2.3 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

Assim como na seção anterior, também aqui reescrevemos o problema de Cauchy descrito em (2.1), na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_2U + J_2(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.37}$$

onde $U = (u, u_t)\,, U_0 = (u_0, u_1) \in X$, com B_2 e J_2 adequados, de modo que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X, J_2 é um operador linear e limitado sobre X.

Nesse sentido, definimos $v = u_t$ e então, somando e subtraindo os termos u e v à equação diferencial em (2.1) obtemos

$$\left(I + (-\Delta)^{\delta}\right) v_t = -\left(I + (-\Delta)^{\alpha}\right) u - \left(I + (-\Delta)^{\theta}\right) v + (u + v).$$

A definição do operador A_σ estudado na Seção 2.1, implica que $\left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)$ é inversível. Então, temos que

$$v_t = -A_\alpha u - A_\theta v + \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1} (u + v),$$

com

$$A_\alpha = \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1} \left(I + (-\Delta)^{\alpha}\right),$$
$$A_\theta = \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1} \left(I + (-\Delta)^{\theta}\right),$$

podem ser relacionados com o operador A_σ definido na seção anterior e conforme mostramos nos Lemas 2.2 e 2.3 daquela seção,

$$D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, a equação diferencial em (2.37) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u - A_\theta v + \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \end{pmatrix} \\ &= B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + J_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\end{aligned}$$

onde $B_2 : D(A_\alpha) \times D(A_\theta) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u - A_\theta v \end{pmatrix}$$

e $J_2 : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ operador definido por

$$J_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \end{pmatrix}.$$

Observação 2.4 *Conforme mostramos na Seção 2.1, a definição do operador B_2 exige somente*

$$D(B_2) = D(A_\alpha) \times D(A_\theta) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

No entanto, na próxima subseção calculamos o produto interno da segunda coordenada de $U = (u, v)$, no espaço $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Assim, como $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, temos que

$$H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$$

e então definimos

$$D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Assim como na seção anterior, mostramos que o operador $B_2 + J_2$ é gerador de um semigrupo de classe C_0 em X, digamos $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$.

Então, usando a teoria de semigrupos, concluímos que

$$U(t) = S_2(t)U_0, \quad t \geq 0,$$

é a solução para o problema de Cauchy em (2.37).

Assim, para dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1) \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$U \in C\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Dessa forma, a primeira componente de $U(t) = S_2(t)U_0$, é a (única) solução do problema linear (2.1) e satisfaz

$$u \in C\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Além disso, para dados iniciais

$$U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

temos que

$$u \in C\left([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^2\left([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

2.3.1 B_2 é Gerador Infinitesimal de um Semigrupo de Contrações de Classe C_0

Mostramos nesta subseção, que B_2 é um operador bem definido e que é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço $X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

De acordo com os Lemas 2.2 e 2.3 na primeira seção deste capítulo,

$$D\left(A_{\alpha}\right) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad D\left(A_{\theta}\right) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, tomando $u \in D\left(A_{\alpha}\right)$, temos que $A_{\alpha}u \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ e tomando $v \in D\left(A_{\theta}\right)$, temos $A_{\theta}v \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Posto isso e considerando a Observação 2.4, segue que o operador

$$\begin{array}{rccc} B_2 : & D\left(A_{\alpha}\right) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(v, -A_{\alpha}u - A_{\theta}v\right), \end{array} \tag{2.38}$$

está bem definido.

Lema 2.6 *O operador B_2 definido em (2.38), é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Também aqui, mostramos que o operador B_2 satisfaz as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.10) e portanto, é gerador de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

Naturalmente que o conjunto $D(B_2)$ é denso em X, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$,

$$D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Para mostrar que B_2 é dissipativo, consideramos o produto interno no espaço $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, definido a partir da soma dos produtos internos em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Nesse sentido, dados $(u,v)\in D(B_1)$,

$$\begin{aligned}(B_2(u,v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta} &= ((v,-A_\alpha u - A_\theta v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta}\\ &= (v,u)_{H^\alpha} - (A_\alpha u, v)_{H^\delta} - (A_\theta v, v)_{H^\delta}\,.\end{aligned}$$

Considerando os produtos internos definidos em (2.28) e (2.29), para os espaços $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}&(B_2(u,v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi\\ &-\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_\alpha u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_\theta v}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\end{aligned}$$

e usando o resultado em (2.22), ou seja, $\widehat{A_\alpha u} = \dfrac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}&(B_2(u,v),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi\\ &-\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\frac{(1+|\xi|^{2\alpha})}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\left(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}} - \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\right)d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\theta})|\widehat{v}|^2 d\xi\\ &= 2i\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})Im\big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\big)\,d\xi - \|v\|^2_{H^\theta},\end{aligned}$$

onde o termo $Im\big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\big)$ representa a parte imaginária de $\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}$.

Assim, para todo $(u,v)\in D(B_2)$, temos que

$$Re\big(B_2(u,v),(u,v)\big)_{H^\alpha\times H^\delta} = -\|v\|^2_{H^\theta}\le 0$$

e portanto, segue da definição, que B_2 é dissipativo.

Além disso, conforme mostramos a seguir,

$$Im(I - B_2) = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

De fato, $Im(I-B_2) \subset H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, pois dado $(f, g) \in Im(I - B_2)$, existe $(u, v) \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$(u, v) - B_2(u, v) = (I - B_2)(u, v) = (f, g).$$

Entretanto, como $0 \leq \delta \leq \alpha$, temos $(u, v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, e além disso, por definição,

$$B_2 : H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, $B_2(u, v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, de onde segue que

$$(f, g) = (I - B_2)(u, v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, dado $(f, g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, existe um par $(u, v) \in D(B_2)$, tal que $(I - B_1)(u, v) = (f, g)$, ou seja,

$$\big(u - v, v + A_\alpha u + A_\theta v\big) = (f, g).$$

No entanto, provar a identidade acima, é equivalente a mostrar que existe $(u, v) \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo

$$\begin{cases} u - v = f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n), \\ v + A_\alpha u + A_\theta v = g \in H^\delta(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.39}$$

Da primeira equação do sistema, temos que $v = u - f$ e então, substituindo na segunda equação, obtemos

$$A_\alpha u + A_\theta u + u = f + g + A_\theta f. \tag{2.40}$$

Assim, dados $(f, g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, devemos mostrar que existe $u \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a equação (2.40).

Usando a definição de

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} (I + (-\Delta)^\alpha), \\ A_\theta &= \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(I + (-\Delta)^\theta\right) \end{aligned}$$

e aplicando o operador $\left(I + (-\Delta)^\delta\right)$ a ambos os lados da equação variacional em (2.40), temos que

$$\begin{aligned} &(I + (-\Delta)^\alpha)\, u + \left(I + (-\Delta)^\theta\right) u + \left(I + (-\Delta)^\delta\right) u \\ &= \left(I + (-\Delta)^\delta\right) f + \left(I + (-\Delta)^\delta\right) g + \left(I + (-\Delta)^\theta\right) f. \end{aligned}$$

Com o objetivo de usar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5) para mostrar a existência de solução para a equação em (2.40), definimos uma forma bilinear b e um funcional linear F e mostramos que b é contínua e coerciva e que F é contínuo.

Seja $b(\cdot, \cdot) : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, a forma definida por

$$b(u, \varphi) = (u, \varphi)_{H^\alpha} + (u, \varphi)_{H^\theta} + (u, \varphi)_{H^\delta}.$$

Notamos que $b(\cdot, \cdot)$ está bem definida, pois $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha$, e é bilinear, pois é definida como soma de produtos internos.

Além disso, dados $u, \varphi \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\theta}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$|b(u,\varphi)| \leq |(u,\varphi)_{H^\alpha}| + |(u,\varphi)_{H^\theta}| + |(u,\varphi)_{H^\delta}|$$
$$\leq \|u\|_{H^\alpha}\|\varphi\|_{H^\alpha} + \|u\|_{H^\theta}\|\varphi\|_{H^\theta} + \|u\|_{H^\delta}\|\varphi\|_{H^\delta} \leq 3\,\|u\|_{H^\alpha}\|\varphi\|_{H^\alpha}.$$

Logo, $b(\cdot,\cdot)$ é limitada e portanto, contínua.

Além disso, $b(\cdot,\cdot)$ é coerciva pois, para todo $u \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned} b(u,u) &= (u,u)_{H^\alpha} + (u,u)_{H^\theta} + (u,u)_{H^\delta} \\ &= \|u\|^2_{H^\alpha} + \|u\|^2_{H^\theta} + \|u\|^2_{H^\delta} \;\geq\; \|u\|^2_{H^\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, seja $F : H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, o funcional definido por

$$\langle F, \varphi \rangle = (f,\varphi)_{H^\theta} + (f,\varphi)_{H^\delta} + (g,\varphi)_{H^\delta}.$$

Naturalmente que F está bem definido e é linear, pois é definido como soma de produtos internos e $f \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\theta}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, para $f \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ dados, temos

$$\begin{aligned} |\langle F, \varphi \rangle| &\leq |(f,\varphi)_{H^\theta}| + |(f,\varphi)_{H^\delta}| + |(g,\varphi)_{H^\delta}| \\ &\leq \|f\|_{H^\theta}\|\varphi\|_{H^\theta} + \|f\|_{H^\delta}\|\varphi\|_{H^\delta} + \|g\|_{H^\delta}\|\varphi\|_{H^\delta} \\ &\leq \left(\|f\|_{H^\theta} + \|f\|_{H^\delta} + \|g\|_{H^\delta}\right)\|\varphi\|_{H^\alpha}, \end{aligned}$$

para $\varphi \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Logo F é limitado e portanto, contínuo.

Também, como F é um funcional linear e limitado sobre $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$,

$$F \in \big(H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\big)' = H^{-\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5), que existe um único elemento $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$b(u,\varphi) = \langle F, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Assim, pela definição de $b(\cdot,\cdot)$ e de F, existe um único elemento $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo a equação

$$(u,\varphi)_{H^\alpha} + (u,\varphi)_{H^\theta} + (u,\varphi)_{H^\delta} = (f,\varphi)_{H^\delta} + (f,\varphi)_{H^\theta} + (g,\varphi)_{H^\delta}$$

e considerando a definição de produto interno em $H^s(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}&\left((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\right) + \left((-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\varphi\right) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\right)\\ &+ 3(u,\varphi) = (f,\varphi)_{H^\delta} + (f,\varphi)_{H^\theta} + (g,\varphi)_{H^\delta},\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ denso em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, a equação variacional acima é válida para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e portanto,

$$A_\alpha u + A_\theta u + u = f + g + A_\theta f \tag{2.41}$$

no sentido das distribuições, ou seja, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então, aplicando a transformada de Fourier em (2.41), obtemos

$$\widehat{A_\alpha u} + \widehat{A_\theta u} + \widehat{u} = \widehat{f} + \widehat{g} + \widehat{A_\theta f}$$

ou ainda

$$\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{A_\alpha u} = \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\widehat{f} + \widehat{g} + \widehat{A_\theta f} - \widehat{A_\theta u} - \widehat{u}\right).$$

Agora, tomando a integral sobre $\mathbb{R}^n$ em cada lado da identidade acima, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{A_\alpha u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \left| \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi) + \widehat{A_\theta f}(\xi) - \widehat{A_\theta u}(\xi) - \widehat{u}(\xi) \right|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Então segue da definição de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ que

$$\|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2 \leq \|f\|_{H^\delta}^2 + \|g\|_{H^\delta}^2 + \|A_\theta f\|_{H^\delta}^2 + \|A_\theta u\|_{H^\delta}^2 + \|u\|_{H^\delta}^2 .$$

Agora, usando o Lema 2.2 para a norma do operador A_θ, obtemos

$$\|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2 \leq C \left(\|f\|_{H^\delta}^2 + \|g\|_{H^\delta}^2 + \|f\|_{H^{2\theta-\delta}}^2 + \|u\|_{H^{2\theta-\delta}}^2 + \|u\|_{H^\delta}^2 \right). \tag{2.42}$$

Como $u, f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e estamos considerando o caso em que $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha$, temos que $u, f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$. Então a soma das normas em (2.42) é finita e usando o Lema 2.2, resulta

$$\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}} \leq \|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2 < \infty$$

de onde concluímos que $u \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, do sistema definido em (2.39) temos que $u = f + v$ e $v = g - A_\alpha u - A_\theta v$. Logo, para todo $(f, g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ existe $(u, v) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que $(I - B_2)(u, v) = (f, g)$, ou seja,

$$(f, g) \in Im\,(I - B_2)\,.$$

Concluímos assim, que $D(B_2)$ é denso em $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, que B_2 é um operador dissipativo e $Im(I - B_2) = X$.

Portanto, segue do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.10), que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço da energia X.

■

2.3.2 J_2 é um Operador Limitado

Mostramos a seguir, através do Lema 2.7, que o operador

$$\begin{array}{rccc} J_2: & X & \longrightarrow & H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(0,\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v)\right), \end{array} \tag{2.43}$$

é linear e limitado no espaço da energia $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Observamos que J_2 está bem definido, pois $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Lema 2.7 *O operador J_2 definido em (2.43), é linear e limitado.*

Demonstração. A linearidade de J_2, segue da linearidade do operador Laplaciano e suas potências fracionárias.

Além disso, para todo $(u,v) \in X$, temos que

$$\|J_2(U)\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} = \left\| \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \right\|^2_{H^\delta}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta}) \left| \frac{\widehat{u} + \widehat{v}}{1 + |\xi|^{2\delta}} \right|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}|^2\, d\xi$$
$$\leq \|u\|^2_{H^\alpha} + \|v\|^2_{H^\delta} \leq \|U\|^2_{H^\alpha \times H^\delta}.$$

Concluímos assim, que J_2 é um operador linear limitado em X.

■

Reunindo os resultados obtidos nos Lemas 2.6 e 2.7, segue do Teorema de Perturbação de Geradores (Teorema 1.11), que $B_2 + J_2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e portanto, concluímos do Teorema 1.12, que existe uma única solução para o problema de Cauchy dado em (2.37).

A partir dos resultados obtidos nas Seções 2.2 e 2.3, concluímos que existe uma única solução para o problema de Cauchy em (2.11) ou equivalentemente, para o problema em (2.1), resultado que formalizamos através do teorema a seguir.

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade) *Seja n a dimensão do espaço, com $n \geq 1$ e sejam $0 \leq \delta \leq \alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

existe uma única solução global u para o problema de Cauchy associado à equação linear em (2.1), com

$$u \in C\left([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^2\left([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Capítulo 3

Taxas de Decaimento: Problema Linear

Aplicando a transformada de Fourier no problema definido em (2.1), obtemos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t=0, \\ \widehat{u}(0,\xi)=\widehat{u}_0(\xi), \\ \widehat{u}_t(0,\xi)=\widehat{u}_1(\xi), \end{cases} \tag{3.1}$$

no espaço de Fourier, onde $\widehat{u}=\widehat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ e potências fracionárias $0\leq\delta\leq\alpha$ e $0\leq\theta\leq\alpha$, com $0\leq\alpha\leq 2$.

3.1 Estimativas Gerais

Multiplicando (3.1) por $\overline{\widehat{u}}_t$, obtemos a equação

$$\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}}_t+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}\overline{\widehat{u}}_t+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}_t=0,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2\right)+|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2=0,$$

para $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

Definimos a densidade da energia do sistema em (3.1) por

$$E_1(t,\xi)=|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \tag{3.2}$$

e reescrevemos a equação diferencial acima na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_1(t,\xi)+|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2=0, \tag{3.3}$$

para $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

Multiplicando (3.1) por $\overline{\widehat{u}}$ e tomando a parte real, obtemos

$$Re\left(\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}}+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}\overline{\widehat{u}}+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right)=0,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2+2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)Re\left(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right)\right)+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2=\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2,$$

para $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Então, definindo

$$E_2(t,\xi)=|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2+2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)Re\left(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right),$$

reescrevemos a equação diferencial acima na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_2(t,\xi)+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2=\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2, \tag{3.4}$$

para $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

Considerando as equações diferenciais em (3.3) e em (3.4), definimos

$$E(t,\xi) = E_1(t,\xi) + \frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi), \tag{3.5}$$

para $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, onde $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$, é definido por

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta}, & |\xi| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}, \\ \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}, & |\xi| \leq 1, \quad \dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}, \\ \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}, & |\xi| \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}, \end{cases} \tag{3.6}$$

com $\varepsilon > 0$, a ser escolhido adequadamente mais adiante.

Observação 3.1 *Para o método que usamos neste estudo, o sucesso na obtenção de taxas ótimas de decaimento da energia, depende diretamente da escolha da função ρ que definimos em (3.6). Definimos essa função, usando a Definição 1.31 do Capítulo 1.*

Derivando a expressão (3.5) em relação à variável t e usando as equações em (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_1(t,\xi) + \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_2(t,\xi)\right) \\ &= \left(-|\xi|^{2\theta}\left|\widehat{u}_t\right|^2\right) + \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(-|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2\right), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}\left|\widehat{u}_t\right|^2 + \frac{1}{3}\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 = \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2,$$

que reescrevemos na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) + F(t,\xi) = R(t,\xi), \tag{3.7}$$

onde $F, R : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ são os funcionais definidos por

$$\begin{aligned} F(t,\xi) &= |\xi|^{2\theta} \left|\widehat{u}_t\right|^2 + \frac{1}{3}\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha} \left|\widehat{u}\right|^2, \\ R(t,\xi) &= \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \left|\widehat{u}_t\right|^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na sequência enunciamos e mostramos os Lemas 3.1 à 3.6, que usamos para determinar uma estimativa para a norma de $\widehat{u}$.

Lema 3.1 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. *Então,*

$$\rho(\xi) \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, *com* ρ *como definido em (3.6).*

Demonstração. Para $|\xi| \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, como $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$, temos que

$$\varepsilon|\xi|^{2\alpha}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \leq 2\varepsilon|\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{4\theta}$$

e então, da definição de ρ, temos

$$\rho(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta} \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}.$$

Para $|\xi| \leq 1$ e $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e para $|\xi| \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, como $\varepsilon < 1$, temos imediatamente

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} < \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

∎

Lema 3.2 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. *Então,*

$$R(t,\xi) \leq \frac{1}{3} F(t,\xi),$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Segue das definições de R e F e do Lema 3.1, que

$$\begin{aligned} R(t,\xi) &= \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \leq \frac{1}{3}\frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \\ &= \frac{1}{3}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 \leq \frac{1}{3}\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{3}\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2\right) = \frac{1}{3}F(t,\xi), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Lema 3.3 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. *Então,*

$$\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi) \leq F(t,\xi),$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *com* ρ *como definido em (3.6).*

Demonstração. Para $\xi = 0$, o resultado é imediato, pois $\rho(0) = 0$. Para $\xi \neq 0$, segue das definições de F e E_1 e do Lema 3.1, que

$$\begin{aligned} F(t,\xi) &= |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{3}\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 \\ &= \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(\frac{3}{\rho(\xi)}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2\right) \\ &\geq \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

Lema 3.4 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. *Então,*

$$\rho(\xi) \leq |\xi|^{2\alpha-2\theta},$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *com* ρ *como definido em (3.6).*

Demonstração. Para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, $|\xi| \leq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta} \leq |\xi|^{2\alpha-2\theta}.$$

Para $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $|\xi| \leq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, como $2\alpha < 4\theta$, temos

$$\varepsilon|\xi|^{4\theta} < |\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2\alpha}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)$$

e então, da definição de ρ, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} < |\xi|^{2\alpha-2\theta}.$$

Para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $|\xi| \geq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, como $4\theta \leq 2\alpha + 2\delta$, temos

$$\varepsilon|\xi|^{4\theta} \leq |\xi|^{2\alpha+2\delta} \leq |\xi|^{2\alpha}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)$$

e então, da definição de ρ, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} \leq |\xi|^{2\alpha-2\theta}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Lema 3.5 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. *Então,*

$$\left|\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi)\right| \leq \frac{2}{3}E_1(t,\xi),$$

para todo $t \geq 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *com* ρ *como definido em (3.6).*

Demonstração. Considerando θ e ε como nas hipóteses do lema, vale

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi)\right| &\leq \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + 2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}|\,|\widehat{u}_t|\right)\\
&\leq \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2|\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_t|^2\right)\\
&\leq \frac{2}{3}\left(\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2|\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_t|^2\right).
\end{aligned}$$

Agora, usando os resultados dos Lemas 3.1 e 3.4, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi)\right|\\
&\leq \frac{2}{3}\left(|\xi|^{2\alpha-2\theta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2|\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_t|^2\right)\\
&\leq \frac{2}{3}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right) = \frac{2}{3}E_1(t,\xi),
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

■

Lema 3.6 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. *Então,*

$$|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right),$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *com* ρ *como definido em (3.6).*

Demonstração. Usando os resultados dos Lemas 3.2 e 3.3 na identidade obtida em (3.7), temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) + F(t,\xi) = R(t,\xi) \leq \frac{1}{3}F(t,\xi),$$

de onde obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) \leq -F(t,\xi) \leq -\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi)$$

e assim, para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) \leq -\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi). \tag{3.9}$$

Como resultado do Lema 3.5, temos que

$$-\frac{2}{3}E_1(t,\xi) \leq \frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi) \leq \frac{2}{3}E_1(t,\xi),$$

de onde segue que

$$\frac{1}{3}E_1(t,\xi) \leq E_1(t,\xi) + \frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi) \leq \frac{5}{3}E_1(t,\xi)$$

e então, considerando a definição do funcional E em (3.5), obtemos

$$\frac{1}{3}E_1(t,\xi) \leq E(t,\xi) \leq \frac{5}{3}E_1(t,\xi), \tag{3.10}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, segue das desigualdades obtidas em (3.9) e (3.10), que

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) \leq -\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi) \leq -\frac{1}{5}\rho(\xi)E(t,\xi),$$

de onde obtemos a inequação diferencial

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) + \frac{1}{5}\rho(\xi)E(t,\xi) \leq 0,$$

que tem como soluções

$$E(t,\xi) \leq e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E(0,\xi),$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Assim, usando a equivalência obtida em (3.10), segue que

$$E_1(t,\xi) \leq 3E(t,\xi) \leq 3e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E(0,\xi) \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E_1(0,\xi),$$

ou seja, a densidade de energia do problema definido em (3.1) no espaço de Fourier, decai exponencialmente na forma

$$E_1(t,\xi) \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E_1(0,\xi),$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, da definição do funcional da energia E_1, temos que

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \\
&\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(0,\xi)|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t(0,\xi)|^2\right) \\
&= 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

∎

Na seção seguinte, o objetivo é determinar taxas de decaimento da solução do problema dado em (3.1), na norma relativa ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ e encontrar taxas de decaimento da energia total desse sistema, na norma do espaço $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Para a obtenção de taxas para a energia, integramos ambos os membros da desigualdade obtida no Lema 3.6 enquanto que, para a norma L^2 da solução, usamos a estimativa a seguir, decorrente do Lema 3.6,

$$|\widehat{u}|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}|\widehat{u}_1|^2\right), \tag{3.11}$$

válida para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $\xi \neq 0$.

Além disso, para a obtenção de taxas de decaimento na região de baixa frequência, para o caso em que $\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, usamos também o Lema 1.11, enquanto que, para $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$, usamos o método proposto por Luz-Ikehata-Charão no artigo [19] citado nas referências bibliográficas deste trabalho, visto que o método que usamos para o caso $\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, não produz taxas ótimas.

Por outro lado, para a obtenção de taxas na região de alta frequência, necessitamos também do Lema 1.10, devido à estrutura de perda de regularidade da equação em (2.1), para o caso em que $\theta < \delta$.

3.2 Taxas de Decaimento para $|\xi| \leq 1$

Nesta seção, estimamos a desigualdade do Lema 3.6 e a desigualdade decorrente desse lema, dada em (3.11), na região de baixa frequência.

Devido à forma como definimos a função $\rho = \rho(\xi)$ (ver em (3.6)), dividimos esta seção nos casos

i) Caso $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$;

ii) Caso $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$.

3.2.1 Caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$

Pelas razões mencionadas anteriormente, estudamos taxas de decaimento para este caso, usando o método proposto por Luz-Ikehata-Charão no artigo [19] das referências deste trabalho. Os resultados apresentados no Teorema 1.14 e no Corolário 1.1 do Capítulo 1, são relativos a esse método e serão usados nesta seção.

Usamos esse método tanto na primeira parte desta subseção, onde estudamos o decaimento da energia do sistema, quanto na segunda parte, onde determinamos taxas para o decaimento da norma L^2 da solução do problema de Cauchy dado em (2.1).

Conforme mostramos em (3.1), a equação associada ao problema de Cauchy, no espaço de Fourier, é dada por

$$\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) \widehat{u}_{tt} + |\xi|^{2\alpha} \widehat{u} + |\xi|^{2\theta} \widehat{u}_t = 0, \tag{3.12}$$

onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t, \xi)$, com $(t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ e potências fracionárias $0 \leq \delta \leq \alpha$ e $0 \leq \theta \leq \alpha$, com $0 \leq \alpha \leq 2$.

O objetivo é determinar $\beta > 0$ de modo a satisfazer a Hipótese 1 na Seção 1.5, que aqui chamamos Hipótese 2, e então usar o Corolário 1.1 dessa mesma seção, para concluir que a taxa de decaimento da energia associada ao sistema (3.1) na baixa frequência é $t^{-\frac{1}{\beta}}$.

Usando na equação (3.12), a notação definida para a equação diferencial em (1.4) na Seção 1.5, temos

$$P_1(\xi) = \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right), \quad P_2(\xi) = |\xi|^{2\theta} \quad \text{e} \quad P_3(\xi) = |\xi|^{2\alpha}, \tag{3.13}$$

de modo que, para $|\xi| \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$,

$$\rho(\xi) = \min\left\{P_3(\xi)P_2^{-1}(\xi), P_2(\xi)P_1^{-1}(\xi)\right\} = |\xi|^{2\alpha-2\theta} \tag{3.14}$$

e o espaço de integração mencionado no Corolário 1.1, que consideramos aqui é

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ |\xi| \leq 1\}\,. \tag{3.15}$$

Observação 3.2 *Na Hipótese 2 a seguir, usamos o seguinte resultado:*

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^p d\xi &= \int_0^1 \int_{|\xi|=r} r^p dS_\xi \; dr = \int_0^1 r^p \left(\int_{|\xi|=r} dS_\xi\right) dr \\ &= \int_0^1 r^p \left(\omega_n r^{(n-1)}\right) dr = C\int_0^1 r^{(p+n-1)} dr < \infty,\end{aligned}$$

se $(p+n-1) > -1$, ou seja, $p > -n$, com $n \geq 1$.

Devemos calcular $\beta > 0$, que satisfaça as condições (i) e (ii) da Hipótese 1 do Corolário 1.1. Fazemos a verificação das condições dessa hipótese, no que chamamos Hipótese 2, como a seguir.

Hipótese 2 *Sejam P_1, P_2, P_3 e ρ funções obtidas em (3.13) e (3.14), respectivamente e Ω espaço definido em (3.15).*

i) Determinar $\beta > 0$, de modo que as integrais C_β^3 e C_β^4 que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned}C_\beta^3 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi) d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) d\xi \leq 2\int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}} d\xi < \infty,\end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta - 2\alpha)}{\beta} > -n$, *ou seja,* $\beta > \dfrac{(2\alpha - 2\theta)}{n}$, *para* $n \geq 1$;

$$\begin{aligned} C_\beta^4 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{2\alpha} d\xi = \int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}+2\alpha} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta - 2\alpha)}{\beta} + 2\alpha > -n$, *ou seja,* $\beta > \dfrac{(2\alpha - 2\theta)}{(n+2\alpha)}$, *para* $n \geq 1$.
Então, considerando que $\alpha \geq 0$, *concluímos que as integrais* C_β^3 *e* C_β^4 *são simultaneamente finitas para*

$$\beta > \max\left\{ \frac{(2\alpha - 2\theta)}{n}, \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n+2\alpha)} \right\} = \frac{(2\alpha - 2\theta)}{n} =: \beta_1,$$

para $\theta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, *com* $n \geq 1$.

ii) Determinar $\beta > 0$, *de modo que as integrais* C_β^1, C_β^4, C_β^5 *e* C_β^6 *que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido temos que*

$$\begin{aligned} C_\beta^1 &= \int_\Omega P_2(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}} \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \leq 2^{\frac{1+\beta}{\beta}} \int_\Omega |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $-\dfrac{2\theta}{\beta} > -n$, *ou seja,* $\beta > \dfrac{2\theta}{n}$, *para* $n \geq 1$;

$$C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi = \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{2\alpha} d\xi < \infty,$$

se $\beta > \dfrac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha)}$, *para* $n \geq 1$;

$$\begin{aligned} C_\beta^5 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi)^2 d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{2\alpha} |\xi|^{-4\theta} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2 d\xi \\ &\leq 4 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}+2\alpha-4\theta\right)} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta-2\alpha)}{\beta} + 2\alpha - 4\theta > -n$ *ou* $\beta > \dfrac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)}$ *com* $n \geq 1$;

$$\begin{aligned} C_\beta^6 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi) P_3(\xi)^2 d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{-4\theta} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\xi|^{4\alpha} d\xi \\ &\leq 2 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}-4\theta+4\alpha\right)} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta-2\alpha)}{\beta} - 4\theta + 4\alpha > -n$, *ou seja*, $\beta > \dfrac{(2\alpha-2\theta)}{(n+4\alpha-4\theta)}$, *sendo* C_β^5 *e* C_β^6 *válidos para* $n \geq 1$, *pois* $2\theta \leq \alpha$.

Assim, concluímos que as integrais C_β^1, C_β^4, C_β^5 *e* C_β^6 *são simultaneamente finitas para*

$$\beta > \max\left\{\frac{2\theta}{n}, \frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha)}, \frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)}, \frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+4\alpha-4\theta)}\right\} =: \beta_2, \tag{3.16}$$

para $\theta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, *com* $n \geq 1$.

Como estamos considerando $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, *notamos facilmente que*

$$\frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)} \geq \frac{(2\alpha-2\theta)}{n+2\alpha} \quad e \quad \frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)} \geq \frac{(2\alpha-2\theta)}{n+4\alpha-4\theta}.$$

Para verificarmos sob quais condições

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)} \geq \frac{2\theta}{n},$$

ou seja, $8\theta^2 - 4(n+\alpha)\theta + 2\alpha n \geq 0$, *definimos a função*

$$F(\theta) = 8\theta^2 - 4(n+\alpha)\theta + 2\alpha n, \tag{3.17}$$

onde $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$, *cujas raízes são*

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{2} \quad e \quad \theta_2 = \frac{n}{2}.$$

A depender da relação entre α *e* n, *temos* $\theta_1 \leq \theta_2$ *ou* $\theta_2 < \theta_1$.

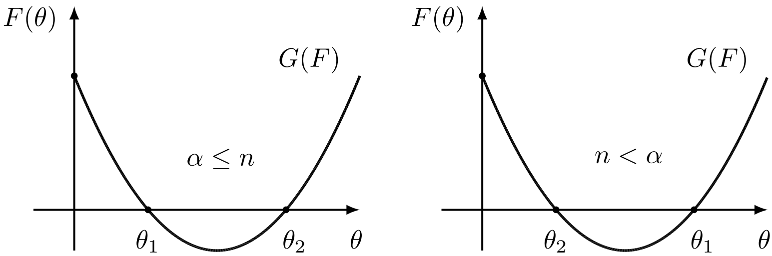

Figura 3.1: Casos $\theta_1 \leq \theta_2$ e $\theta_2 < \theta_1$

Assim, analisando o gráfico de F *(Figura 3.1), concluímos que*

a) se $\alpha \leq n$, *então* $F(\theta) \geq 0$, *para todo* $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$, *ou seja,*

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)} \geq \frac{2\theta}{n},$$

de modo que o máximo em (3.16) é $\tilde{\beta}_2 = \dfrac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)}$;

b) se $n < \alpha$, então $F(\theta) \geq 0$, para $\theta \in \left[0, \dfrac{n}{2}\right]$, ou seja,

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)} \geq \frac{2\theta}{n},$$

de modo que o máximo em (3.16), é $\tilde{\beta}_2 = \dfrac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)}$;

c) se $n < \alpha$, então $F(\theta) \leq 0$, para $\theta \in \left[\dfrac{n}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, ou seja,

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)} \leq \frac{2\theta}{n},$$

de modo que o máximo em (3.16), é $\tilde{\tilde{\beta}}_2 = \dfrac{2\theta}{n}$.

Posto isso, segue do Corolário 1.1, que a taxa de decaimento da energia total do sistema associado à equação em (3.19) na baixa frequência, é dada por $t^{-\frac{1}{\beta}}$, onde

a) Para $n \geq \alpha$ e $\theta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, temos que

$$\beta > \min\left\{\frac{(2\alpha - 2\theta)}{n}, \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)}\right\} = \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)};$$

b) Para $n < \alpha$ e $\theta \in \left[0, \dfrac{n}{2}\right]$, assim como no item anterior,

$$\beta > \min\left\{\beta_1, \tilde{\beta}_2\right\} = \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n + 2\alpha - 4\theta)};$$

c) Para $n < \alpha$ e $\theta \in \left[\dfrac{n}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, temos que

$$\beta > \min\left\{\beta_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2\right\} = \min\left\{\frac{(2\alpha - 2\theta)}{n}, \frac{2\theta}{n}\right\} = \frac{2\theta}{n}.$$

Portanto e considerando a densidade da energia dada em (3.2), segue do Corolário 1.1, que a taxa de decaimento da energia total do sistema em (3.1) na baixa frequência, pode ser estimada na forma

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^{2}+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_{t}\right|^{2}\Big)d\xi\leq Ct^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{3.18}$$

para $t>0$, com α, β, θ e n como nos casos (a), (b) e (c) acima.

Agora, para obtermos taxas de decaimento para a solução do problema em (2.1), na norma L^2, consideramos novamente a equação associada ao problema, no espaço de Fourier, que é dada em (3.1), reescrevendo-a na forma

$$\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\widehat{u}_{tt}+\widehat{u}+\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^{2\alpha}}\widehat{u}_{t}=0, \tag{3.19}$$

onde $\widehat{u}=\widehat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^{n}\setminus\{0\}$ e potências fracionárias $0\leq\delta\leq\alpha$ e $0\leq\theta\leq\alpha$, com $0\leq\alpha\leq 2$.

Considerando a equação em (3.19) e usando mais uma vez o Corolário 1.1, obtemos estimativas para o funcional

$$L(t)=\frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1}\left(\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\left|\widehat{u}_{t}\right|^{2}+\left|\widehat{u}\right|^{2}\right)d\xi \tag{3.20}$$

e em particular, para a norma L^2 da solução do problema em (2.1) na baixa frequência, pois

$$\int_{|\xi|\leq 1}\left|\widehat{u}(t,\xi)\right|^{2}d\xi\leq 2\,L(t).$$

Usando novamente a notação definida na equação diferencial em (1.4) na Seção 1.5, agora para equação em (3.19), temos que

$$P_1(\xi) = \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}, \quad P_2(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^{2\alpha}} \quad \text{e} \quad P_3(\xi) = 1, \tag{3.21}$$

para $|\xi| \leq 1$, com $|\xi| \neq 0$. Assim como no caso anterior,

$$\rho(\xi) = \min\left\{P_3(\xi)P_2^{-1}(\xi), P_2(\xi)P_1^{-1}(\xi)\right\} = |\xi|^{2\alpha-2\theta} \tag{3.22}$$

e o espaço de integração que consideramos é

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ 0 < |\xi| \leq 1\}. \tag{3.23}$$

Assim como fizemos anteriormente, devemos mais uma vez calcular $\beta > 0$ que satisfaça as condições da Hipótese 1 do Corolário 1.1. Fazemos a verificação das condições dessa hipótese, no que chamamos agora, Hipótese 3, como a seguir.

Hipótese 3 *Sejam P_1, P_2, P_3 e ρ funções obtidas em (3.21) e (3.22), respectivamente e Ω espaço definido em (3.23).*

i) Determinar $\beta > 0$, de modo que as integrais C_β^3 e C_β^4 que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned} C_\beta^3 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi) d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} d\xi \leq 2\int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}-2\alpha} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta-2\alpha)}{\beta} - 2\alpha > -n$, *ou seja*, $\beta > \dfrac{(2\alpha-2\theta)}{(n-2\alpha)}$, *para* $n > 2\alpha$;

$$C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi = \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} d\xi < \infty,$$

se $\frac{(2\theta - 2\alpha)}{\beta} > -n$, *ou seja,* $\beta > \frac{(2\alpha - 2\theta)}{n}$, *para* $n \geq 1$.

Então, considerando que $\alpha \geq 2\theta$, *concluímos que as integrais* C_β^3 *e* C_β^4 *são simultaneamente finitas para*

$$\beta > \max\left\{\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 2\alpha)}, \frac{(2\alpha - 2\theta)}{n}\right\} = \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 2\alpha)} =: \beta_1,$$

para $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$, *com* $n > 2\alpha$.

ii) Determinar $\beta > 0$, *de modo que as integrais* C_β^1, C_β^4, C_β^5 *e* C_β^6 *que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido temos que*

$$\begin{aligned}
C_\beta^1 &= \int_\Omega P_2(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \\
&= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\theta - 2\alpha)}{\beta}} \left(\frac{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \\
&\leq 2^{\frac{1+\beta}{\beta}} \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\theta + 2\alpha\beta)}{\beta}} d\xi < \infty,
\end{aligned}$$

se $-\frac{(2\theta + 2\alpha\beta)}{\beta} > -n$, *ou seja,* $\beta > \frac{2\theta}{(n - 2\alpha)}$, *para* $n > 2\alpha$;

$$C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi = \int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta - 2\alpha)}{\beta}} d\xi < \infty,$$

se $\beta > \frac{(2\alpha - 2\theta)}{n}$, *para* $n \geq 1$;

$$\begin{aligned}
C_\beta^5 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi)^2 d\xi \\
&= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha - 2\theta)}{\beta}} |\xi|^{-2(2\theta - 2\alpha)} \left(\frac{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\right)^2 d\xi \\
&\leq 4 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta - 2\alpha)}{\beta} - 4\theta\right)} d\xi < \infty,
\end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}-4\theta>-n$*, ou seja,* $\beta>\dfrac{(2\alpha-2\theta)}{(n-4\theta)}$*, para* $n>4\theta$*;*

$$\begin{aligned}
C_\beta^6 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi) P_3(\xi)^2 d\xi \\
&= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} \left(\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^{2\alpha}}\right)^{-2} \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} d\xi \\
&\leq 2\int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}+2\alpha-4\theta\right)} d\xi < \infty,
\end{aligned}$$

se $\dfrac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}+2\alpha-4\theta>-n$*, ou seja,* $\beta>\dfrac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)}$*, sendo* C_β^6 *válido para* $n\geq 1$*, pois* $2\theta\leq\alpha$*.*

Assim, concluímos que as integrais C_β^1*,* C_β^4*,* C_β^5 *e* C_β^6 *são simultaneamente finitas para*

$$\beta>\max\left\{\frac{2\theta}{(n-2\alpha)},\frac{(2\alpha-2\theta)}{n},\frac{(2\alpha-2\theta)}{(n-4\theta)},\frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)}\right\}=:\beta_2, \tag{3.24}$$

para $\theta\in\left[0,\dfrac{\alpha}{2}\right]$*, com* $n>2\alpha$*.*

Como estamos considerando $0\leq\theta\leq\dfrac{\alpha}{2}$*, notamos facilmente que*

$$\frac{(2\alpha-2\theta)}{(n-4\theta)}\geq\frac{(2\alpha-2\theta)}{n} \quad e \quad \frac{(2\alpha-2\theta)}{(n-4\theta)}\geq\frac{(2\alpha-2\theta)}{(n+2\alpha-4\theta)}.$$

Para verificarmos sob quais condições

$$\frac{(2\alpha-2\theta)}{(n-4\theta)}\geq\frac{2\theta}{(n-2\alpha)},$$

ou seja, $8\theta^2+4(\alpha-n)\theta+2\alpha(n-2\alpha)\geq 0$*, definimos a função*

$$F(\theta)=8\theta^2+4(\alpha-n)\theta+2\alpha(n-2\alpha), \tag{3.25}$$

onde $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$*, com* $n > 2\alpha$*, cujas raízes são*

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{2} \quad e \quad \theta_2 = \frac{n - 2\alpha}{2}.$$

Comparando as raízes, observamos facilmente que, para $n \geq 3\alpha$*, temos* $\theta_1 \leq \theta_2$ *e para* $2\alpha < n < 3\alpha$*, temos* $\theta_2 < \theta_1$*.*

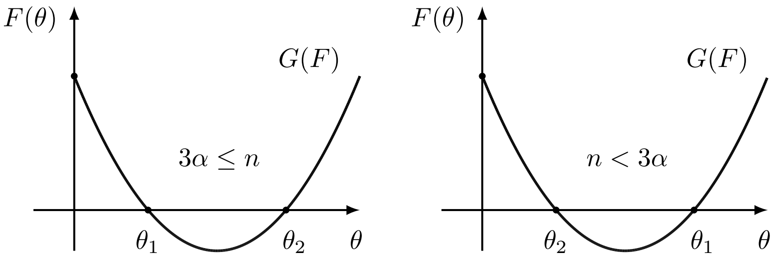

Figura 3.2: Casos $\theta_1 \leq \theta_2$ e $\theta_2 < \theta_1$

Assim, analisando o gráfico de F *(Figura 3.2), concluímos que*

a) se $n \geq 3\alpha$*, então* $F(\theta) \geq 0$*, para todo* $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$*, ou seja,*

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)} \geq \frac{2\theta}{(n - 2\alpha)},$$

de modo que o máximo em (3.24), é $\tilde{\beta}_2 = \dfrac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)}$*;*

b) se $2\alpha < n < 3\alpha$*, então* $F(\theta) \geq 0$*, para* $\theta \in \left[0, \frac{n - 2\alpha}{2}\right]$*, ou*

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)} \geq \frac{2\theta}{(n - 2\alpha)},$$

de modo que o máximo em (3.24), é $\tilde{\beta}_2 = \dfrac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)}$*;*

c) se $2\alpha < n < 3\alpha$, então $F(\theta) \leq 0$, para $\theta \in \left[\frac{n-2\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, ou

$$\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)} \leq \frac{2\theta}{(n - 2\alpha)},$$

de modo que o máximo em (3.24) é $\tilde{\tilde{\beta}}_2 = \dfrac{(2\theta)}{(n - 2\theta)}$.

Posto isso, segue do Corolário 1.1, que a taxa de decaimento da energia total do sistema associado à equação em (3.19) na baixa frequência, é dada por $t^{-\frac{1}{\beta}}$, onde

a) Para $n \geq 3\alpha$ e $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$, temos que

$$\beta > \min\left\{\beta_1, \tilde{\beta}_2\right\} = \min\left\{\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 2\alpha)}, \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)}\right\} = \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)};$$

b) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\theta \in \left[0, \frac{(n-2\alpha)}{2}\right]$, também

$$\beta > \min\left\{\beta_1, \tilde{\beta}_2\right\} = \min\left\{\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 2\alpha)}, \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)}\right\} = \frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 4\theta)};$$

c) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{n-2\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, temos que

$$\beta > \min\left\{\beta_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2\right\} = \min\left\{\frac{(2\alpha - 2\theta)}{(n - 2\alpha)}, \frac{2\theta}{(n - 2\theta)}\right\} = \frac{2\theta}{(n - 2\alpha)}.$$

Portanto, ainda de acordo com o Corolário 1.1, o funcional definido em (3.20), pode ser estimado na forma

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1}\left(|\widehat{u}|^2 + \frac{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\,|\widehat{u}_t|^2\right)d\xi \leq Ct^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{3.26}$$

para $t > 0$, com α, β, θ e n como nos casos (a), (b) e (c) acima.

A partir da estimativa para o funcional L, apresentada em (3.26), obtemos estimativas para o decaimento da norma L^2 da solução do problema de Cauchy em (2.1), na região de baixa frequência.

Através do lema a seguir, reunimos e apresentamos formalmente, estimativas de decaimento da solução do problema em (2.1) na norma L^2, bem como de decaimento da energia desse sistema, para $|\xi| \leq 1$, resultados que obtivemos em (3.26) e (3.18).

Lema 3.7 *Seja $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$. Valem as seguintes estimativas:*

i) Para $n \geq 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right);$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{(n-2\alpha)}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right);$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\dfrac{(n-2\alpha)}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right);$$

iv) Para $n \geq \alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right);
\end{aligned}$$

v) Para $1 \leq n < \alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{n}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right);
\end{aligned}$$

vi) Para $1 \leq n < \alpha$ e $\dfrac{n}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\epsilon > 0$ fixado arbitrariamente.

As estimativas do Lema 3.7, exigem somente norma L^1 dos dados iniciais u_0 e u_1, de acordo com o Teorema 1.14 do Capítulo 1.

3.2.2 Caso $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

Para este caso, como $|\xi| \leq 1$, a definição de ρ em (3.6), implica que

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} \geq \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{2}. \tag{3.27}$$

Além disso, para $0 < |\xi| \leq 1$, temos que

$$\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 2|\xi|^{-2\alpha}. \tag{3.28}$$

A partir das relações em (3.27) e (3.28), mostramos o lema a seguir, válido na região de baixa frequência.

Lema 3.8 *Seja $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$. Valem as seguintes estimativas:*

i) Para $n \geq 1$, se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \right);$$

ii) Para $n > 2\alpha$, se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2;$$

iii) Para $n \geq 1$, se $u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right),$$

para todo $t > 0$.

Demonstração.

i) Usando as relações em (3.27) e (3.28) e a estimativa obtida em (3.11), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + \frac{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + \left||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right|^2 \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Então, tomando a norma em L^∞ dos dados iniciais e usando o Lema 1.11 com $\vartheta = 2\theta$ e $k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C \left(\|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + \left\||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2 \right) \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + \left\||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2 \right),
\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

Usando a transformada de Fourier inversa e as definições de norma em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|_{L^1}^2+\left\|(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}u_1\right\|_{L^1}^2\right)$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

Logo, da definição de norma em $\dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|_{L^1}^2+\|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2\right),$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

ii) De forma análoga ao item anterior, temos que

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left(|\widehat{u}_0|^2+2|\xi|^{-2\alpha}\left|\widehat{u}_1\right|^2\right)d\xi\\ &\leq C\int_{|\xi|\leq 1}\left(e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left|\widehat{u}_0\right|^2+e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}\left|\widehat{u}_1\right|^2\right)d\xi,\end{aligned}$$

para todo $t>0$.

Então, usando o Lema 1.11 com $k=0$ para o dado inicial u_0, $k=-2\alpha$ para u_1 e com $\vartheta=2\theta$ para ambos, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi\\ &\quad + C\left\|\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}d\xi\\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2+Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}}\left\|\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2,\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n>2\alpha$.

Usando novamente a transformada de Fourier inversa e as definições de norma em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 ,$$

para todo $t>0$, com n inteiro tal que $n>2\alpha$.

iii) Agora, usando a relação em (3.27) e o Lema 3.6, estimamos a norma da energia do sistema na baixa frequência, como segue

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Então, usando o Lema 1.11 com $k=0$ e com $\vartheta = 2\theta$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq \left(C\|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + 2C\|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2\right) \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + \|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

Logo, usando mais uma vez a transformada de Fourier inversa e as definições de norma L^1 e norma L^∞, concluímos que

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right),$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

■

3.3 Taxas de Decaimento para $|\xi| \geq 1$

Nesta seção estudamos o decaimento de energia do sistema linear no espaço de Fourier, dado em (3.1), na região de alta frequência. Nessa região, conforme definimos em (3.6), a função ρ é dada por

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1 + |\xi|^{2\delta})},$$

para todo $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$.

Além disso, para o caso $|\xi| \geq 1$, o comportamento do funcional da energia do sistema, depende da relação entre os expoentes δ e θ.

Por isso, dividimos o estudo desta seção, nos seguintes casos:

i) $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$;

ii) $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$;

iii) $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$.

3.3.1 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$

Neste caso, como $|\xi| \geq 1$ e $\delta \leq \theta$, temos $\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) \leq 2|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\theta}$. Então, a definição de ρ em (3.6), implica que

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1 + |\xi|^{2\delta})} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.29}$$

Além disso, para $|\xi| \geq 1$, temos que

$$\frac{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} \leq \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right). \tag{3.30}$$

Lema 3.9 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$. *Para* $n \geq 1$, *se* $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então valem as seguintes estimativas:*

i) $\displaystyle\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right)$;

ii) $\displaystyle\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right)$,

para todo $t > 0$.

Demonstração. Sejam $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $n \geq 1$.

i) Usando as relações em (3.29) e (3.30) e a estimativa obtida em (3.11), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\geq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Então, da definição de norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right) d\xi,$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

ii) Agora, usando o Lema 3.6, estimamos a norma da energia do sistema na alta frequência, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\geq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Então, usando a relação em (3.29) e a definição de norma H^α e de norma H^δ, concluímos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\right) d\xi$$
$$\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi$$
$$= Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right),$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

■

Observação 3.3 *Para os casos (ii) e (iii) citados no início desta seção, usamos o Lema 1.10 da Seção 1.5, na seguinte forma:*

Dados $c, r > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$e^{-c|\xi|^a t} \leq Ct^{-r}|\xi|^{-ar},$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$, com $\xi \neq 0$, onde C depende de r e c.

3.3.2 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$

Nesta caso, a estrutura da equação é caracterizada pela função

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})},$$

que degenera para zero quando $|\xi| \to \infty$, pois $\delta > \theta$.

Essa estrutura implica em perda de regularidade nos dados iniciais, ou seja, para a obtenção de taxas de decaimento na região de alta frequência, iguais às obtidas na região de baixa frequência, é necessário maior regularidade nos dados iniciais do problema.

Neste caso, como $|\xi| \geq 1$, temos $\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \leq 2|\xi|^{2\delta}$, o que implica

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} \geq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}. \tag{3.31}$$

Além disso, para $|\xi| \geq 1$, temos que

$$\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)}. \tag{3.32}$$

O objetivo é obter estimativas na região de alta frequência, para a norma L^2 da solução e para a energia do sistema em (2.1), iguais às encontradas para a região de baixa frequência.

Por isso, dividimos o estudo deste caso na alta frequência, de acordo com os casos considerados na região de baixa frequência.

Lema 3.10 *Seja $0 \leq \theta < \delta$. Valem as seguintes estimativas:*

i) Para $n \geq 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$,
se $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}}\right);$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \frac{(n-2\alpha)}{2}$,
se $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}}\right);$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $\dfrac{(n-2\alpha)}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$*,*
se $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right);$$

iv) Para $n \geq \alpha$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$*, se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \leq$$
$$Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}}\right);$$

v) Para $1 \leq n < \alpha$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{n}{2}$*, se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \leq$$
$$Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}}\right);$$

vi) Para $1 \leq n < \alpha$*, se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$*, então para* $\dfrac{n}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$*,*

$$\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right),$$

para todo $t > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *fixado arbitrariamente.*

Demonstração.

i) Usando as relações em (3.31) e (3.32) e a estimativa obtida em (3.11), temos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r = \dfrac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \left(|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}\right)} |\widehat{u}_0|^2\right) d\xi \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha\right)} |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n > 4\theta$.

Assim, segue da definição de norma em espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} &\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}}\right) \\
&+ Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n > 4\theta$ e em particular, para $n \geq 3\alpha$.

ii) A demonstração para o caso $2\alpha < n < 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{(n-2\alpha)}{2}$, é análoga à demonstração do item anterior, visto que o resultado em no item (i), é válido também para $n > 2\alpha$, pois $\theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$.

iii) Da mesma maneira como nos itens anteriores, temos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r = \dfrac{(n-2\alpha)}{2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq\ & Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\ & + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}} \left(|\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\ \leq\ & Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}\right)} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\ & + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha\right)} |\widehat{u}_1|^2 d\xi,\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\theta \in \left[\dfrac{(n-2\alpha)}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $n > 2\alpha$.

Portanto, pela definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\theta \in \left[\dfrac{(n-2\alpha)}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $2\alpha < n < 3\alpha$.

iv) Agora, usando a relação em (3.31) e o Lema 3.6, estimamos a norma da energia do sistema na alta frequência, na forma

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\delta-\theta)}t} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2\delta} |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.\end{aligned}$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r = \dfrac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-\frac{2(\theta-\delta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \Big(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}_0\right|^2 + |\xi|^{2\delta}\left|\widehat{u}_1\right|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha\right)} \left|\widehat{u}_0\right|^2 d\xi \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta\right)} \left|\widehat{u}_1\right|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq \alpha$.

Novamente pela definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \left(\left\|u_0\right\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}} + \left\|u_1\right\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}}\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq \alpha$.

v) A demonstração deste item, é análoga à do item (iv) e também usa a relação em (3.31) e o Lema 3.6, além do usar o Lema 1.10 com $r = \dfrac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$.

   O resultado neste item vale para todo $t > 0$, com $1 \leq n < \alpha$.

vi) Usando mais uma vez a relação em (3.31) e o Lema 3.6, estimamos a norma da energia na alta frequência, na forma

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2\Big)d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\delta-\theta)}t} \Big(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}_0\right|^2 + 2|\xi|^{2\delta}\left|\widehat{u}_1\right|^2\Big)d\xi.
\end{aligned}$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r = \dfrac{n}{2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2 + \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\,|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-\frac{2(\theta-\delta)n}{2\theta}} \Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\delta}\,|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha\right)}\,|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta\right)}\,|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

Novamente pela definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2 + \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\,|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \Big(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\Big),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

■

3.3.3 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

Também neste caso, $|\xi| \geq 1$ implica em $\big(1+|\xi|^{2\delta}\big) \leq 2|\xi|^{2\delta}$ e então

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} \geq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}. \tag{3.33}$$

Além disso, como $|\xi| \geq 1$, temos que

$$\frac{\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)}. \tag{3.34}$$

Lema 3.11 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta$ *e* $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$. *Valem as estimativas:*

i) Para $n \geq 1$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right);$$

ii) Para $n > 2\alpha$, $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right);\end{aligned}$$

iii) Para $n \geq 1$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}} \right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração.

i) Usando as relações em (3.33) e (3.34) e a estimativa obtida em (3.11), temos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r = \dfrac{n}{2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}} \left(|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}\right)} |\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha\right)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi,\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

Logo, da definição de norma em espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right),$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

ii) De forma análoga ao item anterior, temos

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r = \dfrac{n-2\alpha}{2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}} |\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}\right)} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha\right)} |\widehat{u}_1|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n > 2\alpha$.

Portanto, pela definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right),$$

para todo $t > 0$, com n inteiro tal que $n > 2\alpha$.

iii) Agora, usando a relação em (3.33) e o Lema 3.6, estimamos a norma da energia do sistema na alta frequência, na forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^{2}+\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\,|\widehat{u}_t|^{2}\Big)d\xi\\
&\leq C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\delta-\theta)}t}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}_0|^{2}+2|\xi|^{2\delta}\,|\widehat{u}_1|^{2}\Big)d\xi.
\end{aligned}
$$

Então, usando o Lema 1.10 com $r=\dfrac{n}{2\theta}$ e $a=2(\theta-\delta)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^{2}+\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\,|\widehat{u}_t|^{2}\Big)d\xi\\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}_0|^{2}+|\xi|^{2\delta}\,|\widehat{u}_1|^{2}\Big)d\xi\\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha\right)}\,|\widehat{u}_0|^{2}+|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta\right)}\,|\widehat{u}_1|^{2}\Big)d\xi
\end{aligned}
$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

Novamente pela definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^{2}+\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\,|\widehat{u}_t|^{2}\Big)d\xi\\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\Big(\|u_0\|^{2}_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}}+\|u_1\|^{2}_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\Big),
\end{aligned}
$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

■

3.4 Resultados Gerais de Decaimento

Nesta seção reunimos as estimativas obtidas para a norma L^2 da solução do problema de Cauchy definido em (2.1), bem como estimativas para a energia total desse sistema, em relação à norma no espaço da energia, que observamos ser o espaço $X=H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Nos Teoremas 3.1 e 3.2 a seguir, usamos a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3) e apresentamos de maneira sistemática as estimativas para solução do problema na norma L^2, que decorrem dos Lemas 3.7 a 3.11, apresentados neste capítulo.

No Teorema 3.3 também usamos a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3) e apresentamos as estimativas para a energia do sistema, resultantes dos mesmos lemas citados no parágrafo anterior.

Teorema 3.1 *Seja $0 \leq \delta \leq \theta$. Valem as seguintes estimativas para a norma L^2 da solução $u(t,x)$ do problema de Cauchy em (2.1):*

i) Para $n \geq 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right);$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{(n-2\alpha)}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right);$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\dfrac{(n-2\alpha)}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}+\epsilon} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right);$$

iv) Para $n \geq 1$ *e* $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{(\alpha+\delta)}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} \right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|^2_{L^2} + \|u_1\|^2_{H^\delta} \right);$$

v) Para $n > 2\alpha$ *e* $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{(\alpha+\delta)}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|^2_{L^1} + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}} \|u_1\|^2_{L^1} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|^2_{L^2} + \|u_1\|^2_{H^\delta} \right);$$

para todo $t > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *fixado arbitrariamente.*

Teorema 3.2 *Seja* $0 \leq \theta < \delta$. *Valem as seguintes estimativas para a norma* L^2 *da solução* $u(t,x)$ *do problema de Cauchy em (2.1):*

i) Para $n \geq 3\alpha$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e além disso,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1} \right) + Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}} \right);$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{(n-2\alpha)}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e ainda,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \le Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right)$$
$$+ Ct^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}}\right);$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $\dfrac{(n-2\alpha)}{2} \le \theta \le \dfrac{\alpha}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e ainda,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \le Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right)$$
$$+ Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right);$$

iv) Para $n \ge 1$ *e* $\dfrac{\alpha}{2} \le \theta \le \dfrac{(\alpha+\delta)}{2}$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \le Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2\right)$$
$$+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right);$$

v) Para $n > 2\alpha$ *e* $\dfrac{\alpha}{2} \le \theta \le \dfrac{(\alpha+\delta)}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e ainda* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \le Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2$$
$$+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right),$$

para todo $t > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *fixado arbitrariamente.*

Teorema 3.3 *Para todo $t > 0$, valem as seguintes estimativas para a energia $E(t, x)$ do sistema dado em (2.1):*

i) Para $n \geq \alpha$, $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx \leq$$
$$Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\Big) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big);$$

ii) Para $1 \leq n < \alpha$, $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{n}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx \leq$$
$$Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\Big) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big);$$

iii) Para $1 \leq n < \alpha$, $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\dfrac{n}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\epsilon}\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\Big) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big);$$

iv) Para $n \geq 1$, $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{(\alpha+\delta)}{2}$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\Big) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big);$$

v) Para $n \geq \alpha$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e ainda,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-2\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-2\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}} \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}};
\end{aligned}$$

vi) Para $1 \leq n < \alpha$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{n}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e ainda,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-2\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-2\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\alpha}} \\
&\quad + Ct^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta}};
\end{aligned}$$

vii) Para $1 \leq n < \alpha$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $\dfrac{n}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e além disso,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + |(-\Delta)^\alpha u|^2\Big) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\epsilon}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right);
\end{aligned}$$

viii) Para $n \geq 1$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{(\alpha+\delta)}{2}$, *se* $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* *além disso,* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |\left(-\Delta\right)^{\delta} u_t|^2 + |\left(-\Delta\right)^{\alpha} u|^2\Big)dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&\quad + Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *fixado arbitrariamente.*

Observação 3.4 *Tanto no Teorema 3.1, quanto no Teorema 3.2, a taxa obtida no item (iv) é melhor do que a taxa em (v). Isso se deve à maior regularidade exigida sobre o dado inicial* u_1.

A razão pela qual ocorre $\epsilon > 0$ *arbitrário, em algumas taxas de decaimento apresentadas nos Lemas 3.7 e 3.10, assim como nos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3, é devido ao fato que essas taxas foram obtidas a partir do Corolário 1.1 do Capítulo 1.*

As taxas obtidas nesses lemas e teoremas, são arbitrariamente menores do que a taxa (ótima) $\dfrac{1}{\beta}$, *enunciada no Corolário 1.1.*

Capítulo 4

Existência e Unicidade de Soluções: Problema Semilinear

Neste capítulo estudamos o problema de Cauchy dado em (4.1), associado a uma equação dissipativa semilinear do tipo Boussinesq, envolvendo potências fracionárias do operador Laplaciano

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = \beta(-\Delta)^{\gamma}\left(u^p\right), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$, $p > 1$ inteiro e as potências do operador Laplaciano α, δ, θ e γ satisfazem

$$0 \leq \delta \leq \alpha \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Assim como no caso do problema associado à equação linear, estudamos a existência e unicidade de soluções do problema associado à equação semilinear, dividindo-o em dois casos

1) Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$;

2) Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Para ambos os casos, consideramos o espaço da energia definido por

$$X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Posto isso, reduzimos a ordem do problema de Cauchy em (4.1), reescrevendo-o na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU + F(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $U = (u, u_t)$, $U_0 = (u_0, u_1)$, $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ o operador na forma como definimos e estudamos no Capítulo 2, de acordo com os casos (1) e (2) citados acima, e $F : D(B) \longrightarrow X$ o operador contendo o termo não linear da equação associada ao Problema (4.1), conforme definimos mais adiante.

4.1 Existência e Unicidade Local

O objetivo nesta seção, é mostrar que os operadores B e F na equação diferencial em (4.2) satisfazem as hipóteses do Teorema 1.13 apresentado no Capítulo 1 deste trabalho, verificar sob quais condições isso ocorre e então, usar esse teorema para mostrar que existe uma única solução para o problema semilinear em (4.2) ou, equivalentemente, para o problema associado à equação semilinear em (4.1).

Entretanto, conforme mostramos no Capítulo 2, para os casos (1) e (2) citados no início deste capítulo, o operador B definido a partir da equação linear, é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço X.

Assim, no sentido de verificarmos as hipóteses do Teorema 1.13 para o problema de Cauchy em (4.2), basta mostrarmos que o operador F na forma como definimos mais adiante, está bem definido sobre o domínio de B e é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B)$.

Observação 4.1 *Lembramos que, para mostrarmos a existência local de solução do problema semilinear, condicionamos a potência fracionária γ ao intervalo mencionado no início deste capítulo, ou seja,*

$$\frac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Além disso, assim como no caso do problema associado à equação linear estudado no Capítulo 2, consideramos o espaço usual definido para a energia do sistema em (2.1), dado por

$$X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n),$$

munido com os produtos internos em (2.28) e (2.29) e respectivas normas, que são equivalentes às normas usuais nesses espaços, devido às desigualdades provadas no Lema 1.4 do Capítulo 1.

4.1.1 Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$

Com o objetivo de determinarmos operadores B e F adequados, de modo que atendam às hipóteses do Teorema 1.13, somamos e subtraímos o termo u à equação diferencial em (4.1), obtendo assim,

$$\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)u_{tt}=-\left(I+(-\Delta)^{\alpha}\right)u+\left(u-(-\Delta)^{\theta}u_t+\beta(-\Delta)^{\gamma}u^p\right).$$

Lembramos que a definição do operador A_σ estudado no Capítulo 2, implica que $\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)$ é inversível. Então, definindo $v=u_t$ e relacionando o expoente α com σ que ocorre na definição de A_σ, segue da equação acima, que

$$v_t=-A_\alpha u+\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u-(-\Delta)^{\theta}v+\beta(-\Delta)^{\gamma}u^p\right),$$

com $A_\alpha=\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^{\alpha}\right)$ e conforme mostramos nos Lemas 2.2 e 2.3 daquele capítulo,

$$D(A_\alpha)=H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, a equação diferencial em (4.2) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}v\\ -A_\alpha u+\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u-(-\Delta)^{\theta}v+\beta(-\Delta)^{\gamma}u^p\right)\end{pmatrix}\\ &= B_1\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+F_1\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\end{aligned}$$

onde $B_1: D(A_\alpha)\times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$B_1\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ -A_\alpha u\end{pmatrix}$$

e $F : D(A_\alpha) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ operador definido por

$$F_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(u - (-\Delta)^\theta v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p\right) \end{pmatrix}.$$

Mostramos a seguir, que o operador F_1 está bem definido sobre o domínio de B_1 e que é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B_1)$, quando $2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$.

De fato, dado $U = (u, v) \in D(B_1)$ e considerando a definição de norma em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|F_1(u,v)\|^2_{D(A_\alpha)\times H^\alpha} \\
&= \left\| \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(u - (-\Delta)^\theta v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p\right) \right\|^2_{H^\alpha} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2} \left|\widehat{u} - |\xi|^{2\theta}\widehat{v} + \beta|\xi|^{2\gamma}\widehat{u^p}\right|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2} \left(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{4\theta}|\widehat{v}|^2 + |\beta|^2|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}|^2\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Observação 4.2 *Usando o Lema 1.4 do Capítulo 1, observamos que*

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2} &= \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{-2} \leq C\left(1 + |\xi|^2\right)^\alpha \left(1 + |\xi|^2\right)^{-2\delta} \\
&= C\left(1 + |\xi|^2\right)^{(\alpha - 2\delta)} \leq C\left(1 + |\xi|^{2(\alpha - 2\delta)}\right),
\end{aligned}$$

quando $\alpha - 2\delta > 0$ e, por outro lado, quando $\alpha - 2\delta \leq 0$, também temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2} = \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^{-2} \leq C\left(1 + |\xi|^2\right)^\alpha \left(1 + |\xi|^2\right)^{-2\delta} \\
&= C\left(1 + |\xi|^2\right)^{(\alpha - 2\delta)} = \frac{C}{\left(1 + |\xi|^2\right)^{(2\delta - \alpha)}} \leq C\left(1 + |\xi|^{2(\alpha - 2\delta)}\right).
\end{aligned}$$

Considerando a Observação 4.2 e usando o Lema 1.4, temos que

$$\begin{aligned}
&\|F_1(u,v)\|^2_{D(A_\alpha)\times H^\alpha}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)\left(|\widehat{u}|^2+|\beta|^2|\xi|^{4\theta}|\widehat{v}|^2+|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}|^2\right)d\xi\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|\widehat{u}|^2d\xi+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\theta)}\right)|\widehat{v}|^2d\xi\\
&\quad+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\gamma)}\right)|\widehat{u^p}|^2d\xi\\
&=C\|u\|^2_{H^{\alpha-2\delta}}+C\|v\|^2_{H^{\alpha-2\delta+2\theta}}+C\|u^p\|^2_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}}.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

Como estamos considerando o caso em que $0\leq\theta<\delta\leq\alpha$,

i) $\alpha-2\delta<2\alpha-\delta$, pois $-\delta<0<\delta\leq\alpha$;

ii) $\alpha-2\delta+2\theta<\alpha$, pois $0\leq\theta<\delta$;

iii) $\alpha-2\delta+2\gamma\leq 2\alpha-\delta$, pois $0\leq\gamma\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Assim, usando a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a imersão natural de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^r(\mathbb{R}^n)$ para $s\geq r$, segue de (4.3) a estimativa

$$\|F_1(u,v)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\leq C\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}+C\|v\|^2_{H^\alpha}+C\|u^p\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}.$$

Usando o Lema 1.7 com $s=2\alpha-\delta>\dfrac{n}{2}$, temos que

$$\|F_1(u,v)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\leq C\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}+C\|v\|^2_{H^\alpha}+C\|u\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}}<\infty,$$

de onde concluímos que o operador

$$F_1: H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^\alpha(\mathbb{R}^n)\longrightarrow H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

está bem definido, mediante as condições $0\leq\gamma\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $n<4\alpha-2\delta$.

Na sequência, mostramos que o operador F_1 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados em seu domínio.

Para isso, inicialmente calculamos uma estimativa para a norma de F_1, no espaço da energia $X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ e em seguida, obtemos uma estimativa para a norma de F_1, em seu espaço de definição.

Lema 4.1 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$. *Se* $U = (u, v)$ *e* $W = (w, z)$ *são tais que*

$$U, W \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

então existe $C > 0$, *tal que*

$$\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|_X \\
&\leq C\left(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\right)\|B_1(U-W)\|_X .
\end{aligned}$$

Demonstração. Dados $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $D(F_1) = D(B_1)$, segue da definição de F_1 e de norma em $H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, que

$$\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|^2_{H^{\alpha}\times H^{\delta}} \\
&= \left\|\left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left((u-w) - (-\Delta)^{\theta}(v-z) + \beta(-\Delta)^{\gamma}(u^p - w^p)\right)\right\|^2_{H^{\delta}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|(\widehat{u}-\widehat{w}) - |\xi|^{2\theta}(\widehat{v}-\widehat{z}) + \beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^{2\delta})}\left|(\widehat{u}-\widehat{w})\right|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^{2\delta})}|\xi|^{4\theta}\left|(\widehat{v}-\widehat{z})\right|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^{2\delta})}|\beta|^2|\xi|^{4\gamma}\left|(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Observação 4.3 *Usando o Lema 1.4 do Capítulo 1, observamos que*

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+|\xi|^{4\theta}\right)}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} &= \left(1+|\xi|^{4\theta}\right)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{-1} \le C\left(1+|\xi|^{2}\right)^{2\theta}\left(1+|\xi|^{2}\right)^{-\delta} \\ &= C\left(1+|\xi|^{2}\right)^{(2\theta-\delta)} \le C\left(1+|\xi|^{2(2\theta-\delta)}\right),\end{aligned}$$

quando $2\theta-\delta>0$ *e, por outro lado, quando* $2\theta-\delta\le 0$*, temos*

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+|\xi|^{4\theta}\right)}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} &= \left(1+|\xi|^{4\theta}\right)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{-1} \le C\left(1+|\xi|^{2}\right)^{2\theta}\left(1+|\xi|^{2}\right)^{-\delta} \\ &= C\left(1+|\xi|^{2}\right)^{(2\theta-\delta)} \le \frac{C}{\left(1+|\xi|^{2}\right)^{(\delta-2\theta)}} \le C\left(1+|\xi|^{2(2\theta-\delta)}\right).\end{aligned}$$

As estimativas apresentadas nesta observação, envolvendo o expoente θ*, são igualmente válidas quando consideramos o expoente* γ*.*

Considerando a Observação 4.3 e usando novamente o Lema 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}&\|F_1(U)-F_1(W)\|^2_{H^\alpha\times H^\delta} \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}-\widehat{w}|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-\delta)}\right)|\widehat{v}-\widehat{z}|^2 d\xi \\ &\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\gamma-\delta)}\right)\left|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}\right|^2 d\xi \\ &= C\,\|u-w\|^2_{L^2} + C\|v-z\|^2_{H^{2\theta-\delta}} + C\|u^p-w^p\|^2_{H^{2\gamma-\delta}}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Como estamos considerado o caso em que $0\le\theta<\delta\le\alpha$,

i) $2\theta-\delta<\alpha$, pois $0\le\theta<\delta\le\alpha$;

ii) $2\gamma-\delta\le 2\alpha-\delta$, pois $0\le\gamma\le\dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $0\le\delta\le\alpha$.

Assim, usando novamente a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a imersão de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^r(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq r$, segue de (4.4) que

$$\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|_X^2 \\
&\leq C\|u - w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^\alpha}^2 + C\|u^p - w^p\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.9 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\|F_1(U) - F_1(W)\|_X^2 \leq{}& C\|u - w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^\alpha}^2 \\
&+ C\Big(\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{p-1} + \|w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{p-1}\Big)^2 \|u - w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado conforme mostramos na Seção 2.1, através do Lema 2.2, como $0 \leq \delta \leq \alpha$, existe uma constante $C > 0$, de modo que

$$\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}} \leq C\,\|A_\alpha u\|_{H^\delta}\,,$$

para todo $u \in D\,(A_\alpha)$.

Usando esse resultado e a definição do operador B_1, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|_X^2 \leq C\|A_\alpha(u - w)\|_{H^\delta}^2 + C\|v - z\|_{H^\alpha}^2 \\
&\quad + C\left(\|A_\alpha u\|_{H^\delta}^{p-1} + \|A_\alpha w\|_{H^\delta}^{p-1}\right)^2 \|A_\alpha(u - w)\|_{H^\delta}^2 \\
&\leq C\|B_1(U - W)\|_X^2 + C\left(\|B_1 U\|_X^{p-1} + \|B_1 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_1(U - W)\|_X^2 \\
&\leq C\left(1 + \|B_1 U\|_X^{p-1} + \|B_1 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_1(U - W)\|_X^2,
\end{aligned}$$

para $p > 1$ um número inteiro e $n < 2(2\alpha - \delta)$.

■

Lema 4.2 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e*

$1 \leq n < 4\alpha - 2\delta$. *Se* $U = (u, v)$ *e* $W = (w, z)$ *são tais que*

$$U, W \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

então existe $C > 0$, *tal que*

$$\begin{aligned}
&\|B_1\left(F_1(U) - F_1(W)\right)\|_X \\
&\leq C\left(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\right)\|B_1(U - W)\|_X.
\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $D(F_1) = D(B_1)$. Lembrando que $B_1(u, v) = (v, -A_\alpha u)$ e usando a definição de norma no espaço $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
&\|B_1\left(F_1(U) - F_1(W)\right)\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} \\
&= \left\|\left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left((u - w) - (-\Delta)^\theta(v - z) + \beta(-\Delta)^\gamma\left(u^p - w^p\right)\right)\right\|^2_{H^\alpha} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|(\widehat{u} - \widehat{w}) - |\xi|^{2\theta}(\widehat{v} - \widehat{z}) + \beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2}\left(|(\widehat{u} - \widehat{w})|^2 + |\xi|^{4\theta}\left|(\widehat{v} - \widehat{z})\right|^2 + |\beta|^2|\xi|^{4\gamma}\left|(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})\right|^2\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Considerando a Observação 4.2 e usando mais uma vez o Lema 1.4,

$$\begin{aligned}
&\|B_1\left(F_1(U) - F_1(W)\right)\|^2_X \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1 + |\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|(\widehat{u} - \widehat{w})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1 + |\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)\left(1 + |\xi|^{4\theta}\right)|(\widehat{v} - \widehat{z})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1 + |\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)\left(1 + |\xi|^{4\gamma}\right)\left|(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
&\|B_1\left(F_1(U)-F_1(W)\right)\|_X^2 && (4.5)\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|\widehat{u}-\widehat{w}|^2 d\xi\\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\theta)}\right)|\widehat{v}-\widehat{z}|^2 d\xi\\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\gamma)}\right)\left|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}\right|^2 d\xi\\
&= C\|u-w\|_{H^{\alpha-2\delta}}^2 + C\|v-z\|_{H^{\alpha-2\delta+2\theta}}^2 + C\|u^p-w^p\|_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}}^2. && (4.6)
\end{aligned}$$

Como estamos considerando o caso em que $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$,

i) $\alpha - 2\delta \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$;

ii) $\alpha - 2\delta + 2\theta < \alpha$, pois $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$;

iii) $\alpha - 2\delta + 2\gamma \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Assim, usando mais uma vez a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a imersão de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^r(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq r$, segue de (4.5) que

$$\begin{aligned}
&\left\|B_1\big(F_1(U)-F_1(W)\big)\right\|_X^2\\
&\leq C\|u-w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\|v-z\|_{H^{\alpha}}^2 + C\|u^p-w^p\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.9 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|B_1\big(F_1(U)-F_1(W)\big)\right\|_X^2 &\leq C\|u-w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\|v-z\|_{H^{\alpha}}^2\\
&\quad + C\left(\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{p-1} + \|w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{p-1}\right)^2\|u-w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o Lema 2.2 da Seção 2.1 e usando a definição de B_1, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left\|B_1\big(F_1(U)-F_1(W)\big)\right\|_X^2 \le C\left\|A_\alpha(u-w)\right\|_{H^\delta}^2 + C\|v-z\|_{H^\alpha}^2 \\
&\quad + C\left(\|A_\alpha u\|_{H^\delta}^{p-1} + \|A_\alpha w\|_{H^\delta}^{p-1}\right)^2 \|A_\alpha(u-w)\|_{H^\delta}^2 \\
&\le C\|B_1(U-W)\|_X^2 + C\Big(\|B_1 U\|_X^{p-1} + \|B_1 W\|_X^{p-1}\Big)^2 \|B_1(U-W)\|_X^2 \\
&\le C\left(1 + \|B_1 U\|_X^{p-1} + \|B_1 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_1(U-W)\|_X^2,
\end{aligned}$$

para $p > 1$ um número inteiro e $n < 2(2\alpha-\delta)$.

$\blacksquare$

Reunindo os resultados dos Lemas 4.1 e 4.2, concluímos que, dados

$$U, W \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n),$$

existe uma constante $C > 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|_X + \|B_1\left(F_1(U) - F_1(W)\right)\|_X \\
&\le C\left(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\right)\|B_1(U-W)\|_X.
\end{aligned}$$

Portanto, dada uma constante $M > 0$ e dados elementos

$$U, W \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

tais que

$$\|U\|_X^{p-1} + \|B_1(U)\|_X^{p-1} \le M \quad \text{e} \quad \|W\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1} \le M,$$

vale a seguinte estimativa:

$$\|F_1(U) - F_1(W)\|_X + \|B_1\left(F_1(U) - F_1(W)\right)\|_X \le C L_M \left\|B_1(U-W)\right\|_X, \tag{4.7}$$

onde L_M é a constante definida por $L_M = 1 + 2M^{p-1}$.

Concluímos assim, que o operador F_1 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados em seu domínio de definição $D(B_1)$.

Portanto, como B_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e F_1 é um operador Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $D(B_1)$, segue do Teorema 1.13, que existe uma única solução para o problema de Cauchy dado em (4.2).

Posto isso, obtemos como resultado o teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1), para o caso estudado nesta seção.

Teorema 4.1 (Existência e Unicidade Local) *Seja n a dimensão do espaço, tal que $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$ e $p > 1$ um número inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

existe uma única solução u para o problema de Cauchy associado à equação semilinear dado em (4.1), com

$$u \in C^2\left([0,T), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,T), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,T), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right)$$

definida em um intervalo maximal $[0,T)$, de modo que vale uma, e somente uma, das seguintes condições:

a) $T = \infty$;

b) $T < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T} \left(\|U(t)\|_X + \|B_1 U(t)\|_X\right) = \infty.$

4.1.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

Assim como na seção anterior, o objetivo nesta seção é determinar operadores B e F adequados, de modo que atendam às hipóteses do Teorema 1.13, considerando B o operador definido no Capítulo 2 para o caso que estamos considerando.

Para isso, somamos e subtraímos os termos u e u_t à equação diferencial em (4.1), obtendo assim,

$$\begin{aligned}
&\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right) u_{tt} \\
&= -\left(I+(-\Delta)^{\alpha}\right) u - \left(I+(-\Delta)^{\theta}\right) u_t + \left(u+u_t+\beta(-\Delta)^{\gamma} u^p\right).
\end{aligned}$$

Lembramos que a definição do operador A_σ estudado no Capítulo 2, implica que $\left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)$ é inversível. Então definindo $v = u_t$ e relacionando os expoentes α e θ com σ que ocorre na definição de A_σ, segue da equação acima, que

$$v_t = -A_\alpha u - A_\theta v + \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(u+v+\beta(-\Delta)^{\gamma} u^p\right),$$

com

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^{\alpha}\right), \\
A_\theta &= \left(I+(-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^{\theta}\right),
\end{aligned}$$

podem ser relacionados com o operador A_σ estudado no Capítulo 2 e conforme mostramos nos Lemas 2.2 e 2.3 daquele capítulo,

$$D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, a equação diferencial em (4.2) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u - A_\theta v + \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u + v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p) \end{pmatrix}$$

$$= B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

onde $B_2 : D(A_\alpha) \times D(A_\theta) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u - A_\theta v \end{pmatrix},$$

e $F : D(A_\alpha) \times D(A_\theta) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ operador definido por

$$F_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u + v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p) \end{pmatrix}.$$

Observação 4.4 *Conforme comentamos na Obervação 2.4 no capítulo anterior, de acordo com os Lemas 2.2 e 2.3, a definição do operador B_2, exige somente*

$$D(B_2) = D(A_\alpha) \times D(A_\theta) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n).$$

No entanto, pelas razões citadas naquela observação, definimos

$$D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n).$$

Mostramos a seguir, que o operador F_2 está bem definido sobre o domínio de B_2 e que é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B_2)$, quando $2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$.

De fato, dado $U = (u, v) \in D(B_2)$ e considerando a definição de norma em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\|F_2(u,v)\|^2_{D(A_\alpha)\times H^\alpha} \\
&= \left\| \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} (u + v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p) \right\|^2_{H^\alpha} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2} \left|\widehat{u} + \widehat{v} + \beta |\xi|^{2\gamma} \widehat{u^p}\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2} \left(|\widehat{u}|^2 + |\widehat{v}|^2 + |\beta|^2 |\xi|^{4\gamma} |\widehat{u^p}|^2\right) d\xi.
\end{aligned}
$$

Considerando a Observação 4.2 mencionada na Subseção 4.1.1 e usando mais uma vez o Lema 1.4, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|F_2(u,v)\|^2_{D(A_\alpha)\times H^\alpha} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha - 2\delta)}\right) \left(|\widehat{u}|^2 + |\widehat{v}|^2 + |\xi|^{4\gamma} |\widehat{u^p}|^2\right) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha - 2\delta)}\right) |\widehat{u}|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha - 2\delta)}\right) |\widehat{v}|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha - 2\delta + 2\gamma)}\right) |\widehat{u^p}|^2 d\xi \\
&= C\|u\|^2_{H^{\alpha-2\delta}} + C\|v\|^2_{H^{\alpha-2\delta}} + C\|u^p\|^2_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Como estamos considerando o caso em que $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$,

i) $\alpha - 2\delta \leq 2\alpha - \delta$, pois $-\delta \leq 0 \leq \delta \leq \alpha$;

ii) $\alpha - 2\delta + 2\theta \leq \alpha$, pois $0 \leq \theta \leq \delta$;

iii) $\alpha - 2\delta + 2\gamma \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$.

Assim, usando a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a imersão natural de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^r(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq r$, segue de (4.8) a estimativa

$$\|F_2(u,v)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \leq C\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|v\|^2_{H^\alpha} + C\|u^p\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}.$$

Usando o Lema 1.7 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$, temos que

$$\|F_2(u,v)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \leq C\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|v\|^2_{H^\alpha} + C\|u\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} < \infty,$$

de onde concluímos que o operador

$$F_2 : H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

está bem definido, mediante as condições $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $n < 4\alpha - 2\delta$.

Na sequência, mostramos que o operador F_2 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados em seu domínio.

Para isso, assim como no caso estudado na seção anterior, primeiramente calculamos uma estimativa para a norma de F_2, no espaço da energia $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e em seguida, obtemos uma estimativa para a norma de F_2, em seu espaço de definição.

Lema 4.3 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2} \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 4\alpha - 2\delta$. *Se* $U = (u,v)$ *e* $W = (w,z)$ *são tais que*

$$U, W \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n),$$

então existe $C > 0$, *tal que*

$$\begin{aligned}&\|F_2(U) - F_2(W)\|_X \\ &\leq C\left(1 + \|B_2(U)\|_X^{p-1} + \|B_2(W)\|_X^{p-1}\right)\|B_2(U-W)\|_X.\end{aligned}$$

Demonstração. Dados $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $D(F_2) = D(B_2)$, segue da definição de F_2 e de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$
\begin{aligned}
&\|F_2(U) - F_2(W)\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} \\
&= \left\| \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left((u-w) + (v-z) + \beta(-\Delta)^\gamma (u^p - w^p)\right) \right\|^2_{H^\delta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2} \left|(\widehat{u} - \widehat{w}) + (\widehat{v} - \widehat{z}) + \beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} \left|(\widehat{u} - \widehat{w})\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} \left|(\widehat{v} - \widehat{z})\right|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} |\beta|^2 |\xi|^{4\gamma} \left|(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})\right|^2 d\xi. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Considerando a Observação 4.3 mencionada na Subseção 4.1.1 e usando novamente o Lema 1.4, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|F_2(U) - F_2(W)\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u} - \widehat{w}|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v} - \widehat{z}|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(2\gamma - \delta)}\right) \left|\widehat{u^p} - \widehat{w^p}\right|^2 d\xi \\
&= C\,\|u - w\|^2_{L^2} + C\|v - z\|^2_{L^2} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{2\gamma-\delta}}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Como estamos considerando $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, então $2\gamma - \delta \leq 2\alpha - \delta$. Além disso, para todo $s > 0$, temos que $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^s}$.

Assim, usando novamente a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a imersão de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^r(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq r$, segue de (4.10) que

$$
\begin{aligned}
&\|F_2(U) - F_2(W)\|^2_X \\
&\leq C\|u - w\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|v - z\|^2_{H^\alpha} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.9 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$, temos que

$$\|F_2(U) - F_2(W)\|_X^2 \leq C\|u - w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^\alpha}^2 + C\left(\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{p-1} + \|w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{p-1}\right)^2 \|u - w\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2.$$

Aplicando mais uma vez o Lema 2.2 da Seção 2.1 e usando a definição de B_2, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|F_2(U) - F_2(W)\|_X^2 &\leq C\|A_\alpha(u - w)\|_{H^\delta}^2 + C\|v - z\|_{H^\alpha}^2 \\
&\quad + C\left(\|A_\alpha u\|_{H^\delta}^{p-1} + \|A_\alpha w\|_{H^\delta}^{p-1}\right)^2 \|A_\alpha(u - w)\|_{H^\delta}^2 \\
&\leq C\|B_2(U - W)\|_X^2 + C\left(\|B_2 U\|_X^{p-1} + \|B_2 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_1(U - W)\|_X^2 \\
&\leq C\left(1 + \|B_2 U\|_X^{p-1} + \|B_2 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_2(U - W)\|_X^2.
\end{aligned}$$

para $p > 1$ um número inteiro e $n < 2(2\alpha - \delta)$.

■

Lema 4.4 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2} \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 4\alpha - 2\delta$. *Se* $U = (u, v)$ *e* $W = (w, z)$ *são tais que*

$$U, W \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n),$$

então existe $C > 0$, *tal que*

$$\begin{aligned}
&\|B_2\left(F_2(U) - F_2(W)\right)\|_X \\
&\leq C\left(1 + \|B_2(U)\|_X^{p-1} + \|B_2(W)\|_X^{p-1}\right) \|B_2(U - W)\|_X.
\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $D(B_2)$. Lembrando que $B_2(u, v) = (v, -A_\alpha u - A_\theta v)$ e usando as definições de norma em $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$
\begin{aligned}
&\|B_2\left(F_2(U)-F_2(W)\right)\|^2_{H^\alpha\times H^\delta} \qquad\qquad (4.11)\\
&=\left\|\left(I+(-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left((u-w)+(v-z)+\beta(-\Delta)^\gamma\left(u^p-w^p\right)\right)\right\|^2_{H^\alpha}\\
&\quad+\left\|-A_\theta\left(I+(-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left((u-w)+(v-z)+\beta(-\Delta)^\gamma\left(u^p-w^p\right)\right)\right\|^2_{H^\delta}\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|(\widehat{u}-\widehat{w})+(\widehat{v}-\widehat{z})+\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2d\xi\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^4}\left|(\widehat{u}-\widehat{w})+(\widehat{v}-\widehat{z})+\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2d\xi\\
&\le\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left(|(\widehat{u}-\widehat{w})|^2+|(\widehat{v}-\widehat{z})|^2+|\beta|^2|\xi|^{4\gamma}\left|(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2\right)d\xi\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^3}\left(|(\widehat{u}-\widehat{w})|^2+|(\widehat{v}-\widehat{z})|^2+|\beta|^2|\xi|^{4\gamma}\left|(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2\right)d\xi.
\end{aligned}
$$

Observação 4.5 *Usando o Lema 1.4 do Capítulo 1, observamos que*

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^3}&=\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{-3}\le C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\theta}\left(1+|\xi|^2\right)^{-3\delta}\\
&=C\left(1+|\xi|^2\right)^{(2\theta-3\delta)}\le C\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right),
\end{aligned}
$$

quando $2\theta-3\delta>0$ e, por outro lado, quando $2\theta-3\delta\le 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^3}&=\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{-3}\le C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\theta}\left(1+|\xi|^2\right)^{-3\delta}\\
&=C\left(1+|\xi|^2\right)^{(2\theta-3\delta)}\le\frac{C}{\left(1+|\xi|^2\right)^{(3\delta-2\theta)}}\le C\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right).
\end{aligned}
$$

Assim, considerando a Observação 4.2 para o primeiro termo e a Observação 4.5 para o segundo termo da soma em (4.11), e usando mais uma vez o Lema 1.4, segue o seguinte desenvolvimento:

$$
\begin{aligned}
&\|B_2\left(F_2(U)-F_2(W)\right)\|_X^2 \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|(\widehat{u}-\widehat{w})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|(\widehat{v}-\widehat{z})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)\left(1+|\xi|^{4\gamma}\right)\left|(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)|(\widehat{u}-\widehat{w})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)|(\widehat{v}-\widehat{z})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)\left(1+|\xi|^{4\gamma}\right)\left|(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2 d\xi
\end{aligned}
$$

e então, usando mais uma vez o Lema 1.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|B_2\left(F_2(U)-F_2(W)\right)\|_X^2 \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|\widehat{u}-\widehat{w}|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|\widehat{v}-\widehat{z}|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\gamma)}\right)\left|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}\right|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)|(\widehat{u}-\widehat{w})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)|(\widehat{v}-\widehat{z})|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta+2\gamma)}\right)\left|(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\right|^2 d\xi \\
&= C\|u-w\|_{H^{\alpha-2\delta}}^2 + C\|v-z\|_{H^{\alpha-2\delta}}^2 + C\|u^p-w^p\|_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}}^2 \qquad (4.12)\\
&\quad + C\|u-w\|_{H^{2\theta-3\delta}}^2 + C\|v-z\|_{H^{2\theta-3\delta}}^2 + C\|u^p-w^p\|_{H^{2\theta-3\delta+2\gamma}}^2 .
\end{aligned}
$$

Como estamos considerando o caso $0\leq\delta\leq\theta\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}\leq\alpha$,

i) $\alpha - 2\delta \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$;

ii) $\alpha - 2\delta \leq \alpha$, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$;

iii) $\alpha - 2\delta + 2\gamma \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$;

iv) $2\theta - 3\delta \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \theta \leq \alpha + \delta$;

v) $2\theta - 3\delta \leq \alpha$, pois $0 \leq \theta \leq \alpha + \delta$;

vi) $2\theta - 3\delta + 2\gamma \leq 2\alpha - \delta$, pois $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha$ e $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

Assim, usando mais uma vez a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a imersão de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^r(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq r$, segue de (4.12) que

$$
\begin{aligned}
&\big\|B_2\big(F_2(U) - F_2(W)\big)\big\|_X^2 \\
&\leq C\|u-w\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^\alpha} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.9 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|B_2\left(F_2(U) - F_2(W)\right)\|_X^2 &\leq C\|u-w\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^\alpha} \\
&\quad + C\left(\|u\|^{p-1}_{H^{2\alpha-\delta}} + \|w\|^{p-1}_{H^{2\alpha-\delta}}\right)^2 \|u-w\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando novamente o Lema 2.2 da Seção 2.1 e usando a definição de B_2, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\|B_2\left(F_2(U) - F_2(W)\right)\|_X^2 \leq C\,\|A_\alpha(u-w)\|^2_{H^\delta} + C\|v-z\|^2_{H^\alpha} \\
&\quad + C\left(\|A_\alpha u\|^{p-1}_{H^\delta} + \|A_\alpha w\|^{p-1}_{H^\delta}\right)^2 \|A_\alpha(u-w)\|^2_{H^\delta} \\
&\leq C\|B_2(U-W)\|_X^2 + C\left(\|B_2 U\|_X^{p-1} + \|B_2 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_2(U-W)\|_X^2 \\
&\leq C\left(1 + \|B_2 U\|_X^{p-1} + \|B_2 W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_2(U-W)\|_X^2,
\end{aligned}
$$

para $p > 1$ um número inteiro e $n < 2(2\alpha - \delta)$. ■

Reunindo os resultados dos Lemas 4.3 e 4.4, concluímos que, dados

$$U, W \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

existe uma constante $C > 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
&\|F_2(U) - F_2(W)\|_X + \|B_2\left(F_2(U) - F_2(W)\right)\|_X \\
&\leq C\left(1 + \|B_2(U)\|_X^{p-1} + \|B_2(W)\|_X^{p-1}\right)\|B_2(U - W)\|_X.
\end{aligned}$$

Portanto, dada uma constante $M > 0$ e dados elementos

$$U, W \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

tais que

$$\|U\|_X^{p-1} + \|B_2(U)\|_X^{p-1} \leq M \quad \text{e} \quad \|W\|_X^{p-1} + \|B_2(W)\|_X^{p-1} \leq M,$$

vale a seguinte estimativa:

$$\|F_2(U) - F_2(W)\|_X + \|B_2\left(F_2(U) - F_2(W)\right)\|_X \leq CL_M\,\|B_2(U - W)\|_X\,, \tag{4.13}$$

onde L_M é a constante definida por $L_M = 1 + 2M^{p-1}$.

Concluímos assim, que o operador F_2 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados em seu domínio de definição $D\left(B_2\right)$.

Portanto, como B_2 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e F_2 é um operador Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $D\left(B_2\right)$, segue do Teorema 1.13, que existe uma única solução para o problema de Cauchy dado em (4.2).

Posto isso, obtemos como resultado o teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1), também para o caso estudado nesta seção.

Teorema 4.2 (Existência e Unicidade Local) *Seja n a dimensão do espaço, com $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $p > 1$ um número inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

existe uma única solução u para o problema de Cauchy associado à equação semilinear dado em (4.1), com

$$u \in C\left([0,T), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,T), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^2\left([0,T), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right)$$

definida em um intervalo maximal $[0,T)$, de modo que vale uma, e somente uma, das seguintes condições:

a) $T = \infty$;

b) $T < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T} \left(\|U(t)\|_X + \|B_2 U(t)\|_X\right) = \infty$.

Observação 4.6 *Conforme mostramos no Capítulo 1, satisfeitas as hipóteses do Teorema 1.13, para dados iniciais $U_0 \in D(B)$, a solução U do problema em (1.2), pertence à classe*

$$C^1\left([0,T), X\right) \cap C\left([0,T), D(B)\right).$$

Lembrando que neste trabalho $U = (u, u_t)$ e os espaços de funções que consideramos são

$$X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad D(B) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

temos que

i) $(u, u_t) \in C^1\left([0,T), H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)\right)$;

ii) $(u, u_t) \in C\left([0,T), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)\right)$,

sendo que o item (i) implica que $u \in C^2\left([0,T), H^\delta(\mathbb{R}^n)]\right)$.

Logo, a solução local u *do problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1), pertence à classe de funções*

$$C^2\left([0,T), H^\delta(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,T), H^\alpha(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,T), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right),$$

em conformidade com os resultados obtidos nos Teoremas 4.1 e 4.2.

4.2 Existência e Unicidade Global

Nesta seção mostramos que o intervalo maximal de existência de solução para o problema definido em (4.2) e consequentemente, para o problema (4.1), obtida para os casos estudados nas Subseções 4.1.1 e 4.1.2, é na verdade, $[0,T) = [0,\infty)$, ou seja, a solução é global.

Para isso, supomos inicialmente, que $T < \infty$ e a partir disso, mostramos que $\|U\|_X + \|BU\|_X < \infty$, concluindo assim, que $T = \infty$.

No sentido de estabelecer teoremas que formalizem esse resultado, usaremos o Lema 1.15 que enunciamos e demonstramos no Capítulo 1.

Aplicando a transformada de Fourier em relação à variável x, no problema de Cauchy em (4.1), obtemos o problema

$$\begin{cases} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt} + |\xi|^{2\alpha}\widehat{u} + |\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t = \beta|\xi|^{2\gamma}\widehat{u^p}, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi), \\ \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{u}_1(\xi), \end{cases} \tag{4.14}$$

no espaço de Fourier, onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$,

$p > 1$ inteiro e as potências fracionárias α, δ, θ e γ satisfazem

$$0 \leq \delta \leq \alpha \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

De acordo com o Princípio de Duhamel (ver Guenther-Lee [10]), a solução do problema de Cauchy em (4.14), é dada por

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u}_h(t,\xi) + \int_0^t \widehat{w}(t-\tau,\tau,\xi)d\tau,$$

onde $\widehat{u}_h(t,\xi)$ é solução do problema homogêneo

$$\begin{cases} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt} + |\xi|^{2\alpha}\widehat{u} + |\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t = 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi), \\ \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{u}_1(\xi) \end{cases} \tag{4.15}$$

e $\widehat{w}(t,\tau,\xi)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{w}_{tt} + |\xi|^{2\alpha}\widehat{w} + |\xi|^{2\theta}\widehat{w}_t = 0, \\ \widehat{w}(0,\tau,\xi) = 0, \\ \widehat{w}_t(0,\tau,\xi) = \beta\dfrac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi). \end{cases} \tag{4.16}$$

O problema homogêneo definido em (4.15), está associado a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Então a solução geral desse problema, é da forma

$$\widehat{u}_h(t,\xi) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t},$$

onde λ_+ e λ_- são as raízes do polinômio característico da equação e $a = a(\xi)$ e $b = b(\xi)$ dependem dos dados iniciais do problema.

Impondo as condições iniciais do problema, temos

$$\begin{cases} \widehat{u}_0(\xi) = \widehat{u}_h(0,\xi) = a + b, \\ \widehat{u}_1(\xi) = (\widehat{u}_h)_t(0,\xi) = a\lambda_+ + b\lambda_-, \end{cases}$$

de onde resulta que

$$a = \frac{\widehat{u}_1 - \lambda_-\widehat{u}_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad \text{e} \quad b = \frac{\lambda_+\widehat{u}_0 - \widehat{u}_1}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

e portanto, a solução do problema (4.15) é dada por

$$\widehat{u}_h(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\widehat{u}_0 + \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\widehat{u}_1.$$

Analogamente, a solução geral do problema em (4.16), é dada por

$$\widehat{w}(t,\tau,\xi) = ce^{\lambda_+ t} + de^{\lambda_- t}$$

e impondo as condições iniciais do problema, temos

$$\begin{cases} 0 = \widehat{w}(0,\tau,\xi) = c + d, \\ \beta\dfrac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi) = (\widehat{w})_t(0,\tau,\xi) = c\lambda_+ + d\lambda_-, \end{cases}$$

de onde resulta que

$$d = -c = -\beta\frac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\frac{\widehat{u^p}(\tau,\xi)}{(\lambda_+ - \lambda_-)},$$

e portanto, a solução do problema (4.16) é dada por

$$\widehat{w}(t,\tau,\xi) = \beta\frac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi)\left(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\right).$$

Definindo as funções

$$\widehat{G}(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \qquad \text{e} \qquad G(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{G}(t,\xi))(x),$$
$$\widehat{H}(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \qquad \text{e} \qquad H(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{H}(t,\xi))(x),$$

reescrevemos as soluções na forma

$$\widehat{u}_h(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\widehat{u}_0 + \widehat{H}(t,\xi)\widehat{u}_1,$$
$$\widehat{w}(t,\tau,\xi) = \beta\frac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi)\widehat{H}(t,\xi).$$

Então, segue do Princípio de Duhamel, que a solução do problema de Cauchy associado à equação semilinear não homogênea em (4.14), é

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\widehat{u}_0 + \widehat{H}(t,\xi)\widehat{u}_1 + \beta\int_0^t \widehat{H}(t-\tau,\xi)\frac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi)d\tau. \tag{4.17}$$

Além disso, derivando a equação acima em relação à variável t e observando que $H(0,\xi) = 0$, temos que

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = \widehat{G}_t(t,\xi)\widehat{u}_0 + \widehat{H}_t(t,\xi)\widehat{u}_1 + \beta\int_0^t \widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\frac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi)d\tau. \tag{4.18}$$

Conforme mostramos no Lema 3.6 do Capítulo 3, a densidade da energia do sistema linear definido em (3.1), no espaço de Fourier, apresenta um decaimento exponencial, satisfazendo

$$|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{u}_t|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}_0\right|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})\left|\widehat{u}_1\right|^2\right), \tag{4.19}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $\rho = \rho(\xi)$ como definido em (3.6).

Usando essa estimativa, demonstramos o lema enunciado a seguir.

Lema 4.5 *Sejam $\widehat{G}(t,\xi)$ e $\widehat{H}(t,\xi)$ soluções fundamentais de problema (4.15) definidas acima. Então temos as seguintes estimativas:*

i) $\left|\widehat{G}(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}$;

ii) $\left|\widehat{G}_t(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\dfrac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})}$;

iii) $\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\dfrac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}$;

iv) $\left|\widehat{H}_t(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}$,

para todo $t \geq 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $\rho = \rho(\xi)$ definido em (3.6).

Demonstração. Considerando a solução $\widehat{u}_h(t,\xi)$ do problema homogêneo dado em (4.15), com o dado inicial $\widehat{u}_1 \equiv 0$, temos que

$$\widehat{u}_h(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\widehat{u}_0 \quad \text{e} \quad \left(\widehat{u}_h\right)_t(t,\xi) = \widehat{G}_t(t,\xi)\widehat{u}_0.$$

Substituindo essas identidades na inequação em (4.19), obtemos

$$|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{G}\right|^2|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{G}_t\right|^2|\widehat{u}_0|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2$$

e considerando $\widehat{u}_0(t,\xi) \neq 0$ para todo $(t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, temos

$$|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{G}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{G}_t\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{2\alpha},$$

de onde seguem os resultados dos itens (i) e (ii).

Considerando agora solução $\widehat{u}_h(t,\xi)$ do problema homogêneo, com o dado inicial $\widehat{u}_0 \equiv 0$, temos que

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{H}(t,\xi)\widehat{u}_1 \quad \text{e} \quad \left(\widehat{u}_t\right)_t(t,\xi) = \widehat{H}_t(t,\xi)\widehat{u}_1.$$

Substituindo essas identidades na inequação em (4.19), obtemos

$$|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{H}\right|^2|\widehat{u}_1|^2+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{H}_t\right|^2|\widehat{u}_1|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}(1+|\xi|^{2\delta})\,|\widehat{u}_1|^2$$

e considerando $\widehat{u}_1(t,\xi)\neq 0$ para todo $(t,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, temos

$$|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{H}\right|^2+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{H}_t\right|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}(1+|\xi|^{2\delta}),$$

de onde seguem também os resultados dos itens (iii) e (iv).

■

Observação 4.7 *Como $e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\leq 1$, para todo $(t,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, seguem imediatamente do Lema 4.5, as seguintes estimativas:*

$$\left|\widehat{G}(t,\xi)\right|^2\leq 5,\qquad \left|\widehat{G}_t(t,\xi)\right|^2\leq 5\,\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})},$$

$$\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2\leq 5\,\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}},\qquad \left|\widehat{H}_t(t,\xi)\right|^2\leq 5.$$

O objetivo nesta seção é mostrar que, dado qualquer $T>0$ finito,

$$\|U(t)\|_X+\|BU(t)\|_X<\infty,$$

para $t\in[0,T)$, com $U=(u,u_t)\in X$, onde u é a solução do problema semilinear em (4.1), obtida nos Teoremas 4.1 e 4.2 do Capítulo 4.

Para isso, assim como na demonstração da existência local de solução do problema semilinear, dividimos o estudo da existência global de solução, nos dois casos abaixo,

1) Caso $0\leq\theta<\delta\leq\alpha$;

2) Caso $0\leq\delta\leq\theta\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$,

sendo que em ambos os casos consideramos $\dfrac{\alpha}{2}\leq\gamma\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

4.2.1 Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$

Para o caso que estudamos nesta subseção, consideramos o operador

$$\begin{array}{rlcl} B_1: & D(A_\alpha)\times H^\alpha(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^\alpha(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n) \\ & (u,u_t) & \longmapsto & (u_t,-A_\alpha u)\,, \end{array}$$

definido na Seção 2.2, onde $A_\alpha = \left(I+(-\Delta)^\delta\right)^{-1}(I+(-\Delta)^\alpha)$, com $D\left(A_\alpha\right) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$, conforme mostramos na Seção 2.1.

Posto isso e lembrando que neste trabalho o espaço da energia é dado por $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2 = \|u\|_{H^\alpha}^2 + \|u_t\|_{H^\delta}^2 + \|u_t\|_{H^\alpha}^2 + \|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\widehat{u}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}|\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}|\widehat{u}|^2 d\xi.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Como estamos considerando $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, segue do Lema 1.4, que

$$\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\delta} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}.$$

Com isso e usando o Lema 1.4 também nos demais termos da soma em (4.20), limitamos a soma de normas em (4.20), como a seguir

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} |\widehat{u}|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\delta} \left|\widehat{u_t}\right|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\alpha} \left|\widehat{u_t}\right|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} |\widehat{u}|^2 d\xi. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Agrupando adequadamente as integrais em (4.21), temos que

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right) |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right) \left|\widehat{u_t}\right|^2 d\xi. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Substituindo os termos $\widehat{u}$ e $\widehat{u}_t$ em (4.22), pelas expressões obtidas em (4.17) e (4.18), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2 \qquad (4.23) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right) \left(\left|\widehat{G}\right|^2 |\widehat{u}_0|^2 + \left|\widehat{H}\right|^2 |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left|\widehat{u^p}\right|^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2} \left|\widehat{H}(t-\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right) \left(\left|\widehat{G}_t\right|^2 |\widehat{u}_0|^2 + \left|\widehat{H}_t\right|^2 |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left|\widehat{u^p}\right|^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2} \left|\widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

onde $\widehat{G} = \widehat{G}(t,\xi)$, $\widehat{G}_t = \widehat{G}_t(t,\xi)$, $\widehat{H} = \widehat{H}(t,\xi)$ e $\widehat{H}_t = \widehat{H}_t(t,\xi)$.

Agora, reorganizando as integrais em (4.23) e usando o Lema 1.4

no último termo dessa soma, resulta

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \left| \widehat{G}(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \left| \widehat{G}_t(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \left| \widehat{H}(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_1|^2 d\xi \qquad (4.24) \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \left| \widehat{H}_t(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left| \widehat{u^p} \right|^2}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}} \left| \widehat{H}(t-\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left| \widehat{u^p} \right|^2}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}} \left| \widehat{H}_t(t-\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Observação 4.8 *Usando as estimativas para* $\left|\widehat{G}\right|^2$, $\left|\widehat{G}_t\right|^2$, $\left|\widehat{H}\right|^2$, $\left|\widehat{H}_t\right|^2$, *apresentadas anteriormente na Observação 4.7 e usando novamente as equivalências do Lema 1.4, obtemos as seguintes relações para os coeficientes que compõem os integrandos em (4.24):*

i) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, *temos que*

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \left| \widehat{G}(t,\xi) \right|^2 \\
&\leq 5 \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right);
\end{aligned}
$$

ii) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, *temos que*

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \left| \widehat{G}_t(t,\xi) \right|^2 \\
&\leq 5 \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \frac{|\xi|^{2\alpha}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}
\end{aligned}
$$

e então, usando as relações do Lema 1.4, segue que

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\left|\widehat{G}_t(t,\xi)\right|^2\\
&\leq 5C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha-\delta}\\
&\leq 5C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}\right);
\end{aligned}
$$

iii) *A terceira parcela da soma no segundo membro em (4.24) envolve um termo da forma* $\dfrac{1}{|\xi|^{2\alpha}}$, *que pode gerar dificuldades no desenvolvimento na baixa frequência, pois* $\dfrac{1}{|\xi|^{2\alpha}} \to \infty$, *quando* $|\xi| \to 0$. *Por isso, analisamos o coeficiente de* $|\widehat{u}_1|^2$, *separando-o em dois casos:* $|\xi| \leq 1$ *(baixa frequência) e* $|\xi| \geq 1$ *(alta frequência).*

Para $|\xi| \leq 1$, *temos que*

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2\\
&\leq 5\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}\\
&\leq 5\ \frac{2^{\alpha+\delta}+2^{2\alpha}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq C|\xi|^{-2\alpha};
\end{aligned}
$$

Para $|\xi| \geq 1$, *temos que*

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2\\
&\leq 5\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}\\
&\leq 5\ \frac{\left(2|\xi|^2\right)^{\alpha+\delta}+\left(2|\xi|^2\right)^{2\alpha}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq C\left(\ |\xi|^{2\delta}+|\xi|^{2\alpha}\right)\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right);
\end{aligned}
$$

iv) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\left|\widehat{H}_t(t,\xi)\right|^2\\
&\leq 5\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right);
\end{aligned}$$

v) Desde que $0 \leq 2\gamma-\alpha \leq \delta$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\left|\widehat{H}(t-\tau,\xi)\right|^2\\
&\leq 5\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{|\xi|^{2(2\gamma-\alpha)}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\gamma-\alpha}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}}\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right);
\end{aligned}$$

vi) Desde que $0 \leq 2\gamma \leq \alpha+\delta$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\left|\widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\right|^2\\
&\leq 5\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\\
&\leq 5C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\gamma}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha+\delta}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\\
&\leq C\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right).
\end{aligned}$$

Assim, usando as relações obtidas nos itens (i) a (vi) da Observação 4.8, resulta da estimativa em (4.24), que

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_1U\|_X^2 \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{|\xi|\leq 1}\left(|\xi|^{-2\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{|\xi|\geq 1}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right)\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

e então, como $\delta \leq \alpha$ e $\alpha \leq 2\alpha-\delta$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_1U\|_X^2 &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}|\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{u}_1|^2 d\xi + C\int_{|\xi|\leq 1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C\int_{|\xi|\geq 1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}|\widehat{u}_1|^2 d\xi + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}|\widehat{u}_0|^2 d\xi \ + C\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}|\widehat{u}_1|^2 d\xi + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e de norma em $\dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_1U\|_X^2 \leq C\|u_0\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \\
+ C\|u_1\|_{H^{\alpha}}^2 + C\int_0^t \|u^p\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

Além disso, usando o fato que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra se $s > \dfrac{n}{2}$, usando o Lema 1.7 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p \geq 1$ inteiro, obtemos de (4.25), a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2 \leq C \|u_0\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} \\ + C \|u_1\|^2_{H^\alpha} + C \int_0^t \|u\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Conforme mencionamos no início desta seção, supomos inicialmente que o intervalo maximal onde a solução do problema em (4.2) está definida é limitado, ou seja, está definida para $t \in [0, T)$, com T finito.

Então, supondo que $T > 0$ seja finito, tomando o supremo no último termo da soma em (4.26), temos que

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_X^2 + \|B_1 U(t)\|_X^2 \leq C \|u_0\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} \\ + C \|u_1\|^2_{H^\alpha} + CT \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ainda, de acordo com o Lema 2.2 da Seção 2.1, como $0 \leq \delta \leq \alpha$, existe uma constante $C > 0$ de modo que, para todo $u \in D(A_\alpha)$, vale

$$\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}} \leq C \|A_\alpha u\|_{H^\delta}.$$

Usando esse resultado e a definição do operador B_1, segue de (4.27)

$$\begin{aligned} &\|U(t)\|_X^2 + \|B_1 U(t)\|_X^2 \\ &\leq C \|A_\alpha u_0\|^2_{H^\delta} + C \|u_1\|^2_{H^\alpha} + C \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + CT \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|A_\alpha u(\tau)\|^{2p}_{H^\delta} \\ &\leq C \|B_1 U_0\|^2_X + C \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + CT \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|B_1 U(\tau)\|^{2p}_X, \end{aligned} \tag{4.28}$$

para $t \in [0, T)$, com $T > 0$ finito.

Definimos agora, a função $M_1 : [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$, na forma

$$M_1(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t} \left\{ \|U(\tau)\|_X^2 + \|B_1U(\tau)\|_X^2 \right\}. \tag{4.29}$$

Com M_1 assim definida, da desigualdade em (4.28), temos que

$$M_1(t) \leq C\left(\|B_1U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \right) + CTM_1^p(t), \tag{4.30}$$

para $t \in [0,T)$, com $T > 0$ finito.

Nosso objetivo é mostrar que a solução do problema em (4.2), obtida localmente na Subseção 4.1.1, está definida para todo $t > 0$, ou seja, que seu intervalo de definição é $[0,T)$ com $T = \infty$.

Para isso, definimos a função $F : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ por

$$F\left(M\right) = CI_0^1 + CTM^p - M, \tag{4.31}$$

onde $p > 1$ e $I_0^1 = \|B_1U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2$.

Da definição em (4.29), M_1 é contínua e $M_1(t) \geq 0$, para $t \in [0,T)$.

Além disso, F é contínua (polinômio de grau p) e pela desigualdade obtida em (4.30), temos que $F\left(M_1(t)\right) \geq 0$, para $t \in [0,T)$.

Segue do Lema 1.15, que a função F definida em (4.31) possui um único ponto de mínimo global $M_0^1 > 0$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0^1 \leq \varepsilon$, então $F\left(M_0^1\right) < 0$. Logo, $M = M_1(t)$ não pertence ao intervalo onde $F\left(M\right) < 0$, para todo $t \in [0,T)$.

Por outro lado, $M_1(0) = CI_0$ e assumindo a hipótese adicional que $CI_0 < M_0^1$, segue que $M_1(0) < M_0^1$. Então pela continuidade de $M_1(t)$, concluímos que $M_1(t) \leq M_0^1$, para todo $t \in [0,T)$.

Assim, para qualquer $T > 0$ finito, temos que

$$\|U(t)\|_X^2 + \|B_1U(t)\|_X^2 \leq M_0^1,$$

para todo $t \in [0, T)$, desde que $0 < I_0^1 \leq \varepsilon$ e $CI_0 < M_0^1$, o que contradiz a condição (b) do Teorema 4.1, de onde segue que a solução $u = u(t, x)$ desse teorema, está definida no intervalo $[0, T)$, com $T = \infty$.

Portanto, concluímos a existência global de solução para o problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1), para o caso em que $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ inteiro.

Formalizamos esse resultado através do teorema a seguir.

Teorema 4.3 (Existência e Unicidade Global) *Seja n a dimensão do espaço, com $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $p > 1$ um número inteiro e dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times \Big(H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Sejam ainda,

$$I_0^1 = \|B_1U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2,$$
$$M_1(0) = \|U_0\|_X^2 + \|B_1U_0\|_X^2 \geq 0$$

e $M_0^1 > 0$ o mínimo global da função $F(M) = CI_0^1 + CTM^p - M$, para $M \geq 0$, com $C > 0$ a constante da estimativa em (4.30).

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0^1 \leq \varepsilon$ e $M_1(0) < M_0^1$, existe uma única solução global $u = u(t, x)$ para o problema de Cauchy associado à equação semilinear dado em (4.1), com

$$u \in C^2\left([0, \infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0, \infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0, \infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

4.2.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2} \leq \alpha$

Para o caso que estudamos nesta subseção, consideramos o operador

$$
\begin{array}{rccc}
B_2: & D(A_\alpha)\times H^\alpha(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^\alpha(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n) \\
 & (u,u_t) & \longmapsto & (u_t, -A_\alpha u - A_\theta u_t)\,,
\end{array}
$$

definido na Seção 2.3, onde

$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= \left(I+(-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^\alpha\right),\\
A_\theta &= \left(I+(-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(I+(-\Delta)^\theta\right),
\end{aligned}
$$

com $D\left(A_\alpha\right) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $D\left(A_\theta\right) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$, conforme mostramos anteriormente, na Seção 2.1.

Posto isso e lembrando que neste trabalho o espaço da energia é dado por $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \leq \|u\|_{H^\alpha}^2 + \|u_t\|_{H^\delta}^2 + \|u_t\|_{H^\alpha}^2 + \|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2 + \|A_\theta u_t\|_{H^\delta}^2\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi\\
&+ \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\widehat{u}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\frac{\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)\widehat{u}_t}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}\right|^2 d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u_t}|^2 d\xi\\
&+ \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}|\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}|\widehat{u}_t|^2 d\xi. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Estamos considerando agora, $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2} \leq \alpha$. Então seguem do Lema 1.4, as relações

i) $\dfrac{\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)^2}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} \leq C\dfrac{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha}}{\left(1+|\xi|^2\right)^\delta} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta};$

ii) $\dfrac{\left(1+|\xi|^{2\theta}\right)^2}{(1+|\xi|^{2\delta})} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2\theta-\delta} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}.$

Com isso e usando o Lema 1.4 também nos demais termos da soma em (4.32), limitamos a soma de normas em (4.32), como a seguir

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \leq C & \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} |\widehat{u}|^2 d\xi \\
& + C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\delta} |\widehat{u_t}|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\alpha} |\widehat{u_t}|^2 d\xi \\
& + C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} |\widehat{u}|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} |\widehat{u}_t|^2 d\xi. \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

Agrupando adequadamente as integrais em (4.33), temos que

$$
\begin{aligned}
& \|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \\
& \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right) |\widehat{u}|^2 d\xi \\
& \quad + C\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right) |\widehat{u_t}|^2 d\xi. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

Substituindo os termos $\widehat{u}$ e $\widehat{u}_t$ em (4.34), pelas expressões obtidas em (4.17) e (4.18), respectivamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \qquad (4.35) \\
& \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right) \left(\left|\widehat{G}\right|^2 |\widehat{u}_0|^2 + \left|\widehat{H}\right|^2 |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
& + C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left|\widehat{u^p}\right|^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} \left|\widehat{H}(t-\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\
& + C\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right) \left(\left|\widehat{G}_t\right|^2 |\widehat{u}_0|^2 + \left|\widehat{H}_t\right|^2 |\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
& + C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left|\widehat{u^p}\right|^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} \left|\widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau,
\end{aligned}
$$

onde $\widehat{G} = \widehat{G}(t,\xi)$, $\widehat{G}_t = \widehat{G}_t(t,\xi)$, $\widehat{H} = \widehat{H}(t,\xi)$ e $\widehat{H}_t = \widehat{H}_t(t,\xi)$.

Agora, reorganizando as integrais em (4.35) e usando o Lema 1.4 no último termo dessa soma, resulta

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \left| \widehat{G}(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \left| \widehat{G}_t(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \left| \widehat{H}(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_1|^2 d\xi \qquad (4.36) \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \left| \widehat{H}_t(t,\xi) \right|^2 |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left| \widehat{u^p} \right|^2}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}} \left| \widehat{H}(t-\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) \frac{|\xi|^{4\gamma} \left| \widehat{u^p} \right|^2}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}} \left| \widehat{H}_t(t-\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando novamente as relações obtidas anteriormente nos itens (i) a (vi) da Observação 4.8, resulta da estimativa em (4.36), que

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{|\xi|\le 1} \left(|\xi|^{-2\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{|\xi|\ge 1} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\delta} \right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \right) \left| \widehat{u^p} \right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

e então, como $\delta \leq \alpha$ e $\alpha \leq 2\alpha - \delta$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{|\xi|\leq 1} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_{|\xi|\geq 1} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \ + C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta} \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e de norma em $\dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 \leq C \|u_0\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \\
+ C \|u_1\|_{H^\alpha}^2 + C \int_0^t \|u^p\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Além disso, usando o fato que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra se $s > \dfrac{n}{2}$, usando o Lema 1.7 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p \geq 1$ inteiro, obtemos de (4.37), a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 \leq C \|u_0\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \\
+ C \|u_1\|_{H^\alpha}^2 + C \int_0^t \|u\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{2p} d\tau.
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Assim como no caso anterior, supomos inicialmente que o intervalo maximal onde a solução do problema em (4.2) está definida é limitado, ou seja, está definida para $t \in [0, T)$, com T finito.

Então supondo que $T > 0$ seja finito, tomando o supremo no último termo da soma em (4.38), temos que

$$\|U(t)\|_X^2 + \|B_2U(t)\|_X^2 \leq C\,\|u_0\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 + C\,\|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \qquad (4.39)$$
$$+ C\,\|u_1\|_{H^\alpha}^2 + CT \sup_{0\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{2p}.$$

Ainda, de acordo com o Lema 2.2 na Seção 2.1, como $0 \leq \delta \leq \alpha$, existe uma constante $C > 0$ de modo que, para todo $u \in D(A_\alpha)$, vale:

$$\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}} \leq C\,\|A_\alpha u\|_{H^\delta}\,.$$

Usando esse resultado e a definição do operador B_2, segue de (4.39),

$$\begin{aligned}
&\|U(t)\|_X^2 + \|B_2U(t)\|_X^2 \\
&\leq C\,\|A_\alpha u_0\|_{H^\delta}^2 + C\,\|u_1\|_{H^\alpha}^2 + C\,\|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 + CT \sup_{0\leq\tau\leq t} \|A_\alpha u(\tau)\|_{H^\delta}^{2p} \\
&\leq C\,\|B_1U_0\|_X^2 + C\,\|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 + CT \sup_{0\leq\tau\leq t} \|B_1U(\tau)\|_X^{2p}, \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

para $t \in [0,T)$, com $T > 0$ finito.

A exemplo da função que definimos em (4.29) para o caso anterior, definimos aqui, a função $M_2 : [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$, na forma

$$M_2(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t} \Big\{ \|U(\tau)\|_X^2 + \|B_2U(\tau)\|_X^2 \Big\}. \qquad (4.41)$$

Com M_2 assim definida, da desigualdade em (4.40), temos que

$$M_2(t) \leq C\left(\|B_2U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \right) + CTM_2^p(t), \qquad (4.42)$$

para $t \in [0,T)$, com $T > 0$ finito.

Assim como para o caso anterior, nosso objetivo é mostrar que a solução do problema em (4.2), obtida localmente na Subseção 4.1.2, está definida no intervalo $[0,T)$ com $T=\infty$.

Para isso, definimos a função $F:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ por

$$F\left(M\right)=CI_0^2+CTM^p-M, \tag{4.43}$$

onde $p>1$ e $I_0^2=\|B_2U_0\|_X^2+\|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2$.

Da definição em (4.41), M_2 é contínua e $M_2(t)\geq 0$, para $t\in[0,T)$.

Além disso, F é contínua (polinômio de grau p) e pela desigualdade obtida em (4.42), temos que $F\left(M_2(t)\right)\geq 0$, para $t\in[0,T)$.

Segue do Lema 1.15, que a função F definida em (4.43) possui um único ponto de mínimo global $M_0^2>0$ e existe $\varepsilon>0$ tal que, se $0<I_0^2\leq\varepsilon$, então $F\left(M_0^2\right)<0$. Logo, $M=M_2(t)$ não pertence ao intervalo onde $F\left(M\right)<0$, para todo $t\in[0,T)$.

Por outro lado, $M_2(0)=CI_0$ e assumindo a hipótese adicional que $CI_0<M_0^2$, segue que $M_2(0)<M_0^2$. Então pela continuidade de $M_2(t)$, concluímos que $M_2(t)\leq M_0^2$, para todo $t\in[0,T)$.

Assim, a exemplo do caso anterior, para T finito, temos que

$$\|U(t)\|_X^2+\|B_2U(t)\|_X^2\leq M_0^2,$$

para todo $t\in[0,T)$, desde que $0<I_0^2\leq\varepsilon$ e $CI_0<M_0^2$, o que contradiz a condição (b) do Teorema 4.2, de onde segue que a solução $u=u(t,x)$ desse teorema, está definida no intervalo $[0,T)$, com $T=\infty$.

Portanto, concluímos a existência global de solução para o problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1), também para o caso $0\leq\delta\leq\theta\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}\leq\alpha$, $\dfrac{\alpha}{2}\leq\gamma\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $2\alpha-\delta>\dfrac{n}{2}$ e $p>1$ inteiro.

Formalizamos também esse resultado através do teorema a seguir.

Teorema 4.4 (Existência e Unicidade Global) *Seja n a dimensão do espaço, com $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2} \leq \alpha$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ um número inteiro e dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times \Big(H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Sejam ainda,

$$\begin{aligned} I_0^2 &= \|B_2 U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2, \\ M_2(0) &= \|U_0\|_X^2 + \|B_2 U_0\|_X^2 \end{aligned}$$

e $M_0^2 > 0$ o mínimo global da função $F(M) = CI_0^2 + CTM^p - M$, para $M \geq 0$, com $C > 0$ a constante da estimativa em (4.42).

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0^2 \leq \varepsilon$ e $M_2(0) < M_0^2$, existe uma única solução global $u = u(t,x)$ para o problema de Cauchy associado à equação semilinear dado em (4.1), com

$$u \in C^2\left([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Capítulo 5

Taxas de Decaimento: Problema Semilinear

De acordo com os Teoremas 4.3 e 4.4 apresentados no Capítulo 4, dados $0 \leq \delta \leq \alpha$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, com $p > 1$ um número inteiro e a dimensão do espaço $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$ um número inteiro, existe uma única solução global $u = u(t,x)$ do problema associado à equação semilinear definido em (4.1), com

$$u \in C^2\left([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right),$$

desde que os dados iniciais

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times \left(H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\right),$$

sejam suficientemente pequenos, como nos teoremas citados.

O objetivo neste capítulo é encontrar taxas de decaimento para o problema Cauchy em (4.1), tanto para a solução do problema na norma

L^2 quanto para a energia total associada do sistema.

Nesse sentido, consideramos a soma da norma L^2 da solução com a norma da energia do problema em (4.1), que é dada por

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \\
&= \int_{|\xi|\leq 1} \Big(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Considerando que $0 \leq \delta \leq \alpha$, observamos que

i) para $|\xi| \leq 1$, temos

$$|\xi|^{2\alpha} \leq 1 \leq \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \quad \text{e} \quad \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) \leq 2 \leq 2\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right);$$

ii) para $|\xi| \geq 1$, segue de $\alpha \leq 2\alpha - \delta$, que

$$|\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2(2\alpha-\delta)} \leq \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \quad \text{e} \quad \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) \leq \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right).$$

Assim, estimamos a soma das integrais em (5.1), na forma

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} \Big(|\widehat{u}|^2 + \Big(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\Big) |\widehat{u}|^2 + 2\left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\widehat{u}|^2 + \Big(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\Big) |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\Big(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\Big) |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \\
&= \|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + \|u_t\|^2_{H^\alpha} \leq \|(u, u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha}. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

de modo que, para obtermos taxas de decaimento para a norma L^2 da solução do problema de Cauchy em (4.1) e para a norma da energia desse sistema, basta estimar $\|(u, u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha}$.

Para isso, usamos mais uma vez as estimativas obtidas em (4.17) e (4.18) do Capítulo 4, que implicam em

$$
\begin{aligned}
\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\widehat{u}|^2+\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}_t|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\left(\left|\widehat{G}(\tau,\xi)\right|^2|\widehat{u}_0|^2+\left|\widehat{H}(\tau,\xi)\right|^2|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi \\
&\quad + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|\widehat{H}(t-\tau,\xi)\right|^2\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\left(\left|\widehat{G}_t(\tau,\xi)\right|^2|\widehat{u}_0|^2+\left|\widehat{H}_t(\tau,\xi)\right|^2|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi \\
&\quad + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|\widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\right|^2\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Reorganizando adequadamente os termos do segundo membro da estimativa em (5.3), temos

$$
\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\left|\widehat{G}(\tau,\xi)\right|^2+\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\left|\widehat{G}_t(\tau,\xi)\right|^2\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|\widehat{H}(t-\tau,\xi)\right|^2\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\left|\widehat{H}(\tau,\xi)\right|^2+\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\left|\widehat{H}_t(\tau,\xi)\right|^2\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|\widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\right|^2\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Usando as estimativas obtidas anteriormente no Lema 4.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)+\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi\\
&\quad +C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}\frac{\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau\\
&\quad +C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}+\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi\\
&\quad +C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Observação 5.1 *Limitamos as integrais em (5.5), usando o Lema 1.4 e o fato que estamos considerando* $\dfrac{\alpha}{2}\leq\gamma\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

i) Para a primeira integral em (5.5), temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)+\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)+C\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^\alpha}{\left(1+|\xi|^2\right)^\delta}\left(1+|\xi|^2\right)^\alpha\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)+C\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi;
\end{aligned}
$$

ii) Como $2\alpha\leq 4\gamma\leq 2\alpha+2\delta$, *para a segunda integral em (5.5), temos*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}\frac{\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\alpha}}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau\\
&\leq \int_0^t\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}\frac{\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\alpha}}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau\\
&\quad +\int_0^t\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}\frac{\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{4\gamma-2\delta}}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

e então obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \frac{\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})\,|\xi|^{2\alpha}} \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \frac{\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{(1+|\xi|^{2\delta})} \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau;
\end{aligned}$$

iii) Agora, para a terceira integral em (5.5), temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^{2\alpha}} + \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\frac{4}{|\xi|^{2\alpha}}+2\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(\frac{4|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}+2|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{-2\alpha}\,|\widehat{u}_1|^2 d\xi + C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{-2\alpha}\,|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\widehat{u}_1|^2 d\xi;
\end{aligned}$$

iv) Finalmente, como $\alpha-2\delta+2\gamma\leq 2\alpha-\delta$, da quarta integral temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha}\left(1+|\xi|^2\right)^{2\gamma}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{2\delta}}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha-2\delta+2\gamma}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^2\right)^{2\alpha-\delta}\left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}$$

e então obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2} \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Considerando agora, as relações obtidas acima, nos itens (i) a (iv) da Observação 5.1, reescrevemos a estimativa em (5.5) na forma

$$\begin{aligned}
\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau \\
&+ C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} |\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} |\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau, \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, de modo que, para estimarmos $\|(u,u_t)\|_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$, basta obtermos uma estimativa para cada uma das integrais em (5.6).

Simplificamos a notação, representando as integrais em (5.6) por

$$\begin{aligned}
I_1(t) &:= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi; \\
I_2(t) &:= C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} |\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi;
\end{aligned}$$

$$I_3(t) := C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1 + |\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi;$$

$$I_4(t) := C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}\right|^2 d\xi d\tau$$

e reescrevemos a estimativa em (5.6) na forma

$$\|(u, u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \leq I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t), \qquad (5.7)$$

para todo $t \geq 0$.

Observamos que cada um dos integrandos em (5.6) contém a função $\rho = \rho(\xi)$ definida em (3.6) no Capítulo 3. Devido à forma como definimos essa função e à estrutura de perda de regularidade sobre os dados iniciais quando $\theta < \delta$, dividimos esse estudo nos quatro casos que mencionamos abaixo:

i) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$;

ii) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$;

iii) Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$;

iv) Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$.

Em razão da estrutura de perda de regularidade apresentada pela equação diferencial em (4.1) quando $\theta < \delta$, restringimos o estudo para obtenção de taxas de decaimento para o problema de Cauchy semilinear, aos casos (i) e (ii), em que $\delta \leq \theta$.

Para esses casos, não há necessidade de exigência de regularidade sobre os dados iniciais u_0 e u_1, além da regularidade exigida no Capítulo 3, onde obtivemos taxas de decaimento para o problema de Cauchy associado à equação linear.

Para os casos (iii) e (iv), estudados no Capítulo 3 para o problema associado à equação linear, não serão estudados neste capítulo.

5.1 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$

De acordo com a definição de $\rho(\xi)$ dada em (3.6) no Capítulo 3, para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$ temos que

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta}, & |\xi| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}, \\ \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}, & |\xi| \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Assim como no Capítulo 3, estimamos $\rho(\xi)$ na baixa frequência e na alta frequência, como abaixo.

a) Para $0 < |\xi| \leq 1$, segue da definição, que $\rho(\xi) \geq \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta}$;

b) Para $|\xi| \geq 1$, segue de $\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \leq 2|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\theta}$, que $\rho(\xi) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Lema 5.1 *Seja n a dimensão do espaço, com $2\alpha - 2\theta < n < 2(2\alpha-\delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $p > 1$ um número inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \times \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\right),$$

temos que

$$\begin{aligned} &\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right) \\ &\quad + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \|(u(\tau),u_t(\tau))\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} d\tau, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Para a demonstração deste lema, estimamos as integrais I_1, I_2, I_3 e I_4 em (5.7), separando-as na região de baixa frequência e na região de alta frequência e usamos as estimativas para $\rho(\xi)$ obtidas nos itens (a) e (b) acima.

Nesse sentido, desenvolvendo a primeira integral em (5.7), temos

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad + C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi
\end{aligned}$$

e então, tomando a norma L^∞ na região de baixa frequência, temos

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} 2\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2 d\xi \\
&\quad + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right)|\widehat{u}_0|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.13 para a integral sobre a região de baixa frequência e a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq C\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t}d\xi + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left\|u_0\right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 \\
&\leq C\left\|u_0\right\|_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left\|u_0\right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}\left(\left\|u_0\right\|_{L^1}^2 + \left\|u_0\right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2\right).
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a segunda integral em (5.7), temos que

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t}\left||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

então, tomando a norma L^∞ e usando a definição de $\dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} \left\| |\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1 \right\|_{L^\infty}^2 d\xi \\
&= C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} \left\| (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} u_1 \right\|_{L^1}^2 d\xi \\
&= C \left\| (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} u_1 \right\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} d\xi.
\end{aligned}$$

Usando a definição de norma em $\dot{W}^{-\alpha,1}$ e o Lema 1.13, obtemos

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C \left\| u_1 \right\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} d\xi \\
&\leq C \left(1+t\right)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \left\| u_1 \right\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 .
\end{aligned}$$

Desenvolvendo agora, a terceira integral em (5.7), temos que

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) \left|\widehat{u}_1\right|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) \left|\widehat{u}_1\right|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) \left|\widehat{u}_1\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

e então, tomando a norma L^∞ para $|\xi| \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
I_3(t) &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}t} 2 \left\| \widehat{u}_1 \right\|_{L^\infty}^2 d\xi \\
&\quad + C e^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) \left|\widehat{u}_1\right|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Usando novamente o Lema 1.13 para a integral sobre a região de baixa frequência e a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_3(t) &\leq C \left\| u_1 \right\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta} t} d\xi + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \left\| u_1 \right\|_{H^\alpha}^2 \\
&\leq C \left\| u_1 \right\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2\alpha-2\theta}} + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \left\| u_1 \right\|_{H^\alpha}^2 \\
&\leq C (1+t)^{-\frac{n}{2\alpha-2\theta}} \left(\left\| u_1 \right\|_{L^1}^2 + \left\| u_1 \right\|_{H^\alpha}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo a quarta e última integral em (5.7), temos que

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &= C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left| \widehat{u^p}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left| \widehat{u^p}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left| \widehat{u^p}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

e tomando a norma L^∞, essa estimativa implica que

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &\leq C \int_0^t \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}(t-\tau)} 2 \left\| \widehat{u^p}(\tau) \right\|_{L^\infty}^2 d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left| \widehat{u^p}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando mais uma vez o Lema 1.13 para a integral sobre a região de baixa frequência e a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &\leq C \int_0^t \left\| u^p(\tau) \right\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2\alpha-2\theta}(t-\tau)} d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \left\| u^p(\tau) \right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau \\
&\leq C \int_0^t \left\| u^p(\tau) \right\|_{L^1}^2 (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \left\| u^p(\tau) \right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Por fim, aplicando o Lema 1.8 na última estimativa e em seguida, o Lema 1.7 para $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$, resulta

$$\begin{aligned}
I_4(t) &\leq C \int_0^t \left((1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} + e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \right) \|u^p(\tau)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \\
&\leq C \int_0^t \left((1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} + e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \right) \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \\
&\leq C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $p > 1$.

Portanto, somando as estimativas obtidas acima para as integrais I_1, I_2, I_3 e I_4, concluímos de (5.7) a demonstração do Lema.

■

Agora, multiplicando por $(1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}$ a desigualdade demonstrada no Lema 5.1, obtemos

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \|(u(t), u_t(t))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \qquad (5.8)\\
&\leq C \left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \right) \\
&\quad + C \int_0^t (1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Posto isso, definimos a função $M_1 : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, por

$$M_1(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t} \left\{ (1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \right\}. \qquad (5.9)$$

Observação 5.2 *Definindo a função*

$$N(\tau) := \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha},$$

podemos reescrever a integral em (5.8) na forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} N(\tau)^p d\tau \\
&= \int_0^t (1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \frac{(1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}p} N(\tau)^p}{(1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}p}} d\tau \\
&= \int_0^t (1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \frac{\left((1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} N(\tau)\right)^p}{(1+\tau)^{\frac{np}{(2\alpha-2\theta)}}} d\tau.
\end{aligned}$$

Da definição de M_1 em (5.9), temos que

$$\sup_{0\le\tau\le t}\left\{\left((1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} N(\tau)\right)^p\right\} \le M_1^p(t)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} N(\tau)^p d\tau \\
&= M_1^p(t)\,(1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \int_0^t (1+\tau)^{\frac{-np}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} d\tau
\end{aligned}$$

e então, usando o Lema 1.14 com $a = \dfrac{n}{(2\alpha-2\theta)} > 1$, obtemos

$$\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} N(\tau)^p d\tau \le M_1^p(t) C,$$

para alguma constante positiva $C(n,p,\theta)$, desde que $n > 2\alpha - 2\theta$.

Considerando a Observação 5.2, segue da estimativa em (5.8), que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}} \|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \qquad (5.10)\\
&\le C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot W^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right) + CM_1^p(t),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Tomando agora o supremo em ambos os lados de (5.10), resulta

$$M_1(t) = \sup_{0\le\tau\le t}\left\{(1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}\,\|(u(\tau),u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right\} \tag{5.11}$$
$$\le C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1}+\|u_1\|^2_{\dot W^{-\alpha,1}}+\|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right)+CM_1^p(t),$$

para todo $t>0$.

Com o objetivo de concluir a obtenção de taxas de decaimento para o problema semilinear, definimos a função $F:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ por

$$F(M) = CI_0^1 + CM^p - M, \tag{5.12}$$

onde $p>1$ e $I_0^1 = \|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1}+\|u_1\|^2_{\dot W^{-\alpha,1}}+\|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$.

Da definição em (5.9), M_1 é contínua e $M_1(t)\ge 0$, para $t\ge 0$.

Além disso, F é contínua e pela desigualdade obtida em (5.11), temos que $F\left(M_1(t)\right)\ge 0$, para todo $t>0$.

Segue do Lema 1.15, que a função F definida em (5.12) possui um único ponto de mínimo global $M_0^1>0$ e existe $\varepsilon>0$ tal que, se $0<I_0^1\le\varepsilon$, então $F\left(M_0^1\right)<0$.

Logo, $M=M_1(t)$ não pertence ao intervalo onde $F(M)<0$.

Por outro lado, $M_1(0)=CI_0^1$ e, assumindo a hipótese adicional que $CI_0^1<M_0^1$, segue que $M_1(0)<M_0^1$.

Então, pela continuidade de $M_1(t)$, concluímos que $M_1(t)\le M_0^1$, para todo $t\ge 0$, ou seja,

$$\sup_{0\le\tau\le t}\left\{(1+\tau)^{\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}\,\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right\}\le M_0^1$$

para todo $t\ge 0$ e consequentemente,

$$\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\le M_0^1\,(1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}, \quad \forall\, t\ge 0.$$

Portanto, segue da estimativa obtida anteriormente em (5.2), que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \leq M_0^1 \, (1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha - 2\theta)}}$$

e então, usando a Identidade de Plancherel (Teorema 1.3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + \left|(-\Delta)^{\delta} u_t\right|^2 + |(-\Delta^{\alpha})u|^2 + |u|^2 \right) dx \leq M_0^1 \, (1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha - 2\theta)}} \,,$$

para todo $t > 0$, o que conclui a demonstração do teorema a seguir.

Teorema 5.1 (Decaimento Polinomial) *Seja n a dimensão do espaço, com $2\alpha - 2\theta < n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $p > 1$ um número inteiro e dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{2\alpha - \delta}(\mathbb{R}^n)\right) \times \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Sejam ainda,

$$I_0^1 = \|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha - \delta} \times H^{\alpha}} \,,$$
$$M_1(0) = \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha - \delta} \times H^{\alpha}}$$

e $M_0^1 > 0$ o mínimo global da função $F(M) = CI_0^2 + CM^p - M$, para $M \geq 0$, com $C > 0$ a constante da estimativa em (5.11).

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0^1 \leq \varepsilon$ e $M_1(0) < M_0^1$, vale a seguinte estimativa para a energia total e para a norma L^2 da solução do problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + \left|(-\Delta)^{\delta} u_t\right|^2 + |(-\Delta^{\alpha})u|^2 + |u|^2 \right) dx \leq M_0^1 \, (1+t)^{-\frac{n}{(2\alpha - 2\theta)}} \,,$$

para todo $t > 0$.

5.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

De acordo com a definição de $\rho(\xi)$ dada em (3.6) no Capítulo 3, para $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Assim como na seção anterior, também aqui estimamos $\rho(\xi)$ na baixa frequência e na alta frequência, como abaixo.

a) Para $0 < |\xi| \leq 1$, temos que $\rho(\xi) \geq \varepsilon \dfrac{|\xi|^{2\theta}}{2}$;

b) Para $|\xi| \geq 1$, temos que $\rho(\xi) \geq \varepsilon \dfrac{|\xi|^{2\theta}}{2|\xi|^{2\delta}} \geq \dfrac{|\xi|^{2\theta}}{2|\xi|^{2\theta}} = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Lema 5.2 *Seja n a dimensão do espaço, com $2\theta < n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta$, $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $p > 1$ um número inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \times \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\right),$$

temos que

$$\begin{aligned}
&\|(u(t), u_t(t))\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \\
&\leq C\,(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \right) \\
&\quad + C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} \, \|(u,u_t)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Assim como na demonstração do Lema 5.1, estimamos as integrais I_1, I_2, I_3, I_4 em (5.7), separando-as na região de baixa frequência e na região de alta frequência e usamos as estimativas para $\rho(\xi)$, obtidas nos itens (a) e (b) acima.

Nesse sentido, desenvolvendo a primeira integral em (5.7), temos

$$\begin{aligned} I_1(t) &= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\ &\quad + C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \end{aligned}$$

e então, tomando a norma L^∞ na região de baixa frequência, temos

$$\begin{aligned} I_1(t) \leq C &\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t} 2 \left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2 d\xi \\ &+ C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) |\widehat{u}_0|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.13 para a integral sobre a região de baixa frequência e a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq C \left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t} d\xi + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \left\|u_0\right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 \\ &\leq C \left\|u_0\right\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \left\|u_0\right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 \\ &\leq C (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\left\|u_0\right\|_{L^1}^2 + \left\|u_0\right\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2\right). \end{aligned}$$

Desenvolvendo a segunda integral em (5.7), temos que

$$\begin{aligned} I_2(t) &= C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} |\xi|^{-2\alpha} |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t} \left||\xi|^{-\alpha} \widehat{u}_1\right|^2 d\xi \end{aligned}$$

então, tomando a norma L^∞ e usando a definição de $\dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} \left\| |\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1 \right\|_{L^\infty}^2 d\xi \\
&= C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} \left\| (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} u_1 \right\|_{L^1}^2 d\xi \\
&\leq C \left\| (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} u_1 \right\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} d\xi.
\end{aligned}$$

Usando a definição de norma em $\dot{W}^{-\alpha,1}$ e o Lema 1.13, obtemos

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\
&\leq C\,(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2 .
\end{aligned}$$

Desenvolvendo agora, a terceira integral em (5.7), temos que

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi
\end{aligned}$$

e então, tomando a norma L^∞ para $|\xi|\leq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
I_3(t) &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} 2 \|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2 d\xi \\
&\quad + C e^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\widehat{u}_1|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Usando novamente o Lema 1.13 para a integral sobre a região de baixa frequência e a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_3(t) &\leq C \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t} d\xi + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \|u_1\|_{H^\alpha}^2 \\
&\leq C \|u_1\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \|u_1\|_{H^\alpha}^2 \\
&\leq C (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{H^\alpha}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo a quarta e última integral em (5.7), temos que

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &= C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

e tomando a norma L^∞, essa estimativa implica que

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &\leq C \int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}(t-\tau)} 2 \left\|\widehat{u^p}(\tau)\right\|_{L^\infty}^2 d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\right) \left|\widehat{u^p}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando mais uma vez o Lema 1.13 para a integral sobre a região de baixa frequência e a definição de norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &\leq C \int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}(t-\tau)} d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \|u^p(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau \\
&\leq C \int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \|u^p(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Por fim, usando o Lema 1.8 na última estimativa e em seguida, o Lema 1.7 para $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$, resulta

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &\le C \int_0^t \left((1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} + e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \right) \|u^p(\tau)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \\
&\le C \int_0^t \left((1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} + e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \right) \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \\
&\le C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau,
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$ e $p > 1$.

Portanto, somando as estimativas obtidas acima para as integrais I_1, I_2, I_3 e I_4, concluímos de (5.7) a demonstração do lema.

■

Agora, multiplicando por $(1+t)^{\frac{n}{2\theta}}$ a desigualdade demonstrada no Lema 5.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{2\theta}} \|(u(t), u_t(t))\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \qquad (5.13) \\
&\le C \left(\|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \right) \\
&\quad + C \int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} d\tau,
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$.

Posto isso, definimos a função $M_2 : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, na forma

$$
M_2(t) = \sup_{0 \le \tau \le t} \left\{ (1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \right\}. \qquad (5.14)
$$

Observação 5.3 *Assim como na Observação 5.2, definindo a função*

$$
N(\tau) := \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} ,
$$

podemos reescrever a integral em (5.13) na forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} N(\tau)^p d\tau \\
&= \int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} \frac{(1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}p} N(\tau)^p}{(1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}p}} d\tau \\
&= \int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} \frac{\left((1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}} N(\tau)\right)^p}{(1+\tau)^{\frac{np}{2\theta}}} d\tau.
\end{aligned}$$

Da definição de M_2 em (5.14), temos que

$$\sup_{0\le\tau\le t} \left\{ \left((1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}} N(\tau)\right)^p \right\} \le M_2^p(t)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} N(\tau)^p d\tau \\
&\le M_2^p(t)\,(1+t)^{\frac{n}{2\theta}} \int_0^t (1+\tau)^{\frac{-np}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} d\tau
\end{aligned}$$

e então, usando o Lema 1.14 com $a = \dfrac{n}{2\theta} > 1$, obtemos

$$\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2\theta}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} N(\tau)^p d\tau \le M_2^p(t) C,$$

para alguma constante positiva $C(n,p,\theta)$, desde que $n > 2\theta$.

Considerando a Observação 5.3, segue da estimativa em (5.13), que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{2\theta}} \|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \qquad (5.15)\\
&\le C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \right) + C M_2^p(t),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Tomando agora o supremo em ambos os lados de (5.15), resulta

$$M_2(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t} \left\{(1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right\} \tag{5.16}$$
$$\leq C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right) + CM_2^p(t),$$

para todo $t > 0$.

Com o objetivo de concluir a obtenção de taxas de decaimento para o problema semilinear, definimos a função $F : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ por

$$F(M) = CI_0^2 + CM^p - M, \tag{5.17}$$

onde $p > 1$ e $I_0^2 = \|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$.

Da definição em (5.14), M_2 é contínua e $M_2(t) \geq 0$, para $t \geq 0$.

Além disso, F é contínua e pela desigualdade obtida em (5.16), temos que $F\left(M_2(t)\right) \geq 0$, para todo $t > 0$.

Segue do Lema 1.15, que a função F definida em (5.17) possui um único ponto de mínimo global $M_0^2 > 0$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0^2 \leq \varepsilon$, então $F\left(M_0^2\right) < 0$.

Logo, $M = M_2(t)$ não pertence ao intervalo onde $F(M) < 0$.

Por outro lado, $M_2(0) = CI_0^2$ e, assumindo a hipótese adicional que $CI_0^2 < M_0^2$, segue que $M_2(0) < M_0^2$.

Então, pela continuidade de $M_2(t)$, concluímos que $M_2(t) \leq M_0^2$, para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} \left\{(1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}} \|(u, u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right\} \leq M_0^2,$$

para todo $t \geq 0$ e consequentemente,

$$\|(u, u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \leq M_0^2\,(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, segue da estimativa obtida anteriormente em (5.2), que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big) |\widehat{u}_t|^2 \Big) d\xi \leq M_0^2 \, (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \, ,$$

e então, usando o Teorema de Plancherel (Teorema 1.3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + \big|(-\Delta)^{\delta} u_t\big|^2 + |(-\Delta^{\alpha}) u|^2 + |u|^2 \Big) dx \leq M_0^2 \, (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \, ,$$

para todo $t > 0$, o que conclui a demonstração do teorema a seguir.

Teorema 5.2 (Decaimento Polinomial) *Seja n a dimensão do espaço, com $2\theta < n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta$, $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ um número inteiro e dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in \big(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\big) \times \Big(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\Big) .$$

Sejam ainda,

$$I_0^2 = \|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^{\alpha}} \, ,$$
$$M_2(0) = \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^{\alpha}}$$

e $M_0^2 > 0$ o mínimo global da função $F(M) = CI_0^2 + CM^p - M$, para $M \geq 0$, com $C > 0$ a constante da estimativa em (5.16).

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0^2 \leq \varepsilon$ e $M_2(0) < M_0^2$, vale a seguinte estimativa para a energia total e para a norma L^2 da solução do problema de Cauchy associado à equação semilinear em (4.1):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + \big|(-\Delta)^{\delta} u_t\big|^2 + |(-\Delta^{\alpha}) u|^2 + |u|^2 \Big) dx \leq M_0^2 \, (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \, ,$$

para todo $t > 0$.

Observação 5.4 *As taxas de decaimento obtidas no Teorema 5.1 para a norma L^2 da solução do problema associado à equação semilinear, são diferentes das taxas obtidas no Capítulo 3 para o problema associado à equação linear.*

Lembramos que, para o problema linear, as taxas para a norma L^2 da solução, obtidas no caso em que $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$, são

$$
\begin{aligned}
& t^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}, \quad \text{para } n \geq 3\alpha \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}; \\
& t^{-\frac{(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}, \quad \text{para } 2\alpha < n < 3\alpha \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{(n-2\alpha)}{2}; \\
& t^{-\frac{(n-2\alpha)}{2\theta}+\epsilon}, \quad \text{para } 2\alpha < n < 3\alpha \text{ e } \frac{(n-2\alpha)}{2} < \theta \leq \frac{\alpha}{2},
\end{aligned}
$$

enquanto que, para o problema semilinear, a taxa é $t^{-\frac{n}{(2\alpha-2\theta)}}$, que é melhor do que as citadas acima, mas mediante a exigência de maior regularidade e pequenez sobre os dados inicias do problema, bem como hipóteses sobre a dimensão do espaço.

Para a energia total associada ao sistema, as taxas obtidas no caso em que $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$, são

$$
\begin{aligned}
& t^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}, \quad \text{para } n \geq \alpha \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}; \\
& t^{-\frac{(n+2\alpha-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\epsilon}, \quad \text{para } 1 \leq n < \alpha \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{n}{2}; \\
& t^{-\frac{n}{2\theta}+\epsilon}, \quad \text{para } 1 \leq n < \alpha \text{ e } \frac{n}{2} < \theta \leq \frac{\alpha}{2},
\end{aligned}
$$

enquanto que, para o problema semilinear obtemos $t^{-\frac{n}{(2\alpha-2\delta)}}$.

A diferença entre as taxas obtidas para este caso, se deve ao fato de termos usado outro método para a obtenção das taxas (ver [19]).

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Brezis, *Análisis functional: Teoria y aplicaciones.* Alianza Universidad Editorial, Madrid, 1983.

[3] R. C. Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping.* Journal of Hyperbolic Differential Equations, v. 10, n. 3, p. 563-575, 2013.

[4] A. Esfahani, L. G. Farah, H. Wang, *Global existence and blow-Up for the generalized sixth-order Boussinesq equation.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, v. 75, n. 11, p. 4325-4338, 2012.

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* 2nd edition, volume 19, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, New York, 2010.

[6] D. G. Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[7] P. G. Geredeli, I. Lasiecka, *Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von Kármán*

plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity, Nonlinear Analysis, v.91, p. 72-92, 2013.

[8] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de janeiro, Rio de Janeiro, 1985.

[9] A. E. Green, P. M. Naghdi, *A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth*. Journal of Fluid Mechanics, v. 78, n. 2, p. 237-246, 1976.

[10] R. B. Guenther, J. W. Lee, *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*. Dover Publications, New York, 1996.

[11] J. L. Horbach, *Existência de soluções e comportamento assintótico ótimo para equações dissipativas generalizadas tipo Placas/Boussinesq em* $\mathbb{R}^n$. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

[12] J. L. Horbach, R. Ikehata, R. C. Charão, *Optimal Decay Rates and Asymptotic Profile for the Plate Equation with Structural Damping*. Journal in Mathematical Analysis and Applications, v. 440, p. 529-560, 2016.

[13] R. Ikehata, *New decay estimates for linear damped wave equations and its application to nonlinear problem*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, v. 27, p. 865-889, 2004.

[14] R. Ikehata, M. Natsume, *Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping*. Differential Integral Equations, v. 25, n. 9-10, p. 939-956, 2012.

[15] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 41, n. 7, p. 891-907, 1988.

[16] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[17] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley and Sons Inc., New York, 1978.

[18] C. R. da Luz, R. C. Charão, *Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains.* Journal of Hyperbolic Differential Equations, v. 6, n. 2, p. 269-294, 2009.

[19] C. R. da Luz, R. Ikehata, R. C. Charão, *Asymptotic behavior for abstract evolution differential equations of second order.* Journal of Differential Equations, v. 259, n. 10, p. 5017-5039, 2015.

[20] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semilinear wave equations.* Published RIMS, Kyoto University, v. 12, p. 169-189, 1976.

[21] G. A. Maugin, *Nonlinear waves in elastic crystals.* Oxford Mathematical Monographs Series, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[22] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev.* Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.

[23] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos, n. 9, Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1975.

[24] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, v. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[25] D. H. Peregrine, *Long waves on a beach.* Journal of Fluid Mechanics, v. 27, p. 815-827, 1967.

[26] J. E. M. Rivera, *Teoria da distribuições e equações diferenciais parciais.* Textos Avançados, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 1999.

[27] J. Sander, K. Hutter, *On the development of the theory of solitary wave.* Acta Mechanica, v. 86, p. 11-152, 1991.

[28] R. Schnaubelt, M. Veraar, *Structurally damped plate and wave equations with random point force in arbitrary space dimensions.* Differential Integral Equations, v. 23, n. 9-10, 957-988, 2010.

[29] Y. Sugitani, S. Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semilinear dissipative plate equation.* Journal of Hyperbolic Differential Equations, v. 7, n. 3, p. 471-501, 2010.

[30] Y. Wang, *Asymptotic behavior of solutions to the damped nonlinear hyperbolic equation.* Journal of Applied Mathematics, v. 2013, Art. ID 353757, 8 pages.

[31] S. Wang, G. Chen, *The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in* $W^{s,p}(\mathbb{R})$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 266, n. 1, p. 38-54, 2002.

[32] S. Wang, G. Chen, *Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 274, n. 2, p. 846-866, 2002.

[33] S. Wang, H. Xu, *On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term*. Journal of Differential Equations, v. 252, n. 7, p. 4243-4258, 2012.

[34] S. Wang, H. Xu, *On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with Stokes damped term*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, v. 64, p. 719-731, 2013.

[35] S. Wang, H. Xue, *Global solution for a generalized Boussinesq equation*. Applied Mathematics and Computation, v. 204, n. 1, p. 130-136, 2008.