



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Daniel Alfonso Sánchez Vega

Métodos de reconstrução de fonte para a Equação do Calor

Florianópolis
2023

Daniel Alfonso Sánchez Vega

Métodos de reconstrução de fonte para a Equação do Calor

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática, com área de concentração em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Fermín Sinforiano Viloche Bazán, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sánchez Vega, Daniel Alfonso
Métodos de reconstrução de fonte para a Equação do Calor
/ Daniel Alfonso Sánchez Vega ; orientador, Fermín
Sinforiano Viloche Bazán, 2023.
119 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Métodos de
regularização baseado em filtros. 3. Problema inverso de
fonte (ISP). 4. Equação do calor . 5. Princípio da
discrepância de Morozov. I. Viloche Bazán, Fermín Sinforiano
. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Daniel Alfonso Sánchez Vega

Métodos de reconstrução de fonte para a Equação do Calor

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Membro Externo Prof. Fabio Antonio Dorini, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Jaúber Cavalcante de Oliveira, Dr.
UFSC-Departamento de Matemática

Prof. Luciano Bedin, Dr.
UFSC-Departamento de Matemática

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática, com área de concentração em Matemática Aplicada.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof.Fermín Sinfórano Viloche Bazán, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

Este trabalho é dedicado aos meus colegas da
Matemática, que foram a minha família em Florianópolis
no último ano do mestrado.

AGRADECIMENTOS

Neste breve espaço, gostaria de expressar minha gratidão primeiramente a Deus, que tem sido um apoio incondicional para mim e que, a cada dia, me ajuda a ser uma pessoa melhor. Ele me concedeu o privilégio de visitar este país maravilhoso, o Brasil, e esta ilha encantadora e acolhedora.

Agradeço a meus pais Alfonso e Maria Eugenia, que com muito empenho e esforço me apoiaram a iniciar esta aventura de fazer um mestrado, arcando com parte das minhas despesas durante meus primeiros meses na cidade e que sempre me apoiaram incondicionalmente na realização dos meus sonhos. A meu irmão David com quem tenho uma confiança e uma comunhão bem estreita, com quem compartilhei muitas conversas e algumas trilhas na ilha.

Agradeço a minhas amigas durante o processo atual, que sempre estiveram comigo para me apoiar e ajudar-me em toda questão burocrática durante minha estadia neste lugar. Agradeço a Marduck, Cindy, Sebastián, Juan Carlos, Raúl, Javier, Sergio, Yineth, Thomas, Fernanda, Juan Sebastián, Gerson, Snadra, Giselly, Daniel Rolando e Stephanie que sempre estiveram comigo e me indicaram como me adaptar da melhor forma em uma nova cultura, agradeço aos meus colegas do mestrado e doutorado os quais me ajudaram nos primeiros passos de um novo idioma e se tornaram pessoas que alegravam meus dias, a Rafael, Juan Estuardo, Luciano, Bruna, Renata, Nicolý, Francisco, Vinicius, Lucas, Carla, Luiz, Maritza, Eduardo, Ricardo, Liana, Cleison, Guilherme e Pedro, com quem compartilhei muitas conversas em bares e no RU, e que me ajudaram a fluir mais no idioma português.

Ao professor Fermín por me apoiar e estar comigo durante o processo acadêmico, alentando-me e dando muitas dicas para minha formação integral, e aos professores Everton, Leonardo, Luciano pela troca de ideias em matemática aplicada. Agradeço também ao professor Francisco Caramelo pela troca de ideias em relação as noções geométricas que aparecem em EDP e ao professor Maicon por me incentivar a participar no seminário de otimização e problemas inversos do qual me levou muitas gratas experiências.

Aos secretários Érica e Marcelo e aos demais servidores e trabalhadores da Universidade, que servem com muito empenho e amor a nossa comunidade acadêmica, e que com seu serviço fazem possível que a comunidade universitária esteja firme e em pé.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*“Siempre habra un futuro brillante para los que tienen la belleza en el corazón.”
(Joseph Fourier)*

RESUMO

O presente trabalho mostra alguns métodos de regularização baseados em filtros para resolver o problema inverso de fonte (ISP). Os métodos abordados aqui são o QBVM geral e o método TSVE da literatura. Os métodos gerais QBVM e TSVE são aplicados para resolver o ISP para a equação de calor não homogênea em 1D e 2D com condições de Dirichlet. Como parâmetros de regularização, utiliza-se uma escolha a priori para o método QBVM, e a posteriori para o método TSVE pelo princípio da discrepância de Morozov. No final do trabalho, são apresentados exemplos numéricos do problema de reconstrução de fonte, comparando o método QBVM geral e o método TSVE, apresentando alguns gráficos e erros relativos para diferentes tamanhos de passo no tempo e no espaço.

Palavras-chave: Métodos de regularização baseado em filtros. Problema inverso de fonte (ISP). QBVM. TSVE. Princípio da discrepância de Morozov.

ABSTRACT

The present work shows some regularization methods based on filters to solve the inverse source problem (ISP). The methods covered here are the general QBVM and the TSVE method from the literature. The general QBVM and TSVE method are applied to solve the ISP for the inhomogeneous heat equation in 1D and 2D with Dirichlet conditions. As regularization parameters, an a priori choice is used for the QBVM method, and a posteriori for the TSVE method using the Morozov discrepancy principle. At the end of the work, numerical examples of the source reconstruction problem are presented, comparing the general QBVM method and the TSVE method, presenting some graphs and relative errors for different step sizes in time and space.

Keywords: Regularization methods based on filters. Inverse source problem (ISP). QBVM. TSVE. Discrepancy principle of Morozov.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema de um problema Inverso	9
Figura 2 – Reconstruções função fonte contínua com $m=30$ e $n=30$ pontos . .	65
Figura 3 – Reconstruções função fonte não diferenciável com $m=30$ e $n=30$ pontos	66
Figura 4 – Reconstruções função fonte não diferenciável com $m=30$ e $n=30$ pontos	67
Figura 5 – Reconstruções TSVE, QBVM e MQBVM com $m = 30 \times 30$ pontos no espaço e $n = 6$ pontos no tempo com nível de ruído 10^{-3}	68
Figura 6 – Discretização 1D	84
Figura 7 – Discretização em 2D	86
Figura 8 – Matrizes \mathbb{M} e \mathbb{N} pentadiagonais	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Erros relativos para a função fonte contínua.	65
Tabela 2 – Erros relativos para a função fonte não diferenciável.	66
Tabela 3 – Erros relativos para a função fonte descontínua.	67
Tabela 4 – Erros relativos para a função fonte em 2D.	68
Tabela 5 – Resumo dos métodos de regularização mais eficiente por exemplo teste e tamanho de passo no tempo e no espaço	70
Tabela 6 – Resumo dos métodos de regularização por parâmetro de regularização por exemplo teste e tamanho de passo no tempo e no espaço .	70

LISTA DE SÍMBOLOS

- T^* Operador adjunto de T .
- $N(T)$ Núcleo do operador T .
- $N(T)^\perp$ Complemento ortogonal de $N(T)$.
- $B(X, Y)$ Conjunto dos operadores limitados do espaço X no espaço Y .
- T^\dagger Inversa generalizada do operador T .
- \mathbb{R}^n Conjunto dos vetores com n coordenadas reais.
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ Conjunto das matrizes com entradas reais de n linhas e n colunas.
- J_α Funcional linear de Tikhonov.
- $R(B)$ Imagem do operador B .
- F_α^{Lav} Filtro de Lavrentiev.
- F_α^{Tik} Filtro de Tikhonov.
- $L^2(\Omega)$ Espaço das funções quadrado integráveis.
- $H_0^1(\Omega)$ Espaço das funções em $H^1(\Omega)$ que se anulam na fronteira de Ω .
- QBVM Método de valor quase-límite.
- MQBVM Método de valor quase-límite modificado.
- PQBVM Método de valor quase-límite parametrizado.
- TSVE Decomposição em valores singulares truncada.

ISP Problema de reconstrução de fonte.

$randn(-1, 1)$ Ruído aleatório normalmente distribuído em $(-1, 1)$.

Δ_h Matriz laplaciana discreta.

e^A Matriz exponencial da matriz A .

$e_{\beta,r}$ Erro de regularização.

SUMÁRIO

	Lista de figuras	2
	Lista de figuras	2
	Lista de tabelas	3
	Lista de tabelas	3
1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES DE ANÁLISE FUNCIONAL E TEORIA DA REGULARIZAÇÃO	12
2.1	RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL	12
2.1.1	Operadores compactos, inversa generalizada e teorema de regularização baseado em filtros	12
2.2	MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO E ESCOLHA DE PARÂMETROS	19
2.2.1	Método de Regularização de Lavrentiev	19
2.2.2	Método de Regularização de Tikhonov	23
2.2.3	Princípio da Discrepância de Morozov	26
3	PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO	32
3.1	RECONSTRUÇÃO DE FONTE E SOLUÇÃO EM FORMA DE SÉRIE	32
3.1.1	Problema Direto	32
3.1.2	Problema Inverso	35
4	MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE	41
4.1	MÉTODOS QBVM, MQBVM E PQBVM	41
4.1.1	Dedução Método QBVM	42
4.1.2	Dedução dos Métodos MQBVM e PQBVM	43
4.2	MÉTODO TSVE	44
4.3	MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO BASEADO EM FILTROS	45
4.4	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA OS MÉTODOS QBVM E TSVE	47
4.4.1	Análise de convergência do método QBVM	47
4.4.2	Análise de convergência do método MQBVM	48
4.4.3	Análise de convergência do método PQBVM caso $\alpha = 2\sqrt{\beta}$	52
4.4.4	Análise de Convergência do método TSVE	55
5	IMPLEMENTAÇÕES NUMÉRICAS	59
5.1	IMPLEMENTAÇÃO QBVM GERAL E TSVE	59
5.1.1	Implementação do método QBVM	59
5.1.2	Implementação dos métodos MQBVM e PQBVM	60
5.1.3	Implementação do TSVE usando um método semi-discreto	61
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	64

6.0.1	Exemplo 1	65
6.0.2	Exemplo 2	66
6.0.3	Exemplo 3	67
6.0.4	Exemplo 4	68
7	CONCLUSÕES	69
	BIBLIOGRAFIA	73
	APÊNDICE A – MÉTODO DE CRANCK-NICHOLSON PARA APRO-	
	XIMAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR E MATRIZ	
	LAPLACIANA DISCRETA NEGATIVA	80
A.0.1	Diferenças Progressivas	80
A.0.2	Diferenças Regressivas	81
A.0.3	Diferenças Centradas	81
A.0.4	Derivadas de Segunda Ordem	82
A.0.5	Método de Cranck-Nicholson em 1D e 2D	82
A.0.6	Caso 1D	83
A.0.7	Caso 2D	85
A.0.8	Matriz Laplaciana Discreta negativa em 1D e 2D	88
	APÊNDICE B – ESPAÇOS DE SOBOLEV E IDENTIDADES DE GREEN	92
B.0.1	Espaços de Sobolev	92
B.0.2	Teoremas e Identidades de Green	93
	ANEXO A – CÓDIGOS	95

1 INTRODUÇÃO

No estudo e solução de problemas inversos, é fundamental analisar previamente as condições de unicidade e estabilidade. Essa análise é importante pois permite determinar se um problema é bem ou mal posto, o que auxilia na escolha da abordagem mais adequada para a sua resolução. O termo 'mal posto' foi estabelecido no início do século 20 por J.S. Hadamard, um pesquisador em física-matemática. Inicialmente, Hadamard acreditava que nenhum problema mal posto refletia uma situação real. Contudo, ao longo dos anos, essa concepção foi refutada.

Resolver um problema inverso consiste em determinar a causa desconhecida a partir de um efeito medido ou observado. Esses problemas podem ser descritos por meio de uma equação de operador do tipo

$$Af = g, \tag{1}$$

dado um efeito representado pela função g e uma causa representada pela função f , onde $A : G_1 \rightarrow G_2$ é um operador, possivelmente não linear, com G_1 e G_2 sendo espaços normados conhecidos como espaço de soluções e dados, respectivamente.

Segundo Hadamard, um problema é bem posto se são satisfeitas as seguintes condições:

- (a) Existência: Para cada $g \in G_2$ existe $f \in G_1$ tal que $Af = g$.
- (b) A solução é única (unicidade), isto é, para cada g a equação (1) possui uma única solução f .
- (c) A solução depende suavemente dos dados (regularidade ou estabilidade), isto é, a solução f depende continuamente dos dados de entrada, ou seja, o operador A possui uma inversa contínua.

Caso uma das condições acima não seja satisfeita, o problema é dito mal posto. O problema que desejamos resolver é um problema inverso. Quando lidamos com um problema inverso, é sempre essencial evitar o que é conhecido como 'crime inverso' [18]. Quando se trata de um problema inverso, sempre existe um ponto de partida, que chamamos de 'A', e um ponto de chegada, que chamamos de 'B'. Para ir de 'A' a 'B', o caminho que seguimos é conhecido como o 'problema direto', e o caminho de volta de 'B' até 'A' é o 'problema inverso'. Denotemos 'PD' como 'Problema Direto' e 'PI' como 'Problema Inverso'.

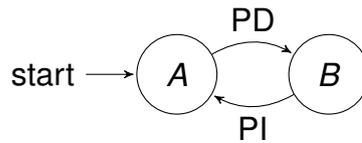


Figura 1 – Esquema de um problema Inverso

Se utilizarmos o mesmo caminho para ir de 'A' até 'B' e de 'B' até 'A', acontece o 'crime inverso' [18]. Ir do ponto de partida até o ponto de chegada pelo mesmo caminho é, na verdade, uma verificação do modelo físico em questão e não uma solução para o problema inverso. Apenas verifica a validade do modelo utilizado para a solução do 'PD'. Todo problema inverso sempre requer um conhecimento prévio do problema direto e de todas as suas propriedades e métodos de resolução. Esse fato, que pode parecer insignificante, é de suma importância e é um passo crucial para evitar o chamado 'crime inverso'.

Problemas inversos de fonte, que denotaremos por 'ISP's, são o denominador comum em uma ampla gama de problemas que surgem em aplicações do mundo real, como prospecção geofísica [28,29], detecção de contaminantes [30], detecção de fissuras [31,32], localização de contaminantes desconhecidos em água subterrânea [33,34], simulação de reservatórios e recuperação de petróleo [45,79], entre outros.

Para descrever o problema abordado neste trabalho, seja $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ um domínio aberto limitado com uma fronteira $\partial\Omega$ suave seccionalmente contínua por partes. Consideramos o problema inverso de reconstrução de fonte [35–37] associado ao problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

onde $\phi \in L^2(\Omega)$ e cujo objetivo é determinar ou reconstruir a fonte $f \in L^2(\Omega)$ a partir do valor final $g = u(\cdot, T) \in H_0^1(\Omega)$. Na prática, a condição final g é obtida a partir de medições e assim dificilmente é conhecida de forma exata. Por causa disso, a condição final obtida é denotada por $g_\delta \in L^2(\Omega)$ e que satisfaz $\|g - g_\delta\| \leq \delta$ para um nível de ruído $\delta > 0$. Nessas condições, o problema de reconstrução precisa de técnicas de regularização porque ISP's são mal postos [5, 16]. O campo dos problemas inver-

so tem sido uma extensa área de pesquisa pelo surgimento de problemas aplicados no mundo real, o que faz com que diferentes livros e tratados clássicos tenham sido desenvolvidos durante o passar dos anos, [3, 20, 38]. Quando se aborda o problema direto associado ao ISP de interesse, as questões de existência e unicidade de solução são relativamente simples de verificar. De fato, utilizando o método de separação de variáveis, ver [14, 21, 76], a solução é descrita em forma de uma série

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k e^{-\lambda_k t} + (1 - e^{-\lambda_k t}) \lambda_k^{-1} f_k) b_k(x), \quad f_k = \langle f, b_k \rangle, \quad (3)$$

que converge em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, onde $\langle f, b_k \rangle = f_k$, $\langle \phi, b_k \rangle = \phi_k$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em $L^2(\Omega)$, $\langle f, g \rangle = \left(\int_{\Omega} f g dx \right)^{1/2}$ os λ_k são os autovalores do Laplaciano negativo $(-\Delta)$ e as b_k 's são as auto-funções correspondentes. Com isto claro, o que realmente torna o ISP que queremos abordar em um problema mal posto é a questão da dependência contínua nas condições iniciais dos dados. A razão deste fato é que se fixarmos T , a função $u(x, T) = g(x)$ pode ser expressa como:

$$g(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), \quad (4)$$

onde $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k T} b_k(x)$. De (4), o lado direito da equação representa um operador no espaço $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ com certos atributos, o qual mostra que o problema de reconstrução se resume em inverter um operador no espaço de funções $L^2(\Omega)$. A dificuldade recai no fato de que o operador em questão é não-limitado, o qual transgride a condição (c) de Hadamard de um problema ser bem posto.

A fonte f é uma função em $L^2(\Omega)$, que pode envolver o produto de duas funções uma com uma variável no espaço e a outra no tempo, como pode ser visto nos trabalhos de [39–42]. Para o caso em que o termo fonte depende da função u , o problema foi abordado em [35, 43, 44]. Para o termo fonte f que depende apenas de uma variável, seja ela espacial ou temporal, vários métodos de regularização foram desenvolvidos, a saber, método de fronteira elementar [47], método de quase-reversibilidade [36], método de Fourier [49], método de regularização simplificado de Tikhonov [46], método de elementos finitos [48] e o método do valor quase-limite parametrizado [16]. Em nosso caso abordaremos o problema de reconstrução onde a fonte depende unicamente da variável espacial.

Depois de introduzir o problema e discutir algumas questões relacionadas ao ISP, o propósito desta dissertação é demonstrar como os métodos QBVM geral [16,36,58,65] e TSVE [5] são métodos de regularização que derivam de filtros de regularização específicos amplamente estudados na literatura sobre problemas inversos. Através de exemplos numéricos, mostraremos como o método TSVE, com uma escolha a posteriori do parâmetro de regularização, se revela uma alternativa superior ao QBVM geral.

Para atingir esse objetivo, este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 2, introduzimos resultados de análise funcional e teoria da regularização, juntamente com métodos de escolha de parâmetros de regularização, como o princípio da discrepância de Morozov, e discutimos os métodos de regularização de Lavrentiev e Tikhonov.

No Capítulo 3, apresentamos um tratamento detalhado do problema de reconstrução de fonte, estudando as propriedades do operador que aparece no lado direito de (4).

No Capítulo 4, introduzimos três métodos de valor quase-limite descritos em [16], que incluem os métodos QBVM, MQBVM e PQBVM, além de apresentar o TSVE com um parâmetro a posteriori baseado no princípio da discrepância, e analisamos a convergência desses quatro métodos.

No Capítulo 5, aplicamos os quatro métodos em dimensão finita e discutimos algumas considerações práticas. No Capítulo 6, realizamos testes numéricos para avaliar o desempenho dos métodos. Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos as conclusões deste trabalho.

Além disso, no final do trabalho, incluímos um apêndice que aborda noções básicas de espaços de Sobolev, identidades de Green, métodos de aproximação para EDP não-homogêneas de calor em uma e duas dimensões, e tópicos relacionados à matriz laplaciana discreta.

2 PRELIMINARES DE ANÁLISE FUNCIONAL E TEORIA DA REGULARIZAÇÃO

No presente capítulo definiremos uma série de ferramentas matemáticas que nos permitirão descrever de forma precisa todos os métodos de regularização que utilizaremos ao longo deste trabalho. Na primeira seção, discutimos resultados clássicos de análise funcional e teoria da regularização, na segunda seção abordamos os métodos de regularização de Lavrentiev e Tikhonov e na última seção se abordará a escolha de parâmetros de regularização, focando em particular, na escolha a posteriori que utilizaremos baseada no conhecido princípio da discrepância de Morozov

2.1 RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Apresentamos alguns resultados clássicos de teoria espectral e operadores compactos, baseados no texto introdutório [2], o qual descreve de forma simples, algumas noções sobre operadores compactos e propriedades de sistemas singulares. Os resultados correspondentes com este tópico são baseados no livro de problemas inversos [3] e os tópicos correspondentes a inversa generalizada são os abordados em [1, 4].

2.1.1 Operadores compactos, inversa generalizada e teorema de regularização baseado em filtros

Definição 2.1 (Operador Linear Compacto). Sejam X e Y espaços normados. Um operador $T : X \rightarrow Y$ é chamado de operador linear compacto se T é linear e se para todo subconjunto limitado M de X , a imagem $T(M)$ é relativamente compacta em Y , isto é, a aderência $\overline{T(M)}$ é compacta em Y .

A seguinte proposição expõe duas propriedades de um operador linear compacto.

Proposição 2.2. *Sejam X e Y espaços normados. Então:*

(i) *Todo operador linear compacto $T : X \rightarrow Y$ é limitado, portanto contínuo.*

(ii) *Se $\dim X = \infty$, o operador identidade $I : X \rightarrow X$ não é compacto.*

Demonstração. (i) A bola unitária $W = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é limitada. Como T é compacto, $\overline{T(W)}$ é compacto, e é limitado pois todo subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado. Logo, tem-se que $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$. Assim T é limitado.

(ii) A bola fechada unitária $W = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é limitada. Se $\dim X = \infty$, pelo Teorema 2.5-5 de [2], W não pode ser compacto. Portanto $I(W) = W$ não é relativamente compacto. \square

Em geral, demonstrar que um operador é compacto usando a definição é bastante complicado. No entanto, a melhor forma é utilizar um teorema de caracterização para a compacidade de um operador linear, que é necessário e suficiente.

Teorema 2.3 (Critério de Compacidade). *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Então T é compacto se e somente se a sequência imagem $(T(m_n))$ em Y da sequência limitada (m_n) em X possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Suponhamos que T é compacto e (m_n) é limitada, então a aderência $(T(m_n))$ em Y é compacta pela definição de operador compacto. Logo se sabe de Análise que todo conjunto compacto admite uma subsequência convergente.

Reciprocamente, assumamos que toda sequência limitada (m_n) admite uma subsequência (m_{n_k}) tal que $(T(m_{n_k}))$ é convergente em Y . Considere um conjunto limitado $W \subset X$ arbitrário, e seja (w_n) em $T(W)$. Temos que $w_n = Tm_n$ para algum $m_n \in W$ e que (m_n) é limitada dado que W é limitado. Pela hipótese, $(T(m_n))$ contém uma subsequência convergente. Logo, $\overline{T(W)}$ é compacto por (m_n) ser uma sequência arbitrária. Portanto, T é compacto por definição. \square

Teorema 2.4. *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Então:*

- (i) *Se T é limitado e $\dim T(X) < \infty$, o operador T é compacto.*
- (ii) *Se $\dim X < \infty$, o operador T é compacto.*

Demonstração. A prova pode ser consultada em [2, Teo 8.1-4, pág 407] \square

Observação 2.5. $B(X, Y)$ será denotado como o conjunto de todos os operadores lineares e limitados do espaço X em Y .

Definição 2.6. Seja X um espaço de Hilbert e $T \in B(X, X)$. Dizemos que um escalar μ em \mathbb{R} é um autovalor de T se existe $x \neq 0$ em X de modo que $Tx = \mu x$. O vetor x é dito autovetor associado ao autovalor μ .

Agora, segue alguns resultados mais avançados que são baseados em [3].

Definição 2.7 (Valores Singulares de um operador). Sejam X, Y espaços de Hilbert e $T : X \rightarrow Y$ um operador compacto com operador adjunto dado por $T^* : Y \rightarrow X$. As raízes quadradas $\sigma_k = \sqrt{\mu_k}$, $k \in K$ dos autovalores μ_k do operador auto-adjunto

$T^*T : X \rightarrow X$ são os denominados valores singulares de T . Aqui, $K \subset \mathbb{N}$ pode ser finito ou $K = \mathbb{N}$.

Teorema 2.8 (Decomposição em valores singulares:). *Sejam X, Y espaços de Hilbert, $T : X \rightarrow Y$ um operador linear compacto, $T^* : Y \rightarrow X$ seu operador adjunto, e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots > 0$ uma sequência ordenada de valores singulares e positivos de T , contados pela sua multiplicidade. Então existem sistemas ortonormais $\{x_j : j \in J\} \subset X$ e $\{y_j : j \in J\} \subset Y$ com as seguintes propriedades:*

$$Tx_j = \sigma_j y_j \text{ e } T^* y_j = \sigma_j x_j \text{ para todo } j \in J.$$

O sistema $\{\sigma_j, x_j, y_j : j \in J\}$ é chamado de sistema singular para T .

Demonstração. A prova do fato se obtém ao aplicar o teorema espectral ao operador T^*T . □

Teorema 2.9 (Picard). *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear compacto com sistema singular $\{\sigma_j, x_j, y_j : j \in J\}$. A equação*

$$Tx = y, \tag{5}$$

é solúvel se e somente se

$$y \in N(T^*)^\perp \text{ e } \sum_{j \in J} \frac{1}{(\sigma_j)^2} |\langle y, y_j \rangle|^2 < \infty. \tag{6}$$

Neste caso,

$$x = \sum_{j \in J} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j. \tag{7}$$

Demonstração. Uma prova do teorema está disponível em [1]. □

A seguir, se apresentam resultados básicos sobre inversa generalizada. Este conceito aparecerá mais adiante, quando se tratar do tema de análise de convergência para os métodos que se apresentam nesta dissertação.

Suponha que desejamos resolver a seguinte equação linear

$$Tx = y, \quad T \in B(X, Y), \quad y \in Y. \tag{8}$$

Em certas circunstâncias acontece que $y \notin R(T)$, assim a equação (8) não tem uma solução no sentido clássico. Um exemplo clássico deste tipo se apresenta quando o operador T é um operador integral induzido por uma função núcleo $k(s, t)$ com certo grau de regularidade. Esse é o caso de um operador de Fredholm de primeira espécie. Para resolver este problema de existência de solução, introduzimos a seguinte definição.

Definição 2.10. Sejam X, Y espaços de Hilbert e $T \in B(X, Y)$. A solução $u \in X$ é uma solução de quadrados mínimos (SQM) para (8) se:

$$\|Tu - y\| = \inf\{\|Tx - y\| : x \in X\}. \quad (9)$$

O seguinte teorema apresenta algumas propriedades das soluções de quadrados mínimos.

Teorema 2.11. Para $y \in Y$ e $u \in X$ as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) u é uma solução de quadrados mínimos.
- (ii) $T^*Tu = T^*y$.
- (iii) $Tu = Qy$, onde Q é a projeção ortogonal de y sobre $\overline{R(T)}$.

Observação 2.12. A equação (ii) é conhecida como equação normal de (8). Se S_y representa o conjunto de soluções de quadrados mínimos de (8), usando (iii) é possível mostrar que $S_y \neq \{\emptyset\}$ se e somente se $y \in R(T) + R(T)^\perp$. Aqui, $R(T)^\perp$ se conhece como o complemento ortogonal do conjunto $R(T)$, ver [2]. Deve ser claro que se $y \in R(T)$, S_y coincide com o conjunto de soluções de (8). Por outro lado, usando a parte (ii) demonstra-se que, se $S_y \neq \{\emptyset\}$, então S_y é convexo e fechado. Portanto, existe uma única solução de quadrados mínimos de norma mínima. Logo, se $T \in B(X, Y)$, o operador inversa generalizada de T , denotado por T^\dagger , com domínio de definição $D(T^\dagger) = R(T) + R(T)^\perp$, é o operador que designa a cada $y \in D(T^\dagger)$ a única SQM de norma mínima para (8). Isto é:

$$T^\dagger : D(T^\dagger) \rightarrow X, \text{ tal que } T^\dagger(y) = x^\dagger, \forall y \in D(T^\dagger).$$

Com respeito a isto, prova-se que:

$$N(T^\dagger) = R(T)^\perp, \quad (10)$$

e

$$R(T^\dagger) = N(T)^\perp. \quad (11)$$

As provas destes fatos podem se consultadas em [4].

Teorema 2.13. Sejam X, Y espaços de Hilbert e assumamos que $T \in B(X, Y)$. Então T^\dagger é contínua se, e somente se, $R(T)$ é fechado.

Para provar este teorema, introduz-se o operador restrição $T_r = T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$ dando a seguinte definição alternativa para T^\dagger :

$$T^\dagger = \begin{cases} T_r^{-1}Q(y), & y \in D(T^\dagger). \\ 0, & y \in R(T)^\perp. \end{cases}$$

Demonstração. A prova segue de utilizar o operador restrição e o teorema da aplicação inversa de Banach; ver [2, teo 4.12-2, pág 286]. \square

Definição 2.14. Uma estratégia de regularização é uma família de operadores lineares e limitados

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \alpha > 0, \text{ tal que}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Tx = x \text{ para todo } x \in X;$$

Observação 2.15. A definição acima mostra que a família de operadores R_α converge pontualmente ao operador identidade.

Definição 2.16. Uma escolha de parâmetro $\alpha = \alpha(\delta)$ para uma estratégia de regularização R_α é chamada de admissível se $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$ e

$$\sup\{\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - x\| : y^\delta \in Y, \|Tx - y^\delta\| \leq \delta\} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \quad (12)$$

para todo $x \in X$.

Observação 2.17. Uma escolha de parâmetro $\alpha = \alpha(\delta)$ é admissível se $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ e $\delta\|R_{\alpha(\delta)}\|_{B(Y,X)} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ e $\|R_\alpha Tx - x\|_X \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$.

Teorema 2.18. Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear, compacto, injetor e auto-adjunto com sistema singular $\{\sigma_j, x_j, y_j : j \in \mathbb{N}\}$ e

$$F : (0, \infty) \times (0, \|T\|) \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função com as seguintes propriedades:

(i) $|F_\alpha(\sigma)| \leq 1$ para todo $\alpha > 0$ e $0 < \sigma \leq \|T\|$.

(ii) Para todo $\alpha > 0$ existe $c(\alpha)$ tal que

$$|F_\alpha(\sigma)| \leq c(\alpha)\sigma \text{ para todo } 0 < \sigma \leq \|T\|.$$

(iii) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(\sigma) = 1$ para todo $0 < \sigma \leq \|T\|$.

Então, o operador $R_\alpha : Y \rightarrow X, \alpha > 0$ definido por

$$R_\alpha y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j, y \in Y, \quad (13)$$

é uma estratégia de regularização com $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$ e $\|TR_\alpha\| \leq 1$.

Observação 2.19. Uma forma conveniente para construir classes de estratégias de regularização admissíveis é por meio de sistemas singulares. Se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear compacto e $\{\sigma_j, x_j, y_j\}$ é seu sistema singular associado para o operador T , pelo teorema 2.9, a solução do problema $Tx = y$ é dada por

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j,$$

sempre que a série converge, isto é, $y \in R(T)$. As estratégias de regularização são construídas a fim de filtrar os fatores $\frac{1}{\sigma_j}$ associados aos σ_j 's ≈ 0 , isto é estão se aproximando de zero.

Demonstração. Os operadores R_α são limitados pela hipótese (ii) e do fato que:

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} [F_\alpha(\sigma_j)]^2 \frac{1}{\sigma_j} |\langle y, y_j \rangle|^2 \\ &\leq c(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle y, y_j \rangle|^2 \leq c(\alpha)^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre os vetores diferentes de zero e norma 1 obtemos:

$$\sup_{\|y\|=1, \sigma \neq 0} \|R_\alpha y\|^2 \leq c(\alpha)^2.$$

Assim obtemos que $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$.

De $TR_\alpha y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle Tx_j = \sum_{j=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_j) \langle y, y_j \rangle y_j$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|TR_\alpha y\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_j) \langle y, y_j \rangle y_j, \sum_{j=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_j) \langle y, y_j \rangle y_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |F_\alpha(\sigma_j)|^2 |\langle y, y_j \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot |\langle y, y_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle y, y_j \rangle|^2 \leq \|y\|^2, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Bessel. Assim tomando o supremo sobre todos os vetores diferentes de 1 e de norma 1 é possível concluir que

$$\|TR_\alpha\| \leq 1.$$

Por outro lado, dado que $Tx = y$ tem-se:

$$R_\alpha y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle Tx, y_j \rangle x_j.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j$ e $\langle Tx, y_j \rangle = \langle x, T^* y_j \rangle = \sigma_j \langle x, x_j \rangle$ concluímos que:

$$\begin{aligned} \|R_\alpha Tx - x\|^2 &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle Tx, y_j \rangle - \langle x, x_j \rangle \right) x_j, \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \langle Tx, y_j \rangle - \langle x, x_j \rangle \right) x_j \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \sigma_j - 1 \right) \langle x, x_j \rangle x_j, \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_\alpha(\sigma_j)}{\sigma_j} \sigma_j - 1 \right) \langle x, x_j \rangle x_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |F_\alpha(\sigma_j) - 1|^2 |\langle x, x_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Como X é um espaço de Hilbert, a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle x_j|^2$ converge pois, da desigualdade de Bessel [2, Teo 3.4-6 pag 157] tem-se que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Seja $x \in X$ arbitrário, mas fixo. Para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle| < \frac{\epsilon^2}{8}.$$

Por (3), existe $\alpha_0 > 0$ tal que $[F_\alpha(\sigma_j) - 1]^2 < \frac{\epsilon^2}{2\|x\|^2}$ para todo $j = 1, \dots, N$ e $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Com (1), concluímos que

$$\begin{aligned} \|R_\alpha Tx - x\|^2 &= \sum_{j=1}^N [F_\alpha(\sigma_j) - 1]^2 |\langle x, x_j \rangle|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} [F_\alpha(\sigma_j) - 1]^2 |\langle x, x_j \rangle|^2 \\ &< \frac{\epsilon^2}{2\|x\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 + \frac{\epsilon^2}{8} \\ &\leq \frac{\epsilon^2 \|x\|^2}{2\|x\|^2} + \frac{\epsilon^2}{8} = \frac{4\epsilon^2 + \epsilon^2}{8} \\ &= \frac{5\epsilon^2}{8} \\ &\leq \epsilon^2. \end{aligned}$$

para todo $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Assim, temos provado que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Tx = x$ para todo $x \in X$. Assim, para $\alpha = \alpha(\delta)$ tem-se que $\delta \|R_{\alpha(\delta)}\| \leq \delta c(\alpha(\delta))$ e $\|R_{\alpha(\delta)} Tx - x\| \rightarrow 0$ quando $\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$.

□

2.2 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO E ESCOLHA DE PARÂMETROS

Nesta seção, apresentamos resultados teóricos sobre métodos de regularização. Em primeiro lugar, se apresenta o conhecido método de regularização de Lavrentiev [7] e, posteriormente, o método de regularização de Tikhonov [77, 78].

2.2.1 Método de Regularização de Lavrentiev

Nesta seção, nosso ambiente de trabalho será em espaços de Banach, o que nos permite estender todos os resultados a espaços de Hilbert; os resultados são baseados em [75].

Definição 2.20. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços lineares normados X e Y se diz limitado inferiormente se existe uma constante $c > 0$ tal que $\|Tu\| \geq c\|u\|$ para todo $u \in X$.

Teorema 2.21. *Seja T um operador linear entre espaços de Banach X e Y tais que $R(T)$ é não fechado em Y . Então, para todo $x \in X$ e para toda sequência (ϵ_n) de números reais positivos, existe uma sequência (x_n) em X tal que*

$$\|Tx_n - Tx\| < \epsilon_n \text{ e } \|x_n - x\| = \frac{1}{\epsilon_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Suponha que $R(T)$ é não fechado e $x \in X$. Seja (ϵ_n) uma sequência de números reais positivos. Como X é um espaço de Banach e T não é limitado inferiormente, existe uma sequência (u_n) em X tal que

$$\|Tu_n\| < \epsilon_n^2 \|u_n\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $v_n = \left(\frac{u_n}{\epsilon_n \|u_n\|} \right)$, então obtemos $\|Tv_n\| = \left\| T\left(\frac{u_n}{\epsilon_n \|u_n\|}\right) \right\| < \epsilon_n$ e $\|v_n\| = \frac{1}{\epsilon_n}$.

Tomando $(x_n) = (x + v_n)$ e aplicando imagem diretamente, $(Tx_n) = (Tx + Tv_n)$. Logo,

$$\|Tx_n - Tx\| = \|Tv_n\| < \epsilon_n \text{ e } \|x_n - x\| = \|v_n\| = \frac{1}{\epsilon_n}, \quad (14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Seja X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$ um operador linear limitado com imagem não-fechada $R(T)$. Daqui em diante vamos assumir a seguinte hipótese.

Hipótese: Para cada $\alpha > 0$, $T + \alpha I$ é bijetora e existe $M > 0$ tal que $\|(T + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{M}{\alpha}$.

Suponha que $y \in R(T)$ e $x \in X$ é tal que

$$Tx = y. \quad (15)$$

Dada a hipótese anterior em T , para cada $\alpha > 0$,

$$(T + \alpha I)x_\alpha = y \quad (16)$$

é uma equação de operadores bem posta. Note que

$$(T + \alpha I)(x - x_\alpha) = (y + \alpha x) - y = \alpha x. \quad (17)$$

Logo,

$$x - x_\alpha = S_\alpha x, \quad (18)$$

onde

$$S_\alpha = \alpha(T + \alpha I)^{-1}. \quad (19)$$

Pela hipótese, $\|S_\alpha\| \leq M$. Assim, a família $\{S_\alpha : \alpha > 0\}$ é uma família uniformemente limitada.

Claramente, se $x \in X$ é tal que $Tx = y$, então

$$\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|S_\alpha x\| \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0. \quad (20)$$

Provaremos, agora, o seguinte resultado geral em S_α , para $\alpha > 0$.

Teorema 2.22.

1) $\|S_\alpha T\| \leq (1 + M)\alpha$, para todo $\alpha > 0$.

2) Se $R(T)$ é denso em X , então

(a) $S_\alpha u \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ para todo $u \in X$.

(b) T é injetor.

Demonstração. (1) Note que, para $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} S_\alpha T &= \alpha(T + \alpha I)^{-1} T = \alpha(T + \alpha I)^{-1} [(T + \alpha I) - \alpha I] \\ &= \alpha - \alpha^2(T + \alpha I)^{-1} \\ &= \alpha(I - S_\alpha). \end{aligned}$$

Assim, tem-se $\|S_\alpha T\| \leq (1 + M)\alpha$.

(2) por o mostrado em (1), $S_\alpha u \rightarrow 0$ para todo $u \in R(T)$ se $\alpha \rightarrow 0$. Agora, suponha

que $R(T)$ é denso em X . Como $\{S_\alpha\}_\alpha$ é uma família uniformemente limitada e como esta sequência de operadores converge pontualmente a 0 em um conjunto denso de um subespaço de Banach, $\|S_\alpha u\| \rightarrow 0$ para todo $u \in X$.

Agora, para ver que T é injetor, seja $x \in X$ tal que $Tx = 0$. Então

$$(T + \alpha I)x = \alpha x, \quad (21)$$

assim tem-se $x = \alpha(T + \alpha I)^{-1}x = S_\alpha x \rightarrow 0$, com $\alpha \rightarrow 0$. \square

Como corolário deste teorema temos o seguinte resultado.

Corolário 2.23. *Seja $y \in R(T)$ e seja $x \in X$ tal que $Tx = y$. Então:*

(1) *Se $x \in R(T)$, x é o único elemento em $R(T)$ tal que $Tx = y$, e*

$$\|x - x_\alpha\| = O(\alpha).$$

(2) *Se $R(T)$ é denso em X , então x é o único elemento em X tal que $Tx = y$, e*

$$\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0.$$

Demonstração. Seja $y \in R(T)$ e seja $x \in X$ tal que $Tx = y$.

(1) Suponha $x \in R(T)$. Seja $u \in X$ tal que $x = Tu$. Então de (18) e do 2.22, obtemos:

$$\|x - x_\alpha\| = \|S_\alpha Tu\| \leq \alpha(1 + M)\|u\|.$$

Logo, $\|x - x_\alpha\| = O(\alpha)$.

(2) Suponha que $R(T)$ é denso em X . Então por 2.22, $\|x - x_\alpha\| = \|S_\alpha x\| \rightarrow 0$ se $\alpha \rightarrow 0$.

Novamente por 2.22, T é injetor. Logo, x é o único elemento em X tal que $Tx = y$. \square

Teorema 2.24. *Se $R(T)$ é denso em X , a família $\{R_\alpha : \alpha > 0\}$ de operadores limitados $R_\alpha : X \rightarrow X$ definida por*

$$R_\alpha y = (T + \alpha I)^{-1}y, \quad y \in X, \quad (22)$$

para $\alpha > 0$ é uma família de regularização.

Demonstração. Notemos que, para $x \in X$,

$$\begin{aligned} x - R_\alpha Tx &= x - (T + \alpha I)^{-1}Tx = (T + \alpha I)^{-1}[(T + \alpha I) - T]x \\ &= S_\alpha x. \end{aligned}$$

Como S_α é uma família uniformemente limitada, $\|S_\alpha\| \leq M$. Logo,

$$\|x - R_\alpha Tx\| = \|S_\alpha x\| \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0 \quad (23)$$

pois $R(T)$ é denso em X . Portanto, $\{R_\alpha : \alpha > 0\}$ é uma família de regularização. \square

Definição 2.25. Da hipótese anterior em T , a família de operadores $\{R_\alpha : \alpha > 0\}$, definida no teorema anterior

$$R_\alpha = (T + \alpha I)^{-1}, \alpha > 0, \quad (24)$$

é chamada de Regularização de Lavrentiev.

Se X é um espaço de Hilbert e T é um operador positivo e autoadjunto, então a Hipótese anterior dada na pág 19 em T é satisfeita. Sabe-se que $R(T)$ é denso em $N(T)^\perp$. Assim, neste caso o corolário 2.22 leva no seguinte resultado.

Teorema 2.26. *Seja X um espaço de Hilbert e T positivo, auto-adjunto e limitado em X . Suponha que $y \in R(T)$. Então existe um único $x \in N(T)^\perp$ tal que $Tx = y$, e*

$$\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0, \text{ quando } \alpha \rightarrow 0. \quad (25)$$

Além disso, se $x \in R(T)$, então

$$\|x - x_\alpha\| = O(\alpha). \quad (26)$$

Suponha que em lugar de y temos $y^\delta \in X$ tal que

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta. \quad (27)$$

Seja $x_\alpha^\delta \in X$ tal que

$$(T + \alpha I)x_\alpha^\delta = y^\delta. \quad (28)$$

Então, temos que

$$(T + \alpha I)(x_\alpha - x_\alpha^\delta) = y - y^\delta. \quad (29)$$

Agora, subtraindo os termos x_α e x_α^δ em norma

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| &= \|(T + \alpha I)^{-1}(y - y^\delta)\| \\ &= \frac{1}{\alpha} \|\alpha(T + \alpha I)^{-1}(y - y^\delta)\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq M \frac{\delta}{\alpha}$. Assim, se chega ao seguinte teorema.

Teorema 2.27. *Seja $y \in R(T)$ e seja $x \in X$ tal que $Tx = y$. Então, sob a hipótese anterior em T , obtemos que:*

$$(1) \|x - x_\alpha^\delta\| \leq \|x - x_\alpha\| + M \frac{\delta}{\alpha}.$$

(2) Se $R(T)$ é denso em X e $\alpha(\delta)$ é tal que $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ e $\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ então

$$\|x - x_{\alpha(\delta)}^\delta\| \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0. \quad (30)$$

(3) Se $x \in R(T)$ e $\alpha(\delta) \sim \delta^{1/2}$, então

$$\|x - x_{\alpha(\delta)}^\delta\| = O(\delta^{1/2}). \quad (31)$$

Demonstração. (1)

$$\begin{aligned} \|x - x_{\alpha(\delta)}^\delta\| &= \|x - x_\alpha + x_\alpha - x_{\alpha\delta}^\delta\| \\ &\leq \|x - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_{\alpha\delta}^\delta\| \\ &\leq \|x - x_\alpha\| + M \frac{\delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

(2) Se $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ e $\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, do fato que $\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ conclui que $\|x - x_{\alpha(\delta)}^\delta\| \rightarrow 0$.

(3) $x \in R(T)$ implica que $\|x - x_\alpha\| = O(\alpha)$. Logo, $\alpha \sim \delta^{1/2}$ implica que:

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\delta}{\alpha} &= \alpha + \delta^{1/2} \frac{\delta^{1/2}}{\alpha}, \text{ e} \\ \alpha + \delta^{1/2} \frac{\delta^{1/2}}{\alpha} &\sim O(\delta^{1/2}) + O(\delta^{1/2}). \\ &\sim O(\delta^{1/2}). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Método de Regularização de Tikhonov

O método de regularização de Tikhonov é, provavelmente, o mais clássico e amplamente estudado entre os métodos de regularização. Geralmente, é o primeiro método que se encontra ao iniciar o estudo de problemas inversos e técnicas de regularização. Nesta seção, discutiremos alguns teoremas e resultados importantes que são conhecidos e clássicos na literatura, os teoremas e resultados são baseados no livro clássico [3].

Dado o operador linear e limitado $T : X \rightarrow Y$ e $y \in Y$, determinar o x_α que minimiza o funcional linear dado por:

$$J_\alpha(x) = \|Tx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2, \text{ para } x \in X. \quad (32)$$

Teorema 2.28. *Seja $T : X \rightarrow Y$ linear e limitado entre espaços de Hilbert e $\alpha > 0$. Então o funcional de Tikhonov J_α tem um único mínimo $x_\alpha \in X$. O mínimo x_α é a única solução da equação normal*

$$\alpha x_\alpha + T^* T x_\alpha = T^* y. \quad (33)$$

O operador $\alpha I + T^* T$ é um isomorfismo de X em si mesmo para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. Utilizamos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) &= 2\operatorname{Re}(Tx_\alpha - y, T(x - x_\alpha)) + 2\alpha\operatorname{Re}(x_\alpha, x - x_\alpha) \\ &\quad + \|T(x - x_\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x_\alpha\|^2. \\ &= 2\operatorname{Re}(T^*(Tx_\alpha - y) + \alpha x_\alpha, x - x_\alpha) \\ &\quad + \|T(x - x_\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Se x^α cumpre que

$$\alpha x^\alpha + T^* T x^\alpha = T^* y.$$

então $J_\alpha(x) - J_\alpha(x^\alpha) \geq 0$ para todo $x \in X$ e $J_\alpha(x) \geq J_\alpha(x^\alpha)$.

Por outro lado, se $J_\alpha(x) \geq J_\alpha(x^\alpha)$ fazendo $x = x^\alpha + tz$ obtem-se:

$$2t\operatorname{Re}(T^*(Tx^\alpha - y) + \alpha x^\alpha, z) + t^2\|Tz\|^2 + \alpha t^2\|z\|^2 \geq 0.$$

Dividindo por $t > 0$ e fazendo $t \rightarrow 0$ obtem-se:

$$\operatorname{Re}(T^*(Tx^\alpha - y) + \alpha x^\alpha, z) \geq 0 \quad \forall z \in X.$$

Portanto, $T^*(Tx^\alpha - y) + \alpha x^\alpha = 0$ e x^α satisfaz a equação $T^* T x^\alpha + \alpha x^\alpha = T^* y$. Aqui se mostra que a equivalência da equação normal com o problema de minimização como pode ser consultado em [3, pág 38, Lemma 2.10] é equivalente. Agora, mostraremos que $\alpha I + T^* T$ é injetor para todo $\alpha > 0$. Seja $\alpha I + T^* T = 0$. Multiplicando por x e utilizando o produto interno,

$\alpha\langle x, x \rangle + \langle Tx, Tx \rangle = 0$. Isto implica que, $x = 0$. Finalmente mostraremos que $\alpha I + T^* T$ é sobrejetor. Como $\alpha I + T^* T$ é injetor e auto-adjunto, sua imagem é densa em X . Resta provar que sua imagem é fechada. Seja $z_n = \alpha x_n + T^* T x_n \rightarrow z$ uma sequência que converge para algum $z \in X$. Então $z_n - z_m = \alpha(x_n - x_m) + T^* T(x_n - x_m)$. Multiplicando a equação por $x_n - x_m$ no produto interno implica:

$$\begin{aligned} \alpha\|x_n - x_m\|^2 + \|T(x_n - x_m)\|^2 &= \langle z_n - z_m, x_n - x_m \rangle \\ &\leq \|z_n - z_m\| \|x_n - x_m\|. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha\|x_n - x_m\| \leq \|z_n - z_m\|$. Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy e é convergente a $x \in X$ que satisfaz $\alpha x + T^* T x = z$. \square

Um fato que é importante mencionar é o seguinte: a solução da equação (33) pode ser escrita na forma $x_\alpha = R_\alpha y$ com

$$R_\alpha = (\alpha I + T^* T)^{-1} T^* : Y \rightarrow X. \quad (34)$$

Teorema 2.29. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear, compacto e injetor, $\alpha > 0$ e $x^* \in X$ a solução exata de $Tx^* = y^*$. Além disso, seja $y^\delta \in Y$ tal que $\|y^\delta - y^*\| \leq \delta$.*

(a) *Os operadores $R_\alpha : Y \rightarrow X$ de (34) formam uma estratégia de regularização com $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. Este é o conhecido método de regularização de Tikhonov. $R_\alpha y^\delta$ é determinado como a única solução x_α^δ da equação*

$$\alpha x_\alpha^\delta + T^* T x_\alpha^\delta = T^* y^\delta. \quad (35)$$

Toda escolha $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) com $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) é admissível.

(b) *Seja $x^* = T^* z \in R(T^*)$ com $\|z\| \leq E$. Escolhemos $\alpha(\delta) = \frac{c\delta}{E}$ para algum $c > 0$. Então a seguinte estimativa vale:*

$$\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x^*\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) \sqrt{\delta E} \quad (36)$$

(c) *Para algum $x = T^* Tz \in T^* T(X)$, com $\|z\| \leq E$, a escolha a priori $\alpha(\delta) = c \left(\frac{\delta}{E} \right)^{2/3}$ para $c > 0$ leva a estimativa de erro dada por:*

$$\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x^*\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + c \right) E^{1/3} \delta^{2/3}. \quad (37)$$

Portanto, o método de regularização de Tikhonov é ideal quando $\|(T^)^{-1} x^*\| \leq E$ ou $\|(T^* T)^{-1}\| \leq E$, respectivamente (sempre que T^* seja injetora).*

Demonstração. Uma prova deste fato pode ser consultada em [3]. □

Teorema 2.30. *Seja $T : X \rightarrow Y$ linear, compacto e injetor de modo que $R(T)$ é de dimensão infinita. Além disso, seja $x \in X$, e assumamos que existe uma função contínua $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $\alpha(0) = 0$ tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\| \delta^{-2/3} = 0$$

para todo $y^\delta \in Y$ com $\|y^\delta - Tx\| \leq \delta$ onde $x_{\alpha(\delta)}^\delta \in X$ resolve (35) para $\alpha = \alpha(\delta)$. Então $x = 0$.

Demonstração. A prova deste fato pode ser consultada em [3]. □

No momento de utilizar um método de regularização, é imprescindível fazer uma escolha do parâmetro α . Para os métodos com os quais vamos trabalhar, existem duas formas de realizar essa escolha, escolhas a priori e a posteriori. O parâmetro de regularização deve ser escolhido em função do nível de ruído. Caso o parâmetro não dependa do vetor de dados perturbado, a escolha se conhece como escolha a priori. Uma escolha a priori muito conhecida é a que é dada em [3, pag 36, teo 2.9]:

$$\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0.$$

2.2.3 Princípio da Discrepância de Morozov

Um método muito conhecido e utilizado para obter parâmetros de regularização a posteriori é denominado princípio da discrepância de Morozov [23]. Para os resultados que apresentaremos a seguir, assumimos que $T : X \rightarrow Y$ é um operador compacto e injetor entre espaços de Hilbert X e Y com imagem densa $T(X) \subset Y$. Novamente, consideramos a equação

$$Tx = y,$$

para $y \in Y$, usando regularização de Tikhonov dada pelos operadores de regularização

$$R_\alpha = (\alpha I + T^*T)^{-1}T^*, \text{ para } \alpha > 0,$$

os quais aproximam a inversa não limitada de T em $T(X)$. Já vimos que $x_\alpha = R_\alpha y$ existe e é o único mínimo do funcional de Tikhonov. Os resultados e os teoremas apresentados são baseados no texto que mais citaremos neste trabalho [3]. Um tratamento mais preciso e generalizado para o princípio da discrepância de Morozov pode ser consultado em [20].

Teorema 2.31. *Seja $y \in Y$, $\alpha > 0$, e x_α a única solução da equação*

$$\alpha x_\alpha + T^*Tx_\alpha = T^*y. \quad (38)$$

Então x_α depende continuamente em y e α . A função $\alpha \rightarrow \|x_\alpha\|$ é monótona decrescente e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha = 0.$$

A função $\alpha \rightarrow \|Tx_\alpha - y\|$ é monótona crescente e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Tx_\alpha = y.$$

*Se $T^*y \neq 0$, então a monotonicidade estrita vale nos dois casos.*

Demonstração. A prova pode ser feita em 4 estágios.

(i) Usando a definição de J_α e a otimalidade de x_α , concluímos que

$$\alpha \|x_\alpha\|^2 \leq J_\alpha(x_\alpha) \leq J_\alpha(0) = \|y\|^2,$$

ou seja, $\|x_\alpha\| \leq \frac{\|y\|}{\sqrt{\alpha}}$. Isto prova que $x_\alpha \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow \infty$.

(ii) Escolhemos $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e restando as equações para x_α e x_β :

$$\alpha(x_\alpha - x_\beta) + T^*T(x_\alpha - x_\beta) + (\alpha - \beta)x_\beta = 0. \quad (39)$$

Aplicando produto interno com o fator $x_\alpha - x_\beta$ obtemos

$$\alpha \|x_\alpha - x_\beta\|^2 + \|T(x_\alpha - x_\beta)\|^2 = (\beta - \alpha) \langle x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle. \quad (40)$$

Desta equação, primeiro concluímos que

$$\alpha \|x_\alpha - x_\beta\|^2 \leq |\beta - \alpha| \langle x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle \leq |\beta - \alpha| \|x_\beta\| \|x_\alpha - x_\beta\|,$$

ou seja,

$$\alpha \|x_\alpha - x_\beta\| \leq |\beta - \alpha| \|x_\beta\| \leq |\beta - \alpha| \frac{\|y\|}{\sqrt{\beta}}.$$

Isto prova a continuidade da função $\alpha \rightarrow x_\alpha$.

(iii) Agora sejam $\beta > \alpha > 0$. Da equação (40) concluímos que $\langle x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle \geq 0$. Assim $\|x_\beta\|^2 \leq \langle x_\beta, x_\alpha \rangle \leq \|x_\beta\| \|x_\alpha\|$, ou seja, $\|x_\beta\| \leq \|x_\alpha\|$, o que prova a monotonicidade da função $\alpha \rightarrow \|x_\alpha\|$.

(iv) Multiplicamos a equação normal para x_β por $x_\alpha - x_\beta$ com o produto interno. Isto equivale a

$$\beta \langle x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle + \langle Tx_\beta - y, T(x_\alpha - x_\beta) \rangle = 0.$$

Agora, seja $\alpha > \beta$. De (40), vemos que $\langle x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle \leq 0$, ou seja,

$$0 \leq \langle Tx_\beta - y, T(x_\alpha - x_\beta) \rangle = \langle Tx_\beta - y, Tx_\alpha - y \rangle - \|Tx_\beta - y\|^2.$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que $\|Tx_\beta - y\| \leq \|Tx_\alpha - y\|$.

(v) Finalmente, seja $\epsilon > 0$. Como a imagem de T é densa em Y , existe $x \in X$ com $\|Tx - y\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$. Escolha α_0 de modo que $\alpha_0 \|x\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$. Então

$$\|Tx_\alpha - y\|^2 \leq J_\alpha(x_\alpha) \leq J_\alpha(x) \leq \epsilon^2,$$

ou seja, $\|Tx_\alpha - y\| \leq \epsilon$ para todo $\alpha \leq \alpha_0$ □

Agora consideremos como se determina o parâmetro $\alpha(\delta)$ a partir do princípio da discrepância. Calcularemos $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ correspondente a solução de Tikhonov x_α^δ , obtida da equação

$$\alpha x_\alpha^\delta + T^*Tx_\alpha^\delta = T^*y^\delta,$$

isto é, o mínimo de

$$J_{\alpha}^{\delta}(x) = \|Tx - y^{\delta}\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad (41)$$

que satisfaz a equação

$$\|Tx_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta}\| = \delta, \quad (42)$$

É importante mencionar que a equação (42) é solúvel somente se $\delta \leq \|y^{\delta}\|$, pois pelo anterior teorema

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|Tx_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta}\| = \|y^{\delta}\| > \delta,$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|Tx_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta}\| = 0 < \delta. \quad (43)$$

Além disso, $\alpha \rightarrow \|Tx_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta}\|$ é contínua e estritamente crescente.

Teorema 2.32. *Seja $T : X \rightarrow Y$ linear, injetor e compacto com imagem densa em Y . Seja $Tx = y$ com $x \in X$, $y \in Y$, $y^{\delta} \in Y$ tal que $\|y - y^{\delta}\| \leq \delta < \|y^{\delta}\|$. Seja a solução de Tikhonov $x_{\alpha(\delta)}$ satisfazendo $\|Tx_{\alpha(\delta)}^{\delta} - y^{\delta}\| = \delta$ para todo $\delta \in (0, \delta_0)$. Então*

(i) $x_{\alpha(\delta)}^{\delta} \rightarrow x$ para $\delta \rightarrow 0$, quer dizer, o princípio da discrepância é admissível.

(ii) *Seja $x = T^*z \in T^*(Y)$ com $\|z\| \leq E$. Então*

$$\|x_{\alpha(\delta)}^{\delta} - x\| \leq 2\sqrt{\delta E}.$$

Demonstração. $x^{\delta} = x_{\alpha}^{\delta}$ minimiza o funcional dado por:

$$J^{(\delta)}(x) = J_{\alpha(\delta)}^{\delta}(x) = \alpha(\delta)\|x\|^2 + \|Tx - y^{\delta}\|^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha(\delta)\|x^{\delta}\|^2 + \delta^2 &= J^{(\delta)}(x^{\delta}) \leq J^{(\delta)}(x), \\ &= \alpha(\delta)\|x\|^2 + \|y - y^{\delta}\|^2, \\ &= \alpha(\delta)\|x\|^2 + \delta^2, \end{aligned}$$

e assim $\|x^{\delta}\| \leq \|x\|$ para todo $\delta > 0$. Isto dá a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|x^{\delta} - x\|^2 &= \|x^{\delta}\|^2 - 2\operatorname{Re}(x^{\delta}, x) + \|x\|^2. \\ &\leq 2[\|x\|^2 - \operatorname{Re}(x^{\delta}, x)] = 2\operatorname{Re}(x - x^{\delta}, x). \end{aligned}$$

(i) *Seja $x \in X$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. A imagem de $T^*(Y)$ é densa em X , pois T é injetor. Portanto, existe $\hat{x} = T^*z \in T^*(Y)$ tal que $\|\hat{x} - x\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Então concluímos que*

$$\begin{aligned} \|x^{\delta} - x\|^2 &\leq 2\operatorname{Re}(x - x^{\delta}, x - \hat{x}) + 2\operatorname{Re}(x - x^{\delta}, T^*z). \\ &\leq 2\|x - x^{\delta}\|\frac{\epsilon}{3} + 2\operatorname{Re}(y - Tx^{\delta}, z). \\ &\leq 2\|x - x^{\delta}\|\frac{\epsilon}{3} + 4\delta\|z\|. \end{aligned}$$

Isto pode ser escrito como $(\|x - x^\delta\| - \frac{\epsilon}{3})^2 \leq \frac{\epsilon^2}{9} + 4\delta\|z\|$. Agora, escolhendo $\delta > 0$ tal que o lado direito é menor que $\frac{4\epsilon^2}{9}$. Tomando a raiz quadrada, concluímos que $\|x - x^\delta\| \leq \epsilon$ para este δ .

(ii) Seja $x = T^*z$, $z \in Y$. Então

$$\begin{aligned} \|x^\delta - x\|^2 &\leq 2\operatorname{Re}(x - x^\delta, T^*z) = 2\operatorname{Re}(y - Tx^\delta, z). \\ &\leq 2\operatorname{Re}(y - y^\delta, z) + 2\operatorname{Re}(y^\delta - Tx^\delta, z). \\ &\leq 2\delta\|z\| + 2\delta\|z\| = 4\delta\|z\| \leq 4\delta E. \end{aligned}$$

□

Observação 2.33. A determinação de $\alpha(\delta)$ é equivalente ao problema de obter o zero da função monótona $\phi(\alpha) = \|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 - \delta^2$. Não é necessário que $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| = \delta$. Uma inclusão da forma

$$c_1\delta \leq \|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| \leq c_2\delta,$$

é suficiente para mostrar as afirmações do anterior teorema.

Observação 2.34. Calculemos a derivada da função $\alpha \rightarrow x_\alpha^\delta$, da expressão (38) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}F &= \frac{d}{d\alpha}x_\alpha^\delta = \frac{d}{d\alpha}(\alpha x_\alpha^\delta + T^*Tx_\alpha^\delta) \\ &= \frac{d}{d\alpha}(\alpha x_\alpha^\delta) + \frac{d}{d\alpha}(T^*Tx_\alpha^\delta) \\ &= \frac{d}{d\alpha}(\alpha)x_\alpha^\delta + \alpha \frac{d}{d\alpha}(x_\alpha^\delta) + T^*T\left(\frac{d}{d\alpha}(x_\alpha^\delta)\right) \\ &= x_\alpha^\delta + (\alpha I + T^*T)\frac{d}{d\alpha}(x_\alpha^\delta) \\ &= \frac{d}{d\alpha}(T^*y^\delta) = 0. \end{aligned}$$

Assim, o cálculo de $\alpha(\delta)$ pode ser obtido utilizando o método de Newton.

Teorema 2.35. *Seja $T : X \rightarrow Y$ injetor e compacto, e seja $\alpha(\delta)$ escolhido pelo princípio da discrepância. Assuma que, para todo $x \in T^*T(X)$, $y = Tx \neq 0$, todas as seqüências $\delta_n \rightarrow 0$ e $y^{\delta_n} \in Y$ com $\|y - y^{\delta_n}\| \leq \delta_n$ e $\|y^{\delta_n}\| > \delta_n$ para todo n , as soluções de Tikhonov $x^n = x_{\alpha(\delta_n)}^{\delta_n}$ convergem a x mais rápido que $\sqrt{\delta_n}$ a zero, ou seja,*

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}\|x^n - x\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Então a imagem $T(X)$ é de dimensão finita.

Demonstração. Provaremos que a escolha de $\alpha(\delta)$ pelo princípio de discrepância implica a limitação $\frac{\alpha(\delta)}{\delta}$, abreviando $x^\delta = x_{\alpha(\delta)}^\delta$, temos para $\delta \leq \frac{1}{3}\|y\|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\|y\| &= (1 - \frac{2}{3})\|y\| \leq \|y\| - 2\delta. \\ &\leq \|y - y^\delta\| + \|y^\delta\| - 2\delta \leq \|y^\delta\| - \delta. \\ &= \|y^\delta\| - \|y^\delta - Tx^\delta\|_Y \leq \|Tx^\delta\|. \\ &= \frac{1}{\alpha(\delta)} \|TT^*(y^\delta - Tx^\delta)\| \leq \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \|T\|_{B(X,Y)}^2, \end{aligned}$$

onde aplicamos T à equação (38). Assim mostramos que existem $c > 0$ com $\alpha(\delta) \leq c\delta$ para todo δ suficientemente pequeno.

Agora vamos supor que $\dim R(K) = \infty$ para obter uma contradição. Seja $\{\mu_j, x_j, y_j : j \in \mathbb{N}\}$ um sistema singular de T e vamos definir

$$x = \frac{1}{\mu_1}x_1 \text{ e } y^{\delta_n} = y_1 + \delta_n y_n \text{ com } \delta_n = \mu_n^2, \quad (45)$$

então $y = Tx = y_1$ e $\delta_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x \in R((T^*T)^{\frac{\sigma}{2}})$ para todo $\sigma > 0$ e $\|y^{\delta_n} - y\| = \delta_n < \sqrt{1 + \delta_n^2} = \|y^{\delta_n}\|$. Portanto, a hipótese pelo princípio da discrepância se satisfazem e assim se satisfaz. A solução da equação $\alpha(\delta_n)x^n + T^*Tx^n = T^*y^{\delta_n}$ é dada por

$$\begin{aligned} x^n &= \frac{\mu_1}{\alpha(\delta_n) + \mu_1^2}x_1 + \frac{\mu_n\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2}x_n. \\ \alpha(\delta_n)x^n &= \frac{\mu_1\alpha(\delta_n)}{\alpha(\delta_n) + \mu_1^2}x_1 + \frac{\mu_n\alpha(\delta_n)\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2}x_n. \\ T^*Tx^n &= \frac{\mu_1^3x_1}{\alpha(\delta_n) + \mu_1^2} + \frac{\mu_n^3\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2}x_n. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \alpha(\delta_n)x^n + T^*Tx^n &= \frac{\mu_1(\alpha(\delta_n) + \mu_1^2)}{\alpha(\delta_n) + \mu_1^2}x_1 + \frac{\mu_n\delta_n(\alpha(\delta_n) + \mu_n^2)}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2}x_n. \\ &= \mu_1x_1 + \mu_n\delta_nx_n. \\ &= T^*(y_1) + \delta_nT^*(y_n). \\ &= T^*(y_1 + \delta_ny_n). \\ &= T^*y^{\delta_n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^n - x &= \frac{\mu_1}{\alpha(\delta_n) + \mu_1^2} x_1 + \frac{\mu_n \delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2} x_n - \frac{x_1}{\mu_1} \\
&= \frac{\mu_1^2 - (\alpha(\delta_n) + \mu_1^2)}{\mu_1(\alpha(\delta_n) + \mu_1^2)} x_1 + \frac{\mu_n \delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2} x_n \\
&= \frac{-\alpha(\delta_n)}{\mu_1(\alpha(\delta_n) + \mu_1^2)} x_1 + \frac{\mu_n \delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2} x_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\|x^n - x\|}{\sqrt{\delta_n}} &= \sqrt{\frac{\alpha(\delta_n)^2}{\mu_1^2(\alpha(\delta_n) + \mu_1^2)^2} + \frac{\mu_n^2 \delta_n^2}{\delta_n(\alpha(\delta_n) + \mu_n^2)^2}} \\
&\geq \frac{\mu_n \sqrt{\delta_n}}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2} \\
&= \frac{\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \delta_n} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha(\delta_n)}{\delta_n}} \geq \frac{1}{1 + c}.
\end{aligned}$$

Isto é uma contradição pois contraria a hipótese (46) de que o quociente converge. \square

3 PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO

Neste capítulo, se estudam as noções fundamentais do problema direto e do problema inverso de reconstrução de fonte. Na primeira seção, se trata o problema direto, em que o método de separação de variáveis foi utilizado para obter a solução analítica do problema. Em seguida, se aborda o problema inverso e se descrevem as propriedades do operador compacto 'B' que aparece no lado direito da equação (4).

Um tratado pouco conhecido sobre o ISP é um livro de Victor Isakov publicado pela American Mathematical Society [27]. A versão inicial do manuscrito foi escrito em Akademgorodok, um instituto de pesquisa da URSS, entre os anos de 1984-1986. Na época, Victor Isakov decidiu emigrar da União Soviética pois foi destituído de seu cargo na Universidade Estadual de Novosibirsk pelo professor M. M. Lavrentiev e substituído pelo professor S. K. Godunov.

A versão final do tratado foi concluída durante uma visita do professor Isakov na Courant Institute em Nova York. Neste livro, é possível consultar uma revisão histórica e detalhada do ISP a partir de uma abordagem teórica.

3.1 RECONSTRUÇÃO DE FONTE E SOLUÇÃO EM FORMA DE SÉRIE

Na primeira seção deste capítulo, abordamos a primeira parte que deve ser conhecida antes de lidar com um problema inverso. Ao enfrentar problemas inversos, é fundamental conhecer as propriedades e as formas de solução do problema direto. Na literatura, esse tipo de equação é inicialmente abordado pelo bem conhecido método de separação de variáveis; consulte [14, pág. 175] para um tratamento detalhado do método.

3.1.1 Problema Direto

Considere o seguinte problema de valor inicial e de fronteira.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (46)$$

Com $f, \phi \in L^2(\Omega)$, onde Ω representa o domínio, considerando a função f juntamente com as condições de contorno na equação (46) conhecidas, o problema direto consiste

em encontrar uma função u que satisfaça essas condições, as quais são conhecidas como condições de Dirichlet, conforme descrito em (46).

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e correspondente norma em $L^2(\Omega)$. Sejam $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ os autovalores do Laplaciano negativo $(-\Delta)$ com autofunções associadas $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $b_k \in H_0^1(\Omega)$. Se sabe também que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ com $\lambda_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e que o subespaço vetorial gerado por $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma uma base ortogonal para o espaço $L^2(\Omega)$, ver [14, pp 335, teorema 13].

Denotando $\langle \phi, b_k \rangle = \phi_k$ e $\langle f, b_k \rangle = f_k$ a solução em forma de série de (46) é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k e^{-\lambda_k t} + (1 - e^{-\lambda_k t}) \lambda_k^{-1} f_k) b_k(x), \quad f_k = \langle f, b_k \rangle, \quad (47)$$

que converge em $L^2(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, no sentido generalizado ver [14].

Utilizando o método de separação de variáveis e transformando o problema em um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), o problema direto se transforma em:

$$\begin{cases} u'_k(t) + \lambda_k u_k(t) = \langle f, b_k \rangle, \\ u_k(0) = \langle \phi, b_k \rangle, \end{cases} \quad (48)$$

O sistema acima é deduzido da seguinte forma. Utilizando o produto interno na primeira equação de (46) tem-se:

$$\int_{\Omega} u_t b_k - \int_{\Omega} \Delta u \cdot b_k = \int_{\Omega} f b_k, \quad \forall t \in [0, T] \quad (49)$$

Pelo teorema B.3 obtemos:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u \cdot b_k) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot b_k \cdot \eta ds = \int_{\Omega} \Delta u_t \cdot b_k dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla b_k dx. \quad (50)$$

Então, como a segunda igualdade da anterior equação é zero, pois u se anula na fronteira, tem-se

$$- \int_{\Omega} \Delta u \cdot b_k dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla b_k dx, \quad (51)$$

pelo fato que os b_k se anulam na fronteira do domínio Ω .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t b_k dx - \int_{\Omega} \Delta u \cdot b_k dx &= \int_{\Omega} u_t b_k dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla b_k dx \\ &= \int_{\Omega} u_t b_k dx - \int_{\Omega} u \Delta b_k dx = \int_{\Omega} f b_k dx. \end{aligned}$$

Agora, utilizando novamente o teorema B.3

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u \cdot \nabla b_k) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nabla b_k \eta ds = \int_{\Omega} u \Delta b_k dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla b_k dx. \quad (52)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla b_k dx = - \int_{\Omega} u \Delta b_k dx. \quad (53)$$

Utilizando as expressões que aparecem em (51), (52) e (53):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t b_k dx - \int_{\Omega} u \Delta b_k dx &= \int_{\Omega} u_t b_k dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla b_k dx = \int_{\Omega} f b_k dx \\ \int_{\Omega} u_t b_k dx - \int_{\Omega} u \Delta b_k dx &= \int_{\Omega} f b_k dx \\ \int_{\Omega} u_t b_k dx - \int_{\Omega} u \lambda_k b_k dx &= \int_{\Omega} f b_k dx \\ \int_{\Omega} \frac{du}{dt} b_k dx - \int_{\Omega} u \lambda_k b_k dx &= \int_{\Omega} f b_k dx. \end{aligned}$$

Pelo teorema de derivação sob o sinal da integral obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{du}{dt} b_k dx - \int_{\Omega} u \lambda_k b_k dx &= \int_{\Omega} f b_k dx. \\ \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} u b_k dx \right] - \lambda_k \int_{\Omega} u b_k dx &= \int_{\Omega} f b_k dx. \end{aligned}$$

Finalmente, denotando por $u_k(t) = \int_{\Omega} u b_k dx = \langle u, b_k \rangle$ e $f_k = \int_{\Omega} f b_k dx = \langle f, b_k \rangle$, $u_k(0) = \int_{\Omega} \phi b_k dx = \langle \phi, b_k \rangle$, se deduz o sistema de EDO's (48).

Para k fixo a EDO dada por (48) tem por solução

$$\begin{aligned} u_k(t) &= e^{-\int_0^t \lambda_k dt} \left[u_k(0) + \int_0^t \langle f, b_k \rangle e^{\int_0^s \lambda_k dt} ds \right] \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_k dt} \left[\langle \phi, b_k \rangle + \langle f, b_k \rangle \frac{1}{\lambda_k} (e^{\lambda_k t} - 1) \right] \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_k dt} \left[\langle \phi, b_k \rangle + \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} (e^{\lambda_k t} - 1) \right] \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_k dt} \left[\langle \phi, b_k \rangle + \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} e^{\lambda_k t} - \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} \right]. \end{aligned}$$

Pelo princípio de superposição para EDP's lineares, a solução do problema direto (46) vem dada pela seguinte expansão em série:

$$u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left(\langle f, b_k \rangle \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k} + c_k \right), \quad c_k = \langle \phi, b_k \rangle - \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k}. \quad (54)$$

Aplicando a condição final de tempo $u(\cdot, T) = g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_k, b_k \rangle b_k$, onde $g \in L^2(\Omega)$ a solução no tempo final T :

$$u(\cdot, T) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} \langle f, b_k \rangle + e^{-\lambda_k T} \langle \phi, b_k \rangle \right) b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, b_k \rangle b_k = g, \quad (55)$$

que dá a expressão de fonte exata dada por

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, b_k \rangle b_k, \text{ com } \langle f, b_k \rangle = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T}} (\langle g, b_k \rangle - e^{-\lambda_k T} \langle \phi, b_k \rangle). \quad (56)$$

A equação (56) é instável para reconstruir f a partir de uma perturbação $g_\delta \in L^2(\Omega)$ pois o ruído no coeficiente $\langle g_\delta, b_k \rangle$ tende a aumentar quando $k \rightarrow \infty$. Veremos que esse fato pode ser contornado usando técnicas de regularização.

3.1.2 Problema Inverso

Dadas $\phi, g \in L^2(\Omega)$ que satisfaz $g = u(\cdot, T)$, pretendemos recuperar o termo fonte $f \in L^2(\Omega)$ da equação dada por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \\ u(\cdot, T) = g & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (57)$$

Assim, desejamos recuperar o termo de fonte desconhecido f da condição de tempo final $u(\cdot, T)$.

Com isto claro, define-se o operador ver [5]: $B : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, como:

$$B(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k, \quad f_k = \langle f, b_k \rangle. \quad (58)$$

Neste caso, são utilizados como dados de entrada as medidas no tempo final da solução, ou seja, $u(\cdot, T)$, a solução no último passo de tempo.

O operador B satisfaz $B(f) = u(\cdot, T) - \phi$, onde

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k T} b_k(x). \quad (59)$$

Teorema 3.1. *O operador B está bem definido, é linear, compacto, auto-adjunto, positivo e injetor com autovalores dados por $\sigma_k = \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k}$.*

Demonstração. (i) B está bem definido: Seja μ a medida de Lebesgue sobre Ω e sejam $f, g \in L^2(\Omega)$ de modo que $f = g$ em μ quase todo Ω , então existe A na σ -álgebra de Lebesgue sobre Ω tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin A$. Logo,

$$\begin{aligned} B(f) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} g_k b_k(x) \\ &= B(g), \text{ para } x \notin A. \end{aligned}$$

Assim, $B(f) = B(g)$ em μ quase todo Ω . Portanto, da definição do espaço $L^2(\Omega)$, $B(f) = B(g)$ em $L^2(\Omega)$ e B está bem definido.

(ii) B é linear: Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} B(f + g) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} (f_k + g_k) b_k(x). \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} g_k b_k(x). \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} g_k b_k(x). \\ &= B(f) + B(g). \end{aligned}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} B(\alpha f) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} \alpha f_k b_k(x). \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x). \\ &= \alpha B(f). \end{aligned}$$

(iii) B é compacto: Definamos a seguinte sequência de operadores de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$:

$$B_n(f) = \sum_{k=1}^n (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x).$$

Provaremos que (B_n) é uma sequência de operadores compactos que converge na norma de operadores a B . Seja n fixo e arbitrário. Então pela desigualdade triangular

e de Cauchy-Schwarz temos que:

$$\begin{aligned} \|B_n(f)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{|1 - e^{-\lambda_k T}|}{|\lambda_k|} |f_k| \|b_k(x)\| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{|1 - e^{-\lambda_k T}|}{|\lambda_k|} \right) \|f\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} \right) \|f\|. \end{aligned}$$

Como $k^2 \leq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Assim, $\|B_n(f)\| \leq \frac{\pi^2}{3} \|f\|$. Como n é arbitrário, a sequência de operadores (B_n) é limitada. A sequência de operadores é linear e a prova deste fato vem de utilizar (ii) em B_n . Por outro lado, dado que $R(B_n) = \text{span} \{b_1, \dots, b_n\}$, $\dim B_n(L^2(\Omega)) < \infty$ e pelo teorema 2.4 o operador B_n é compacto. Portanto, a sequência (B_n) é uma sequência de operadores compactos. Finalmente, na norma de operador temos que:

$$\begin{aligned} \|B_n - B\| &= \sup_{\{f \in L^2(\Omega), \|f\|=1\}} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} f_k b_k(x) \right\| \\ &\leq \sup_{\{f \in L^2(\Omega), \|f\|=1\}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} \right| \|f\| \|b_k\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $k, \lambda_k \rightarrow \infty$ e $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} \rightarrow 0$. Logo, $\|B_n - B\| \rightarrow 0$. Portanto, pelo Teorema [2, 8.1-5, pág 408] o operador B é compacto.

(iv) Os autovalores de B são dados por $\sigma_k = \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k}$ e B é autoadjunto.

Provaremos agora que os autovalores associados ao operador B vem dados por $\sigma_k = (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} > 0$, para $k = 1, 2, \dots$.

Seja $f \in L^2(\Omega)$, aplicando B a f ,

$$B(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k f_k b_k,$$

dado que f pode ser descrita como

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k b_k,$$

tem-se que $\langle B(f), b_k \rangle = \sigma_k \langle f, b_k \rangle$ para cada $k = 1, 2, \dots$ e assim utilizando as propriedades do produto interno:

$$\langle B(f), b_k \rangle - \sigma_k \langle f, b_k \rangle = \langle B(f) - \sigma_k f, b_k \rangle = 0 \text{ para cada } k = 1, 2, \dots$$

Como $b_k \neq 0$ para cada $k = 1, 2, \dots$ tem-se que $B(f) - \sigma_k f = 0$ para cada $k = 1, 2, \dots$. Portanto, $B(f) = \sigma_k f$ para cada $k = 1, 2, \dots$ e os autovalores de B são os σ'_k s.

B é auto-adjunto: Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$. Como $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal para $L^2(\Omega)$, as funções f e g podem ser expressas como:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k b_k,$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k b_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle B(f), g \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), \sum_{j=1}^{\infty} g_j b_j(x) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), \sum_{j=1}^{\infty} g_j b_j(x) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), g_k b_k(x) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k g_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_k (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} g_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k b_k(x), (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} g_k b_k(x) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f_k b_k(x), \sum_{j=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_j T}) \lambda_j^{-1} g_j b_j(x) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} f_k b_k(x), \sum_{j=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_j T}) \lambda_j^{-1} g_j b_j(x) \right\rangle \\
&= \langle f, B(g) \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, B é auto-adjunto. Mostremos que o operador B é positivo. Seja $f \in L^2(\Omega)$, então:

$$\begin{aligned}
\langle B(f), f \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), \sum_{j=1}^{\infty} f_j b_j(x) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), \sum_{j=1}^{\infty} f_j b_j(x) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k b_k(x), f_k b_k(x) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} f_k^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

(v) B é injetor: Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$, suponhamos que $B(f) = B(g)$, então $B(f) - B(g) = 0$. Como B é linear tem-se que $B(f - g) = 0$, quer dizer $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1} (f - g)_k b_k(x) = 0$. Assim, dado que $(1 - e^{-\lambda_k T}) \neq 0$ dado que $\lambda_k \neq 0$ para todo k e $-\lambda_k T \neq 0$, $e^{-\lambda_k T} \neq 1$. $b_k \neq 0$ então $(f - g)_k = 0$ para todo k , isto é $\langle f - g, b_k \rangle = 0$ para todo k . Como $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal então $f - g \in \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}^{\perp}$ e $f - g = 0$. Portanto, $f = g$ e B é injetor. \square

A partir deste ponto, concentraremos nossa discussão em métodos para recuperar a função-fonte f a partir da condição final de tempo g .

Notamos que para $g \in L^2(\Omega)$:

$$u(\cdot, T) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\phi_k e^{-\lambda_k T} + \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} f_k \right) b_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k b_k(x) = g, \quad (60)$$

onde $g_k = \langle g, b_k \rangle$. Dado que $\lambda_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\phi_k^2 e^{-2\lambda_k T}}{\sigma_k^2} = \frac{\phi_k^2 e^{-2\lambda_k T} \lambda_k^2}{(1 - e^{-\lambda_k T})^2} \leq \phi_k^2,$$

para k suficientemente grande $k \in \mathbb{N}$, então $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k^2 e^{-2\lambda_k T}}{\sigma_k^2} < \infty$ e o Teorema 2.9 implicam que $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k T} b_k(x) \in R(B)$ (a imagem do operador B).

A recuperação do termo fonte $f \in L^2(\Omega)$ a partir da condição adicional $g \in L^2(\Omega)$ se reduz a resolver a equação de operadores dada por:

$$Bf = q, \quad q = g - \phi. \quad (61)$$

Tem-se que $g \in R(B)$, tem única solução sempre que $q \in R(B)$ e B seja um operador positivo. Da equação (60), aplicando o produto interno, o coeficiente de Fourier f_k da solução exata f vem dado por:

$$f_k = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T}} (-\phi_k e^{-\lambda_k T} + g_k),$$

e assim

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k b_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T}} (-\phi_k e^{-\lambda_k T} + g_k) b_k(x),$$

o que implica que o termo fonte pode ser expresso como:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} (-\phi_k e^{-\lambda_k T} + g_k) b_k(x), \quad (62)$$

onde $g_k = \langle g, b_k \rangle$ e $\sigma_k = (1 - e^{-\lambda_k T}) \lambda_k^{-1}$. É importante notar que ao ser o operador B compacto 3.1, o operador $B^{-1} : R(B) \rightarrow L^2(\Omega)$ é não limitado. Assim, a equação linear (61) é mal posta. Pequenos erros nos dados de entrada g podem levar a perturbações na solução computada utilizando a solução explícita dada em (62). Diferentes técnicas de regularização para transformar o problema mal posto em um problema bem posto tem que ser incorporadas.

4 MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE

Neste capítulo, abordaremos métodos de reconstrução de fonte para o ISP. Na primeira seção, apresentamos a dedução dos métodos QBVM [16, 36, 58], na segunda seção se apresenta o método TSVE proposto em [6], na terceira seção se estudará o método de regularização baseado em filtros para, posteriormente, na quarta seção, apresentar a análise de convergência dos quatro métodos. A análise de convergência é baseada em [5, 6].

4.1 MÉTODOS QBVM, MQBVM E PQBVM

Este método envolve a modificação da condição final de tempo dada por $u(\cdot, T)$ para uma condição que transforma o problema mal posto em um problema bem posto.

Sejam $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$) um domínio aberto e limitado com fronteira contínua por partes $\partial\Omega$. Consideremos o problema inverso de fonte de reconstruir o termo não conhecido f dependente do espaço, e tal que $f \in L^2(\Omega)$, a partir da condição final $g(\cdot, T) = u(\cdot, T) \in H_0^1(\Omega)$, baseado na seguinte equação não-homogênea

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \\ u(\cdot, T) = g & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (63)$$

Aqui temos que $\phi \in H_0^1(\Omega)$ é uma condição inicial e a condição final g é desconhecida exatamente, e somente fica disponível como uma medida de ruído $g_\delta \in L^2(\Omega)$, que se assume satisfazer $\|g - g_\delta\|_2 \leq \delta$, com um nível de ruído $\delta > 0$. Isso gera um problema mal posto que requer técnicas de regularização efetiva.

O método QBVM [17] consiste em trocar a condição final $u(\cdot, T) = g$ por $u(\cdot, T) + \beta f(\cdot) = g_\delta$, o MQBVM [58] de trocar $u(\cdot, T) = g$ por $u(\cdot, T) - \beta \Delta f(\cdot) = g_\delta$ e o PQBVM [16] de trocar $u(\cdot, T) = g$ por $u(\cdot, T) + \beta(\alpha f(\cdot) - \Delta f(\cdot)) = g_\delta$, onde α, β são parâmetros de regularização.

Para nosso caso de estudo, vamos admitir que nosso domínio Ω , no caso $1D$, é um intervalo aberto e no caso $2D$ é um retângulo aberto.

4.1.1 Dedução Método QBVM

Sabemos de [16, pag 12] que a solução analítica da equação (63) vem dada por

$$u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left(\langle f, b_k \rangle \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k} + \langle \phi, b_k \rangle - \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} \right) b_k. \quad (64)$$

Como a condição final da equação (63) para o QBVM vem dada por $u(\cdot, T) + \beta f(\cdot) = g_\delta$, substituindo no tempo final T e utilizando as expressões em série das funções

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, b_k \rangle b_k,$$

$$e$$

$$g_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} u(\cdot, T) + \beta f(\cdot) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k T} \left(\langle f, b_k \rangle \frac{e^{\lambda_k T}}{\lambda_k} + \langle \phi, b_k \rangle - \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} \right) b_k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta \langle f, b_k \rangle b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} + \beta \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} + \beta \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T} + \beta \lambda_k}{\lambda_k} \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k. \end{aligned}$$

Aplicando produto interno na equação anterior com o elemento b_k :

$$\begin{aligned} \langle u(\cdot, T) + \beta f(\cdot), b_k \rangle &= \langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \\ &= \langle g_\delta, b_k \rangle. \end{aligned}$$

O que mostra que a expressão para o termo fonte vem dada por:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, b_k \rangle b_k, \text{ com } \langle f, b_k \rangle = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T} + \beta \lambda_k} (\langle g_\delta, b_k \rangle - \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T}). \quad (65)$$

4.1.2 Dedução dos Métodos MQBVM e PQBVM

Para deduzir o método a partir da solução geral dada em (64) e que a condição final da equação (63) para o PQBVM é $u(\cdot, T) + \beta(\alpha f(\cdot) - \Delta f(\cdot)) = g_\delta$, com $f \in L^2(\Omega)$ utilizamos as soluções em série das funções $f(\cdot)$, $\Delta f(\cdot)$ e g_δ , lembramos que $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para o espaço $L^2(\Omega)$. Sabemos que:

$$\begin{aligned}\beta \alpha f(\cdot) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta \alpha \langle f, b_k \rangle b_k \\ \beta \Delta f(\cdot) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta \langle \Delta f, b_k \rangle b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta \lambda_k \langle f, b_k \rangle b_k \\ g_\delta &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k.\end{aligned}$$

Assim se tem:

$$\begin{aligned}u(\cdot, T) + \beta(\alpha f(\cdot) - \Delta f(\cdot)) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k T} \left(\langle f, b_k \rangle \frac{e^{\lambda_k T}}{\lambda_k} + \langle \phi, b_k \rangle - \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} \right) b_k \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta \alpha \langle f, b_k \rangle b_k - \sum_{k=1}^{\infty} \beta \langle \Delta f, b_k \rangle b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k T} \left(\langle f, b_k \rangle \frac{e^{\lambda_k T}}{\lambda_k} + \langle \phi, b_k \rangle - \frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} \right) b_k \\ &+ \beta \alpha \langle f, b_k \rangle b_k - \beta \langle \Delta f, b_k \rangle b_k.\end{aligned}$$

Observação 4.1. O método PQBVM proposto em [16] procura construir sistemas lineares regularizados com uma estrutura que permita acelerar a busca do termo fonte conservando as taxas de convergência do conhecido método QBVM proposto em [17].

Aplicando as expressões para os termos fonte de $\beta \alpha f(\cdot)$, $\beta \Delta f(\cdot)$ e g_δ na última equação, faz que:

$$u(\cdot, T) + \beta(\alpha f(\cdot) - \Delta f(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\langle f, b_k \rangle}{\lambda_k} + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} - \frac{\langle f, b_k \rangle e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} + \beta \alpha \langle f, b_k \rangle - \beta \langle \Delta f, b_k \rangle \right] b_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} + \beta \alpha \right) - \beta \langle \Delta f, b_k \rangle + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right] b_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T} + \lambda_k \beta \alpha}{\lambda_k} \right) - \beta \langle \Delta f, b_k \rangle + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right] b_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T} + \lambda_k \beta \alpha}{\lambda_k} \right) - \beta \lambda_k \langle f, b_k \rangle + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right] b_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T} + \lambda_k \beta \alpha}{\lambda_k} - \beta \lambda_k \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right] b_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T} + \lambda_k \beta \alpha - \lambda_k^2 \beta}{\lambda_k} \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} \right] b_k.
\end{aligned}$$

Aplicando o produto interno:

$$\langle f, b_k \rangle \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T} + \lambda_k \beta \alpha - \lambda_k^2 \beta}{\lambda_k} \right) + \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T} = \langle g_\delta, b_k \rangle.$$

O termo fonte vem dado por $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, b_k \rangle b_k$, onde

$$\langle f, b_k \rangle = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T} + \lambda_k \beta \alpha - \lambda_k^2 \beta} (\langle g_\delta, b_k \rangle - \langle \phi, b_k \rangle e^{-\lambda_k T}). \quad (66)$$

O método MQBVM [58] se deduz de forma análoga. O MQBVM vem de substituir $\alpha = 0$ na equação anterior.

Observação 4.2. O método MQBVM [58] foi proposto no contexto de derivadas de ordem fracionária; alguns trabalhos do ISP com a derivada no caso fracionário podem ser encontrados em [56, 58–60, 62, 80–83].

4.2 MÉTODO TSVE

Na seção anterior deduzimos os três métodos citados em [16]. Nesta seção abordamos o método de reconstrução de fonte utilizando o método da expansão em valores singulares truncada, TSVE. Sabe-se que este método é útil quando o sistema singular do operador é disponível. Neste caso, dado que o operador B citado na seção anterior é compacto e auto-adjunto, como o sistema singular do operador B vem dado por $\{\sigma_k, b_k, b_k\}$ para $k = 1, 2, \dots$, a solução construída pelo método TSVE é expressa como:

$$f_N^\delta(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\langle b_k, g_\delta \rangle}{\sigma_k} b_k(x),$$

onde N funciona como parâmetro de regularização. O princípio da discrepância encontra o primeiro $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|g_\delta - B(f_N^\delta)\| \leq \tau\delta,$$

para algum $\tau \geq 1$. Na seguinte seção, se discutirá o método de regularização baseado em filtros.

4.3 MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO BASEADO EM FILTROS

Na presente seção, se revisará uma forma de construir soluções regularizadas utilizando sistemas singulares de acordo com [3]. Seja $B : F \rightarrow G$ um operador linear compacto entre espaços de Hilbert F, G , onde a imagem de B , $R(B)$ é não fechada, e com sistema singular dado por $\{\sigma_k, \mu_k, b_k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Considere a equação de operador linear dado por:

$$Bf = g, \quad g \in R(B), \quad (67)$$

para o qual, pelo teorema 2.9,

$$f^\dagger = B^\dagger g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \langle g, b_k \rangle \mu_k, \quad (68)$$

é a solução de norma mínima do problema de mínimos quadrados $\min \|Bf - g\|$ onde B^\dagger é a pseudo inversa de Moore-Penrose de B . Claramente, B^\dagger coincide com a inversa ordinária de B , B^{-1} em $R(B)$ se o operador B é injetor ver [20]. Se, em vez de g , somente dados com ruído g_δ são disponíveis, de modo que

$$\|g - g_\delta\| \leq \delta, \quad (69)$$

para algum $\delta > 0$, qualquer tentativa de avaliar $f^\delta = B^\dagger g^\delta$ como em (68),

$$f^\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \langle g_\delta, b_k \rangle \mu_k, \quad (70)$$

acarreta em problemas de estabilidade. Métodos de regularização baseados em filtros constituem aproximações estáveis a f^\dagger filtrando os fatores $\frac{1}{\sigma_k}$ em f^δ , utilizando aproximações da forma

$$f_\alpha^\delta = \sum_{k=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_k) \frac{1}{\sigma_k} \langle g_\delta, b_k \rangle \mu_k, \quad (71)$$

onde $F_\alpha : (0, \|B\|] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma família de funções parametrizadas por um parâmetro de regularização $\alpha > 0$, conhecido como fator de filtro ou função de filtro, satisfazendo as propriedades (i), (ii), (iii) do teorema 2.18. A vantagem da abordagem por filtros de regularização é que eles facilitam a análise e permitem deduzir taxas de convergência.

Exemplos de métodos de regularização baseada em filtros (71) com funções de filtros satisfazendo as condições do teorema 2.18 incluem: regularização de Tikhonov, regularização de Lavrentiev, método de corte espectral (TSVE) e método de Showalter. A tabela seguinte mostra os métodos de regularização baseados em filtros.

Método	$F_\alpha(\sigma)$
Tikhonov	$\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha}$
Lavrentiev	$\frac{\sigma}{\sigma + \alpha}$
TSVE	$\sigma^2 \chi_{[\alpha, \infty)}$, χ a função característica
Showalter	$1 - \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{\alpha}}}{\sigma^2}$

Com escolhas a priori ou a posteriori do parâmetro de regularização α , sabe-se que $f_\alpha^\delta \rightarrow f^\dagger$ quando $\delta \rightarrow 0$ ver [3, 20], embora a convergência $f_\alpha^\delta \rightarrow f^\dagger$ quando $\delta \rightarrow 0$ possa ser um pouco lenta. Porém, a taxa de convergência pode melhorar quando a solução exata satisfaz alguma condição de fonte. Em particular, quando a solução exata satisfazer a conhecida condição de fonte de Hölder:

$$f^\dagger = B^\dagger g \in R((B^* B)^\mu), \quad \mu > 0, \quad (72)$$

sabe se que $\|f^\dagger - f\| = O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$, $0 < \mu < \mu_0 - \frac{1}{2}$, onde μ_0 denota a qualificação do método.

Quando fizemos a dedução do método e chegamos na equação (66), note que o termo $f(\cdot)$ foi multiplicado por $\beta\alpha$. Neste caso, chegamos em outra expressão distinta que terá nossa preferência por facilitar a análise. Ela é deduzida de forma análoga ao que fizemos antes. Consideramos o QBVM em um contexto geral onde $f_{\alpha,\beta}^\delta$ são aproximações para a função f , com $f_{\alpha,\beta}$ sendo definida como a solução do modelo regularizado

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(\cdot, T) + \alpha f(\cdot) - \beta \Delta f(\cdot) = g_\delta & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (73)$$

Se $\beta = 0$ obtemos o QBVM, o MQBVM se $\alpha = 0$ e o PQBVM se $\alpha, \beta \neq 0$, sabemos da dedução anterior dos métodos que a solução em forma de série pode ser expressa

como

$$f_{\alpha,\beta}^{\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T} + \alpha \lambda_k + \lambda_k^2 \beta} \langle g_{\delta}, b_k \rangle b_k(x), \quad (74)$$

e que $f_{\alpha,\beta}^{\delta} \rightarrow f$ quando $\alpha, \beta \rightarrow 0$, com a fonte exata f dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T}} \langle g, b_k \rangle b_k(x), \quad (75)$$

Assim, α, β tem o papel de parâmetros de regularização. Nas seguintes seções, se discutirá o análise de convergência da equação anterior onde a função ϕ é a função nula, se estudarão estimativas de erro do termo $\|f_{\alpha} - f_{\alpha,\beta}^{\delta}\|$ para escolhas adequadas do parâmetro de regularização.

4.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA OS MÉTODOS QBVM E TSVE

Nesta seção, se estudará a análise de convergência para os quatro métodos apresentados na seção anterior. A análise é baseada no artigo de [5] e se estabelecem taxas de convergência para uma escolha a priori para os métodos de valor quase-limite e uma taxa de convergência a posteriori baseada no princípio da discrepância de Morozov para o método TSVE.

4.4.1 Análise de convergência do método QBVM

No presente caso, $\beta = 0$ e $\sigma_k = \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k}$, onde T denota o tempo final. Como solução regularizada é dada por:

$$\begin{aligned} f_{\alpha,0}^{\delta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T} + \alpha \lambda_k} \langle g_{\delta}, b_k \rangle b_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} + \alpha \right)} \langle g_{\delta}, b_k \rangle b_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{\sigma_k + \alpha} \frac{\langle g_{\delta}, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k + \alpha} \langle g_{\delta}, b_k \rangle b_k(x). \end{aligned}$$

Lembramos que $F_{\alpha}^{Lav}(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma + \alpha}$ é o filtro de regularização de Lavrentiev, assim o QBVM é caracterizado por filtro de Lavrentiev [5].

Observação 4.3. Também se sabe que, do Teorema 2.27, a taxa de convergência de $f_{\alpha,0}$ é $O(\delta^{1/2})$ e que a anterior taxa não pode ser melhorada para um operador B com imagem não fechada, ver [75]. Uma vantagem do método anterior é que independentemente de como foi escolhido o parâmetro de regularização, seja de forma a priori ou a posteriori, $\|f - f_{\alpha,0}\| \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ [5].

4.4.2 Análise de convergência do método MQBVM

Quando $\alpha = 0$ em (74) podemos obter a solução aproximada dada por:

$$\begin{aligned}
f_{0,\beta}^\delta(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T} + \beta \lambda_k^2} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\lambda_k} + \beta \lambda_k} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k + \beta \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{\sigma_k}} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})}{\sigma_k}} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} \frac{\sigma_k}{\sigma_k} \langle g_\delta, b_k \rangle b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} \frac{\langle g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} F_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x).
\end{aligned}$$

Com fator de filtro dado por:

$$F_\beta(\sigma_k) = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})}. \quad (76)$$

Note que $2ab \leq a^2 + b^2$ implica $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Tomando $a = \sigma_k$ e $b = \sqrt{\beta(1 - e^{-\lambda_k T})}$ obtemos:

$$\begin{aligned} 2\sigma_k \sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_k T}} &\leq \sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T}), \\ 2\sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_k T}} &\leq \frac{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})}{\sigma_k}, \end{aligned}$$

então isolando $2\sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_k T}}$:

$$\frac{F_\beta(\sigma_k)}{\sigma_k} = \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} \leq \frac{1}{2\sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_1 T}}} \quad (77)$$

Proposição 4.4. Se escolhermos $c(\beta) = \frac{C_1}{\sqrt{\beta}}$ e $C_1 = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-\lambda_1 T}}}$, ficam satisfeitas as hipótese do Teorema 2.18 para o filtro dado na equação (76).

Demonstração. Verifiquemos as condições (i) – (iii).

(i) Seja $\beta > 0$ e $0 < \sigma \leq \|B\|$, então

$$\begin{aligned} |F_\beta(\sigma)| &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} = \frac{1}{1 + \frac{\beta(1 - e^{-\lambda_k T})}{\sigma^2}} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

(ii) Seja $c(\beta) = \frac{1}{2\sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_1 T}}}$

$$\begin{aligned} F_\beta(\sigma) &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} \leq \frac{\sigma}{2\sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_k T}}} \\ &\leq \frac{\sigma}{2\sqrt{\beta} \sqrt{1 - e^{-\lambda_1 T}}} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(\sigma) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\beta(1 - e^{-\lambda_k T})}{\sigma^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Observação 4.5. De acordo com [5, pag 7], para uma equação de operador geral $Tf = g_\delta$, onde o operador T não tem imagem fechada $R(T)$, sob a hipótese que a solução exata satisfaz a condição de fonte

$$f^\dagger = T^\dagger g \in R(T^*T)^\mu, \mu > 0, \quad (78)$$

se sabe de [20] e [19] que

$$\|f^\dagger - f_\alpha^\delta\| = O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), 0 < \mu < \mu_0 - 1/2, \quad (79)$$

onde o índice μ_0 denota a qualificação do método de regularização.

Para a análise a seguir, vamos introduzir o termo dado por $r_\beta(\sigma_k) = 1 - F_\beta(\sigma_k)$. A solução regularizada para o dado exato vem dada por

$$f_{0,\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} F_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k. \quad (80)$$

Decompondo o erro e_β^δ como a soma do erro de regularização com o erro devido ao ruído, obtemos

$$e_\beta^\delta = (f - f_{0,\beta}) + (f_{0,\beta} - f_{0,\beta}^\delta) = e_{\beta,r} + e_{\beta,n}, \quad (81)$$

sendo

$$\begin{aligned} e_{\beta,r} = f - f_{0,\beta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} F_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [1 - F_\beta(\sigma_k)] \frac{\langle g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k(x). \end{aligned}$$

Denotando $r_\beta(\sigma_k)$ como sendo $r_\beta(\sigma_k) = 1 - F_\beta(\sigma_k)$:

$$e_{\beta,r} = \sum_{k=1}^{\infty} r_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k. \quad (82)$$

Ao mesmo tempo:

$$e_{\beta,n} = f_{0,\beta} - f_{0,\beta}^\delta. \quad (83)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} F_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k. \quad (84)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F_\beta(\sigma_k) \frac{\langle g - g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k. \quad (85)$$

A condição de fonte $f \in R(B^{2\mu})$ é equivalente a [20]:

$$\frac{\langle g, b_k \rangle}{\sigma_k} = \sigma_k^{2\mu} \langle z, b_k \rangle, \text{ para todo } k, \quad (86)$$

com algum $z \in L^2(\Omega)$ tal que $B^{2\mu}z = f$. Então o erro de regularização satisfaz

$$\|e_{\beta,r}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (r_\beta(\sigma_k))^2 \sigma_k^{4\mu} |\langle z, b_k \rangle|^2. \quad (87)$$

Mas como

$$r_{\beta}(\sigma_k) = 1 - F_{\beta}(\sigma_k) \leq 1 - F_{\beta}^{Tik}(\sigma_k) = \frac{\beta}{\sigma_k^2 + \beta}, \quad (88)$$

aparece a seguinte desigualdade

$$r_{\beta}(\sigma_k)\sigma_k^{2\mu} \leq \frac{\sigma_k^{2\mu}\beta}{\sigma_k^2 + \beta}. \quad (89)$$

Para limitar o erro de regularização, temos que limitar a função

$$h_{\mu}(\sigma) = \frac{\sigma^{2\mu}\beta}{\sigma^2 + \beta}, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_1. \quad (90)$$

Proposição 4.6. A função definida na equação (90) atinge máximo em $\sigma_0 = \sqrt{\mu\beta/(1-\mu)}$ para $0 < \mu < 1$ e em $\sigma = \sigma_1$ quando $\mu \geq 1$.

Demonstração. $h_{\mu}(\sigma) = \frac{\sigma^{2\mu}\beta}{\sigma^2 + \beta}$, derivando tem-se:

$$\begin{aligned} h'_{\mu}(\sigma) &= \frac{2\mu\sigma^{2\mu-1}\beta(\sigma^2 + \beta) - 2\beta\sigma^{2\mu+1}}{(\sigma^2 + \beta)^2} \\ &= \frac{2\mu\sigma^{2\mu+1}\beta + 2\mu\sigma^{2\mu-1}\beta^2 - 2\beta\sigma^{2\mu+1}}{(\sigma^2 + \beta)^2}. \end{aligned}$$

A expressão anterior tem que ser igual a 0 para encontrar os pontos críticos, ou seja o numerador deve anular:

$$\begin{aligned} 2\mu\sigma^{2\mu+1}\beta + 2\mu\sigma^{2\mu-1}\beta^2 - 2\beta\sigma^{2\mu+1} &= 0 \\ \mu\sigma^{2\mu+1}\beta + \mu\sigma^{2\mu-1}\beta^2 - \beta\sigma^{2\mu+1} &= 0 \\ \mu\sigma^{2\mu+1} + \mu\sigma^{2\mu-1}\beta - \sigma^{2\mu+1} &= 0 \\ (\mu - 1)\sigma^{2\mu+1} + \beta\mu\sigma^{2\mu-1} &= 0 \\ \beta\mu &= (1 - \mu)\sigma^2. \end{aligned}$$

Finalmente as raízes do polinômio $(\mu-1)\sigma^{2\mu+1} + \beta\mu\sigma^{2\mu-1}$ são $\sigma = \pm\sqrt{\frac{\beta\mu}{1-\mu}}$. Pelo critério da segunda derivada aplicado em a função $h_{\mu}(\sigma)$, o ponto de máximo é $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\beta\mu}{1-\mu}}$, pois $h''_{\mu}(\sigma_0) = \frac{2\beta\sigma_0^{2\mu-2}(\beta^2\mu(2\mu-1) + \beta(4\mu^2 - 6\mu - 1) + (2\mu^2 - 5\mu + 3)\sigma_0^3)}{(\beta + \mu^2)^3} < 0$. Quando $\mu_1 \geq 1$ a função $h_{\mu}(\sigma)$ é estritamente crescente e como os valores singulares são crescentes e o maior deles é σ_1 a função atinge máximo em σ_1 quando $\mu \geq 1$. \square

Agora substituindo σ_0 :

$$h_{\mu}(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^{2\mu}\beta}{\sigma_0^2 + \beta} = \frac{\frac{\beta^{\mu}\mu^{\mu}\beta}{(1-\mu)^{\mu}}}{\frac{\beta\mu}{1-\mu} + \beta} = \frac{\frac{\beta^{\mu}\mu^{\mu}\beta}{(1-\mu)^{\mu}}}{\frac{\beta}{1-\mu}} = \frac{\beta^{\mu}\mu^{\mu}}{(1-\mu)^{1-\mu}}.$$

Assim, $h_\mu(\sigma) \leq C\beta^\mu$, onde $C = \frac{\mu^\mu}{(1-\mu)^{1-\mu}}$. Para $\mu \geq 1$, $h_\mu(\sigma)$ é estritamente crescente, pois a segunda derivada da função $h_\mu(\sigma)$ é dada por

$$h_\mu''(\sigma) = \frac{2\beta\sigma^{2\mu-2}(\beta^2\mu(2\mu-1)+\beta(4\mu^2-6\mu-1)+(2\mu^2-5\mu+3)\sigma^3)}{(\beta+\mu^2)^3} \geq 0 \text{ para } \mu \geq 1. \text{ Agora note-}$$

mos que $h_\mu(\sigma_1) = \frac{\sigma_1^{2\mu}\beta}{\sigma_1^2+\beta} \leq \frac{\sigma_1^{2\mu}}{\sigma_1^2}\beta$ dado que $\frac{1}{\sigma_1^2+\beta} \leq \frac{1}{\sigma_1^2}$, então $h_\mu(\sigma_1) \leq \sigma_1^{2\mu-2}\beta$.

Conseqüentemente, para C_2 apropriado, o erro de regularização na norma $L^2(\Omega)$ pode ser limitado por

$$\|e_{\beta,r}\| \leq C_2\beta^\mu\|z\|, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (91)$$

Para a norma do erro devido ao ruído,

$$\|e_{\beta,n}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{F_\beta(\sigma_k)}{\sigma_k} \right]^2 |\langle g - g_\delta, b_k \rangle|^2, \quad (92)$$

usando (77) temos

$$\|e_{\beta,n}\| \leq \frac{C_1}{\sqrt{\beta}} \|g - g_\delta\|. \quad (93)$$

As equações (91) e (93) juntas implicam

$$\|e_{\beta}^\delta\| \leq C_2\beta^\mu\|z\| + \frac{C_1\delta}{\sqrt{\beta}}$$

e a seleção a priori de parâmetro $\beta = \left(\frac{\delta}{\|z\|} \right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$ nos leva à estimativa

$$\|f - f_{0,\beta}^\delta\| = O(\|z\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (94)$$

A estimativa de erro obtida é a mesma obtida ao aplicar a regularização de Tikhonov a uma equação de operador que envolve um operador compacto. A razão para isso se deve ao fato de que a estimativa depende das expressões (77) e (89)-(94), que, por sua vez, dependem fortemente das propriedades do filtro de Tikhonov.

4.4.3 Análise de convergência do método PQBVM caso $\alpha = 2\sqrt{\beta}$

No caso novo, temos que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Como foi deduzido anteriormente, a aproximação pode ser descrita em termos de fatores de filtro da seguinte forma:

$$f_{\alpha,\beta}^\delta = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\alpha,\beta}(\sigma_k) \frac{\langle g_\delta, b_k \rangle}{\sigma_k} b_k, \quad (95)$$

com

$$F_{\alpha,\beta}(\sigma_k) = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \alpha\sigma_k + \beta(1 - e^{-\lambda_k T})}, \quad (96)$$

que descreve um problema de regularização com dois parâmetros. Note que este filtro não é um filtro conhecido. Por enquanto, faremos uma breve discussão no caso em que o parâmetro α está relacionado com o parâmetro β e realizaremos uma breve discussão no caso em que $\alpha = 2\sqrt{\beta}$. Para isso, vamos decompor o erro da seguinte forma:

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta} = (f - f_{\alpha,\beta}) + (f_{\alpha,\beta} - f_{\alpha,\beta}^\delta) = \mathbf{e}_{\alpha,\beta,\gamma} + \mathbf{e}_{\alpha,\beta,\eta}, \quad (97)$$

onde

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - F_{\alpha,\beta}(\sigma_k)] \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{b}_k \rangle}{\sigma_k} \mathbf{b}_k,$$

e

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta,\eta} = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\alpha,\beta} \frac{\langle \mathbf{g} - \mathbf{g}_\delta, \mathbf{b}_k \rangle}{\sigma_k} \mathbf{b}_k.$$

A condição de fonte $f \in R(B^{2\mu})$ é equivalente a [20]:

$$\frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{b}_k \rangle}{\sigma_k} = \sigma_k^{2\mu} \langle \mathbf{z}, \mathbf{b}_k \rangle, \text{ para todo } k,$$

com algum $\mathbf{z} \in L^2(\Omega)$ tal que $B^{2\mu}\mathbf{z} = f$. Análogo ao caso anterior estimamos os erros de regularização e erro devido ao ruído separadamente. Para a escolha de $\alpha = 2\sqrt{\beta}$ vemos que

$$\frac{F_{\alpha,\beta}(\sigma_k)}{\sigma_k} \leq \frac{C_3}{\sqrt{\beta}}, \quad (98)$$

e portanto

$$\|\mathbf{e}_{\alpha,\beta,\eta}\| \leq \frac{C_3}{\sqrt{\beta}} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_\delta\|. \quad (99)$$

Procedendo como no caso anterior seja $r_{2\sqrt{\beta},\beta}(\sigma_k) = 1 - F_{2\sqrt{\beta},\beta}(\sigma_k)$. Como

$$F_{2\sqrt{\beta},\beta}(\sigma_k) \geq \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + 2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta}, \quad (100)$$

e como

$$r_{2\sqrt{\beta},\beta}(\sigma_k) \sigma_k^{2\mu} \leq \frac{(2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta) \sigma_k^{2\mu}}{\sigma_k^2 + 2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta}, \quad (101)$$

precisamos fazer a análise da função

$$g_\mu(\sigma) = \frac{(2\sqrt{\beta}\sigma + \beta) \sigma^{2\mu}}{\sigma^2 + 2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta}, \quad 0 < \sigma \leq \|B\|, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0. \quad (102)$$

Proposição 4.7. *A função $g_\mu(\sigma)$ em (102) tem como ponto crítico*

$$\mathbf{s}^* = \frac{\sqrt{\beta} \sqrt{\mu} \sqrt{\mu + 4} + \sqrt{9\mu}}{2(1 - 2\mu)}. \quad (103)$$

para $0 < \mu < 1/2$, e para $\mu \geq 1/2$ o máximo é atingido em $\mathbf{s}^* = \sigma_1$.

Demonstração. Aplicando a regra do quociente para a derivada obtemos que:

$$g'_\mu(\sigma) = \frac{(2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta)\sigma_k^{2\mu}(\sigma^2 + 2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta) - (\sigma^2 + 2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta)'(2\sqrt{\beta}\sigma + \beta)\sigma^{2\mu}}{(\sigma^2 + 2\sqrt{\beta}\sigma_k + \beta)^2} \quad (104)$$

$$= \frac{2\sqrt{\beta}\sigma^{2\mu-1}[\beta\mu + 3\sqrt{\beta}\mu\sigma + (2\mu - 1)\sigma^2]}{(\sqrt{\beta} + \sigma)^3}. \quad (105)$$

Agora temos que ter $2\sqrt{\beta}\sigma^{2\mu-1}[\beta\mu + 3\sqrt{\beta}\mu\sigma + (2\mu - 1)\sigma^2] = 0$ para achar os pontos críticos. Assim, dado que $\sigma \neq 0$ então tem-se que $(2\mu - 1)[\beta\mu + 3\sqrt{\beta}\mu\sigma + (2\mu - 1)\sigma^2] = 0$. Esta equação de segundo grau tem raízes dadas por:

$$\begin{aligned} b &= \frac{-3\sqrt{\beta}\mu \pm \sqrt{9\beta\mu^2 - (8\mu - 4)\beta\mu}}{2(2\mu - 1)\beta\mu} \\ &= \frac{-3\sqrt{\beta}\mu \pm \sqrt{9\beta\mu^2 - (8\mu - 4)\beta\mu}}{2(2\mu - 1)\beta\mu} \\ &= \frac{-3\sqrt{\beta}\mu \pm \sqrt{9\beta\mu^2 - (8\mu - 4)\beta\mu}}{2(2\mu - 1)\beta\mu} \\ &= \frac{-3\sqrt{\beta}\mu \pm \sqrt{9\beta\mu^2 - 8\mu^2\beta + 4\beta\mu}}{2(2\mu - 1)\beta\mu} \\ &= \frac{-3\beta\mu \pm \sqrt{\mu^2\beta + 4\beta\mu}}{2(2\mu - 1)\beta\mu} \\ &= \frac{-3\sqrt{\beta}\mu \pm \sqrt{\mu}\sqrt{\beta}\sqrt{\mu + 4}}{2(2\mu - 1)\beta\mu}. \end{aligned}$$

Como a quadrática dada por $\beta\mu + 3\sqrt{\beta}\mu\sigma + (2\mu - 1)\sigma^2$ tem concavidade para cima e a derivada muda de sinal de positivo em $[0, s^*]$ a negativo para $s > s^*$, concluímos que g_μ atinge seu máximo em $s = s^*$. Se $\mu \geq 1/2$ então s^* é positivo o qual implica que a função $g_\mu(\sigma)$ é estritamente crescente e $g_\mu(\sigma)$ atinge seu valor máximo em $s^* = \sigma_1$ por o fato de ser os σ'_k s crescentes. \square

Logo, para C_4 apropriado obtemos que $g_\mu(\sigma) \leq C_4\beta^\mu$, $0 < \mu \leq 1/2$, $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. Usando isto na equação (101) é fácil ver que o erro de regularização na norma pode ser limitado como:

$$\|e_{2\sqrt{\beta},\beta,r}\| \leq C_4\beta^\mu \|z\|. \quad (106)$$

Assim, (101) e (106) implicam que

$$\|f - f_{2\sqrt{\beta},\beta}^\delta\| \leq C_4\|z\|\beta^\mu + C_3\beta^{-1/2}\delta, \quad (107)$$

e uma escolha a priori de β como no caso do MQBVM nos leva a seguinte estimativa:

$$\|f - f_{2\sqrt{\beta},\beta}^\delta\| = O(\|z\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), 0 < \mu \leq 1/2. \quad (108)$$

Em resumo, temos obtido taxas de convergência para os três métodos.

Teorema 4.8. *Seja $f_{\alpha,\beta}^\delta$ a aproximação geral dada por (73) e f a função de fonte exata. Temos as seguintes estimativas.*

(a) *Com $\beta = 0$, se $f \in R(B^{2\mu})$ e escolhendo $\alpha = \left(\frac{\delta}{\|z\|}\right)^{\frac{1}{2\mu+1}}$, se tem*

$$\|f_{\alpha,0}^\delta - f\| = O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), \quad 0 < \mu \leq 1/2. \quad (109)$$

(b) *Com $\alpha = 0$, $f \in R(B^{2\mu})$ e escolhendo $\beta = \left(\frac{\delta}{\|z\|}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$, tem-se*

$$\|f_{0,\beta}^\delta - f\| = O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (110)$$

(c) *Com $\alpha = 2\sqrt{\beta} > 0$, se $f \in R(B^{2\mu})$ e escolhendo $\beta = \left(\frac{\delta}{\|z\|}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$, tem-se:*

$$\|f_{\alpha,\beta}^\delta - f\| = O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), \quad 0 < \mu \leq 1/2. \quad (111)$$

4.4.4 Análise de Convergência do método TSVE

Lembramos que, como o operador B é compacto e auto-adjunto, e o sistema singular do operador B é dado por $\{\sigma_k, b_k\}$ para $k = 1, 2, \dots$, a solução construída pelo TSVE vista como filtro de regularização pode ser expressa como:

$$f_N^\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma) \frac{\langle b_k, g_\delta \rangle}{\sigma_k} b_k(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\langle b_k, g_\delta \rangle}{\sigma_k} b_k(x),$$

onde N funciona como parâmetro de regularização. A função de filtro neste caso é dada pelo filtro do corte espectral dado por:

$$\begin{cases} 1, & \sigma^2 \geq N, \\ 0, & \sigma < N. \end{cases}$$

Nossa análise de convergência considera o caso em que N é escolhido utilizando o princípio da discrepância de Morozov. Neste caso, o princípio encontra o primeiro $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|g_\delta - B(f_N^\delta)\| \leq \tau\delta, \quad (112)$$

para algum $\tau \geq 1$. Definamos o seguinte espaço como sendo:

$$D(A^p) = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k b_k \in L^2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2p} |u_k|^2 < \infty \right\}, p \geq 0, \quad (113)$$

onde λ_k são autovalores de $-\Delta$. Sabe-se que $D(A^p)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno $\langle u, v \rangle_s = \langle A^s u, A^s v \rangle$ [58] e norma induzida dada por

$$\|u\|_{D(A^p)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2p} |u_k|^2 \right)^{1/2}, \quad u_k = \langle u, b_k \rangle. \quad (114)$$

Para a nossa análise, assuma a seguinte cota a-priori para f , ver [36] e [80],

$$\|f\|_{D(A^{2\nu})} \leq E, \quad \nu > 0. \quad (115)$$

Também para uso posterior, $g = B(f)$ implica que $g_k = \sigma_k b_k$, onde $g_k = \langle g, b_k \rangle$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^2}{\sigma_k^{4\nu+2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\sigma_k^{4\nu}} \leq \frac{1}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^{4\nu}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{4\nu} b_k^2 \leq \frac{E^2}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^{4\nu}}, \quad (116)$$

onde se utilizou a desigualdade dada por:

$$1 \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda_k T}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1 T}}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

Observação 4.9. Daqui em diante usamos a abreviação do termo $\langle g_\delta, b_k \rangle$ como sendo $g_{k,\delta}$.

Com a nova abreviação como

$$\|g_\delta - B(f_N^\delta)\|^2 = \|g_\delta\|^2 - \sum_{k=1}^N g_{k,\delta}^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} g_{k,\delta}^2, \quad (117)$$

para o parâmetro de regularização escolhido pelo princípio da discrepância temos

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} g_{j,\delta}^2 \leq \tau^2 \delta^2 \leq \sum_{j=N}^{\infty} g_{j,\delta}^2. \quad (118)$$

Teorema 4.10. Assuma que $f \in D(A^{2\nu})$, $\nu > 0$, e que a cota a priori dada em (115) vale. Suponha também que $g_\delta \in L^2(\Omega)$ satisfaz (69). Seja N o parâmetro de truncamento dado pelo princípio da discrepância. Então a seguinte estimativa de erro vale:

$$\|f - f_N^\delta\| \leq C_\nu E^{\frac{1}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}, \quad (119)$$

onde $C_\nu = ((\tau - 1)^{\frac{-1}{2\nu+1}}) + (\tau + 1)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} (1 - e^{-\lambda_1 T})^{\frac{-2\nu}{2\nu+1}}$.

Demonstração. A norma do erro pode ser limitada como

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N - f_N^\delta\|, \quad (120)$$

onde

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^N g_k \sigma_k^{-1} b_k(x).$$

Para a estimativa do erro de regularização,

$$\|f - f_N\| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{g_k}{\sigma_k} \right)^2. \quad (121)$$

Usando desigualdade de Hölder,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k^q \right)^{1/q},$$

com

$$p = 2\nu + 1, \quad q = \frac{2\nu + 1}{2\nu}, \quad \alpha_j = \frac{g_k^{2\nu+1}}{\sigma_k^2}, \quad \beta_j = g_k^{\frac{4\nu}{2\nu+1}}, \quad k_0 = N + 1.$$

Fazendo isto obtemos

$$\|f - f_N\|^2 \leq \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^{2(2\nu+1)}} g_k^2 \right]^{\frac{1}{2\nu+1}} \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} g_k^2 \right]^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}. \quad (122)$$

Utilizando (116) o primeiro fator pode ser limitado como

$$\left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}} g_k^2 \right]^{\frac{1}{2\nu+1}} \leq \frac{1}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^{\frac{4\nu}{2\nu+1}}} E^{\frac{2}{2\nu+1}}. \quad (123)$$

Para limitar o segundo fator, denotemos o projetor ortogonal sobre o subespaço $\text{span}\{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\}$ como P_{N+1} . Então, com ajuda de (118) e (69)

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} g_k^2 = \|P_{N+1}(g)\|^2 = [\|P_{N+1}(g - g_\delta)\| + \|P_{N+1}(g_\delta)\|]^2 \leq (1 + \tau)^2 \delta^2. \quad (124)$$

De (124), (123) e (122) o erro de regularização fica estimado como

$$\|f - f_N\| \leq \left(\frac{1 + \tau}{1 - e^{-\lambda_1 T}} \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} E^{\frac{1}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}. \quad (125)$$

Para estimar o segundo termo em (120), note que por (69),

$$\|f_N - f_N^\delta\|^2 = \sum_{k=0}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \langle g - g_\delta, b_k \rangle^2 \leq \frac{\delta^2}{\sigma_N^2}. \quad (126)$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski

$$\left(\sum_{k=N}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=N}^{\infty} \beta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e fazendo uma análise similar ao feito para deduzir (124) obtemos

$$\begin{aligned} \tau^2 \delta^2 &\leq \sum_{k=N}^{\infty} g_{k,\delta}^2 \\ &\leq \left(\left[\sum_{k=N}^{\infty} \langle g_\delta - g, b_k \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=N}^{\infty} g_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\leq \left(\|g_\delta - g\| + \left[\sum_{k=N}^{\infty} g_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo, $\tau \delta \leq \delta + \left[\sum_{k=N}^{\infty} g_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, quer dizer, $(\tau - 1)^2 \delta^2 \leq \sum_{k=N}^{\infty} g_k^2$, e utilizando (116) obtemos

$$(\tau - 1)^2 \delta^2 \leq \sigma_N^{2(2\nu+1)} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^{2(2\nu+1)}} g_k^2 \leq \sigma_N^{2(2\nu+1)} \frac{1}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^{4\nu}} E^2,$$

que resulta em

$$\frac{\delta^2}{\sigma_N^2} \leq \frac{(\tau - 1)^{\frac{-2}{2\nu+1}}}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}} E^{\frac{2}{2\nu+1}} \delta^{\frac{4\nu}{2\nu+1}}.$$

Esta última estimativa, junto com (126), levam a estimativa dada por:

$$\|f_N - f_N^\delta\| \leq \frac{(\tau - 1)^{\frac{-1}{2\nu+1}}}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}} E^{\frac{1}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}. \quad (127)$$

A estimativa (119) é obtida combinando (127), (125) e (119). □

5 IMPLEMENTAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo apresentamos algoritmos numéricos para o ISP. Na primeira seção, discutem-se algumas noções matriciais para os métodos QBVM, baseadas em [16]. Na segunda parte, apresentamos uma versão do TSVE obtido a partir de um método semi-discreto proposto em [5, 6].

5.1 IMPLEMENTAÇÃO QBVM GERAL E TSVE

Esta seção apresenta a implementação discreta do método QBVM geral, juntamente com algumas de suas variantes, o método MQBVM e o método PQBVM. Esses três métodos são variantes do método de fronteira não local geral apresentado em [65].

5.1.1 Implementação do método QBVM

O QBVM [17] para regularizar (63), corresponde ao seguinte problema de regularização

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \\ u(\cdot, T) + \beta f(\cdot) = g_\delta & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (128)$$

onde $\beta > 0$ é um parâmetro de regularização a ser escolhido baseado no nível de ruído $\delta > 0$.

Seja $I_h \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz identidade. Com o esquema de diferenças finitas no espaço, denotemos $\Delta_h \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz Laplaciana discreta com tamanho de passo uniforme dado por $h > 0$. A discretização de (128) com condição inicial $u^0 = \phi_h$ e $u^j \approx u(\cdot, j\tau)$ sobre toda a malha no espaço vem dada por:

$$\begin{cases} (u^j - u^{j-1})/\tau - \Delta_h u^j - f_h = 0, & j = 0, 1, \dots, n, \\ u^n + \beta f_h = g_{\delta, h}. \end{cases} \quad (129)$$

As relações anteriores podem ser reformuladas como um sistema linear não simétrico esparso

$$\hat{A}_h u_h = \hat{b}_h. \quad (130)$$

Onde

$$\hat{A}_h = \begin{bmatrix} \beta I_h & 0 & 0 & \cdots & \cdots & I_h \\ -I_h & I_h/\tau - \Delta_h & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -I_h & -I_h/\tau & I_h/\tau - \Delta_h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -I_h & 0 & 0 & -I_h/\tau & I_h/\tau - \Delta_h & 0 \\ -I_h & \cdots & 0 & \cdots & -I_h/\tau & I_h/\tau - \Delta_h \end{bmatrix}, u_h = \begin{bmatrix} f_h \\ u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{n-1} \\ u^n \end{bmatrix}, b_h = \begin{bmatrix} g_{\delta,h} \\ \phi_h/\tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (131)$$

Note que o primeiro bloco (1,1) βI_h é diferente dos outros blocos diagonais impede uma formulação em produto de Kronecker da matriz \hat{A}_h , [16].

5.1.2 Implementação dos métodos QBVM e PQBVM

O PQBVM [16, pag 4] vem de resolver o seguinte problema direto:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \\ u(\cdot, T) + \beta(\alpha f(\cdot) - \Delta f(\cdot)) = g_\delta & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (132)$$

Neste caso, a discretização completa do PQBVM nos leva a :

$$\begin{cases} (u^j - u^{j-1})/\tau - \Delta_h u^j - f_h = 0, & j = 0, 1, \dots, n, \\ u^n + \beta(\alpha f_h - \Delta f_h) = g_{\delta,h}. \end{cases} \quad (133)$$

Multiplicando por β^{-1} a relação anterior produz um sistema linear não-simétrico

$$A_h u_h = b_h. \quad (134)$$

Com A_h, u_h e b_h sendo

$$A_h = \begin{bmatrix} \alpha I_h - \Delta_h & 0 & 0 & \cdots & \cdots & I_h/\beta \\ -I_h & I_h/\tau - \Delta_h & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -I_h & -I_h/\tau & I_h/\tau - \Delta_h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -I_h & 0 & 0 & -I_h/\tau & I_h/\tau - \Delta_h & 0 \\ -I_h & \cdots & 0 & \cdots & -I_h/\tau & I_h/\tau - \Delta_h \end{bmatrix}, u_h = \begin{bmatrix} f_h \\ u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{n-1} \\ u^n \end{bmatrix}, b_h = \begin{bmatrix} g_{\delta,h}/\beta \\ \phi_h/\tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (135)$$

A matriz A_h pode ser escrita em um produto Kronecker da forma

$$A_h = B \otimes I_h - I_t \otimes \Delta_h. \quad (136)$$

A matriz $I_h = I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz identidade, $\Delta_h \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e no passo temporal $I_t \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ é a matriz identidade e $B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ é a matriz de discretização temporal dada por:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1/\beta \\ -1 & 1/\tau & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1/\tau & 1/\tau & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & -1/\tau & 1/\tau & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1/\tau & 1/\tau \end{bmatrix}. \quad (137)$$

O caso $\alpha = 0$ é o conhecido método MQBVM [58].

5.1.3 Implementação do TSVE usando um método semi-discreto

Aproximando as derivadas na variável espacial o sistema de EDO's dado em (48) junto com a condição inicial pode ser escrito como um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias com uma matriz de coeficientes constante dada por:

$$\begin{cases} v'(t) = -A_h v(t) + f_h, \\ v(0) = \phi_h, \end{cases} \quad (138)$$

onde $A_h = -\Delta_h$ denota o Laplaciano discreto negativo e ϕ_h, f_h denotam vetores que contém valores de ϕ e f em pontos interiores da malha. Como ϕ_h e f_h não dependem do tempo, a solução do sistema acima é dada por

$$v(t) = e^{-A_h t} \phi_h + A_h^{-1} (I_m - e^{-A_h T}) f_h. \quad (139)$$

Com a condição final $v(T) = g_{\delta, h}$, se tem de (139) que

$$B_h f_h = q_h, \text{ com } B_h = A_h^{-1} (I_m - e^{-A_h T}), \quad q_h = g_{\delta, h} - e^{-A_h T} \phi_h. \quad (140)$$

Esse sistema de equações lineares pode ser resolvido para obter a fonte f_h . De forma similar, para o QBVM geral temos

$$v(T) + \alpha f_h + \beta A_h f_h = e^{-A_h T} \phi_h + A_h^{-1} (I_m - e^{-A_h T}) f_h + \alpha f_h + \beta A_h f_h = g_{\delta, h}. \quad (141)$$

O anterior leva a construir um sistema regularizado de Lavrentiev da seguinte forma:

$$L_{\alpha, \beta} f_h = ((I_m - e^{-A_h T}) + \alpha A_h + \beta A_h^2) f_h = A_h (g_{\delta, h} - e^{-A_h T} \phi_h) = r_h. \quad (142)$$

A matriz exponencial é calculada com elevado custo computacional, com uma complexidade de $O(m^3)$ para cálculos exatos. No entanto, se olharmos para a equação (140) e notarmos que a matriz Laplaciana discreta, que representa o operador da segunda derivada, é diagonalizável como $A_h = P\Lambda P^T$, onde P é a matriz de vetores próprios da matriz Laplaciana, podemos concluir o seguinte:

$$\begin{aligned}
B_h &= (P\Lambda P^T)^{-1}(I_m - e^{-P\Lambda P^T T})f_h \\
&= P^{-T}\Lambda^{-1}P^{-1}(P^T P - Pe^{-\Lambda T}P^T)f_h \\
&= (P^T)^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1}(P^T P - Pe^{-\Lambda T}P^T)f_h \\
&= (P^T)^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1}(P^T P - Pe^{-\Lambda T}P^T)f_h \\
&= P\Lambda^{-1}P^T(PP^T - Pe^{-P^T T})f_h \\
&= P\Lambda^{-1}(P^T - e^{-\Lambda T}P^T)f_h \\
&= P\Lambda^{-1}(I_m - e^{-\Lambda T})P^T f_h.
\end{aligned} \tag{143}$$

Logo, basta ter informações sobre o Laplaciano discreto e sua decomposição em vetores próprios. Isso ajuda a reduzir os cálculos, transformando os cálculos da matriz exponencial do operador Laplaciano discreto em cálculos da matriz exponencial de uma matriz diagonal, que apresenta custo computacional mais baixo.

Se $A_h = P\Lambda P^T$, com autovalores $\hat{\lambda}_k$, $0 < \hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < \dots < \hat{\lambda}_m$, e autovetores ortonormais, a matriz B_h é simétrica, positiva semi-definida e tem decomposição em valores singulares (SVD)

$$B_h = V\Sigma V^T, \quad V = [v_1, v_2, \dots, v_m], \quad \Sigma = \text{diag}(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m), \tag{144}$$

valores singulares

$$\hat{\sigma}_j = \frac{1 - e^{-\hat{\lambda}_j T}}{\hat{\lambda}_j}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{145}$$

com autovetores dados por $v_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$. Se utilizamos a condição inicial sendo $\phi = 0$, a solução f_h de (140) pode ser escrita como:

$$f_h = \sum_{j=1}^m \frac{v_j^T g_h}{\hat{\sigma}_j} v_j - \frac{e^{-\lambda_j T} v_j^T \phi_h}{\hat{\sigma}_j} v_j = \sum_{j=1}^m \frac{v_j^T g_h}{\hat{\sigma}_j} v_j. \tag{146}$$

Como se assume que a medida de tempo final g_h não é conhecida; somente uma aproximação de ruído contaminada $g_{\delta,h}$ fica disponível, a qual supomos que satisfaz

$$\|g - g_{h,\delta}\| = \|e\| \leq \delta_h, \tag{147}$$

onde δ_h fica disponível. Isto evita dificuldades, porque a solução do sistema linear

$$B_h f_h = g_{h,\delta}, \tag{148}$$

obtida ao trocar g_h por $g_{h,\delta}$ em (140) não proporciona uma aproximação significativa de f_h quando B_h é mal condicionada. Portanto, um método de regularização para obter soluções aproximadas que sejam menos sensíveis ao erro em g_h deve ser escolhido para determinar aproximações significativas para f_h . Abordaremos o problema de reconstrução da fonte aplicando o método TSVD ao problema discreto (140) com escolha do parâmetro de regularização dada pelo princípio da discrepância. Neste caso, a k -ésima solução regularizada de (148) é da forma

$$f_{h,\delta}^{(k)} = \sum_{j=1}^k \frac{v_j^T g_{h,\delta}}{\hat{\sigma}_j}. \quad (149)$$

Para efeito de comparação, consideramos a versão discreta da QBVM generalizada, que se escreve como:

$$f_{h,\alpha,\beta} = \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\lambda}_j}{1 - e^{-\hat{\lambda}_j T} + \alpha \hat{\lambda}_j + \beta \hat{\lambda}_j^2} (v_j^T g_{h,\delta}) v_j. \quad (150)$$

Existem também algoritmos iterativos para o ISP, alguns deles podem ser consultados em [50, 53–55].

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos com o software MATLAB no computador com as especificações MacBook Air (13-inch, 2017) procesador 1,8 GHz Intel Core i5 de dois núcleos e memória 8 GB 1600 MHz DDR3. Nas implementações se contrastam o método QBVM, o método MQBVM junto com TSVD do método semi-discreto.

Para as reconstruções se utilizaram $m = 20, 25, 30$ pontos no espaço e $n = 20, 25, 30$ pontos no tempo respectivamente. Para as reconstruções em 2D se utilizaram $m = 20 \times 20, 25 \times 25, 30 \times 30$ no espaço e $n = 6$ pontos no tempo. Apresentaremos erros relativos calculados para o caso em que $m = n$. Para o método semi-discreto a matriz A_h da equação (138) é construída usando diferenças finitas com m pontos interiores igualmente espaçados.

Para evitar cometer um crime inverso, abordamos o problema direto usando o método implícito de Crank-Nicholson. Nos exemplos numéricos, utilizamos dados perturbados da forma $g_{\delta,h} = g_h + e$, onde e é dado por $e = \epsilon \|g_h\|_2 \frac{r}{\|r\|_2}$ com r gerado pela função *randn* do MATLAB. Em nosso caso usamos $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$.

Observação 6.1. No artigo [16] utiliza-se um modelo de perturbação multiplicativa:

$$g_{\delta,h} = g_h \times r$$

onde

$$r = (1 + \epsilon \text{rand}(-1, 1)), \quad e \quad \|r\|_2 = 1.$$

Agora, é fácil ver que

$$\frac{\|g_{\delta,h} - g_h\|_2}{\|g_h\|_2} = \epsilon \|\text{rand}(-1, 1)\|_2 \leq \epsilon$$

Isso mostra que a perturbação multiplicativa não permite um controle efetivo no nível de ruído nos dados, o que difere do modelo de perturbação aditiva usado em nossos experimentos.

6.0.1 Exemplo 1

Consideramos o caso em que $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $\phi(x) = 0$ e a função de fonte contínua dada por:

$$f(x) = x(\pi - x)\sin(4x).$$

As reconstruções dadas nas figuras abaixo mostram que em geral as melhores reconstruções são obtidas pelo método TSVD.

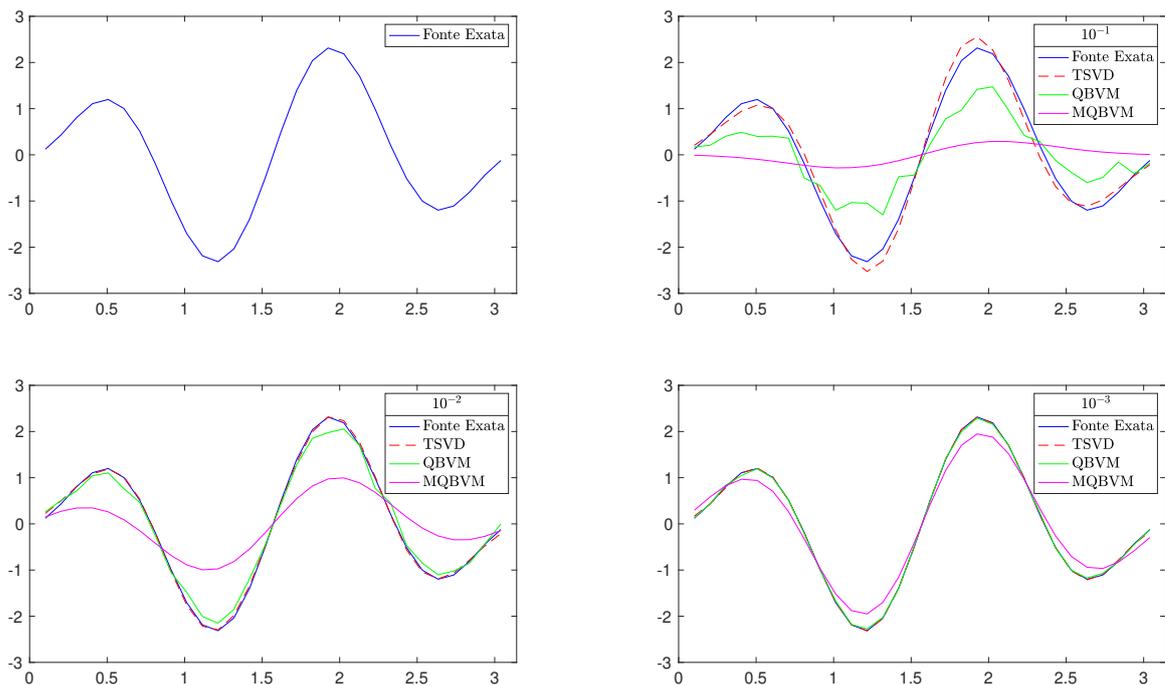


Figura 2 – Reconstruções função fonte contínua com $m=30$ e $n=30$ pontos

As observações acima são confirmadas na tabela mostrada abaixo.

Erros relativos na norma 2 Método TSVD.				Erros relativos na norma 2 Método QBVM.			
Nodos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	Nodos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
(20, 20)	0.1084	0.0307	0.0087	(20, 20)	0.4357	0.0903	0.0121
(25, 25)	0.2767	0.0319	0.0097	(25, 25)	0.4984	0.1038	0.0157
(30, 30)	0.0806	0.0324	0.0111	(30, 30)	0.5224	0.1191	0.0180
Erros relativos na norma 2 Método MQBVM.							
Nodos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}				
(20, 20)	0.9038	0.5618	0.1459				
(25, 25)	0.9151	0.5886	0.1605				
(30, 30)	0.9210	0.6094	0.1734				

Tabela 1 – Erros relativos para a função fonte contínua.

6.0.2 Exemplo 2

Consideremos o caso que $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $\phi(x) = 0$ e a função de fonte não diferenciável dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

O método QBVM apresenta muita oscilação contrario ao MQBVM, o método TSVD diminui a oscilação e exibe melhor qualidade nas reconstruções.

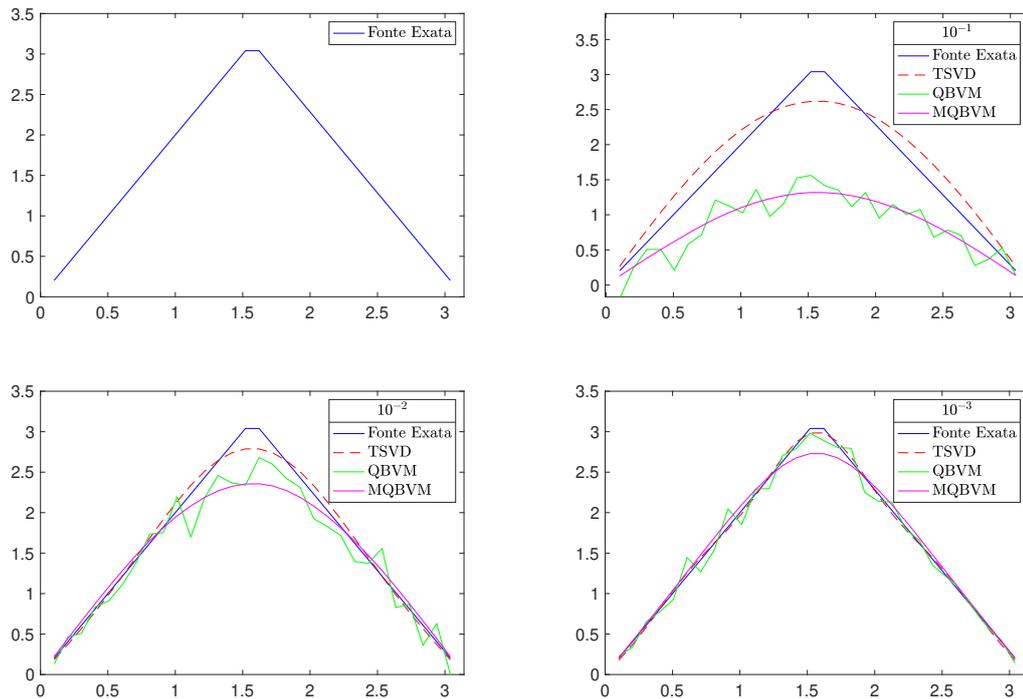


Figura 3 – Reconstruções função fonte não diferenciável com $m=30$ e $n=30$ pontos

A informação mostrada se mostra na tabela a seguir.

Erros relativos na norma 2 Método TSVD.				Erros relativos na norma 2 Método QBVM.			
Pontos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	Pontos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
(20, 20)	0.1193	0.0463	0.0209	(20, 20)	0.4865	0.1249	0.0357
(25, 25)	0.1228	0.0519	0.0305	(25, 25)	0.4919	0.1221	0.0504
(30, 30)	0.1218	0.0475	0.0183	(30, 30)	0.5309	0.1340	0.0537
Erros relativos na norma 2 Método MQBVM.							
Pontos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}				
(20, 20)	0.4522	0.1214	0.0491				
(25, 25)	0.4971	0.1323	0.0561				
(30, 30)	0.5203	0.1349	0.0542				

Tabela 2 – Erros relativos para a função fonte não diferenciável.

6.0.3 Exemplo 3

Consideremos o caso $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $\phi(x) = 0$ e a função de fonte não contínua dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Para nível de ruído 10^{-3} o QBVM apresenta melhores reconstruções para todos os casos e para 10^{-2} somente no caso de 20 pontos, nos casos restantes o TSVD apresenta as melhores reconstruções.

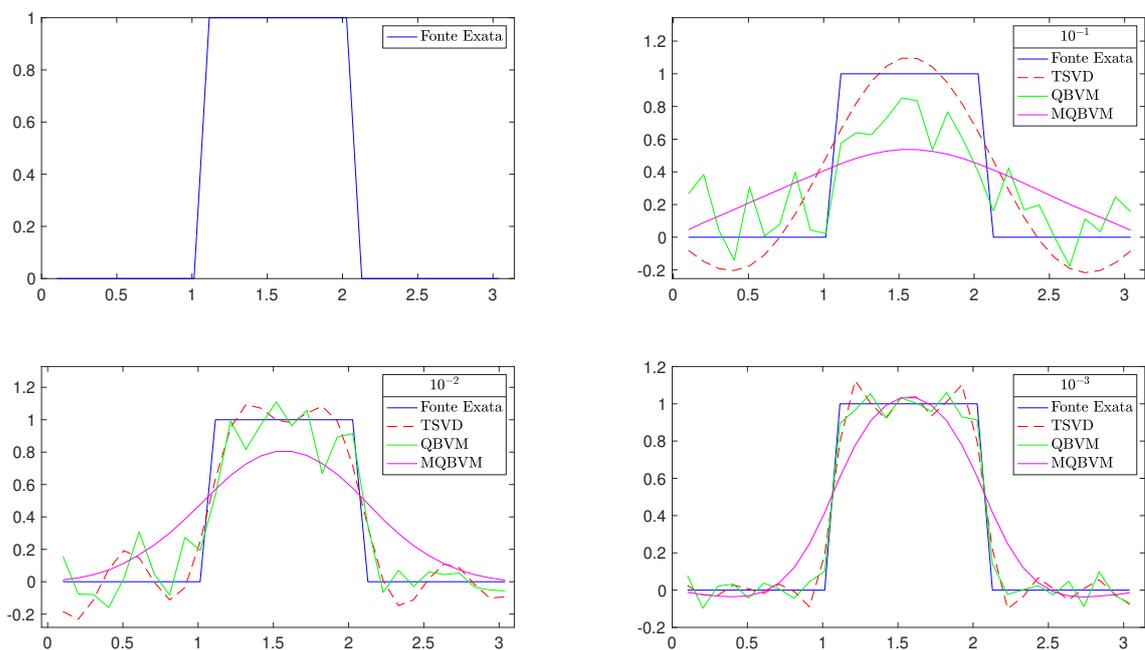


Figura 4 – Reconstruções função fonte não diferenciável com $m=30$ e $n=30$ pontos

A observação é esquematizada na tabela a seguir.

Erros relativos na norma 2 Método TSVD.				Erros relativos na norma 2 Método QBVM.			
Pontos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	Pontos (m, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
(20, 20)	0.3268	0.2470	0.1142	(20, 20)	0.5905	0.2422	0.0675
(25, 25)	0.3358	0.2833	0.1320	(25, 25)	0.5593	0.2885	0.0645
(30, 30)	0.3594	0.3064	0.1152	(30, 30)	0.5688	0.3092	0.0981
Erros relativos na norma 2 Método MQBVM.							
Pontos (m^2, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}				
(20, 20)	0.5587	0.3948	0.2702				
(25, 25)	0.5890	0.4253	0.2915				
(30, 30)	0.6229	0.4491	0.3051				

Tabela 3 – Erros relativos para a função fonte descontínua.

6.0.4 Exemplo 4

Para nosso exemplo em $2D$ considere $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $T = 1$, $\phi(x, y) = 0$ e:

$$f(x, y) = x(\pi - x)\sin(2x)y(\pi - y)\cos(y).$$

Para o caso $2D$ as melhores reconstruções são dadas pelo método TSVD em todos os casos.

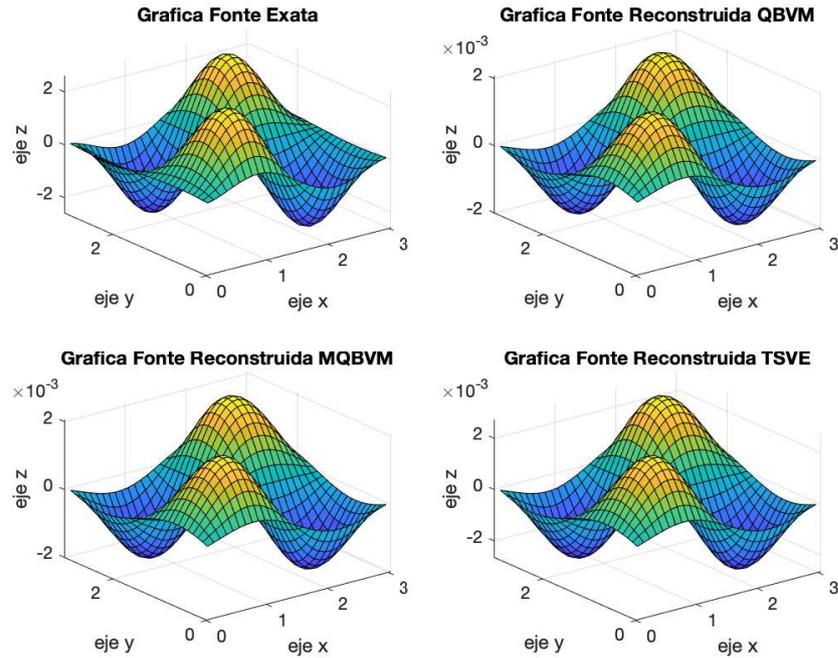


Figura 5 – Reconstruções TSVE, QBVM e MQBVM com $m = 30 \times 30$ pontos no espaço e $n = 6$ pontos no tempo com nível de ruído 10^{-3}

Na seguinte tabela segue-se a informação obtida.

Erros relativos na norma 2 Método TSVE.				Erros relativos na norma 2 Método QBVM.			
Pontos (m^2, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	Pontos (m^2, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$(20^2, 6)$	0.9962	0.9971	0.9981	$(20^2, 6)$	0.9981	0.9981	0.9981
$(25^2, 6)$	0.9976	0.9980	0.9987	$(25^2, 6)$	0.9988	0.9988	0.9988
$(30^2, 6)$	0.9981	0.9985	0.9989	$(30^2, 6)$	0.9992	0.9992	0.9992
Erros relativos na norma 2 Método MQBVM.							
Pontos (m^2, n)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}				
$(20^2, 6)$	0.9985	0.9981	0.9981				
$(25^2, 6)$	0.9991	0.9988	0.9988				
$(30^2, 6)$	0.9994	0.9992	0.9992				

Tabela 4 – Erros relativos para a função fonte em 2D.

7 CONCLUSÕES

Nos experimentos numéricos apresentados no capítulo anterior é possível observar que o método de regularização que se destacou por proporcionar as melhores reconstruções e resultados em termos de erro relativo foi o método TSVE. Por outro lado, o método de Lavrentiev demonstrou desempenho inferior tanto na reconstrução quanto no erro relativo.

A razão para esse fenômeno reside no fato de que o sistema regularizado de Lavrentiev, representado por $L_{\alpha,\beta}f_h$ conforme definido em (142), acarreta um custo computacional consideravelmente mais elevado em comparação com o sistema regularizado do método TSVE, $B_h f_h$ conforme mostrado em (143).

A principal vantagem do método TSVE é que ele fornece uma representação matricial na forma de uma decomposição em valores singulares, resultando em um custo computacional significativamente menor devido à diagonalidade da matriz exponencial. Isso se diferencia da matriz exponencial associada ao método de Lavrentiev, que é mais onerosa em termos de recursos computacionais. Em última análise, o método TSVE geralmente apresenta estimativas de erro relativo superiores na maioria dos exemplos analisados.

No entanto, é importante observar que houveram exceções. No exemplo 3, com um nível de ruído de 10^{-2} e um tamanho de passo no tempo e no espaço de $(20, 20)$, o método TSVD obteve um erro relativo superior comparado com o método QBVM. Além disso, quando o nível de ruído foi 10^{-3} , para todos os tamanhos de passo apresentados, o método QBVM resultou em estimativas de erro relativo mais precisas. Em resumo, o método QBVM demonstrou melhorias nas reconstruções em 11.11% dos casos, enquanto o método TSVD superou com melhores resultados em 88.89% dos casos.

O método MQBVM demonstrou melhorias nas reconstruções em relação ao método QBVM para o segundo exemplo com tamanhos de passo $(20, 20)$ e perturbação de ruído de $10^{-1}, 10^{-2}$, para o exemplo 3 com tamanho de passo $(20, 20)$ e nível de perturbação 10^{-1} . O método MQBVM apresentou melhoria comparado com o QBVM, no entanto comparado com o método TSVD não apresentou melhorias em nenhum caso. Assim, o MQBVM foi uma melhor alternativa ao QBVM em 11.11% dos casos e o QBVM em 88.89% mais comparado com o TSVD, o método TSVD apresentou melhoria em

100% dos casos.

Na tabela a seguir, a convenção 'NR' representa o nível de ruído, e 'TSVD 3/3 tp' indica que o método TSVD obteve um erro relativo inferior para os três tamanhos de passo no tempo e no espaço: (20, 20), (25, 25) e (30, 30). Enquanto 'TSVD 2/3 tp' significa que, em dois dos tamanhos de passo no nosso caso ((25, 25) e (30, 30)), o método TSVD alcançou um erro relativo menor, enquanto o método QBVM só superou em (20, 20).

Exemplo	NR = 10%	NR = 20%	NR = 30%
Exemplo 1	TSVD 3/3 tp	TSVD 3/3 tp	TSVD 3/3 tp
Exemplo 2	TSVD 3/3 tp	TSVD 3/3 tp	TSVD 3/3 tp
Exemplo 3	TSVD 3/3 tp	TSVD 2/3 tp QBVM 1/3 tp	QBVM 3/3 tp
Exemplo 4	TSVD 3/3 tp	TSVD 3/3 tp	TSVD 3/3 tp

Tabela 5 – Resumo dos métodos de regularização mais eficiente por exemplo teste e tamanho de passo no tempo e no espaço

Vale ressaltar que o parâmetro de regularização foi escolhido a priori para o método QBVM e MQBVM, enquanto a escolha foi feita a posteriori com base no princípio da discrepância de Morozov para o método TSVD. Nos casos em que a escolha foi feita a posteriori, o método obteve melhores reconstruções em 88.89% das vezes, em comparação com apenas 11.11% das vezes em que a escolha foi feita a priori. Isso indica a eficiência da seleção do parâmetro de regularização em relação a diferentes testes e tamanhos de passo.

Exemplo	NR = 10%	NR = 20%	NR = 30%
Exemplo 1	Discrepância 3 tp	Discrepância 3 tp	Discrepância 3 tp
Exemplo 2	Discrepância 3 tp	Discrepância 3 tp	Discrepância 3 tp
Exemplo 3	Discrepância 3 tp	Discrepância 2/3 tp A priori 1/3 tp	A priori 3 tp
Exemplo 4	Discrepância 3 tp	Discrepância 3 tp	Discrepância 3 tp

Tabela 6 – Resumo dos métodos de regularização por parâmetro de regularização por exemplo teste e tamanho de passo no tempo e no espaço

No que diz respeito à qualidade das reconstruções, o método TSVD demonstra uma representação superior do termo fonte. Isso ocorre porque o método QBVM tende a exibir maiores oscilações. O método TSVD, por outro lado, oferece uma melhor filtragem dos coeficientes de Fourier e para ruídos pequenos o método MQBVM é uma melhor alternativa ao método QBVM quando a fonte representa uma função não

diferenciável ou descontínua.

Um exemplo ilustrativo é o terceiro caso, no qual foram utilizados 30 pontos no espaço e 30 pontos no tempo. Nas proximidades dos pontos de descontinuidade, o método TSVE apresenta picos com uma oscilação significativamente menor, evidenciando que o fenômeno de Gibbs é mais proeminente no método QBVM na maioria dos casos. A exceção ocorre apenas quando o nível de ruído é extremamente alto, atingindo 30%, onde o método TSVE também exibe algum grau de oscilação.

Para estudos futuros, em relação ao método PQBVM, que não se baseia em um filtro de regularização amplamente reconhecido na literatura, pode ser relevante realizar uma análise de convergência abrangente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Groetsch, Charles W. Elements of applicable functional analysis *M. Dekker*, v. 55, 1980.
- [2] Kreyszig, Erwin. Introductory functional analysis with applications *John Wiley & Sons*, v. 17, 1991.
- [3] Kirsch, Andreas. An introduction to the mathematical theory of inverse problems *Springer*, v. 120, 2011.
- [4] Baumeister, Johann. Stable solution of inverse problems *Springer*, 1987.
- [5] Bazán, Fermín SV and Bedin, Luciano and Leem, Koung Hee and Liu, Jun and Pelekanos, George. Fast matrix exponential-based quasi-boundary value methods for inverse space-dependent source problems . *Networks and Heterogeneous Media*, v. 18,n. 2,p. 601-621. 2023.
- [6] Bazán, Fermín SV and Bedin, Luciano. Inverse space-dependent source problem with time fractional derivative. *Preprint UFSC*, november 2023.
- [7] Nair, M Thamban and Tautenhahn, Ulrich. Lavrentiev regularization for linear ill-posed problems under general source conditions *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, v. 23,n. 1,p. 167-185, 2004.
- [8] Thomas, James William. Numerical partial differential equations: finite difference methods *Springer Science & Business Media*, v. 22. 2013.
- [9] Gohberg, Israel and Goldberg, Seymour. Basic operator theory *Birkhäuser*, 2013.
- [10] Helmberg, Gilbert. Introduction to spectral theory in Hilbert space. *Courier Dover Publications*, 2018.
- [11] Oden, J Tinsley and Demkowicz, Leszek. Applied Functional Analysis. *CRC press*, 2017.
- [12] Medeiros, La e Miranda, M Milla. Introdução aos espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais. *Textos de métodos matemáticos*, v. 25, 1989.
- [13] Fairweather, Graeme. Finite element Galerkin methods for differential equations, 1987.
- [14] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. *American Mathematical Society*, v. 19. 2022.

- [15] Lohwater, J and Ladyzhenskaya, O. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, 2013.
- [16] Jiang, Yi and Liu, Jun and Wang, Xiang-Sheng. A direct parallel-in-time quasi-boundary value method for inverse space-dependent source problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 23, 2023.
- [17] Yang, Fan and Fu, Chu-Li and Li, Xiao-Xiao. A quasi-boundary value regularization method for determining the heat source. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 17, n. 18, p. 3026-3035, 2014.
- [18] Wirgin, Armand. The inverse crime. *arXiv preprint math-ph/0401050*, 2004.
- [19] Doicu, Adrian and Trautmann, Thomas and Schreier, Franz. Numerical regularization for atmospheric inverse problems. *Springer Science & Business Media*, 2010.
- [20] Engl, Heinz Werner and Hanke, Martin and Neubauer, Andreas. Regularization of inverse problems. *Springer Science & Business Media*, v. 135, 1996.
- [21] Lório Júnior, R and Lório, VM. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. *Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, IMPA*, 1988.
- [22] Nair, MT. Regularization of ill-posed operator equations: an overview. *The Journal of Analysis*, v. 29, n. 2, p. 519-541, 2021.
- [23] Morozov, Vladimir Alekseevich. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Doklady Akademii Nauk*, v. 167, n. 3, p. 510-512, 1966.
- [24] Wei, T and Li, XL and Li, YS. An inverse time-dependent source problem for a time-fractional diffusion equation. *Journal of Inverse Problems*, v. 32, n. 8, 2016.
- [25] Dou, Fang-Fang and Fu, Chu-Li and Yang, Fan. Identifying an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 17, n. 7, p. 901-913, 2009.
- [26] Thamban Nair, M. An iterated version of Lavrent'iev's method for ill-posed equations with approximately specified data. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, v. 8, n.2, p. 193-204, 2000.
- [27] Isakov, Victor. Inverse source problems. *American Mathematical Soc*, n. 34, 1990.
- [28] Kim, Yuji and Nakata, Nori . Geophysical inversion versus machine learning in inverse problems. *The Leading Edge*, v. 37, n. 12, p. 894-901, 1999.

- [29] Snieder, Roel and Trampert, Jeannot. Inverse problems in geophysics. *Springer*, 1999.
- [30] Jamshidi, Azade and Samani, Jamal Mohammad Vali and Samani, Hossein Mohammad Vali and Zanini, Andrea and Tanda, Maria Giovanna and Mazaheri, Mehdi. *Water*, v. 12,n. 9,p. 15-24, 2020.
- [31] Atkinson, C and Aparicio, ND. An inverse problem method for crack detection in elastic materials under anti-plane strain. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, v. 445,n. 1925,p. 637-652, 1994.
- [32] Broumand, P .Inverse problem techniques for multiple crack detection in 2D elastic continua based on extended finite element concepts. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 29, n. 12,p. 1702-1728, 2021.
- [33] Zhao, Hang and Zhang, Jia and Chen, Honghan and Wang, Liyang and Yang, Zhuze. Localization of groundwater contaminant sources using artificially enhanced catchment. *Water*, v. 12,n. 7,p. 19-49, 2020.
- [34] Moghaddam, Maryam Barati and Mazaheri, Mehdi and Samani, Jamal Mohammad Vali. Inverse modeling of contaminant transport for pollution source identification in surface and groundwaters: a review. *Groundwater for Sustainable Development*, v. 15,p. 100-651, 2021.
- [35] Cannon, John Rozier and DuChateau, Paul. Structural identification of an unknown source term in a heat equation. *Inverse problems*, v. 14,n. 3,p. 5-35, 1998.
- [36] Dou, Fang-Fang and Fu, Chu-Li and Yang, Fan. Identifying an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 17,n. 7,p. 901-913, 2009.
- [37] Savateev, EG. On problems of determining the source function in a parabolic equation. *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*, 1995.
- [38] Lesnic, Daniel. Inverse Problems with Applications in Science and Engineering. *CRC Press*, 2021.
- [39] Yi, Zh and Murio, DA. Source term identification in 1-D IHCP. *Computers & Mathematics with applications*, v. 47,n. 12,p. 1921-1933, 2014.
- [40] Trong, Dang Duc and Long, Nguyen Thanh and Alain, Pham Ngoc Dinh. Nonhomogeneous heat equation: Identification and regularization for the inhomogeneous term. *Journal of mathematical analysis and applications*, v. 312,n. 1,p. 93-104, 2005.

- [41] Trong, Dang Duc and Quan, Pham Hoang and Alain, PN Dinh. Determination of a two-dimensional heat source: Uniqueness, regularization and error estimate. *Journal of computational and applied mathematics*, v. 191,n. 1,p. 50-67, 2006.
- [42] Ma, Yun-Jie and Fu, Chu-Li and Zhang, Yuan-Xiang. Identification of an unknown source depending on both time and space variables by a variational method. *Applied Mathematical Modelling*, v. 36,n. 10,p. 5080-5090, 2012.
- [43] Fatullayev, Afet Golayoglu. Numerical solution of the inverse problem of determining an unknown source term in a two-dimensional heat equation. *Applied mathematics and computation*, v. 152,n. 3,p. 659-666, 2004.
- [44] Fatullayev, Afet Golayoglu. Numerical solution of the inverse problem of determining an unknown source term in a heat equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 58,n. 3,p. 247-253, 2002.
- [45] Chavent, Guy and Jaffré, Jérôme. Mathematical models and finite elements for reservoir simulation: single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media. *Elsevier*, 1986.
- [46] Yang, Fan and Fu, Chu-Li. A simplified Tikhonov regularization method for determining the heat source. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34,n. 11,p. 3286-3299, 2010.
- [47] Farcas, Adrian and Lesnic, Daniel. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 54,p. 375-388, 2006.
- [48] Wang, Zewen and Zhang, Wen and Wu, Bin. Regularized optimization method for determining the space-dependent source in a parabolic equation without iteration. *Journal of Computational Analysis & Applications*, v. 20,n. 6, 2016.
- [49] Dou, Fang-Fang and Fu, Chu-Li and Yang, Feng-Lian. Optimal error bound and Fourier regularization for identifying an unknown source in the heat equation. *Journal of computational and applied mathematics*, v. 230, n. 2,p. 728-737, 2009.
- [50] Johansson, B Tomas and Lesnic, Daniel. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 72,n. 6,p. 748-760, 2007.
- [51] Montenegro, Andres. Equação de difusão em diferentes sistemas coordenados: Discretização por diferenças finitas. *Universidade do Quindio*, 2019.
- [52] Randall J.Leveque. Finite Difference Methods for Differential Equations. *SIAM*, 2007.

- [53] Johansson, Tomas and Lesnic, Daniel. *Journal of computational and Applied Mathematics*, v. 209,n. 1,p. 66-80, 2007.
- [54] Yang, Liu and Dehghan, Mehdi and Yu, Jian-Ning and Luo, Guan-Wei. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 81,n. 8,p. 1656-1672, 2011.
- [55] Yang, Liu and Yu, Jian-Ning and Luo, Guan-Wei and Deng, Zui-Cha. Numerical identification of source terms for a two dimensional heat conduction problem in polar coordinate system. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37,n. 3,p. 939-957, 2013.
- [56] Jin, Bangti and Rundell, William. A tutorial on inverse problems for anomalous diffusion processes. *Inverse problems*, v. 31,n. 3,p. 603-621, 2015.
- [57] Wei, Ting and Wang, Jun-Gang. A modified quasi-boundary value method for the backward time-fractional diffusion problem. *ESAIM: Mathematical modelling and numerical analysis*, v. 48,n. 2,p. 603-621, 2014.
- [58] Wei, Ting and Wang, Jungang. A modified quasi-boundary value method for an inverse source problem of the time-fractional diffusion equation. *Applied Numerical Mathematics*, v. 78,p. 95-111, 2014.
- [59] Yang, Fan and Fu, Chu-Li and Li, Xiao-Xiao. The inverse source problem for time-fractional diffusion equation: stability analysis and regularization. *Inverse Problems in Science and Engineering*. v. 23,n. 6,p. 969-996, 2015.
- [60] Nguyen, Huy Tuan and Le, Dinh Long and others. Regularized solution of an inverse source problem for a time fractional diffusion equation. *Applied Mathematical Modelling*,v. 40,n. 19-20,p. 8244-8264, 2016.
- [61] Ali, Muhammad and Aziz, Sara and Malik, Salman A. Inverse source problems for a space-time fractional differential equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 28,n. 1,p. 47-68, 2020.
- [62] Dien, Nguyen Minh and Hai, Dinh Nguyen Duy and Viet, Tran Quoc and Trong, Dang Duc. On Tikhonov's method and optimal error bound for inverse source problem for a time-fractional diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 80,n. 1,p. 61-81, 2020.
- [63] Ames, KA and Payne, LE. Asymptotic behavior for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 8,n. 1,p. 187-202, 1998.
- [64] Denche, M and Bessila, K. A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 301,n. 2,p. 419-426. 2005.

- [65] Hào, Dinh Nho and Van Duc, Nguyen and Lesnic, D. Regularization of parabolic equations backward in time by a non-local boundary value problem method. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 75,n. 2,p. 291-315, 2010.
- [66] Hào, Dinh Nho and Van Duc, Nguyen and Sahli, Hichem. A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time. *Journal of mathematical analysis and applications*, v. 345,n. 2,p. 805-815, 2018.
- [67] Showalter, RE. Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations. *North-Holland Mathematics Studies*, v. 110,p. 421-425, 1985.
- [68] Feng, Xiao-Li and Eldén, Lars and Fu, Chu-Li. A quasi-boundary-value method for the Cauchy problem for elliptic equations with nonhomogeneous Neumann data. *Walter de Gruyter GmbH & Co. KG*, 2010.
- [69] Hao, Dinh Nho and Van Duc, Nguyen and Lesnic, D. A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations. *Inverse Problems*, v. 25,n. 5,p. 02-55, 2009.
- [70] Crank, John and Nicolson, Phyllis. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, v. 43,n. 1,p. 50-67, 1947.
- [71] Nair, MT. On Morozov's discrepancy principle for nonlinear ill-posed equations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 79,n. 2,p. 337-342, 2009.
- [72] Engl, Heinz W and Kunisch, Karl and Neubauer, Andreas. Convergence rates for Tikhonov regularisation of non-linear ill-posed problems. *Inverse problems*, v. 5,n. 4,p. 5-23, 1989.
- [73] Pereverzev, Sergei and Schock, Eberhard. Morozov's discrepancy principle for tikhonov. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, v. 21, n. 7-8,p. 901-916, 2000.
- [74] Ramlau, Ronny. Morozov's discrepancy principle for Tikhonov-regularization of nonlinear operators. , 2000.
- [75] Nair, MT. Regularization of ill-posed operator equations: an overview. *The Journal of Analysis*, v. 29, n. 2, p. 519-521, 2021.
- [76] de Figueiredo, Djairo Guedes. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. IMPA, 2018.
- [77] Tikhonov, Andrey Nikolayevich e outros. On the stability of inverse problems. *Dokl. akad. nauk sssr*, v. 39,n. 5,p. 195-198. 1943.

- [78] Tikhonov, Andrei N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Sov Dok*, p. 1035-1038, 1963.
- [79] Wheeler, Mary Fanett e outros. Numerical simulation in oil recovery. , v. 11, 1988.
- [80] Wei, T and Li, XL and Li, YS. An inverse time-dependent source problem for a time-fractional diffusion equation. *Inverse problems*, v. 32,n. 8,p. 3-85, 2016.
- [81] Hào, Dinh Nho and Liu, Jijun and Van Duc, Nguyen and Van Thang, Nguyen. Stability results for backward time-fractional parabolic equations. *Inverse problems*, v. 35, n. 12, 2019.
- [82] Li, YS and Wei, T. An inverse time-dependent source problem for a time-space fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, v. 336, p. 257- 271, 2018.
- [83] Ali, Muhammad and Aziz, Sara and Malik, Salman A. Inverse source problems for a space–time fractional differential equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 28,n. 1,p. 47-68, 2020.
- [84] Hansen, Per Christian. Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion. *SIAM*, 1998.

APÊNDICE A – MÉTODO DE CRANCK-NICHOLSON PARA APROXIMAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR E MATRIZ LAPLACIANA DISCRETA NEGATIVA

Seja $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d = 1, 2$ e Ω um domínio aberto limitado com fronteira suave por partes $\partial\Omega$. A equação que temos interesse em resolver é a seguinte:

$$\begin{cases} u_t - \alpha \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (151)$$

O método empregado para resolver a equação anterior baseia-se principalmente em [51, 52] e uma abordagem que utiliza as derivadas de uma função. Para obter uma aproximação da primeira derivada, recorreremos ao quociente do limite da derivada e, através do fator infinitesimal, aproximamos o ponto desejado para a derivada. Dessa forma, ao abordar tanto pela direita quanto pela esquerda e ao calcular a média dessas abordagens, podemos gerar três tipos de aproximações que denominaremos diferenças progressivas, regressivas e centradas.

A.0.1 Diferenças Progressivas

Considerando a expansão em série de Taylor de uma variável em torno de um ponto x_j :

$$f(x) = f(x_j) + \frac{(x - x_j)}{1!} \frac{df}{dx} \Big|_{x_j} + \frac{(x - x_j)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x_j} + \dots + \frac{(x - x_j)^k}{k!} \frac{d^k f}{dx^k} \Big|_{\epsilon} \quad (152)$$

Para ϵ entre x e x_j .

Supondo que $k = 2$ e $x = x_j + \Delta x$ obtemos:

$$f(x_j + \Delta x) = f(x_j) + \Delta x \frac{df}{dx} \Big|_{x_j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{\epsilon} \quad (153)$$

Assim, a aproximação da primeira derivada é:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x_j} = \frac{f(x_j + \Delta x) - f(x_j)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{\epsilon},$$

com seu erro de truncamento dado por:

$$O(\Delta x) = \frac{-\Delta x^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{\epsilon}.$$

É comum encontrar a expressão da seguinte forma:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x)$$

e simplificando a notação:

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

A.0.2 Diferenças Regressivas

Pela equação (152) com $k = 2$ e $x = x_i - \Delta x$ obtemos:

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\epsilon}. \quad (154)$$

Da equação (152) obtemos a seguinte expressão para a aproximação da primeira derivada:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\epsilon},$$

Onde ϵ fica entre x_i e x .

Neste caso, a aproximação de $f'(x)$ por meio de diferenças regressivas de primeira ordem e com um erro de truncamento de ordem $O(\Delta x)$ vem dada por:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} - O(\Delta x) \Big|_{\epsilon},$$

e simplificando a notação:

$$f'(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}.$$

A.0.3 Diferenças Centradas

Levando em conta as equações (153) e (154) obtemos:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\epsilon}, \quad (155)$$

e

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\epsilon}. \quad (156)$$

Subtraindo a equação (155) da equação (156), obtemos:

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2\Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left[\left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\epsilon} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\epsilon} \right]. \quad (157)$$

Esta equação nos leva a seguinte aproximação da primeira derivada por meio de diferenças centradas:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^3).$$

É comum encontrar a derivada na forma

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

Finalmente por uma simplificação da notação

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}.$$

A.0.4 Derivadas de Segunda Ordem

Fazendo um processo similar ao feito com as diferenças centradas obtemos:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(\epsilon),$$

e

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(\epsilon).$$

Se somarmos as duas equações anteriores e isolarmos a derivada de segunda ordem, se anulam as derivadas de primeira ordem e portanto:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} f^{(4)}(\epsilon).$$

Logo, a aproximação da segunda derivada fazendo uso de diferenças centradas com um erro de truncamento $O((\Delta x)^2)$ é dada por:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

Simplificando a notação, é comum encontrar a expressão como:

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta x)^2}.$$

A.0.5 Método de Crank-Nicolson em 1D e 2D

O método de Crank-Nicolson é uma técnica desenvolvida em meados do século XX por John Crank e Phyllis Nicolson, ver [70]. Consiste em calcular uma média ponderada entre uma fórmula que inclui uma diferença centrada e uma diferença de segunda

ordem centrada, juntamente com um termo de diferença avançada na componente temporal.

Um vantagem do método é que para o caso em 1D e 2D o método de Crank-Nicolson é que ele é um método incondicionalmente-estável.

Teorema A.1. *O método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável.*

Demonstração. Uma prova pode ser consultada em [8]. □

A.0.6 Caso 1D

Sejam $T > 0$ e $\Omega \subset R$ um domínio aberto e limitado com fronteira suave por partes. A equação em 1D que temos interesse em resolver é a seguinte:

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (158)$$

Em nosso caso vamos considerar Ω sendo um intervalo aberto limitado na reta.

Lembremos das equações de diferenças para 1D.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^k = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t}. \quad \text{Diferença Avançada}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^k = \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2\Delta x}. \quad \text{Diferença Centrada}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}. \quad \text{Diferença Centrada de Segunda ordem}$$

Onde $U(x_j, t_{k+1}) = U_j^{k+1}$, as anteriores fórmulas são obtidas da fórmula de aproximação da Série de Taylor.

No primeiro termo de nossa equação :

$$u_t - \alpha u_{xx} = f$$

isolando o termo u_t :

$$u_t = f + \alpha u_{xx}$$

Denotemos F_i^k por $F_i^k = f_i^k + \alpha \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}$.

Considere a seguinte grilha no espaço e no tempo:

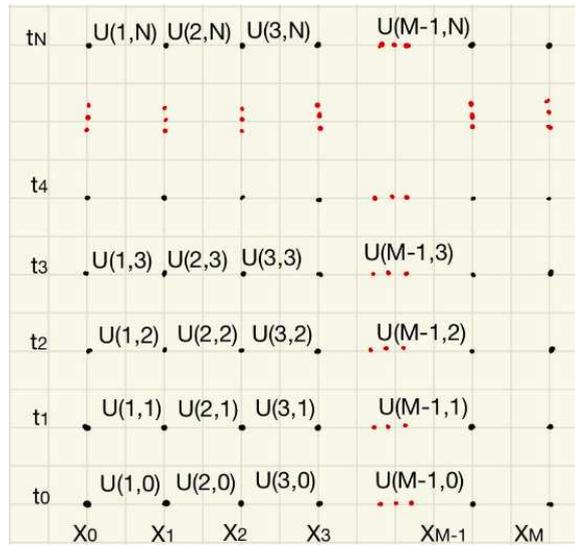


Figura 6 – Discretização 1D

Logo, aplicando a diferença avançada para a derivada de u no tempo e igualando com a média entre F_i^{k+1} e F_i^k :

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} = \frac{F_i^{k+1} + F_i^k}{2}. \quad (159)$$

O anterior esquema é o método de Crank-Nicholson para a equação de difusão. Explicitamente, a representação da equação em diferenças finitas é da forma:

$$\frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} U_{i-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) U_i^{k+1} + \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} U_{i+1}^{k+1} = \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} U_{i-1}^k + \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) U_i^k + \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} U_{i+1}^k + \frac{\Delta t}{2} f_i^{k+\frac{1}{2}}.$$

onde $f^{k+\frac{1}{2}} = \frac{f_i^{k+1} + f_i^k}{2}$, para $i = 1, \dots, n+1$ e $k = 1, \dots, m+1$. Observando bem em geral temos um sistema tri-diagonal, a equação pode ser vista matricialmente como:

$$\mathbb{M}U^{k+1} = \mathbb{N}U^k + \mathbb{F}$$

Onde \mathbb{M} e \mathbb{N} são matrizes tri-diagonais e \mathbb{F} é um vetor que contem os termos $f^{k+\frac{1}{2}}$.

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} & \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} & \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} & \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \end{bmatrix}$$

$$U^k = \begin{bmatrix} U_{(1,1)} \\ U_{(2,1)} \\ \vdots \\ U_{(m-1,1)} \\ U_{(1,2)} \\ U_{(2,2)} \\ \vdots \\ U_{(m-1,2)} \\ \vdots \\ U_{(1,n)} \\ U_{(2,n)} \\ \vdots \\ U_{(m-1,n)} \end{bmatrix}, \mathbb{F} = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} f_1^2 + f_1^1 \\ f_2^2 + f_2^1 \\ \vdots \\ f_{m-1}^2 + f_{m-1}^1 \\ f_1^3 + f_1^2 \\ f_2^3 + f_2^2 \\ \vdots \\ f_{m-1}^3 + f_{m-1}^2 \\ \vdots \\ f_1^{n+1} + f_1^n \\ f_2^{n+1} + f_2^n \\ \vdots \\ f_{m-1}^{n+1} + f_{m-1}^n \end{bmatrix}$$

A.0.7 Caso 2D

Para nosso caso em 2D, a equação que temos interesse em resolver é dada por:

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (160)$$

Em nosso caso consideramos $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sendo Ω um retângulo aberto.

Considere a seguinte partição do retângulo Ω .

Do teorema de Taylor para funções de mais de uma variável obtemos as equações de

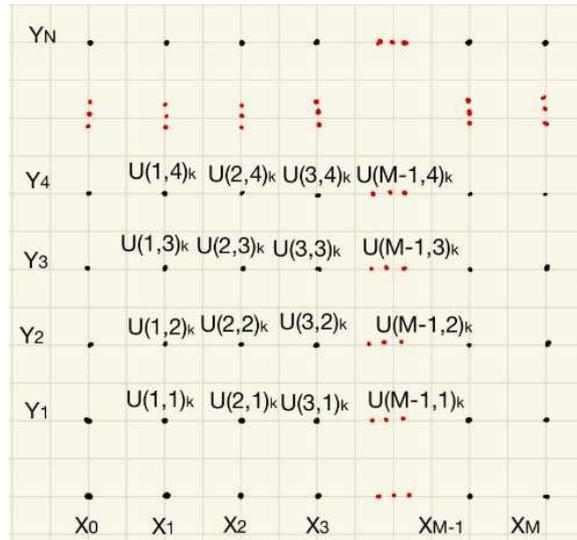


Figura 7 – Discretização em 2D

diferenças para o caso 2D.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^k = \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t}. \quad \text{Diferença Avançada}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}^k = \frac{U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2}. \quad \text{Diferença Centrada de Segunda ordem}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_i^k = \frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2}. \quad \text{Diferença Centrada de Segunda ordem}$$

Onde $U(x_i, y_j, t_k) = U_{i,j}^k$, as anteriores fórmulas são obtidas da fórmula de aproximação da Série de Taylor.

No primeiro termo de nossa equação (160)

$$u_t - \alpha(u_{xx} + u_{yy}) = f,$$

isolando o termo u_t temos:

$$u_t = f + \alpha(u_{xx} + u_{yy}).$$

Denotemos por $F_{i,j}^k = f_{i,j}^k + \alpha \left(\frac{U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right)$

Logo, aplicando a diferença avançada para a derivada de u no tempo e igualando com a média entre F_i^{k+1} e F_i^k :

$$\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{F_{i,j}^{k+1} + F_{i,j}^k}{2}.$$

O anterior esquema é o método de Crank-Nicholson para a equação de difusão.

Finalmente, isolando os termos com super índice $n + 1$ do lado esquerdo da equação, a representação em diferenças finitas é da forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2}\right)U_{i-1,j}^{k+1} + \left(\frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2}\right)U_{i,j-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\right)U_{i,j}^{k+1} + \left(\frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2}\right)U_{i,j+1}^{k+1} + \left(\frac{-\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2}\right)U_{i+1,j}^{k+1} = \\ \left(\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2}\right)U_{i-1,j}^k + \left(\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2}\right)U_{i,j-1}^k + \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\right)U_{i,j}^k + \left(\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2}\right)U_{i,j+1}^k + \\ \left(\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2}\right)U_{i+1,j}^k + \frac{\Delta t}{2}f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

onde $f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i,j}^{k+1} + f_{i,j}^k}{2}$. Observando bem em geral temos um sistema penta-diagonal, a equação pode ser vista matricialmente como:

$$\mathbb{M}U^{k+1} = \mathbb{N}U^k + \mathbb{F}^k.$$

Onde \mathbb{M} e \mathbb{N} são matrizes penta diagonais e \mathbb{F}^k é um vetor que contém os termos $f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$.

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & \ddots & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} \\ \vdots & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ 0 & \dots & \dots & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & 0 & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & \ddots & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & 0 & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} \\ \vdots & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta y)^2} & 0 & \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} & \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \end{bmatrix}$$

Figura 8 – Matrizes \mathbb{M} e \mathbb{N} pentadiagonais

$$U^k = \begin{bmatrix} U_{(1,1)}^k \\ U_{(2,1)}^k \\ \vdots \\ U_{(m-1,1)}^k \\ U_{(1,2)}^k \\ U_{(2,2)}^k \\ \vdots \\ U_{(m-1,2)}^k \\ \vdots \\ U_{(1,m-1)}^k \\ U_{(2,m-1)}^k \\ \vdots \\ U_{(m-1,m-1)}^k \end{bmatrix}, \mathbb{F} = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} f_{1,1}^{k+1} + f_{1,1}^k \\ f_{2,1}^{k+1} + f_{2,1}^k \\ \vdots \\ f_{m-1,1}^{k+1} + f_{m-1,1}^k \\ f_{1,2}^{k+1} + f_{1,2}^k \\ f_{2,2}^{k+1} + f_{2,2}^k \\ \vdots \\ f_{m-1,2}^{k+1} + f_{m-1,2}^k \\ \vdots \\ f_{1,m-1}^{k+1} + f_{1,m-1}^k \\ f_{2,m-1}^{k+1} + f_{2,m-1}^k \\ \vdots \\ f_{m-1,m-1}^{k+1} + f_{m-1,m-1}^k \end{bmatrix}$$

A.0.8 Matriz Laplaciana Discreta negativa em 1D e 2D

No capítulo 4 foram apresentados diferentes métodos de reconstrução, no momento de apresentar os métodos aparece uma matriz que é bastante curiosa e que tem propriedades interessantes que é bom mencionar, a matriz laplaciana discreta negativa $A_h = -\Delta_h$ é uma matriz tri-diagonal diagonalizável com um conjunto ortonormal de autovetores.

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

Proposição A.2. Os autovalores da matriz (161) de tamanho $n \times n$ são dados por $\lambda_k = \frac{2-2\cos(kh)}{h^2}$, $h = \frac{\pi}{(n+1)}$, com autovetores associados dados por:

$$\mathbf{x}_k = (\sin(kh), \sin(2kh), \dots, \sin(nkh))^T.$$

Demonstração. Consideramos as seguintes identidades trigonométricas para fazer a prova:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta). \\ \frac{1}{2}\sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)]. \end{aligned} \quad (162)$$

Verifiquemos em primeiro lugar que se $A_{1,h}$ é a primeira linha da matriz (161),

$$A_{1,h}\mathbf{x}_k = 2\sin(kh) - 2\sin(2kh) = \sin(kh)\left(\frac{2 - 2\cos(kh)}{h^2}\right).$$

Utilizando a primeira identidade que aparece em (162):

$$\begin{aligned} \frac{2\sin(kh) - \sin(2kh)}{h^2} &= \frac{2\sin(kh) - \sin(kh + kh)}{h^2} \\ &= \frac{2\sin(kh) - (\sin(kh)\cos(kh) + \cos(kh)\sin(kh))}{h^2} \\ &= \frac{2\sin(kh) - 2\sin(kh)\cos(kh)}{h^2} \\ &= \sin(kh)\left(\frac{2 - 2\cos(kh)}{h^2}\right). \end{aligned}$$

Agora, seja $j \in \{1, \dots, n\}$ de modo que $1 < j - 1 < j + 1 \leq n$. Então verificamos agora que se $A_{j,h}$ é a j -ésima linha:

$$A_{j,h}\mathbf{x}_k = \frac{-\sin((j-1)kh) + 2\sin(jkh) - \sin((j+1)kh)}{h^2} = \sin(jkh)\left(\frac{2 - 2\cos(kh)}{h^2}\right).$$

Utilizando a primeira identidade de (162), tem-se que:

$$\begin{aligned} A_{j,h}\mathbf{x}_k &= \frac{-\sin((j-1)kh) + 2\sin(jkh) - \sin((j+1)kh)}{h^2} \\ &= \frac{-\sin((j-1)kh) + 2\sin(jkh) - \sin(jkh)\cos(kh) - \cos(jkh)\sin(kh)}{h^2} \\ &= \frac{-\sin((j-1)kh) - \cos(jkh)\sin(kh) + \sin(jkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\ &= \frac{-(\sin(jkh)\cos(kh) - \cos(jkh)\sin(kh)) - \cos(jkh)\sin(kh) + \sin(jkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\ &= \frac{-\sin(jkh)\cos(kh) + \sin(2 - \cos(kh))}{h^2} \\ &= \frac{\cos(jkh)\sin(kh) - \sin(jkh)\cos(kh) - \cos(jkh)\sin(kh) + \sin(jkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\ &= \sin(jkh)\frac{(2 - 2\cos(kh))}{h^2}. \end{aligned}$$

Finalmente mostramos que

$$A_{n,h}\mathbf{x}_k = \frac{-\sin((n-1)kh) + 2\sin(nkh)}{h^2} = \sin(nkh)\frac{(2 - 2\cos(kh))}{h^2}.$$

Utilizando a segunda e primeira identidade de (162):

$$\begin{aligned}
\frac{-\sin((n-1)kh) + 2\sin(nkh)}{h^2} &= \frac{-(\sin(nkh)\cos(kh) - \sin(kh)\cos(nkh)) + 2\sin(nkh)}{h^2} \\
&= \frac{-\sin(kh)\cos(nkh) + \sin(nkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}[\sin((n+1)kh) + \sin((n-1)kh)] + \sin(nkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}2\sin(nkh)\cos(kh) + \sin(nkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\
&= \frac{-\sin(nkh)\cos(kh) + \sin(nkh)(2 - \cos(kh))}{h^2} \\
&= \sin(nkh)\left(\frac{2 - 2\cos(kh)}{h^2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \left(\frac{2-2\cos(kh)}{h^2}\right)\mathbf{x}_k$. □

A matriz laplaciana discreta negativa $\mathbf{A}_h = -\Delta_h$ no caso 2D tem uma relação com a matriz no caso unidimensional. De fato, $\mathbf{A}_h = I_n \otimes A_h + A_h \otimes I_n$, \otimes é o produto Kronecker de matrizes. A matriz \mathbf{A}_h é simétrica definida positiva com autovalores repetidos mais com um conjunto independente de autovetores linearmente independente. O seguinte teorema mostra qual é a forma dos autovetores e autovalores da matriz \mathbf{A}_h .

Teorema A.3. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com autovalores λ_j , e $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ com autovalores μ_j . Então a matriz $A \oplus B = (I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ possui mn autovalores:*

$$\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_1 + \mu_m, \lambda_2 + \mu_1, \dots, \lambda_2 + \mu_m, \dots, \lambda_n + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_m. \quad (163)$$

Se x_1, \dots, x_p formam um conjunto linearmente independente de autovetores da matriz A com correspondentes autovalores dados por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($p \leq n$), e z_1, \dots, z_q são um conjunto linearmente independente de autovetores da matriz B com autovalores dados por μ_1, \dots, μ_q ($q \leq m$), então $z_j \otimes x_i \in \mathbb{R}^{mn}$ formam um conjunto de autovetores linearmente independente da matriz $A \oplus B$ correspondentes a $\lambda_j + \mu_j$.

Demonstração. A prova vem de fazer o seguinte:

$$\begin{aligned}
[(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)](z \otimes x) &= (z \otimes Ax) + (Bz \otimes x) \\
&= (z \otimes \lambda x) + (\mu z \otimes x) \\
&= (\lambda + \mu)(z \otimes x).
\end{aligned}$$

□

O anterior teorema mostra que os autovalores da matriz \mathbf{A}_h vem dados por:

$$\left(\frac{2 - 2\cos(kh)}{h^2}\right) + \left(\frac{2 - 2\cos(jh)}{h^2}\right), j, k = 1, \dots, n. \quad (164)$$

onde $h = \frac{\pi}{(n+1)}$ com autovetores dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{y}_j &= (\sin(kh), \sin(2kh), \dots, \sin(nkh)) \otimes (\sin(jh), \sin(2jh), \dots, \sin(mjh)). \\ &= (\sin(kh) * \mathbf{y}_j^T, \dots, \sin(nkh) * \mathbf{y}_j^T), j, k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A matriz \mathbf{A}_h se gera com o seguinte comando em MATLAB.

```
1 I = eye(m);
2 e = ones(m,1);
3 T = spdiags([e -4*e e],[-1 0 1],m,m); S = spdiags([e e],[-1 1],m,m);
4 A = (kron(I,T) + kron(S,I))/h^2;
5 A = -A;
```

APÊNDICE B – ESPAÇOS DE SOBOLEV E IDENTIDADES DE GREEN

Agora, se introduzirão noções básicas sobre Espaços de Sobolev e identidades de Green. Os fatos e as definições que se apresentarão aparecem nos textos de [12, 14, 21], os espaços que se apresentarão são o conhecido e clássico $H_0^1(A)$ onde A é um conjunto arbitrário, em nosso trabalho $A \subset \mathbb{R}^d$, onde $d = 1, 2$ e o espaço $D(A^p)$ que se introduz em [58] que apresenta uma modificação do método QBVM geral onde o ISP envolve derivada fracionária.

B.0.1 Espaços de Sobolev

Seja (a, b) um intervalo aberto em \mathbb{R} , e L^p o espaço das funções mensuráveis u , definidas em (a, b) com valores reais tais que

$$\int_a^b |u(t)|^p dt < \infty.$$

Se $u \in L^p(a, b)$, define-se a norma de u em $L^p(a, b)$ da seguinte forma:

$$\|u\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Os espaços $L^p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, são de Banach e quando $p = 2$, $L^2(a, b)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b u(t)v(t) dt \right), \quad u, v \in L^2(a, b).$$

com norma induzida

$$\|u\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Definição B.1. Define-se um espaço de Sobolev de ordem m , sobre um intervalo aberto (a, b) , denotado por $H^m(a, b)$ como o espaço vetorial das funções $u \in L^2(a, b)$ tais que as derivadas no sentido de distribuições $D^j u$, $j = 1, 2, \dots, m$ [12], pertencem a $L^2(a, b)$.

Define-se em $H^m(a, b)$ o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{H^m(a,b)} = \int_a^b uv dt + \sum_{j=1}^m \int_a^b D^j u D^j v dt. \quad (165)$$

Com este produto interno tem-se a seguinte norma associada:

$$\|u\|_{H^m(a,b)}^2 = \int_a^b |u(t)|^2 dt + \sum_{j=1}^m |D^j u|^2 dt. \quad (166)$$

O espaço $H^m(a, b)$ com o produto interno acima definido é um espaço de Hilbert separável [12]. O espaço $H^m(a, b)$ pode ser definido também como o fecho do espaço de funções continuamente diferenciáveis até a ordem m : $C^m[a, b]$ com respeito a norma (166). Daqui em diante, o produto interno e a norma associada em $H^m(a, b)$ serão denotadas por $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ e $\|\cdot\|_m$ respectivamente. O subespaço $H^m(a, b)$ formado pelas funções cujas derivadas de ordem menor ou igual a $(m - 1)$ que se anulam nos extremos do intervalo é denotado por $H_0^m(a, b)$. Prova-se que H_0^m é também um espaço de Hilbert.

Espaços de Sobolev são importantes já que podemos obter em forma precisa o grau de regularidade de seus elementos.

Observação B.2. Assim, por exemplo, demonstra-se que $H^1(a, b)$ está contido no espaço de funções contínuas $C[a, b]$, onde a inclusão deve ser entendida no sentido que, para cada $u \in H^1(a, b)$, existe uma função contínua em $C[a, b]$ que é sua representante. Ainda mais, prova-se que $H^m(a, b)$ é compactamente imerso em $C[a, b]$, isto é, a aplicação:

$$i : H^m(a, b) \rightarrow C[a, b]$$

tal que, para toda $u \in H^m(a, b)$, $i(u) = u \in C[a, b]$ é compacta [12]. Consequentemente considerando que em espaços de Hilbert bolas fechadas são fracamente compactas, temos que a bola unitária em $H^m(a, b)$ é compacta em $C[a, b]$.

Os resultados apresentados sobre as identidades de Green que se expõe em [21] se utilizarão para fazer a dedução dos métodos QBVM que aparecem em [16, 17, 58].

B.0.2 Teoremas e Identidades de Green

Teorema B.3. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves. Seja $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 em $\bar{\Omega}$. Então*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} ds, \quad (167)$$

O vetor \hat{n} denota a normal externa unitária ao conjunto Ω .

Demonstração. Uma prova deste fato pode ser consultada em [21]. □

Teorema B.4. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (168)$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (169)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária externa \hat{n} .

Demonstração. Uma prova deste fato pode ser consultada em [21]. □

ANEXO A – CÓDIGOS

Neste anexo se apresentam códigos em MATLAB que implementam os métodos QBVM, MQBVM e PQBVM em contraste com o TSVE utilizando o pacote regularization tools do livro [84], os códigos utilizam o comando discrep do pacote para calcular o parâmetro de regularização a posteriori do princípio da discrepância.

Código em MATLAB para o método QBVM e TSVE em 1D

```

1 errelavec=zeros(1,30);
2 for m=1:30
3 np = 15; %tamanho no espaço
4 npt= 75; %tamanho no tempo
5 T=1; %extremo superior no tempo
6 x = linspace(0,pi,np+2);
7 h = x(2)-x(1); %espaçamento no espaço
8 f= 1*((x(2:end-1)>=pi/3)&(x(2:end-1)<=2*pi/3)); f =f';
9 Fon=@(x,t)(1*((x>=pi/3)&(x<=2*pi/3))); %fonte %2*x.*(x<=pi/2)+2*(pi-x)
   .*(x>pi/2) 1*((x>=pi/3)&(x<=2*pi/3)) %sin(x)
10 g = (1-exp(-1))*sin(x(2:end-1)); g = g'; %solução analítica
11 u0=@(x)(zeros(size(x))); %condição inicial
12 dt = 1/npt; %espaçamento no tempo
13 lambda=dt/(2*h^2); %Coeficiente de Crank-Nicholson
14 H=u0(x(2:end-1));
15 H=H';
16
17 %% Construção da Matriz de Crank-Nicholson
18 unos=ones(np,1);
19 columnas1=[(-lambda)*unos (1+2*lambda)*unos (-lambda)*unos];
20 matriz1=spdiags(columnas1, [-1 0 1], np,np);
21 columnas2=[(lambda)*unos (1-2*lambda)*unos (lambda)*unos];
22 matriz2=spdiags(columnas2, [-1 0 1], np,np);
23
24 %% Resolução Numérica
25 t=dt;
26 F=zeros(np,1);
27 matriz1=full(matriz1);
28 matriz2=full(matriz2);
29
30 while(t<T)
31     for i=1:np
32         F(i)=dt/2*(Fon(i*h,t)+Fon(i*h,t-dt));
33     end
34     %Ensamblado del lado derecho

```

```

35     F1=matriz2*H+F;
36     H=matriz1\F1; %SOR_HW(matriz1,F1,ones((N+1)*(M-1),1),0.5);
37     t=t+dt;
38 end
39
40 plot(x(2:end-1),g,x(2:end-1),H);
41 title('Solu ao Exata')
42 xlabel('malla')
43 ylabel('Solu ao Analitica e Numerica')
44 grid on
45 legend('Solu ao Exata em T=1 ','Solu ao Numerica em T=1')
46
47
48 %% Inicio do QBVM
49
50 %Gerando delta e condi ao de ruído
51 tau=dt;
52 et=size(H); %ruid=-1+2*rand(et(1),1)
53 ruid=-1+2*rand(et(1),1); %-1+2*rand(et(1),1) %randn(size(H))
54 epsilon=10^-3; %10^-1,10^-2,10^-3,10^-4
55 aux1=ones(et(1),1);
56 gdelta=H+(epsilon)*norm(H)*ruid/norm(ruid); %gdelta=H+(epsilon)*norm(H)*
    ruid/norm(ruid) H.*(aux1+epsilon*ruid)
57 delta=norm(gdelta-H,2);
58 beta=delta^0.5;
59
60 %Constru ao da matriz Laplaciana
61 Ah = 2*eye(np)-diag(ones(np-1,1),1)-diag(ones(np-1,1),-1);
62 Ah = Ah/h/h; % ok
63 nip = size(Ah);
64
65 %Constru ao da matriz Ah
66 AT = kron(eye(npt),Ah);
67 %Diagonal Principal
68 ATT = eye(size(AT))/dt+AT;
69 %Primeiro bloco
70 ATT(1:np,1:np)=beta*eye(np);
71 %Ultimo bloco
72 ATT(1:np,end-np+1:end) = eye(np);
73 %Primeira coluna
74 for j=1:npt-1
75     ATT(np*j+1:(j+1)*np,1:np)=-eye(np);
76 end
77 %Subdiagonal

```

```

78 for j=2:npt-1
79     ATT(j*np+1:(j+1)*np,(j-1)*np+1:j*np)=-eye(np)/dt;
80 end
81
82 %% Algoritmo QBVM
83
84 %construindo b_h
85 eATT=size(ATT);
86 b_h=zeros(eATT(1),1);
87 b_h(1:np,1)=gdelta;
88 u_h=ATT\b_h;
89
90 % Extraindo a fonte
91 f_h=zeros(np,1);
92 for i=1:np
93     f_h(i)=u_h(i);
94 end
95
96 y=(h:h:pi-h)';
97
98 %% Discrepancia using Ah
99 [Ulapla,Vlapla]=eig(Ah);
100 [d,ind]=sort(diag(Vlapla));
101 Vlaplas=Vlapla(ind,ind);
102 Ulaplas=Ulapla(:,ind);
103 Bh=Ulaplas*(inv(Vlaplas))*(eye(nip(1))-expdemo1(-Vlaplas))*Ulaplas';
104 qh=gdelta;
105 [U,s,V]=csvd(Bh);
106 [x_delta,lambda1]=discrep(U,s,V,qh,1.1*epsilon);
107 plot(y,f,'b',y,f_h,'r--',y,x_delta,'g');
108 title('Fun ao Fonte')
109 xlabel('malla')
110 ylabel('fonte e fonte perturbada')
111 grid on
112 legend('Fun ao Fonte ','Lavrentiev','TSVD')
113
114 errelageric=norm(f-x_delta,2)/norm(f,2); %x_delta,f_h
115 if m==1
116 errelavec(m)=errelageric;
117 else
118 errelavec(m)=errelavec(m-1)+errelageric;
119 end
120
121 end

```

```

122 errela=norm(f-x_delta,2)/norm(f,2); %x_delta,f_h
123 errrelatotal=errelavec(30)/30;

```

Código em MATLAB para o método MQBVM,PQBVM e TSVE em 1D

```

1 errelavec=zeros(1,30);
2 for m=1:30
3 np = 30; %tamano no espa o
4 npt= 120; %tamano no tempo
5 T=1; %extremo superior no tempo
6 x = linspace(0,pi,np+2);
7 h = x(2)-x(1); %espa amento no espa o
8 f= x(2:end-1).*(pi-x(2:end-1)).*sin(4*x(2:end-1)); f =f'; %fonte 1*((x>=
    pi/3)&(x<=2*pi/3)) 2*x.*(x<=pi/2)+2*(pi-x).*(x>pi/2) x.*(pi-x).*sin
    (4*x)
9 Fon=@(x,t)(x.*(pi-x).*sin(4*x));
10 g = (1-exp(-1)).*sin(x(2:end-1)); g = g'; %solu ao analitica
11 u0=@(x)(zeros(size(x))); %condi ao inicial
12 dt=1/npt; %espa amento no tempo
13 lambda=dt/(2*h^2); %Coeficiente de Cranck-Nicholson
14 H=u0(x(2:end-1));
15 H=H';
16
17 %% Constru ao da Matriz de Crank-Nicholson
18 unos=ones(np,1);
19 columnas1=[(-lambda)*unos (1+2*lambda)*unos (-lambda)*unos];
20 matriz1=spdiags(columnas1, [-1 0 1], np,np);
21 columnas2=[(lambda)*unos (1-2*lambda)*unos (lambda)*unos];
22 matriz2=spdiags(columnas2, [-1 0 1], np,np);
23
24 %% Resolu ao Numerica
25 t=dt;
26 F=zeros(np,1);
27 matriz1=full(matriz1);
28 matriz2=full(matriz2);
29
30 while (t<T)
31     for i=1:np
32         F(i)=dt/2*(Fon(i*h,t)+Fon(i*h,t-dt));
33     end
34     %Ensamblado del lado derecho
35     F1=matriz2*H+F;
36     H=matriz1\F1; %SOR_HW(matriz1,F1,ones((N+1)*(M-1),1),0.5);
37     t=t+dt;

```

```

38 end
39
40 plot(x(2:end-1),g,x(2:end-1),H);
41 title('Solu ao Exata')
42 xlabel('malla')
43 ylabel('Solu ao Analitica e Numerica')
44 grid on
45 legend('Solu ao Exata em T=1 ','Solu ao Numerica em T=1')
46
47
48 %% Inicio do PQBVM
49
50 %Gerando delta e condi ao de ruido
51 et=size(H);
52 ruid=-1+2*rand(et(1),1);
53 epsilon=10^-4; %10^-1,10^-2,10^-3,10^-4
54 aux1=ones(et(1),1);
55 gdelta=H.*(aux1+epsilon*ruid);
56 delta=norm(gdelta-H,2);
57 beta=dt*delta^0.5; %delta MQBVM %dt*delta^0.5 PQBVM
58 alpha=1/dt+dt/beta; % 0 MQBV,1/dt+dt/beta PQBVM
59
60 %Constru ao da matriz Laplaciana
61 Ah=2*eye(np)-diag(ones(np-1,1),1)-diag(ones(np-1,1),-1);
62 Ah=Ah/h/h; % ok
63 nip=size(Ah);
64
65 %Constru ao da matriz Ah
66 AT = kron(eye(npt),Ah);
67 %Diagonal Principal
68 ATT = eye(size(AT))/dt+AT;
69 %Primeiro bloco
70 ATT(1:np,1:np)=(alpha)*eye(np)+Ah;
71 %Ultimo bloco
72 ATT(1:np,end-np+1:end)=(1/beta)*eye(np);
73 %Primeira coluna
74 for j=1:npt-1
75     ATT(np*j+1:(j+1)*np,1:np)=-eye(np);
76 end
77 %Subdiagonal
78 for j=2:npt-1
79     ATT(j*np+1:(j+1)*np,(j-1)*np+1:j*np)=-eye(np)/dt;
80 end
81

```

```

82
83 %Construindo a Matriz B
84 unos1=ones(npt,1);
85 columnas3=[(-1/dt)*unos1 (1/dt)*unos1 (0)*unos1];
86 B=spdiags(columnas3,[-1 0 1],npt,npt);
87 B=full(B);
88 B(1,1)=alpha;
89 B(2:npt,1)=-1;
90 B(1,npt)=1/beta;
91
92
93 %Construindo Ah
94 %Ih=eye(np);
95 %It=eye(npt+1);
96 %ATT=kron(B,Ih)-kron(It,-Ah);
97
98
99 %% Algoritmo MQBVM e PQBVM
100 eATT=size(ATT);
101 b_h=zeros(eATT(1),1);
102 b_h(1:np,1)=(1/beta)*gdelta;
103
104 %Inicio do algoritmo
105 %Z=reshape(b_h,np,npt+1);
106 %[V,D]=eig(B);
107 %[d,ind]=sort(diag(D));
108 %Ds=D(ind,ind);
109 %Vs=V(:,ind);
110 %Algoritmo de 3 Pasos
111 %S1=Z/(Vs. ');
112 %S2=zeros(np,npt+1);
113 %for j=1:npt+1
114 %S2(:,j)=(Ds(j)*Ih+Ah)\S1(:,j);
115 %end
116 %u_h=S2*Vs';
117 %u_h=u_h(:);
118 %u_h=real(u_h);
119
120 %% Inicio do Algoritmo com \
121 u_h=ATT\b_h;
122
123
124 %Extraindo a fonte
125 f_h=zeros(np,1);

```

```

126 for i=1:np
127     f_h(i)=u_h(i);
128 end
129
130 y=(h:h:pi-h)';
131
132 %% Discrepancia using Ah
133 [Ulapla ,Vlapla]=eig(Ah);
134 [d,ind]=sort(diag(Vlapla));
135 Vlaplas=Vlapla(ind,ind);
136 Ulaplas=Ulapla(:,ind);
137 Bh=Ulaplas*(inv(Vlaplas))*(eye(nip(1))-expdemo1(-Vlaplas))*Ulaplas';
138 qh=gdelta;
139 [U,s,V]=csvd(Bh);
140 [x_delta ,lambda1]=discrep(U,s,V,qh,1.1*epsilon);
141 plot(y,f,'b',y,f_h,'r--',y,x_delta,'g');
142 title('Fun ao Fonte')
143 xlabel('malla')
144 ylabel('fonte e fonte perturbada')
145 grid on
146 legend('Fun ao Fonte ','Fun ao Fonte Perturbada ','Fun ao Fonte
    Melhorada')
147
148 errelageric=norm(f-x_delta,2)/norm(f,2); %x_delta,f_h
149 if m==1
150 errelavec(m)=errelageric;
151 else
152 errelavec(m)=errelavec(m-1)+errelageric;
153 end
154
155 end
156 errela=norm(f-x_delta,2)/norm(f,2); %x_delta,f_h
157 errrelatotal=errelavec(30)/30;

```

Código em MATLAB para o QBVM e TSVE em 2D

```

1 % Diferencias Finitas para la ecuaci n
2 % U_t-alf*(U_xx+U_yy)=f
3 % Condiciones de frontera Dirichlet
4 % U(0,y,t)=0, U(L,y,t)=0
5 % U(x,0,t)=0, U(x,H,t)=0
6 % Condici n Inicial U(x,y,0)=0
7 % Fuente puntual: f(x,y)=x(pi-x)sin(2x)y(pi-y)cos(y)
8

```

```
9
10 clc
11
12
13 %% Parametros
14 alf=1;
15 f=@(x,y,t)(x.*(pi-x).*sin(2.*x).*y.*(pi-y).*cos(y)); %valor de la fuente
    puntual
16 %peaks(x,y) %x.*(pi-x).*sin(2.*x).*y.*(pi-y).*cos(y)
17 %% Datos del dominio
18
19 L=pi; %longitud en x
20 H=pi; %longitud en y
21
22 % Datos temporales
23
24 tf=1; % Tiempo final
25
26 %% Valores para la discretizacion
27
28 nx=30; %numero de subintervalos en x
29 ny=30; %numero de subintervalos en y
30 dx=L/nx; %incremento en x
31 dy=H/ny; %incremento en y
32
33 nnx=nx-1; %numero de incognitas en x
34 nny=ny-1; %numero de incognitas en y
35
36 ni=nnx*nny; %numero de incognitas
37 npt=6; %numero de pasos en el tiempo
38 dt=tf/npt; %incremento temporal
39 %%
40
41 %% condicion inicial
42 cz=zeros(ni,1);
43
44
45 %% valores para los calculos
46 adtx=(alf*dt)/(2*dx*dx);
47 adty=(alf*dt)/(2*dy*dy);
48
49 dpi=1+2*adtx+2*adty; %Diagonal Principal Izquierda
50 dpd=1-2*adtx-2*adty; %Diagonal Principal Derecha
51 dssi=-adty; %Diagonal Secundaria Superior Izquierda
```

```
52 dssd=adty; %Diagonal Secundaria Superior Derecha
53 dsii=-adty; %Diagonal Secundaria Inferior Izquierda
54 dsid=adty; %Diagonal Secundaria Inferior Derecha
55 ddii=-adtx; %Diagonal Distante Inferior Izquierda
56 ddid=adtx; %Diagonal Distante Inferior Derecha
57 ddsi=-adtx; %Diagonal Distante Superior Izquierda
58 ddsd=adtx; % Diagonal Distante Superior Derecha
59
60 %% Termino Independiente
61 b=zeros(sqrt(ni),sqrt(ni));
62
63 %% Creacion de la matriz de coeficientes
64 mi=zeros(ni,ni); %Matriz nula
65 md=zeros(ni,ni); %Matriz nula
66
67
68 %% LLenado de las matrices
69 % Diagonal Principal
70 for i=1:ni
71     mi(i,i)=dpi;
72     md(i,i)=dpd;
73 end
74
75 %Diagonales Secundarias
76 for i=1:ni-1
77     mi(i,i+1)=dssi;
78     md(i,i+1)=dssd;
79     mi(i+1,i)=dsii;
80     md(i+1,i)=dsid;
81     if mod(i,3)==0
82         mi(i,i+1)=0;
83         md(i,i+1)=0;
84         mi(i+1,i)=0;
85         md(i+1,i)=0;
86     end
87 end
88
89
90 %Diagonales secundarias Distantes
91 for i=1:ni-nny
92     mi(i,i+nny)=ddsi;
93     md(i,i+nny)=ddsds;
94     mi(i+nny,i)=ddii;
95     md(i+nny,i)=ddid;
```

```

96 end
97
98
99 %% Resolucion del m todo
100 t=dt;
101 F=zeros(ni,1);
102 while(t<tf)
103 %Ensamblado del lado derecho
104 for j=1:nny
105     for i=1:nnx
106         b(j,i)=(dt/2)*(f(j*dy,i*dx,t)+f(j*dy,i*dx,t-dt));
107     end
108 end
109 F=b(:);
110 %Calculamos la nueva H
111 F1=md*cz+F;
112 H=SOR_HW(mi,F1,ones(ni,1),0.5);
113 t=t+dt;
114 end
115
116 %% Inicio do QBVM
117
118 %Gerando delta e condicao de ruido
119 tau=dt;
120 et=size(H);
121 ruid=randn(size(H));
122 epsilon=10^-2; %10^-1,10^-2,10^-3,10^-4
123 aux1=ones(et(1),1);
124 gdelta=H+(epsilon)*norm(H)*ruid/norm(ruid);
125 delta=norm(gdelta-H,2);
126 beta=delta^0.5; %MQBVM delta=0 PQBVM tau*delta^0.5
127
128 %Construcao da matriz Laplaciana
129 I = speye(nnx,nnx);
130 I=full(I);
131 E = sparse(2:nnx,1:nnx-1,1,nnx,nnx);
132 E=full(E);
133 D = E+E'-2*I;
134 Ah = kron(D,I)+kron(I,D);
135 Ah=-Ah;
136 %Ah = 2*eye(ni)-diag(ones(ni-1,1),1)-diag(ones(ni-1,1),-1);
137 %h=dx;
138 %Ah = Ah/h/h; % ok
139 nip = size(Ah);

```

```

140
141 %Constru ao da matriz Ah
142 AT = kron(eye(npt),Ah);
143 %Diagonal Principal
144 ATT = eye(size(AT))/dt+AT;
145 %Primeiro bloco
146 ATT(1:ni,1:ni)=beta*eye(ni);
147 %Ultimo bloco
148 ATT(1:ni,end-ni+1:end)=eye(ni);
149 %Primeira coluna
150 for j=1:npt-1
151     ATT(ni*j+1:(j+1)*ni,1:ni)=-eye(ni);
152 end
153 %Subdiagonal
154 for j=2:npt-1
155     ATT(j*ni+1:(j+1)*ni,(j-1)*ni+1:j*ni)=-eye(ni)/dt;
156 end
157
158 %% Algoritmo QBVM
159
160 %construindo b_h
161 eATT=size(ATT);
162 b_h=zeros(eATT(1),1);
163 b_h(1:ni,1)=gdelta;
164 u_h=ATT\b_h;
165
166 % Extraindo a fonte
167 f_h=zeros(ni,1);
168 for i=1:ni
169     f_h(i)=u_h(i);
170 end
171
172 f_graff=reshape(f_h,[],sqrt(ni));
173
174 [N,M]=meshgrid(dx:dx:pi-dx);
175 P=M.*(pi-M).*sin(2.*M).*N.*(pi-N).*cos(N);
176
177 %% Discrepancia using Ah
178 [Ulapla,Vlapla]=eig(Ah);
179 [d,ind]=sort(diag(Vlapla));
180 Vlaplas=Vlapla(ind,ind);
181 Ulaplas=Ulapla(:,ind);
182 Bh=Ulaplas*(inv(Vlaplas))*(eye(nip(1))-expdemo1(-Vlaplas))*Ulaplas';
183 qh=gdelta;

```

```

184 [U,s,V]=csvd(Bh);
185 [x_delta,lambda1]=discrep(U,s,V,qh,1.1*epsilon);
186
187 x_delta=reshape(x_delta,[],sqrt(ni));
188
189 %% Grafica Fuente
190 subplot(2,2,1)
191 surf(M,N,P);
192 title('Grafica Fuente'), xlabel('eje x'), ylabel('eje y')
193 zlabel('eje z');
194
195
196 subplot(2,2,2)
197 surf(M,N,f_graff)
198 title('Grafica Fuente Reconstruida'), xlabel('eje x'), ylabel('eje y')
199 zlabel('eje z');
200
201
202 subplot(2,2,3)
203 surf(M,N,x_delta)
204 title('Grafica Fuente Reconstruida'), xlabel('eje x'), ylabel('eje y')
205 zlabel('eje z');
206
207 errela=norm(P-f_graff,'fro')/norm(f_graff,'fro');

```

Código en MATLAB para o MQBVM,PQBVM e TSVE em 2D

```

1 % Diferencias Finitas para la ecuaci n
2 %  $U_t - \alpha(U_{xx} + U_{yy}) = f$ 
3 % Condiciones de frontera Dirichlet
4 %  $U(0,y,t) = 0, U(L,y,t) = 0$ 
5 %  $U(x,0,t) = 0, U(x,H,t) = 0$ 
6 % Condici n Inicial  $U(x,y,0) = 0$ 
7 % Fuente puntual:  $f(x,y) = x(\pi-x)\sin(2x)y(\pi-y)\cos(y)$ 
8
9
10 clc
11
12
13 %% Parametros
14 alf=1;
15 f=@(x,y,t)(x.*(pi-x).*sin(2.*x).*y.*(pi-y).*cos(y)); %valor de la fuente
    puntual %x.*(pi-x).*sin(2.*x).*y.*(pi-y).*cos(y)
16 %peaks(x,y) %x.*(pi-x).*sin(2.*x).*y.*(pi-y).*cos(y)

```

```
17 %% Datos del dominio
18
19 L=pi; %longitud en x
20 H=pi; %longitud en y
21
22 % Datos temporales
23
24 tf=1; % Tiempo final
25
26 %% Valores para la discretizacion
27
28 nx=30; %numero de puntos en x
29 ny=30; %numero de puntos en y
30 dx=L/nx; %incremento en x
31 dy=H/ny; %incremento en y
32
33 nnx=nx-1; %numero de subintervalos en x
34 nny=ny-1; %numero de subintervalos en y
35
36 ni=nnx*nny; %numero de incognitas
37 npt=6; %numero de pasos en el tiempo
38 dt=tf/npt; %incremento temporal
39 %%
40
41 %% condicion inicial
42 cz=zeros(ni,1);
43
44
45 %% valores para los calculos
46 adtx=(alf*dt)/(2*dx*dx);
47 adty=(alf*dt)/(2*dy*dy);
48
49 dpi=1+2*adtx+2*adty; %Diagonal Principal Izquierda
50 dpd=1-2*adtx-2*adty; %Diagonal Principal Derecha
51 dssi=-adty; %Diagonal Secundaria Superior Izquierda
52 dssd=adty; %Diagonal Secundaria Superior Derecha
53 dsii=-adty; %Diagonal Secundaria Inferior Izquierda
54 dsid=adty; %Diagonal Secundaria Inferior Derecha
55 ddii=-adtx; %Diagonal Distante Inferior Izquierda
56 ddid=adtx; %Diagonal Distante Inferior Derecha
57 ddsi=-adtx; %Diagonal Distante Superior Izquierda
58 ddsd=adtx; % Diagonal Distante Superior Derecha
59
60 %% Terminos Independientes
```

```
61 b=zeros(sqrt(ni),sqrt(ni));
62
63 %% Creacion de la matriz de coeficientes
64 mi=zeros(ni,ni); %Matriz nula
65 md=zeros(ni,ni); %Matriz nula
66
67
68 %% LLenado de las matrices
69 % Diagonal Principal
70 for i=1:ni
71     mi(i,i)=dpi;
72     md(i,i)=dpd;
73 end
74
75 %Diagonales Secundarias
76 for i=1:ni-1
77     mi(i,i+1)=dssi;
78     md(i,i+1)=dssd;
79     mi(i+1,i)=dsii;
80     md(i+1,i)=dsid;
81     if mod(i,3)==0
82         mi(i,i+1)=0;
83         md(i,i+1)=0;
84         mi(i+1,i)=0;
85         md(i+1,i)=0;
86     end
87 end
88
89
90 %Diagonales secundarias Distantes
91 for i=1:ni-nny
92     mi(i,i+nny)=ddsi;
93     md(i,i+nny)=ddsd;
94     mi(i+nny,i)=ddii;
95     md(i+nny,i)=ddid;
96 end
97
98
99 %% Resolucion del m todo
100 t=dt;
101 F=zeros(ni,1);
102 while(t<tf)
103 %Ensamblado del lado derecho
104 for j=1:nny
```

```

105     for i=1:nnx
106         b(j,i)=(dt/2)*(f(j*dy,i*dx,t)+f(j*dy,i*dx,t-dt));
107     end
108 end
109 F=b(:);
110 %Calculamos la nueva H
111 F1=md*cz+F;
112 H=SOR_HW(mi,F1,ones(ni,1),0.5);
113 t=t+dt;
114 end
115
116 %% Inicio do MQBVM e PQBVM
117
118 %Gerando delta e condi ao de ruido
119 et=size(H);
120 ruid=randn(size(H));
121 epsilon=10^-1; %10^-1,10^-2,10^-3,10^-4
122 aux1=ones(et(1),1);
123 gdelta=H+(epsilon)*norm(H)*ruid/norm(ruid); %H+(epsilon)*norm(H)*ruid/
        norm(ruid) %H.*(aux1+epsilon*ruid)
124 delta=norm(gdelta-H,2);
125 beta=dt*delta^0.5; %delta MQBVM %dt*delta^0.5 PQBVM
126 alpha=1/dt+dt/beta; % 0 MQBV,1/dt+dt/beta PQBVM
127 %% form 1
128 %Lap=1/dx^2*gallery('poisson',nnx);
129 %Ah=full(Lap)/2;
130 %I = speye(nnx,nnx);
131 %E = sparse(2:nnx,1:nnx-1,1,nnx,nnx);
132 %D = E+E'-2*I;
133 %Ah = kron(D,I)+kron(I,D);
134 %Ah=full(Ah);
135 %Ah=Ah/2;
136 %Ah1=1/dt^2*gallery('poisson',nnx);
137 %Ah1=full(Ah1);
138 %Ah = 2*eye(ni)-diag(ones(ni-1,1),1)-diag(ones(ni-1,1),-1);
139 %% form 2
140 h=dx;
141 I=eye(nnx);
142 e=ones(nnx,1);
143 E=spdiags([e -4*e e],[-1 0 1],nnx,nnx);
144 D=spdiags([e e],[-1 1],nnx,nnx);
145 Ah=(kron(I,E) + kron(D,I))/dx^2;
146 Ah=-full(Ah);
147 %% form 3

```

```

148 %e=ones(nnx,1);
149 %E=spdiags([e -4*e e],[-1 0 1],nnx,nnx);
150 %E=full(E);
151 %I=eye(nnx);
152 %Ah=kron(I,E)+kron(E,I)/dx^2;
153 %Ah=-Ah;
154 nip = size(Ah);
155
156 %Constru ao da matriz Ah
157 AT = kron(eye(npt),Ah);
158 %Diagonal Principal
159 ATT = eye(size(AT))/dt+AT;
160 %Primeiro bloco
161 ATT(1:ni,1:ni)=(alpha)*eye(ni)+Ah;
162 %Ultimo bloco
163 ATT(1:ni,end-ni+1:end)=(1/beta)*eye(ni);
164 %Primeira coluna
165 for j=1:npt-1
166     ATT(ni*j+1:(j+1)*ni,1:ni)=-eye(ni);
167 end
168 %Subdiagonal
169 for j=2:npt-1
170     ATT(j*ni+1:(j+1)*ni,(j-1)*ni+1:j*ni)=-eye(ni)/dt;
171 end
172
173 %Construindo a Matriz B
174 unos1=ones(npt,1);
175 columnas3=[(-1/dt)*unos1 (1/dt)*unos1 (0)*unos1];
176 B=spdiags(columnas3,-1 0 1],npt,npt);
177 B=full(B);
178 B(1,1)=alpha;
179 B(2:npt,1)=-1;
180 B(1,npt)=1/beta;
181
182 %% Algoritmo MQBVM e PQBVM
183 eATT=size(ATT);
184 b_h=zeros(eATT(1),1);
185 b_h(1:ni,1)=(1/beta)*gdelta;
186
187 %% Inicio do Algoritmo com \
188 u_h=ATT\b_h;
189
190 % Extraindo a fonte
191 f_h=zeros(ni,1);

```

```

192 for i=1:ni
193     f_h(i)=u_h(i);
194 end
195
196 f_graff=reshape(f_h,[],sqrt(ni));
197
198 [N,M]=meshgrid(dx:dx:pi-dx);
199 P=M.*(pi-M).*sin(2.*M).*N.*(pi-N).*cos(N); %P
    =M.*(pi-M).*sin(2.*M).*N.*(pi-N).*cos(N); %M.*(pi-M).*sin(2.*M).*N.*(
    pi-N).*cos(N)
200
201 [U,LA] = disc_eigenp(nnx);
202
203 sigd=LA';
204
205 % discrepancy for TSV:
206     coef = U'*gdelta;
207     for i=1:nnx*nnx-1
208         res(i) = norm(coef(i+1:nnx*nnx)); % residuos
209     end
210     J= find(res<=delta);
211     ktrunc = J(1); ctrunc = (U(:,1:ktrunc)')*gdelta)./sigd(1:ktrunc
    );
212     soltsvd = U(:,1:ktrunc)*ctrunc;
213     sol=soltsvd(:,ktrunc);
214     sol=reshape(sol,[],nnx);
215
216
217 %% Grafica Fuente
218 subplot(1,3,1)
219 surf(M,N,P);
220 title('Grafica Fuente'), xlabel('eje x'), ylabel('eje y')
221 zlabel('eje z');
222
223 subplot(1,3,2)
224 surf(M,N,f_graff)
225 title('Grafica Fuente Reconstruida Lavrentiev'), xlabel('eje x'), ylabel(
    'eje y')
226 zlabel('eje z');
227
228 subplot(1,3,3)
229 surf(M,N,sol)
230 title('Grafica Fuente Reconstruida Discrep'), xlabel('eje x'), ylabel('
    eje y')

```

```
231 xlabel('eje z');
232
233 errela=norm(P-f_graff','fro')/norm(P,'fro');
234 errela1=norm(P-sol,'fro')/norm(P,'fro');
235
236 function [U,VS] = disc_eigenp(nnx)
237     h = 1/(nnx+1);
238     SL = 2*(1-cos([1:nnx]*h))/h^2;
239     VL = sin([1:nnx]'.*[1:nnx]*h);
240     for i =1:nnx
241         VL(:,i)=VL(:,i)/norm(VL(:,i));
242     end
243     valsin = [(1-exp(-SL))./SL]';
244     l = SL;
245     for i=1:nnx
246         lk(:,i) = l(i)+1;
247         for j=1:nnx
248             V(:,j) = kron(VL(:,j),VL(:,i));
249         end
250         Vk(:,nnx*(i-1)+1:nnx*i)=V;
251     end
252
253     lkk = lk(:);
254     [LK,I]=sort(lkk);
255     for i=1:nnx^2
256         Vet(:,i) = Vk(:,I(i));
257     end
258     U = Vet; VS = LK;
259     end
```