UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Daniella Losso da Costa

Semicontinuidade Superior de Atratores para Equações Dinâmicas em Escalas Temporais

Florianópolis
2020

Daniella Losso da Costa

Semicontinuidade Superior de Atratores para Equações Dinâmicas em Escalas Temporais

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Losso da Costa, Daniella
Semicontinuidade Superior de Atratores para Equações Dinâmicas em EscalasTemporais / Daniella Losso da Costa ; orientador, Matheus Cheque Bortolan, 2020.
88 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. atratores pullback. 3. processos de evolução. 4. escalas temporais. 5. semicontinuidade superior. I. Cheque Bortolan, Matheus. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Daniella Losso da Costa

Semicontinuidade Superior de Atratores para Equações Dinâmicas em Escalas Temporais

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima, Dr(a).
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Documento assinado digitalmente
Matheus Cheque Bortolan
Data: 17/03/2020 07:46:48-0300
CPF: 337.007.338-28

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2020.

Dedico este trabalho à minha avó e madrinha
Maria Terezinha Wendhausen Costa
(in Memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Conrado e Simone, por todo o apoio e suporte quando eu precisei, por me acalmarem nos momentos de crise (que não foram poucos) e por não me deixarem desistir. Vocês são incríveis e são as pessoas que eu mais admiro no mundo. Agradeço também ao meu irmão, Conrado, por todos os momentos especiais que passamos juntos. Eu amo vocês.

Agradeço aos amigos que fiz durante meu tempo na Matemática, Aline, Douglas, Eduardo, Leonardo, Marina, Natã e Paula, vocês são pessoas sensacionais, nossos cafés e fofocas quase diárias faziam tudo parecer mais tranquilo e divertido. Aos colegas de sala e de Mestrado, Ben-Hur, Carlos e Edivania, pela parceria nesses dois anos. Aos amigos que conheci por acaso, Dionatan e Edson, obrigada por todos os momentos especiais que vivenciamos nesse último ano. Também não posso deixar de mencionar meus parceiros de jogos que viraram amigos essenciais, Fabiana, Marcelo, Paulo e Rafael, obrigada por me tirarem da rotina e proporcionarem inúmeros momentos de risadas. Agradeço também ao Mathias, meu melhor amigo e, provavelmente, a pessoa que mais me incomoda no mundo, obrigada por ser assim, por me fazer rir todos os dias com suas piadas sem graça e por me tornar uma pessoa mais leve.

Aos professores que tive durante essa caminhada, obrigada por compartilharem um pouco do conhecimento de vocês. Nunca deixarei de agradecer ao professor Pinho e a professora Silvia por tudo o que fizeram por mim enquanto eu estava na graduação e por me incentivarem tanto a fazer o Mestrado. Agradeço também aos professores que aceitaram participar da banca examinadora deste trabalho, Camila de Lima, Francis Puma e Paulo de Carvalho.

Um agradecimento especial para meu orientador, professor Matheus. Não sei colocar em palavras como você foi e é importante para mim. Obrigada, do fundo do meu coração, por aceitar me orientar nessa jornada, obrigada pelas conversas, paciência e pelos inúmeros conselhos. Você é um professor incrível e uma pessoa sensacional.

Ao Giuliano, obrigada por todas as festas, cafés e por ser tão paciente comigo nas vezes que eu chorei no seu ombro. Eu nunca vou esquecer tudo o que você fez por mim, você é muito importante.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"As coisas que perdemos sempre acabam voltando para nós no final,
mas nem sempre da forma que esperamos."
(Rowling, J.K., 2003)

RESUMO

Neste trabalho definimos os conceitos e ferramentas necessárias para demonstrar a semicontinuidade superior de atratores para equações dinâmicas em escalas temporais. Dentre eles, a teoria básica de escalas temporais, as equações dinâmicas em escalas temporais (tanto de funções a valores reais como funções a valores em $\mathbb{R}^n$), além dos processos de evolução em escalas temporais seus atratores pullback.

Palavras-chave: Escalas temporais. Semicontinuidade superior. Atratores pullback. Equações dinâmicas. Função exponencial.

ABSTRACT

In this work we define the concepts and tools needed to prove the upper semicontinuity of attractors for dynamic equations on time scales. Among them, the basic theory of time scales, the dynamic equations on time scales (as real and $\mathbb{R}^n$ functions), and also the evolution processes in times scales and their pullback attractors.

Keywords: Time scales. Upper semicontinuity. Pullback attractors. Dynamic equations. Exponential function.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como se transportam as perturbações sofridas por modelo matemático para as suas soluções? Dito de outra maneira, ao modelarmos um problema real (seja ele físico, químico, econômico, etc.) como garantir que pequenos erros na modelagem não causem grandes estragos nas soluções? Esta pergunta não possui uma resposta simples, tampouco, única. A primeira coisa que precisamos estar atentos é: o que queremos dizer com *erros* e *estragos*?

Neste trabalho, investigamos com a *semicontinuidade superior de atratores*, isto é, determinando o quão longe *atratores* de uma equações dinâmica perturbada estão do *atrator* de uma equação dinâmica limite, quando a *perturbação* é feita na *escala temporal* considerada.

Para isto, esclarecemos melhor alguns conceitos, sendo o primeiro o de escalas temporais. “O estudo envolvendo escalas temporais foi introduzido por Stefan Hilger em 1988 na sua tese de doutorado com o intuito de elaborar uma teoria que relacionasse a análise discreta e contínua” (BOHNER; PETERSON, 2001). Com esta citação, vemos que uma escala temporal $\mathbb{T}$, que é nada mais do que um subconjunto não vazio e fechado dos números reais na topologia usual, serve como uma generalização tanto para o cálculo infinitesimal quanto para o discreto.

Para o nosso problema em questão, dadas duas escalas temporais $\mathbb{T}'$ e $\mathbb{T}$ *suficientemente próximas* (no conceito de distância de Hausdorff), processos de evolução U' em $\mathbb{T}'$ e U em $\mathbb{T}$ com atratores $\hat{A}'$ e $\hat{A}$, respectivamente, queremos controlar a *proximidade* (no sentido da semidistância de Hausdorff) entre $\hat{A}'$ e $\hat{A}$, desde que seja possível controlar a distância entre U' e U. Em resumo, dadas duas escalas temporais $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$, $D = \mathbb{T} \cup \mathbb{T}'$ e $f\colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função, considere os seguintes problemas:

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{e} \quad x^{\Delta'}(t) = f(t, x(t)),$$

onde Δ denota a *derivada na escala temporal* $\mathbb{T}$ e Δ' a *derivada na escala* $\mathbb{T}'$. Queremos descobrir quais são as condições sob as quais estes processos possuem *atratores* (chamados de atratores pullback), e ainda mais, quando tais atratores existem, queremos poder medir a proximidade entre eles.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos além desta introdução. No Capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos da teoria de escalas temporais, as definições de derivadas, integrais definidas, indefinidas e impróprias. Também demonstramos alguns resultados clássicos tais como a regra da cadeia, teorema do valor médio, princípio de indução, entre outros. Os resultados deste capítulo foram retirados de (BOHNER; PETERSON, 2001).

No Capítulo 3 introduzimos as equações dinâmicas de primeira ordem e o problema de valor inicial em escalas temporais. Para a resolução das mesmas são necessários alguns conceitos, tais como o do plano complexo de Hilger, as operações no conjunto dos números complexos de Hilger e a função exponencial em escalas temporais (a primeira parte deste capítulo é dedicada ao estudo de propriedades dessa função). Ainda, demonstramos a fórmula da variação das constantes para os casos em que a equações lineares não-homogêneas em $\mathbb{R}$ e fazemos o estudo análogo para as equações dinâmicas em $\mathbb{R}^n$, com o uso da exponencial de matrizes para escalas temporais. Apresentamos também a série generalizada de Peano-Baker como uma expressão alternativa para a função exponential matricial, além de exemplos sobre o caso específico de matrizes com coeficientes constantes e resultados sobre comutatividade apresentados em (HAMZA; AL-QUBATY, 2012). A teoria deste capítulo foi feita com os resultados de (BOHNER; PETERSON, 2001; CUNHA, 2006; HAMZA; AL-QUBATY, 2012).

O Capítulo 4 contém os objetivos principais deste trabalho e é voltado para o estudo de processos de evolução em escalas temporais e seus atratores pullback. Apresentamos as definições de invariância, atração e absorção pullback, semidistância e distância de Hausdorff, e introduzimos o conceito de *atrator pullback*. Esta parte do trabalho foi baseada em (CARABALLO; ŁUKASZEWICZ; REAL, 2006) e adaptada do caso contínuo para o caso de escalas temporais gerais. Além disso, apresentamos nesta parte um resultado sobre a existência de atratores pullback para processos de evolução em escalas temporais. Na última parte deste trabalho, baseados em (KLOEDEN, 2006), apresentamos o resultado sobre a semicontinuidade superior de atratores pullback quando perturbamos a escala temporal, além de dois exemplos.

2 ESCALAS TEMPORAIS

Neste capítulo, damos a definição e descrevemos os resultados básicos envolvendo as *escalas temporais*. Para isso, no que segue, denotaremos por $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ o conjunto dos números naturais maiores que zero, $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$ o dos naturais, $\mathbb{Z}$ o dos inteiros, $\mathbb{Q}$ o dos racionais e $\mathbb{R}$ o dos reais.

Definição 2.1. Uma **escala temporal** é um subconjunto não-vazio e fechado de $\mathbb{R}$ na topologia usual.

Os conjuntos dos números naturais, inteiros e reais são exemplos de escalas temporais, bem como intervalos fechados de números reais e o Conjunto de Cantor. Já os conjuntos dos números racionais, irracionais e intervalos abertos de números reais *não* são escalas temporais, pois não são fechados em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2. Considere uma escala temporal $\mathbb{T}$. Definimos o operador **passo a frente** $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T},$$

com a convenção $\sigma(t) = \inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ se $\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \varnothing$. Definimos também o operador **passo atrás** $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T},$$

com a covenção $\rho(t) = \sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$ se $\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \varnothing$.

A grosso modo, o operador passo a frente $\sigma(t)$ nos dá o primeiro elemento de $\mathbb{T}$ depois de t, e o passo atrás $\rho(t)$ nos dá o primeiro elemento de $\mathbb{T}$ antes de t. Uma medida importante na teoria de escalas temporais é a *distância* entre $\sigma(t)$ e t, chamada de *função granulação*, definida a seguir.

Definição 2.3. A **função granulação** $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ é dada por $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Observação 2.4. As teorias de derivação e integração em escalas temporais fazem uso da função passo a frente e da função granulação. Elas têm suas versões análogas utilizando a função passo atrás e com a função granulação dada por $\mu(t) = t - \rho(t)$, porém não apresentaremos a teoria para este segundo caso neste trabalho.

Outras definições importantes são referentes à densidade dos pontos em uma escala temporal.

Definição 2.5. Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $t \in \mathbb{T}$.

(a) Se $\sigma(t) > t$ dizemos que t é **isolado à direita**;

(b) se $\rho(t) < t$ dizemos que t é **isolado à esquerda**;

(c) se t é isolado à direita e isolado à esquerda dizemos que t é **isolado**;

(d) se $t < \sup \mathbb{T}$ e $\sigma(t) = t$ dizemos que t é **denso à direita**;

(e) se $t > \inf \mathbb{T}$ e $\rho(t) = t$ dizemos que t é **denso à esquerda**;

(f) se t é denso à direita e denso à esquerda dizemos que t é **denso**.

Na escala temporal $\mathbb{T}$ dada pelo conjunto abaixo, o ponto t_1 é denso à direita e denso à esquerda, ou seja, t_1 é denso. O ponto t_2 é denso à esquerda e isolado à direita, o ponto t_3 é denso à direita e isolado à esquerda e, por fim, o ponto t_4 é isolado à esquerda e isolado à direita, ou seja, t_4 é isolado.

Exemplo 2.6. Vamos considerar agora alguns exemplos de escalas temporais $\mathbb{T}$, classificando seus pontos.

(a) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então $\sigma(t) = \inf(t, \infty) = t$ e $\rho(t) = \sup(-\infty, t) = t$. Assim, t é denso, para todo $t \in \mathbb{R}$. Note ainda que $\mu(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então $\sigma(t) = \inf\{t+1, t+2, t+3, \cdots\} = t+1$ e $\rho(t) = \sup\{t-1, t-2, t-3, \cdots\} = t-1$. Como para todo $t \in \mathbb{Z}$ temos $\rho(t) = t-1 < t < t+1 = \sigma(t)$, então t é isolado. Note ainda que $\mu(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{Z}$

(c) Considere $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Se $t \in \mathbb{T}$ então $t = 2^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Então $\sigma(t) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2t$, $\rho(t) = 2^{n-1} = 2^{-1} \cdot 2^n = \frac{t}{2}$ e $\mu(t) = t$. Como $\sigma(t) > t$, t é isolado à direita, e como $\rho(t) < t$, t é isolado à esquerda, e portanto t é isolado.

(d) Considere $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Seja $t \in \mathbb{T}$, assim $t = \frac{1}{n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, $\sigma(t) = \frac{t}{1-t}$, $\rho(t) = \frac{t}{t+1}$ e $\mu(t) = \frac{t^2}{1-t}$. Assim, t é isolado à direita e isolado à esquerda, portanto t é isolado.

(e) Considere $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, com $h > 0$. Seja $t \in \mathbb{T}$, assim $t = hz$, para algum $z \in \mathbb{Z}$. Então, $\sigma(t) = t + h$, $\rho(t) = t - h$ e $\mu(t) = h$. Assim, t é isolado à direita e isolado à esquerda, portanto t é isolado.

(f) Considere $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Seja $t \in \mathbb{T}$, assim $t = \sqrt{n}$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$. Então, $\sigma(t) = \sqrt{t^2+1}$, $\rho(t) = \sqrt{t^2-1}$ e $\mu(t) = \sqrt{t^2+1} - t$. Assim, t é isolado à direita e isolado à esquerda, portanto t é isolado.

(g) Considere $\mathbb{T} = \{\sqrt[3]{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Seja $t \in \mathbb{T}$, assim $t = \sqrt[3]{n}$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$. Então, $\sigma(t) = \sqrt[3]{t^3+1}$, $\rho(t) = \sqrt[3]{t^3-1}$ e $\mu(t) = \sqrt[3]{t^3+1}-t$. Assim, t é isolado à direita e isolado à esquerda, portanto t é isolado.

Exemplo 2.7. Para todos $a,b>0$ reais, o conjunto $\mathbb{P}_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a]$ é uma escala temporal, com

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a) \\ t+b, & \text{se } t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\}, \end{cases}$$

e

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a) \\ b, & \text{se } t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\}. \end{cases}$$

Definição 2.8. Um subconjunto U de $\mathbb{T}$ é uma vizinhança do ponto $t \in \mathbb{T}$ se existe $\delta > 0$ tal que $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Um princípio bastante útil na matemática discreta é o *Princípio da Indução*. Antes de continuarmos, provaremos aqui a sua versão para escalas temporais, que será utilizada mais a frente.

Teorema 2.9 (Princípio da Indução)**.** *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $t_0 \in \mathbb{T}$ e $\{S(t) : t \in [t_0,\infty) \cap \mathbb{T}\}$ uma família de condições que satisfaz:*

1. *a condição $S(t_0)$ ocorre;*

2. *se $t \in (t_0,\infty) \cap \mathbb{T}$ é denso à esquerda e $S(s)$ ocorre para todo $s \in [t_0, t) \cap \mathbb{T}$, então $S(t)$ ocorre.*

3. *se $t \in [t_0,\infty) \cap \mathbb{T}$ é isolado à direita e $S(t)$ ocorre, então $S(\sigma(t))$ também ocorre;*

4. *se $t \in [t_0,\infty) \cap \mathbb{T}$ é denso à direita e $S(t)$ ocorre, então existe uma vizinhança U de t em $\mathbb{T}$ tal que $S(s)$ ocorre para todo $s \in U \cap (t,\infty)$;*

Então $S(t)$ ocorre para todo $t \in [t_0,\infty) \cap \mathbb{T}$.

Demonstração. Considere o conjunto $S^* = \{t \in [t_0,\infty) \cap \mathbb{T} : S(t) \text{ não ocorre}\}$. Queremos mostrar que $S^* = \emptyset$, para isso, vamos supor por contradição que $S^* \neq \emptyset$. Deste modo, seja $t^* = \inf S^* \in [t_0,\infty) \cap \mathbb{T}$ (lembremos que $[t_0,\infty) \cap \mathbb{T}$ é fechado). Agora

- se $t^* = t_0$, então $S(t^*) = S(t_0)$ ocorre, por (1), e $t^* \notin S^*$;

- se $t^* > t_0$ e $\rho(t^*) = t^*$ (isto é, t^* é denso à esquerda) então, por (2), $S(t^*)$ ocorre e $t^* \notin S^*$. Se $\rho(t^*) < t^*$, então $\rho(t^*)$ é isolado á direita, $\sigma(\rho(t^*)) = t^*$ e $S(\rho(t^*))$ ocorre. Assim, por (3), $S(t^*)$ ocorre e $t^* \notin S^*$.

Em qualquer um dos casos obtemos $t^* \notin S^*$, isto é, $S(t^*)$ ocorre. Se t^* for isolado à direita, temos $t^* < \sigma(t^*)$ e como $S(t^*)$ ocorre por (3), $S(\sigma(t^*))$ ocorre, logo $\inf S^* \geqslant \sigma(t^*)$, o que é uma contradição. Se t^* for denso à direita, o item (4) também contradiz a definição de t^*. Desta maneira chegamos a uma contradição com o fato de $S^* \neq \varnothing$ e concluímos a demonstração. □

2.1 DERIVAÇÃO

Agora queremos *interpolar* os conceitos de derivações discreta à direita e derivação real, para obter derivadas numa escala temporal arbitrária $\mathbb{T}$ (como mencionamos na Observação 2.4, não trabalharemos com a derivada à esquerda). Para tanto, devemos evitar o último elemento da escala temporal se ele for um máximo isolado, pois podemos ter problemas na definição. Formalizamos esta ideia da seguinte maneira:

Definição 2.10. Para uma escala temporal $\mathbb{T}$ definimos o conjunto $\mathbb{T}^k$ da seguinte maneira: se $\mathbb{T}$ tem um ponto de máximo m que é isolado à esquerda, definimos $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$. Caso contrário, definimos $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$. Resumidamente, temos

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \text{se } \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{se } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Com este conjunto, somos capazes de definir a *derivada à direita* (chamada de *delta derivada* ou Δ*-derivada*) de uma função $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, definida numa escala temporal $\mathbb{T}$, mas somente para pontos em $\mathbb{T}^k$.

Definição 2.11. Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função e $t \in \mathbb{T}^k$. A **delta derivada** (ou **Δ-derivada**, ou **derivada de Hilger**) de f em t, denotada por $f^\Delta(t)$, é definida como sendo o número real (se existir) que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ tem-se

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \epsilon |\sigma(t) - s|. \tag{2.1}$$

Dizemos que f é **delta diferenciável** (ou simplesmente **diferenciável**) em $\mathbb{T}^k$ se $f^\Delta(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{T}^k$. A função $f^\Delta: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada de **delta derivada** (ou somente **derivada**) de f em $\mathbb{T}^k$.

Quando a delta derivada de f em $t \in \mathbb{T}^k$ existe, ela é única. Isto é, se $t \in \mathbb{T}^k$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisfazem (2.1) no lugar de $f^\Delta(t)$, então $\alpha = \beta$. De fato, se t é denso à direita temos $\sigma(t) = t$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que (2.1) é válida com α e β. Além disso, existe $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ com $s \neq t$ e para este s temos

$$|\alpha - \beta| = \frac{|f(t) - f(s) - \beta(t-s) - f(t) + f(s) + \alpha(t-s)|}{|t-s|} \leqslant 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\alpha = \beta$.

Agora, se t é isolado à direita, então $\sigma(t) > t$ e, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que (2.1) se verifica para α e β. Tomando então $s = t$ obtemos

$$|\alpha-\beta| = \frac{|f(\sigma(t))-f(t)-\beta(\sigma(t)-t)-f(\sigma(t))+f(t)+\alpha(\sigma(t)-t)|}{|\sigma(t)-t|} \leqslant 2\epsilon,$$

e concluímos também que $\alpha = \beta$.

Observação 2.12. Esta demonstração, apesar de simples, revela um detalhe importante: na maioria das demonstrações de resultados envolvendo a delta derivada, precisaremos separar os casos quando t é denso à direita e quando t é isolado à direita.

Note que, quando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a delta derivada corresponde à derivada usual, e quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, a delta derivada corresponde à derivada discreta à direita (ou derivada para frente). Neste sentido é que dizemos que a delta derivada *interpola* as derivadas contínua e discreta à direita.

Agora, veja que se m é um máximo isolado numa escala temporal $\mathbb{T}$, em particular $\sigma(m) = m$, definindo a delta derivada de uma função f em m usando a Definição 2.11, vemos que *qualquer* número real α pode ser usado para $f^{\Delta}(m)$, já que sendo m um máximo isolado, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos $(m-\delta, m+\delta)\cap\mathbb{T} = \{m\}$ e assim (2.1) está trivialmente satisfeita, qualquer que seja o número escolhido para $f^{\Delta}(m)$.

Exemplo 2.13. Vejamos alguns exemplos simples de delta derivadas.

(a) Fixado $\alpha \in \mathbb{R}$, definindo $f(t) = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{T}$, temos $f^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$, já que para todo $s \in \mathbb{T}$ temos

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)| = 0.$$

(b) Seja $f(t) = t$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Então, $f^{\Delta}(t) = 1$, pois para todo $s \in \mathbb{T}$ temos

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)| = |\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)| = 0.$$

(c) Definindo $f(t) = t^2$ para todo $t \in \mathbb{T}$ temos $f^{\Delta}(t) = \sigma(t)+t$. De fato, para $t, s \in \mathbb{T}$ temos

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)| = |\sigma^2(t)-s^2-(\sigma(t)+t)(\sigma(t)-s)| = |[\sigma(t)-s](s-t)|.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ e $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ obtemos

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)| \leqslant \delta|\sigma(t)-s| = \epsilon|\sigma(t)-s|.$$

A definição de continuidade para uma função $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, é a usual. Isto é, f **é contínua em** $t \in \mathbb{T}$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ então $|f(t)-f(s)| < \epsilon$. E também, como usual, diremos que f é **contínua** quando ela for contínua em todos os pontos de $\mathbb{T}$.

Comecemos com alguns resultados básicos sobre diferenciabilidade.

Teorema 2.14. *Sejam $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função e $t \in \mathbb{T}^k$. Então*

(i) se f é diferenciável em t, então f é contínua em t;

(ii) se f é contínua em t e t é isolado à direita, então f é diferenciável em t e

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t};$$

(iii) se t é denso à direita, então f é diferenciável em t se, e somente se, o limite dado por $\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ existe. Neste caso temos

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s};$$

(iv) se f é diferenciável em t, então $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$.

Demonstração. (i) Lembrando que $\mu(t) = \sigma(t) - t$, note que

$$\begin{aligned} |f(t)-f(s)| &= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t)-s) - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t) f^\Delta(t)\} + (t-s) f^\Delta(t)| \\ &\leqslant |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t)-s)| + |f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t) f^\Delta(t)| + |(t-s)||f^\Delta(t)|. \end{aligned}$$

Por hipótese, f é diferenciável, assim pela Definição 2.11, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ vale (2.1). Dado $0 < \eta < 1$ defina

$$\epsilon = \frac{\eta}{2\mu(t) + 1 + |f^\Delta(t)|}.$$

Assim $0 < \epsilon < 1$ e para $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$, temos

$$\begin{aligned} |f(t)-f(s)| &\leqslant \epsilon|\sigma(t)-s| + \epsilon\mu(t) + |t-s||f^\Delta(t)| \\ &\leqslant \epsilon[\mu(t) + \mu(t) + |t-s| + |f^\Delta(t)|] \leqslant \epsilon[2\mu(t) + 1 + |f^\Delta(t)|] = \eta, \end{aligned}$$

o que mostra que f é contínua em t.

(ii) Como f é contínua em t e t é isolado à direita, temos $\mu(t) > 0$ e assim

$$\lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Nos resta mostrar que $f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que se $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ tem-se $t + \delta < \sigma(t)$ e

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \right| \leqslant \epsilon,$$

o que implica em

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} (\sigma(t) - s) \right| \leqslant \epsilon |\sigma(t) - s|,$$

e conclui a prova deste item.

(iii) Suponha t denso à direita (ou seja, $\sigma(t) = t$). Se f é diferenciável em t, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(t)-f(s)-f^{\Delta}(t)(t-s)| \leqslant \epsilon|t-s|$, para todo $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$. Assim, para $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ e $s \neq t$ obtemos

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - f^{\Delta}(t)\right| \leqslant \epsilon,$$

o que mostra que $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$.

Reciprocamente, assuma que $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ temos

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - f^{\Delta}(t)\right| \leqslant \epsilon \quad \text{se e só se} \quad |[f(t)-f(s)]-f^{\Delta}(t)(t-s)| \leqslant \epsilon|t-s|,$$

e como $\sigma(t) = t$, concluímos que f é diferenciável em t.

(iv) Se t é isolado à direita, sendo f é diferenciável, o resultado segue diretamente do item (ii). Se t denso à direita, então $\sigma(t) = 0$ e $\mu(t) = 0$, e a expressão é trivialmente satisfeita quando f é diferenciável em t. □

Com este resultado, podemos mostrar que, como mencionamos anteriormente, se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a derivada delta coincide com a derivada usual. De fato, pelo item (a) do Exemplo 2.6, todo $t \in \mathbb{R}$ é denso, e usando item (iii) do Teorema 2.14, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é delta diferenciável se, e somente se, $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(t)$.

No caso onde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, a derivada delta coincide com a derivada discreta, pois pelo item (b) do Exemplo 2.6, todo $t \in \mathbb{Z}$ é isolado, e usando o item (ii) do Teorema 2.14 (como $\mathbb{Z}$ é discreto, toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua) então toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é delta diferenciável e $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t} = f(t+1)-f(t)$.

Agora apresentamos alguns exemplos de cálculo de algumas delta derivadas em diferentes escalas temporais.

Exemplo 2.15. (a) Considere $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\cup\{0\}$, na qual, pelo Exemplo 2.6 (d), todo ponto $t \in \mathbb{T}$ é isolado à direita, com $\sigma(t) = \frac{t}{1-t}$ e $\mu(t) = \frac{t^2}{1-t}$. Considere a função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \sigma(t)$. Esta função é contínua, e pelo Teorema 2.14, temos

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)} = \frac{\sigma\left(\frac{t}{1-t}\right)-\frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}} = \frac{1}{1-2t}.$$

Assim $f^{\Delta}(t) = \frac{1}{1-2t}$ para cada $t \in \mathbb{T}^k$.

(b) Seja $\mathbb{T} = \{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\}$, onde pelo Exemplo 2.6 (e), todo $t \in \mathbb{T}$ é isolado à direita, com $\sigma(t) = t+\frac{1}{2}$ e $\mu(t) = \frac{1}{2}$. Considere $f(t) = t^2$, que é contínua. Do Teorema 2.14, temos

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)} = \frac{\sigma^2(t)-t^2}{\sigma(t)-t} = \sigma(t)+t,$$

e assim $f^{\Delta}(t) = 2t+\frac{1}{2}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

(c) Para $\mathbb{T} = \left\{\sqrt{n} \colon n \in \mathbb{N}_0\right\}$, sabemos do Exemplo 2.6 (f) que todo $t \in \mathbb{T}$ é isolado à direita, com $\sigma(t) = \sqrt{t^2+1}$ e $\mu(t) = \sqrt{t^2+1} - t$. Tomando $f(t) = t^2$, o item acima nos dá $f^\Delta(t) = \sigma(t) + t$, e portanto $f^\Delta(t) = \sqrt{t^2+1} + t$ para cada $t \in \mathbb{T}$.

(d) Considere $\mathbb{T} = \left\{\sqrt[3]{n} \colon n \in \mathbb{N}_0\right\}$. Do Exemplo 2.6 (g), todo $t \in \mathbb{T}$ é isolado à direita, com $\sigma(t) = \sqrt[3]{t^3+1}$ e $\mu(t) = \sqrt[3]{t^3+1} - t$. Tomando $f(t) = t^3$, que é contínua, segue do Teorema 2.14 que

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{\sigma^3(t) - t^3}{\sigma(t) - t} = \sigma^2(t) + t\sigma(t) + t^2,$$

e assim $f^\Delta(t) = \sqrt[3]{(t^3+1)^2} + t\sqrt[3]{t^3+1} + t^2$ para cada $t \in \mathbb{T}$.

Vejamos agora como ficam as regras de diferenciação usuais para a delta derivada.

Teorema 2.16. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $f, g \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^k$, então:*

(i) a soma $f + g \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t e $(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$;

(ii) para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t e $(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$;

(iii) o produto $fg \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t e $(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$;

(iv) se $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, a função $\frac{1}{f} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t e

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))};$$

(v) se $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, a função $\frac{f}{g} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t e

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Demonstração. (i) Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que para $s \in (t - \delta_1, t + \delta_1) \cap \mathbb{T}$ temos

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leqslant \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|,$$

e para $s \in (t - \delta_2, t + \delta_2) \cap \mathbb{T}$ temos

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leqslant \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, para $s \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ obtemos

$$|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - [(f+g)^\Delta(t)[\sigma(t) - (s)]|$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant |f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|+|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|\\
&\leqslant \left(\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}\right)|\sigma(t)-s| = \epsilon|\sigma(t)-s|,
\end{aligned}$$

e portanto $f+g$ é diferenciável em t e $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$.

(ii) Se $\alpha = 0$ o resultado segue do Exemplo 2.13 (a). Agora, para $\alpha \neq 0$, como f é diferenciável em t, existe $\delta > 0$ tal que para $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ temos

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]| \leqslant \frac{\epsilon}{|\alpha|}|\sigma(t)-s|$$

Assim, para $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ obtemos

$$|(\alpha f)(\sigma(t))-(\alpha f)(s)-\alpha f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]| = |\alpha||f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)| \leqslant \epsilon|\sigma(t)-s|,$$

e portanto αf é diferenciável em t e $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$.

(iii) Da diferenciabilidade de f e g em t, e da continuidade de f em t (pelo Teorema 2.14), dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ temos

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]| \leqslant \eta|\sigma(t)-s|,$$

$$|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]| \leqslant \eta|\sigma(t)-s|,$$

e também $|f(t)-f(s)| \leqslant \eta$. Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando $0 < \eta < 1$ de maneira que

$$\eta < \frac{\epsilon}{1+|g(\sigma(t))|+f(t)+|g^{\Delta}(t)|},$$

e $\delta > 0$ como acima, para $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ obtemos

$$\begin{aligned}
&|(fg)(\sigma(t))-(fg)(s)-[f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))+f(t)g^{\Delta}(t)](\sigma(t)-s)|\\
&\quad = |f(\sigma(t))g(\sigma(t))-f(s)g(s)-[f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))+f(t)g^{\Delta}(t)](\sigma(t)-s)|\\
&\quad \leqslant |f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)||g(\sigma(t))|+|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)||f(t)|\\
&\qquad +|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)||f(s)-f(t)|+|\sigma(t)-s||g^{\Delta}(t)||f(s)-f(t)|\\
&\quad \leqslant \eta|\sigma(t)-s||g(\sigma(t))|+\eta|\sigma(t)-s||f(t)|+\eta^2|\sigma(t)-s|+\eta|\sigma(t)-s||g^{\Delta}(t)|\\
&\quad \leqslant \epsilon|\sigma(t)-s|.
\end{aligned}$$

Portanto fg é diferenciável em t e $(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$. Como $fg = gf$, segue diretamente que $(fg)^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$.

(iv) Por hipótese $\frac{1}{f(s)}$ está bem definida para $s = t$ e $s = \sigma(t)$, já que $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$. Como f é contínua em t, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(s) \neq 0$ para $s \in (t-\delta_1, t+\delta_1)\cap\mathbb{T}$. Note que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(\sigma(t))}-\frac{1}{f(s)}+\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}(\sigma(t)-s)\right| \leqslant{}& \frac{1}{|f(s)f(\sigma(t))|}|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\\
&+\frac{|f^{\Delta}(t)||f(t)-f(s)|}{|f(s)f(t)f^2(\sigma(t))|}|\sigma(t)-s|,
\end{aligned}$$

e assim, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $0 < \delta < \delta_1$ tal que

$$\frac{1}{|f(s)f(\sigma(t))|}|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| < \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|$$

e

$$\frac{|f^{\Delta}(t)||f(t) - f(s)|}{|f(s)f(t)f^2(\sigma(t))|}| < \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|$$

para $s \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$, segue que

$$\left|\frac{1}{f(\sigma(t))} - \frac{1}{f(s)} + \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}(\sigma(t) - s)\right| < \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

e portanto $\frac{1}{f}$ é diferenciável em t e

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) Dos itens *(ii)* e *(iv)* segue que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ é diferenciável em t e

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) &= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\left(\frac{1}{g}\right)(\sigma(t))\\ &= f(t)\frac{-g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^{\Delta}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.\end{aligned}$$

□

Para simplificar a notação, dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, consideramos a função $f^{\sigma} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Desta maneira, as regras de derivação de produtos e quocientes, nesta notação, se escrevem como $(fg)^{\Delta} = fg^{\Delta} + f^{\sigma}g^{\Delta}$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta} = -\frac{f^{\Delta}}{ff^{\sigma}} \quad \text{e} \quad \left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta} = \frac{f^{\Delta}g - fg^{\Delta}}{gg^{\sigma}}.$$

Exemplo 2.17. Vejamos alguns exemplos de cálculos de derivadas em algumas escalas temporais.

(a) (Produto de três funções) Se f, g, h são funções delta diferenciáveis em t, numa escala temporal $\mathbb{T}$, obtemos

$$\begin{aligned}(fgh)^{\Delta} &= (fg)^{\Delta}h + (fg)^{\sigma}h^{\Delta} = (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})h + f^{\sigma}g^{\sigma}h^{\Delta}\\ &= f^{\Delta}gh + f^{\sigma}g^{\Delta}h + f^{\sigma}g^{\sigma}h^{\Delta}.\end{aligned}$$

(b) Considere uma escala temporal $\mathbb{T}$ com $0 \notin \mathbb{T}$ e a função dada por $f(t) = \dfrac{1}{t}$. Então $f^{\Delta}(t) = -\frac{1}{t\sigma(t)}$.

(c) Sejam $h > 0$, $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, a sua delta derivada é dada por $f^{\Delta}(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

(d) (**Escala quântica**) Para $q > 1$, considere a escala temporal $\mathbb{T} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Para todo $t \in \mathbb{T}$, temos $\sigma(t) = qt$ (em particular, $\sigma(0) = 0$), $\rho(t) = \frac{t}{q}$ e $\mu(t) = t(q-1)$. Como $\sigma(0) = 0$, $t = 0$ denso à direita. Também, como $\rho(t) = \frac{t}{q} < t < qt$ para $t \neq 0$, todo $t \neq 0$ é ponto isolado.

Para $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ contínua, pelo Teorema 2.16 obtemos

$$f^{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{f(qt)-f(t)}{t(q-1)}, & \text{se } t \in \mathbb{T} - \{0\}, \\ \lim\limits_{s \to 0} \frac{f(s)-f(0)}{s}, & \text{se } t = 0, \text{ desde que o limite exista.} \end{cases}$$

Em geral, nas teorias de derivação, seria apresentada agora a *regra da cadeia*. Porém, para demonstrarmos esta regra para escalas temporais em geral, precisamos de alguns outros resultados, e deixaremos tanto o enunciado quanto a demonstração desta regra para a Seção 2.3.

2.2 INTEGRAÇÃO

Nessa seção introduziremos os conceitos de integrais indefinidas, de Cauchy, e impróprias, além de estudar algumas propriedades básicas dessas integrais e exemplos em diferentes escalas temporais. Para isso, são necessários alguns conceitos inciais. No que segue, seja $\mathbb{T}$ é uma escala temporal.

Definição 2.18. Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada **regrada** se o limite lateral à direita existe em todos os pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e também se o limite lateral à esquerda existe em todos os pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$.

Diremos que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é **rd-contínua** se for contínua nos pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e se o limite à esquerda existe nos pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$.

O conjunto das funções que são rd-contínuas é denotado por C_{rd}, ou $C_{rd}(\mathbb{T})$, ou ainda $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Já o conjunto das funções que são diferenciáveis e possuem derivada rd-contínua é denotado por $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Claramente toda função rd-contínua é regrada, e toda função contínua é rd-contínua. Vejamos mais algumas propriedades destas funções, que serão utilizadas em alguns resultados futuros.

Teorema 2.19. *Considere uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Então*

(i) o operador passo a frente σ é rd-contínuo;

(ii) se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e f é regrada ou rd-contínua, então $g \circ f$ é regrada ou rd-contínua;

(iii) se f é regrada ou rd-contínua, então f^{σ} é regrada ou rd-contínua.

Demonstração. *(i)* Seja $t \in \mathbb{T}$ denso à direita, isto é, $\sigma(t) = t$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que se $s \in (t, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ temos $\sigma(s) < t+\epsilon$. Como para $s \in (t-\delta, t] \cap \mathbb{T}$ temos $s \leqslant \sigma(s) < t$, obtemos $|\sigma(s) - \sigma(t)| < \delta < \epsilon$ para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$. Portanto σ é contínua nos pontos densos à direita.

Agora seja $t \in \mathbb{T}$ denso à esquerda (assim $\rho(t) = t$). Dado $\epsilon > 0$ tome $0 < \delta < \epsilon$ tal que para $s \in (t-\delta, t)$ temos $s \leqslant \sigma(s) < t$. Assim para $s_1, s_2 \in (t-\delta, t)$ obtemos $|\sigma(s_1) - \sigma(s_2)| < \delta < \epsilon$, e portanto o limite lateral à esquerda existe. Concluímos então que o operador passo à frente σ é rd-contínuo.

(ii) Este item segue diretamente da continuidade de g em $\mathbb{R}$.

(iii) Suponha f regrada. Se $t \in \mathbb{T}$ é denso à direita então $\sigma(t) = t$ e σ é contínua em t, assim o limite

$$\lim_{s \to t} f^{\sigma}(s) = \lim_{s \to t} f(\sigma(s)) = \lim_{u \to t} f(u)$$

existe, já que f é regrada (se f for rd-contínua, tal limite é igual a $f(t) = f^{\sigma}(t)$ e f^{σ} é contínua em t).

Agora, se $t \in \mathbb{T}$ é denso à esquerda, o limite $\lim\limits_{s \to t^-} \sigma(s)$ existe e, denotando $\alpha = \lim\limits_{s \to t^-} \sigma(s)$, o limite

$$\lim_{s \to t^-} f^{\sigma}(s) = \lim_{s \to t^-} f(\sigma(s)) = \lim_{u \to \alpha} f(u),$$

existe, já que f é regrada e $\alpha \in \mathbb{T}$ é um ponto denso à esquerda. Portanto f^{σ} é regrada se f é regrada, e f^{σ} é rd-contínua se f for rd-contínua. □

Teorema 2.20. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $a < b$ reais e $f\colon [a,b] \cap \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função regrada. Então f é limitada.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $f\colon [a,b] \cap \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ não é limitada. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset [a,b] \cap \mathbb{T}$ tal que $|f(t_n)| > n$. Como $[a,b] \cap \mathbb{T}$ é compacto (pois é um fechado dentro do compacto $[a,b]$), $\{t_n\}$ possui uma subsequência $\{t_{n_k}\}$ convergente, digamos para $t_0 \in [a,b]$. Como $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, $t_0 \in \mathbb{T}$, pois $\mathbb{T}$ é fechado e $\{t_{n_k}\} \subset \mathbb{T}$.

Por definição, t_0 não é ponto isolado de $\mathbb{T}$ e existe uma subsequência de $\{t_{n_k}\}$ que tende a t_0 ou pela direita ou pela esquerda, logo o limite de $f(t_n)$ quando t_0 é finito, já que f é regrada. Isto nos dá uma contradição e prova que f é limitada. □

Definição 2.21. Dizemos que uma função contínua $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é **pré-diferenciável com região de diferenciação** D, ou simplesmente **pré-diferenciável em** D, se $D \subset \mathbb{T}^k$, $\mathbb{T}^k - D$ é no máximo enumerável e não tem nenhum ponto isolado à direita de $\mathbb{T}$, e f é diferenciável em todos os pontos de D.

Exemplo 2.22. Considere a escala temporal $\mathbb{P}_{2,1} = \bigcup_{k=0}^{\infty}[3k, 3k+2]$ (veja Exemplo 2.7) e a função $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[3k, 3k+1] \\ t - 3k - 1, & \text{se } t \in [3k+1, 3k+2], k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Então f é pré-diferenciável em $D = \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty}\{3k+2\}$.

O cálculo em escalas temporais possui sua versão do *Teorema do Valor Médio*, dada a seguir.

Teorema 2.23 (Teorema do Valor Médio)**.** *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funções pré-diferenciáveis em D, com $|f^{\Delta}(t)| \leqslant g^{\Delta}(t)$ para todo $t \in D$. Então para todos $r, s \in \mathbb{T}$ e $r \leqslant s$ temos*

$$|f(s) - f(r)| \leqslant g(s) - g(r).$$

Demonstração. Sejam $r, s \in \mathbb{T}$ com $r \leqslant s$ e $[r, s) \setminus D = \{t_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\epsilon > 0$, usando o Princípio da Indução (Teorema 2.9) mostraremos que para $t \in [r, s]$ temos

$$|f(t) - f(r)| \leqslant g(t) - g(r) + \epsilon\left(t - r + \sum_{t_n < t}^{\infty} 2^{-n}\right) \tag{2.2}$$

Defina $S(t)$ como a condição de t satisfazer a desigualdade (2.2).

Para $t = r$ temos $|f(r) - f(r)| = 0$ e (2.2) está trivialmente satisfeita, ou seja $S(r)$ ocorre.

Se $t \in [r, s]$ é isolado à direita (neste caso $t \in D$) e $S(t)$ ocorre, queremos mostrar que $S(\sigma(t))$ ocorre. Usando o Teorema 2.16, a limitação para $|f^{\Delta}(t)|$, a hipótese de indução para t, e o fato que de $\sigma(t) > t$, temos

$$\begin{aligned}
|f(\sigma(t)) - f(r)| &= |f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) - f(r)| \leqslant \mu(t)|f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\leqslant \mu(t) g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \epsilon\left(t - r + \sum_{t_n < t}^{\infty} 2^{-n}\right) \\
&= g(\sigma(t)) - g(r) + \epsilon\left(t - r + \sum_{t_n < t}^{\infty} 2^{-n}\right) < g(\sigma(t)) - g(r) + \epsilon\left(\sigma(t) - r + \sum_{t_n < t}^{\infty} 2^{-n}\right),
\end{aligned}$$

o que mostra que $S(\sigma(t))$ ocorre.

Suponha agora que $t < s$ é denso à direita e que $S(t)$ ocorre, analizaremos dois casos: $t \in D$ e $t \notin D$.

Se $t \in D$, então f e g são diferenciáveis em t e existe $\delta > 0$ tal que $r < t{-}\delta < t{+}\delta < s$ e para todo $\tau \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ temos

$$|f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}|t - \tau| \quad \text{e} \quad |g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}|t - \tau|$$

e assim

$$|f(t) - f(\tau)| \leqslant \left(|f^{\Delta}(t)| + \frac{\epsilon}{2}\right)|t - \tau| \quad \text{e} \quad |g(t) - g(\tau)| \leqslant \left(g^{\Delta}(t) + \frac{\epsilon}{2}\right)|t - \tau|.$$

Para $\tau \in (t, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ temos

$$|f(\tau) - f(r)| \leqslant |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)| \leqslant \left(|f^{\Delta}(t)| + \frac{\epsilon}{2}\right)|t - \tau| + |f(t) - f(r)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(g^{\Delta}(t)+\frac{\epsilon}{2}\right)|t-\tau|+g(t)-g(r)+\epsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}^{\infty}2^{-n}\right)\\
&= g^{\Delta}(t)|t-\tau|+\frac{\epsilon}{2}|t-\tau|+g(t)-g(r)+\epsilon(t-\tau)+\epsilon\sum_{t_n<t}^{\infty}2^{-n}\\
&\leqslant g(\tau)-g(t)+\epsilon(\tau-t)+g(t)-g(r)+\epsilon(t-r)+\epsilon\sum_{t_n<\tau}^{\infty}2^{-n}\\
&= g(\tau)-g(r)+\epsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}^{\infty}2^{-n}\right),
\end{aligned}
$$

e portanto $S(\tau)$ ocorre. Agora, se $t\notin D$, então $t=t_m$ para algum $m\in\mathbb{N}$. Como f e g são contínuas, existe $\delta>0$ tal que $r<t-\delta<t+\delta<s$ e para $\tau\in(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$ temos

$$|f(\tau)-f(t)|\leqslant\epsilon 2^{-m-1}\quad\text{e}\quad|g(\tau)-g(t)|\leqslant\epsilon 2^{-m-1}.$$

Para $\tau\in(t,t+\delta)\cap\mathbb{T}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
|f(\tau)-f(r)|&\leqslant|f(\tau)-f(t)|+|f(t)-f(r)|\leqslant\epsilon 2^{-m-1}+g(t)-g(r)+\epsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}^{\infty}2^{-n}\right)\\
&\leqslant\epsilon 2^{-m-1}+g(\tau)+\epsilon 2^{-m-1}-g(r)+\epsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<t}^{\infty}2^{-n}\right)\\
&=\epsilon\cdot 2^{-m}+g(\tau)-g(r)+\epsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<t}^{\infty}2^{-n}\right)\leqslant g(\tau)-g(r)+\epsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}^{\infty}2^{-n}\right),
\end{aligned}
$$

e neste caso mostramos também que $S(\tau)$ ocorre.

Por fim, suponha que t é denso à esquerda e que $S(\tau)$ ocorre para $\tau\in[r,t)\cap\mathbb{T}$. Então

$$
\begin{aligned}
|f(\tau)-f(r)|&\leqslant g(\tau)-g(r)+\epsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}^{\infty}2^{-n}\right)\\
&\leqslant g(\tau)-g(r)+\epsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}^{\infty}2^{-n}\right),
\end{aligned}
$$

e como f e g são contínuas, tomando o limite quando $\tau\to t^-$, vemos que $S(t)$ ocorre.

Assim todas as hipóteses do Princípio da Indução (Teorema 2.9) estão verificadas, e (2.2) está verifcada para todo $t\in[r,s]\cap\mathbb{T}$. Como $\epsilon>0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon\to 0$ e $t=s$, obtemos o resultado. □

Do Teorema do Valor Médio, tiramos algumas consequências interessantes.

Corolário 2.24. *Sejam $r,s\in\mathbb{T}$ com $r\leqslant s$, U um intervalo qualquer de extremos em r e s, e $f,g\colon U\cap\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ funções pré-diferenciáveis em D. São válidas:*

(i) para todos $t, \tau \in U \cap \mathbb{T}$ temos

$$|f(t)-f(\tau)| \leqslant \sup_{t \in U \cap D} |f^{\Delta}(t)| \cdot |t-\tau|;$$

(ii) se $f^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in D$, então f é uma função constante em $U \cap \mathbb{T}$;

(iii) Se $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ para todo $t \in D$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(t) + c$, para todo $t \in U \cap \mathbb{T}$.

Demonstração. (i) Defina

$$M = \sup_{t \in U \cap D} |f^{\Delta}(t)|.$$

Se $M = \infty$, a desigualdade é trivial. Suponha então $M < \infty$ e defina a função $h\colon U \cap \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por $h(t) = M(t-r)$. Assim h é diferenciável em $U \cap \mathbb{T}^k$ e $h^{\Delta}(t) = M \geqslant |f^{\Delta}(t)|$, para todo $t \in U \cap D$. Pelo Teorema do Valor Médio obtemos $|f(t)-f(\tau)| \leqslant h(t)-h(\tau)$, para todos $t, \tau \in U \cap \mathbb{T}$ com $\tau \leqslant t$, o que conclui a demonstração deste item.

(ii) Como $f^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in U \cap D$, temos $M = 0$ em (i), e o resultado segue.

(iii) Segue diretamente do item (ii) aplicado à função $k = f - g$. □

Definição 2.25. Uma função $F\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada de **pré-antiderivada** de uma função $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se F é pré-diferenciável numa região D e $F^{\Delta}(t) = f(t)$ para todo $t \in D$.

Enunciamos agora um resultado que garante que toda função regrada possui uma pré-antiderivada, mas sem demonstração, uma vez que sua prova para escalas temporais em geral requer a introdução de outros conceitos que fogem do objetivo deste trabalho. Para a demonstração completa deste teorema, sugerimos a consulta de (BOHNER; PETERSON, 2001, Teorema 8.13).

Teorema 2.26. *Toda função regrada $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ possui uma pré-antiderivada.*

O item (iii) do Corolário 2.24 nos mostra que, dada uma função regrada definida num intervalo de uma escala temporal, todas as suas pré-antiderivadas diferem entre si por uma constante.

Definição 2.27. Dada uma função regrada $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, sua **integral indefinida** é definida por

$$\int f(t)\,\Delta t = F(t) + c,$$

onde F é uma pré-antiderivada de f e c é uma constante arbitrária.

Dados $r, s \in \mathbb{T}$, a **integral de Cauchy** é definida por

$$\int_r^s f(t)\,\Delta t = F(s) - F(r),$$

onde F é uma pré-antiderivada de f.

Uma função $F\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada de **antiderivada** de $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se $F^{\Delta}(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$, isto é, se F é uma pré-antiderivada de f em $D = \mathbb{T}^k$.

Exemplo 2.28. Vejamos alguns exemplos simples envolvendo integração em $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$.

(a) Calculemos $\int a^t\,\Delta t$, com $a \neq 1$. Note que para $t \in \mathbb{Z}$ temos

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \frac{1}{a-1}\left(\frac{a^{\sigma(t)}-a^t}{\sigma(t)-t}\right) = \frac{1}{a-1}\left(\frac{a^{t+1}-a^t}{t+1-t}\right) = a^t.$$

Assim $f(t)=a^t$ é regrada e uma antiderivada de f é $F(t)=\frac{a^t}{a-1}$. Portanto

$$\int a^t\,\Delta t = \frac{a^t}{a-1} + c.$$

(b) Para $k \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vamos calcular $\int (t+\alpha)^k\,\Delta t$. Note que

$$\left[\frac{(t+\alpha)^{k+1}}{k+1}\right]^{\Delta} = \frac{1}{k+1}[(t+\alpha+1)^{k+1}-(t+\alpha)^{k+1}]$$

e fazendo $t+\alpha=m$, temos

$$\begin{aligned}\left[\frac{(t+\alpha)^{k+1}}{k+1}\right]^{\Delta} &= \frac{1}{k+1}\left[\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}m^{k+1-p} - m^{k+1}\right] = \frac{1}{k+1}\sum_{p=1}^{k+1}\binom{k+1}{p}m^{k+1-p}\\ &= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}m^k = (t+\alpha)^k.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int (t+\alpha)^k\,\Delta t = \frac{(t+\alpha)^{k+1}}{k+1} + c.$$

(c) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, calculemos $\int \binom{t}{\alpha}\,\Delta t$. Como

$$\begin{aligned}\binom{t}{\alpha+1}^{\Delta} &= \frac{\binom{t+1}{\alpha+1}-\binom{t}{\alpha+1}}{t+1-\alpha} = \binom{t+1}{\alpha}\frac{t+1-\alpha}{\alpha+1} - \binom{t}{\alpha}\binom{t-\alpha}{\alpha+1}\\ &= \frac{(t+1)!}{(\alpha+1)!(t-\alpha)!} - \frac{t!(t-\alpha)}{(\alpha+1)!(t-\alpha)!} = \binom{t}{\alpha},\end{aligned}$$

segue que

$$\int \binom{t}{\alpha}\,\Delta t = \binom{t}{\alpha+1} + c.$$

O próximo resultado nos dá a existência de antiderivadas para funções rd-contínuas.

Teorema 2.29. *Toda função rd-contínua possui uma antiderivada. Em particular, se $t_0 \in \mathbb{T}$, então a função $F(t)=\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\Delta\tau$, para todo $t \in \mathbb{T}$ é uma antiderivada de f.*

Demonstração. Como f rd-contínua, f é regrada e portanto possui uma pré-antiderivada pelo Teorema 2.26. Queremos mostrar que F é uma antiderivada de f, isto é, queremos mostrar que $F^{\Delta}(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^{k}$.

Para isto, seja $t \in \mathbb{T}^{k} - D$. Como $\mathbb{T}^{k} - D$ não possui pontos isolados à direita de $\mathbb{T}$, t é denso à direita. Como f é rd-contínua (portanto contínua em t), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| \leqslant \epsilon$, para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$.

Defina $h(\tau) = F(\tau) - f(t)(\tau - t_0)$ para $\tau \in \mathbb{T}$, onde $t_0 \in \mathbb{T}$ está fixado. Então h é pré-diferenciável em D e $h^{\Delta}(\tau) = F^{\Delta}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$. Assim, $|h^{\Delta}(s)| = |f(s) - f(t)| \leqslant \epsilon$, para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap D$. Pelo Corolário 2.24, para $r \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ temos

$$\begin{aligned} |F(t) - F(r) - f(t)(t-r)| &= |h(t) + f(t)(t-t_0) - (h(r) + f(t)(r-t_0)) - f(t)(t-r)| \\ &= |h(t) - h(r)| \leqslant \sup_{s \in (t-\delta, t+\delta) \cap D} |h^{\Delta}(s)| \cdot |t-r| \leqslant \epsilon |t-r|, \end{aligned}$$

o que mostra que F é diferenciável em t e $F^{\Delta}(t) = f(t)$.

A última afirmação é então imediata da definição da integral de Cauchy. □

Apresentaremos agora algumas propriedades básicas da integração em escalas temporais, e são úteis para o cálculo de integrais de forma mais prática e simples. Muitos desses resultados são semelhantes aos já conhecidos para as integrais de Riemann.

Teorema 2.30. *Se $f \in C_{rd}$ e $t \in \mathbb{T}^{k}$, então $\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t) f(t)$.*

Demonstração. Como f é rd-contínua, temos $\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t)$, ainda, como F é diferenciável, sabemos que $F(\sigma(t)) - F(t) = \mu(t) F^{\Delta}(t)$. Portanto

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t) F^{\Delta}(t) = \mu(t) f(t).$$

□

Teorema 2.31. *Se $f^{\Delta}(t) \geqslant 0$ então f é não-decrescente.*

Demonstração. Sejam $f^{\Delta}(t) \geqslant 0$ em $[a,b] \cap \mathbb{T}$ e $s, t \in \mathbb{T}$ com $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$, então, pelo Teorema do Valor Médio, temos $f(t) - f(s) \geqslant 0$. Assim, $f(t) \geqslant f(s)$ e f é não-decrescente. □

Teorema 2.32. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C_{rd}$, então valem as seguintes propriedades*

(1) $\displaystyle\int_{a}^{b} [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t + \int_{a}^{b} g(t)\,\Delta t;$

(2) $\displaystyle\int_{a}^{b} (\alpha f)(t)\,\Delta t = \alpha \int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t;$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t$;

(4) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t$;

(5) $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\,\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\,\Delta t$;

(6) $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\,\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\,\Delta t$;

(7) $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\Delta t = 0$;

(8) *Se* $f(t) \geqslant 0$ *para* $a \leqslant t < b$, *então* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\Delta t \geqslant 0$;

(9) *Se* $|f(t)| \leqslant g(t)$ *em* $[a,b)$, *então* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leqslant \int_a^b g(t)\,\Delta t$.

Demonstração. (1) Note que

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\Delta t = (F+G)(b) - (F+G)(a) = \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t.$$

(2) Temos

$$\alpha\int_a^b f(t)\,\Delta t = \alpha(F(b) - F(a)) = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \int_a^b (\alpha f)(t)\,\Delta(t).$$

(3) Veja que

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\,\Delta t.$$

(4) Note que

$$\int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^b f(t)\,\Delta t.$$

(5) Sabemos que $(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$, assim

$$\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\,\Delta t + \int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\,\Delta t = \int_a^b (fg)^{\Delta}(t)\,\Delta t,$$

isto é

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\,\Delta(t) = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\,\Delta t.$$

(6) Análogo ao item (5), usando a igualdade $(fg)^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$.

(7) Segue direto da definição.

(8) Como $f(t) \geqslant 0$ para $a \leqslant t < b$, então $F^{\Delta}(t) = f(t) \geqslant 0$. Pelo Teorema 2.31, F é não-descrescente, assim $F(b) - F(a) \geqslant 0$. Logo, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\Delta t \geqslant 0$.

(9) Temos $g(t) - |f(t)| \geqslant 0$, pelo item (8), $\displaystyle\int_a^b (g(t) - |f(t)|)\,\Delta t \geqslant 0$. Assim

$$\int_a^b g(t)\,\Delta t \geqslant \int_a^b |f(t)|\,\Delta t \geqslant \left| \int_a^b f(t)\,\Delta t \right|.$$

□

Teorema 2.33. *Sejam $a, b \in \mathbb{T}$ e $f \in C_{rd}$. Então,*

(i) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então $\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt$;

(ii) Se $[a, b]$ consiste apenas de pontos isolados, então

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t \in [a,b)} \mu(t) f(t), & \textit{se } a < b \\ 0, & \textit{se } a = b \\ \displaystyle -\sum_{t \in [b,a)} \mu(t) f(t), & \textit{se } b < a \end{cases}$$

(iii) Se $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ com $h > 0$, então

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & \textit{se } a < b \\ 0, & \textit{se } a = b \\ \displaystyle -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & \textit{se } b < a \end{cases}$$

Demonstração. *(i)* Como $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos $F^{\Delta}(t) = F'(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e segue o resultado.

(ii) Por hipótese, o intervalo $[a, b]$ possui apenas pontos isolados, assim podemos escrever $[a, b] = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ com $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Então, usando o Teorema 2.30, obtemos

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_{t_0}^{t_n} f(t)\,\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\Delta t + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\Delta t$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) f(t_i) = \sum_{t \in [a,b)} \mu(t) f(t)$$

Portanto $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\Delta t = \sum_{t \in [a,b)} \mu(t) f(t)$, quando $a < b$. O resultado é mostrado de forma análoga para $b < a$ e é imediato quando $a = b$.

O item *(iii)* é imediato de (ii), e a demonstração está completa. □

Exemplo 2.34. Vamos calcular a integral $\int_0^t s\Delta s$ usando o Teorema 2.33.

- Quando $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ temos
$$\int_0^t s\Delta s = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}.$$

- Quando $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$ temos
$$\int_0^{\frac{t}{h}} f(hs)\,\Delta s = \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} h^2 k = \frac{h}{2}(t-h)t.$$

Por fim, de maneira análoga ao Cálculo Diferencial, definimos a integral imprópria para uma função rd-contínua.

Definição 2.35. Para $a\in\mathbb{T}$, $\sup\mathbb{T}=\infty$ e f rd-conínua em $[a,\infty)\cap\mathbb{T}$, definimos a **integral imprópria** de f em $[a,\infty)\cap\mathbb{T}$ por
$$\int_a^\infty f(t)\,\Delta t = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\,\Delta t,$$
desde que este limite exista. Quando o limite existe, dizemos que a integral $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ **converge**. Caso contrário, diremos que a integral **diverge**.

Exemplo 2.36. Sejam $q>1$ e $\mathbb{T}=\{q^n\colon n\in\mathbb{Z}\}\cup\{0\}$ a escala quântica dada no item (d) do Exemplo 2.17. Temos
$$\left(-\frac{q}{t}\right)^\Delta = \frac{1}{t^2},$$
logo
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\Delta t = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{t^2}\,\Delta t = \lim_{b\to\infty} -\frac{q}{t}\bigg|_1^b = q.$$

2.3 REGRA DA CADEIA

Nesta seção apresentaremos duas versões da regra da cadeia (uma diferencial e uma integral), além de um resultado que nos permite mudar as escalas temporais no cálculo de algumas integrais. Mas antes de começarmos, vejamos que a regra da cadeia da maneira usual não é válida em geral para escalas temporais.

Exemplo 2.37. Sejam $f,g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(t)=t^2$ e $g(t)=2t$. Temos $(f\circ g)(t)=4t^2$ e $(f\circ g)^\Delta(t)=8t+4$. Por outro lado, se utilizarmos a regra da cadeia conhecida no conjunto dos números reais, temos $f^\Delta(g(t))g^\Delta(t)=8t+2$.

A seguinte versão da regra da cadeia para escalas temporais é bastante útil em aplicações.

Teorema 2.38 (Regra da Cadeia)**.** *Assuma que $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua e $g\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é delta diferenciável em $\mathbb{T}^k$, e $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Então existe $c\in[t,\sigma(t)]$ tal que*

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=f'(g(c))g^{\Delta}(t) \tag{2.3}$$

Demonstração. Fixe $t\in\mathbb{T}^k$. Primeiro, suponha que t é isolado à direita. Assim

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\frac{f(g(\sigma(t)))-f(g(t))}{\mu(t)}.$$

Note que se $g(\sigma(t))=g(t)$, então $(f\circ g)^{\Delta}(t)=0$ e $g^{\Delta}(t)=0$. Logo (2.3) é trivial para todo $c\in[t,\sigma(t)]$. Agora, se $g(\sigma(t))\neq g(t)$, do Teorema do Valor Médio usual para funções reais de uma variável real, existe $d\in\mathbb{R}$ entre $g(t)$ e $g(\sigma(t))$ de forma que

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\frac{f(g(\sigma(t)))-f(g(t))}{g(\sigma(t))-g(t)}\cdot\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\mu(t)}=f'(d)g^{\Delta}(t).$$

Como $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua, existe $c\in[t,\sigma(t)]$ tal que $g(c)=d$, o que implica que $(f\circ g)^{\Delta}(t)=f'(g(c))g^{\Delta}(t)$.

Suponha agora que t é denso à direita ($\sigma(t)=t$). Assim

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(g(t))-f(g(s))}{t-s}=\lim_{s\to t}f'(d_s)\left[\frac{g(t)-g(s)}{t-s}\right],$$

onde $d_s\in\mathbb{R}$ é um valor entre $g(s)$ e $g(t)$. Como g é contínua, $d_s\to g(t)$ quando $s\to t$, e como f' é cont'inua, $f'(d_s)\to f(g(t))$ quando $s\to t$, e (2.3) segue. □

Exemplo 2.39. (a) Sejam $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $f(t)=t^2$ e $g(t)=2t$. Vamos encontrar $c\in[t,\sigma(t)]$ tal que $(f\circ g)^{\Delta}(3)=f'(g(c))g^{\Delta}(3)$. Temos $c\in[3,4]$, $(f\circ g)^{\Delta}(3)=28$, $f'(g(c))=4c$ e $g^{\Delta}(3)=2$. Logo, $c=\frac{7}{2}$.

(b) Sejam $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ e $f(t)=g(t)=t^2$. Vamos encontrar $c\in[t,\sigma(t)]$ tal que $(f\circ g)^{\Delta}(2)=f'(g(c))g^{\Delta}(2)$. Temos $c\in[2,3]$, $(f\circ g)^{\Delta}(2)=65$, $f'(g(c))=2c^2$ e $g^{\Delta}(2)=5$. Logo, $c=\sqrt{6,5}$.

Vejamos agora uma versão integral da regra da cadeia para escalas temporais, que não exige que a função g esteja definida em todo $\mathbb{R}$.

Teorema 2.40 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e $g\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ uma função delta diferenciável. Então $f\circ g\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é delta diferenciável e*

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left[\int_0^1 f'(g(t))+h\mu(t)g^{\Delta}(t)\,dh\right]g^{\Delta}(t) \tag{2.4}$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f(g(\sigma(t)))-f(g(s))=\int_{g(s)}^{g(\sigma(t))} f'(\tau)\,d\tau.$$

Usando a regra da substituição na integral de Riemann, fazendo $\tau=hg(\sigma(t))+(1-h)g(s)$, obtemos $d\tau=[g(\sigma(t))-g(s)]\,dh$ e ainda, se $\tau=g(s)$, então $h=0$ e se $\tau=g(\sigma(t))$, então $h=1$. Assim

$$\begin{aligned} f(g(\sigma(t)))-f(g(s))=&\int_0^1 [f'(hg(\sigma(t))+(1-h)g(s))][g(\sigma(t))-g(s)]\,dh\\ =&[g(\sigma(t))-g(s)]\left[\int_0^1 f'(hg(\sigma(t))+(1-h)g(s))\,dh\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sejam $t\in\mathbb{T}^k$ e $\epsilon>0$. Por hipótese, g é delta diferenciável, assim existe $\delta_1>0$ tal que para $s\in(t-\delta_1,t+\delta_1)\cap\mathbb{T}$ temos

$$|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leqslant\epsilon_1|\sigma(t)-s|, \tag{2.6}$$

onde

$$\epsilon_1=\frac{\epsilon}{1+2\displaystyle\int_0^1 |f'(hg(\sigma(t))+(1-h)g(t))|\,dh}>0.$$

Como f' é contínua em $\mathbb{R}$, e portanto uniformemente contínua em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, existe $\delta_2>0$ tal que para $s\in(t-\delta_2,t+\delta_2)\cap\mathbb{T}$ temos

$$|f'(hg(\sigma(t))+(1-h)g(s))-f'(hg(\sigma(t))+(1-h)g(t))|\leqslant\frac{\epsilon}{2(\epsilon_1+|g^{\Delta}(t)|)}$$

uma vez que

$$|hg(\sigma(t))+(1-h)g(s))-(hg(\sigma(t))+(1-h)g(t))|=(1-h)|g(s)-g(t)|\leqslant|g(s)-g(t)|.$$

Defina $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $\alpha=hg(\sigma(t))+(1-h)g(s)$ e $\beta=hg(\sigma(t))+(1-h)g(t)$. Temos assim

$$\begin{aligned} &\left|(f\circ g)(\sigma(t))-(f\circ g)(s)-(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)\int_0^1 f'(\beta)\,dh\right|\\ &\overset{(2.5)}{=}\left|[g(\sigma(t))-g(s)]\int_0^1 f'(\alpha)\,dh-(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)\int_0^1 f'(\beta)\,dh\right|\\ &=\left|[g(\sigma(t))-g(s)]\int_0^1 f'(\alpha)\,dh-(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)\int_0^1 f'(\beta)\,dh\right.\\ &\qquad\left.+(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)\left[\int_0^1 f'(\alpha)\,dh-\int_0^1 f'(\alpha)\,dh\right]\right|\\ &=\left|[g(\sigma(t))-g(s)-[\sigma(t)-s]g^{\Delta}(t)]\int_0^1 f'(\alpha)\,dh+(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)\int_0^1[f'(\alpha)-f'(\beta)]\,dh\right| \end{aligned}$$

$$\leqslant \left| g(\sigma(t)) - g(s) - (\sigma(t) - s) g^{\Delta}(t) | \int_0^1 |f'(\alpha)\, dh \right| + |\sigma(t) - s||g^{\Delta}(t)| \int_0^1 |f'(\alpha) - f'(\beta)|\, dh$$
$$\overset{(2.6)}{\leqslant} \epsilon_1 |\sigma(t) - s| \int_0^1 |f'(\alpha)|\, dh + |\sigma(t) - s||g^{\Delta}(t)| \int_0^1 |f'(\alpha) - f'(\beta)|\, dh$$
$$\leqslant \epsilon_1 |\sigma(t) - s| \int_0^1 |f'(\beta)|\, dh + [\epsilon_1 + |g^{\Delta}(t)|]|\sigma(t) - s| \int_0^1 |f'(\alpha) - f'(\beta)|\, dh$$
$$\leqslant \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| + \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| = \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

logo $f \circ g$ é delta diferenciável e $(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left[\int_0^1 f'(g(t)) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\, dh \right] g^{\Delta}(t)$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 2.41. Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = e^x$ e $g(t) = t^2$, assim $f'(x) = e^x$ e $g^{\Delta}(t) = 2t + 1$. Pelo Teorema 2.40, temos

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left[\int_0^1 f'(g(t)) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\, dh \right] g^{\Delta}(t) = \left[\int_0^1 e^{t^2 + h(2t+1)}\, dh \right] (2t + 1)$$
$$\overset{p=(2t+1)h}{=} \quad (2t+1) e^{t^2} \int_0^{2t+1} \frac{e^p}{2t+1}\, dp = e^{t^2 + 2t + 1} - e^{t^2},$$

e portanto $(f \circ g)^{\Delta}(t) = e^{t^2 + 2t + 1} - e^{t^2}$.

Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $\nu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente tal que $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ também seja uma escala temporal. Vamos denotar a função passo a frente em $\widetilde{\mathbb{T}}$ por $\widetilde{\sigma}$ e a delta derivada em $\widetilde{\mathbb{T}}$ por $\widetilde{\Delta}$. Note que $\nu \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \nu$. Vejamos agora uma versão da regra da cadeia quando misturamos estas escalas temporais.

Teorema 2.42 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $\nu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente tal que $\widetilde{\mathbb{T}}$ é também uma escala temporal, e $\omega\colon \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$. Se $\nu^{\Delta}(t)$ e $\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))$ existem para todo $t \in \mathbb{T}^k$, então*

$$(\omega \circ \nu)^{\Delta} = (\omega^{\widetilde{\Delta}} \circ \nu) \nu^{\Delta} \tag{2.7}$$

Demonstração. Dado $0 < \epsilon < 1$, defina

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1 + |\nu^{\Delta}(t)| + |\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))|} > 0.$$

Por hipótese, $\nu^{\Delta}(t)$ e $\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))$ existem, e existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$|\nu(\sigma(t)) - \nu(s) - \nu^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \epsilon_1 |\sigma(t) - s|, \tag{2.8}$$

para $s \in (t - \delta_1, t + \delta_2) \cap \mathbb{T}$, e

$$|\omega(\widetilde{\sigma}(\nu(t))) - \omega(r) - \omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))(\widetilde{\sigma}(\nu(t))) - r| \leqslant \epsilon_1 |\widetilde{\sigma}(\nu(t)) - r|, \tag{2.9}$$

para $r \in (\nu(t)-\delta_2, \nu(t)+\delta_2) \cap \widetilde{\mathbb{T}}$.

Como ν é estritamente crescente, existe $0<\delta<\delta_1$ tal que $(t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T} \subset \nu^{-1}((\nu(t)-\delta_2, \nu(t)+\delta_2)\cap\widetilde{\mathbb{T}})$. Para $s \in (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$ temos $s\in(t-\delta_1, t+\delta_1)\cap\mathbb{T}$ e $\nu(s) \in (\nu(t)-\delta_2, \nu(t)+\delta_2)\cap\widetilde{\mathbb{T}}$. Usando (2.8) e (2.9) obtemos

$$
\begin{aligned}
&|\omega(\nu(\sigma(t)))-\omega(\nu(s))-(\sigma(t)-s)\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))\nu^{\Delta}(t)| \\
&\quad = |\omega(\nu(\sigma(t)))-\omega(\nu(s))-[\widetilde{\sigma}(\nu(t))-\nu(s)]\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))+[\widetilde{\sigma}(\nu(t))-\nu(s) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -(\sigma(t)-s)\nu^{\Delta}(t)]\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))| \\
&\quad \leqslant \epsilon_1|\widetilde{\sigma}(\nu(t))-\nu(s)|+\epsilon_1|\sigma(t)-s||\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))| \\
&\quad \leqslant \epsilon_1[|\widetilde{\sigma}(\nu(t))-\nu(s)-(\sigma(t)-s)\nu^{\Delta}(t)|+|\sigma(t)-s||\nu^{\Delta}(t)|+|\sigma(t)-s||\omega^{\widetilde{\Delta}}|(\nu(t))|] \\
&\quad \leqslant \epsilon_1[\epsilon_1|\sigma(t)-s|+|\sigma(t)-s||\nu^{\Delta}(t)|+|\sigma(t)-s||\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))] \\
&\quad = \epsilon_1|\sigma(t)-s|[\epsilon_1+|\nu^{\Delta}(t)|+|\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))|] \\
&\quad \leqslant \epsilon_1|\sigma(t)-s|[1+|\nu^{\Delta}(t)|+|\omega^{\widetilde{\Delta}}(\nu(t))|] \leqslant \epsilon|\sigma(t)-s|,
\end{aligned}
$$

o que prova (2.7). □

Exemplo 2.43. Sejam $\mathbb{T}=\mathbb{N}_0$ e $\nu\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ dada por $\nu(t)=4t+1$, assim $\widetilde{\mathbb{T}}=\nu(\mathbb{T})=\{4n+1, n\in\mathbb{N}_0\}=\{1,5,9,13,\ldots\}$. Defina $\omega\colon\widetilde{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ por $\omega(t)=t^2$, então $(\omega\circ\nu)(t)=(4t+1)^2$ e $(\omega\circ\nu)^{\Delta}(t)=32t+24$. Pelo Teorema 2.42, temos $((\omega^{\widetilde{\Delta}}\circ\nu)\nu^{\Delta})(t)=32t+24$.

Tomando $\omega=\nu^{-1}$ no Teorema 2.42, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.44. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $\nu\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ estritamente crescente tal que $\widetilde{\mathbb{T}}=\nu(\mathbb{T})$ seja uma escala temporal. Então*

$$\frac{1}{\nu^{\Delta}}=(\nu^{-1})^{\widetilde{\Delta}}\circ\nu.$$

Para terminar este capítulo, mostramos como fica a regra da substituição de variáveis para escalas temporais.

Teorema 2.45. *Sejam $\nu\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ uma função estritamente crescente tal que $\widetilde{\mathbb{T}}=\nu(\mathbb{T})$ seja uma escala temporal. Se $f\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é rd-contínua e ν é diferenciável com derivada rd-contínua, então, para $a,b\in\mathbb{T}$ temos*

$$\int_a^b f(t)\nu^{\Delta}(t)\,\Delta t=\int_{\nu(a)}^{\nu(b)}(f\circ\nu^{-1})(s)\,\widetilde{\Delta}s.$$

Demonstração. Como $f\nu^{\Delta}$ é rd-contínua, segue do Teorema 2.29 que $f\nu^{\Delta}$ possui uma antiderivada F, isto é, $F^{\Delta}=f\nu^{\Delta}$ em $\mathbb{T}^k$. Usando o Teorema 2.42, obtemos

$$\int_a^b f(t)\nu^{\Delta}(t)\,\Delta t = F(b)-F(a)=(F\circ\nu^{-1})(\nu(b))-(F\circ\nu^{-1})(\nu(a))$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (F\circ\nu^{-1})^{\widetilde{\Delta}}(s)\,\widetilde{\Delta}s = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (F^{\Delta}\circ\nu^{-1})(s)(\nu^{-1})^{\widetilde{\Delta}}(s)\,\widetilde{\Delta}s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f\nu^{\Delta})\circ\nu^{-1})(s)(\nu^{-1})^{\widetilde{\Delta}}(s)\,\widetilde{\Delta}s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f\circ\nu^{-1})(s)[(\nu^{\Delta}\circ\nu^{-1})(\nu^{-1})^{\widetilde{\Delta}}](s)\,\widetilde{\Delta}s = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f\circ\nu^{-1})(s)\,\widetilde{\Delta}(s),
\end{aligned}
$$

e o resultado segue. □

Exemplo 2.46. Considere a escala temporal $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{1/2} = \{\sqrt{n} \colon n \in \mathbb{N}_0\}$. Vamos usar este último resultado para calcular a integral

$$\int_0^t (\sqrt{\tau^2+1}+\tau)3^{\tau^2}\Delta\tau.$$

Veja que se $\nu(t) = t^2$, então ν é estritamente crescente em $\mathbb{T}$ e $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T}) = \mathbb{N}_0$ é uma escala temporal. Do item (c) do Exemplo 2.15, sabemos que $\nu^{\Delta}(t) = \sqrt{t^2+1}+t$ para todo $t \in \mathbb{T}$, e se $f(t) = 3t^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (\sqrt{\tau^2+1}+\tau)3^{\tau^2}\Delta\tau &= \int_0^t f(\tau)\nu^{\Delta}(\tau)\Delta\tau = \int_0^{t^2} f(\sqrt{s})\widetilde{\Delta}s \\
&= \int_0^{t^2} 3^s\widetilde{\Delta}s = \frac{3^s}{2}\Big|_0^{t^2} = \frac{3^{t^2}-1}{2}.
\end{aligned}
$$

NOTAS

A teoria de escalas temporais foi introduzida por S. Hilger em sua tese de doutorado em 1988 (HILGER, 1988) na tentativa de unificar o cálculo discreto e o diferencial. Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos desta teoria, bem como alguns resultados envolvendo derivação e integração es escalas temporais. Todo o trabalho aqui desenvolvido é baseado em (BOHNER; PETERSON, 2001) e suas referências.

3 EQUAÇÕES DINÂMICAS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo faremos o estudo de *equações dinâmicas de primeira ordem*, que são o análogo das equações diferenciais de primeira ordem para o caso de escalas temporais.

Definição 3.1. Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. A equação

$$y^{\Delta} = f(t, y, y^{\sigma}) \tag{3.1}$$

é chamada **equação dinâmica de primeira ordem**.

Se existem funções $f_1, f_2: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tais que $f(t, y, y^{\sigma}) = f_1(t)y + f_2(t)$ ou $f(t, y, y^{\sigma}) = f_1(t)y^{\sigma} + f_2(t)$, dizemos que a equação dinâmica de primeira ordem (3.1) é **linear**.

Uma função diferenciável $y: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada de **solução** de (3.1) quando satisfaz $y^{\Delta}(t) = f(t, y(t), y(\sigma(t)))$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$. A **solução geral** é definida como sendo o conjunto de todas as soluções de (3.1).

Dados $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, o problema

$$\begin{cases} y^{\Delta} = f(t, y, y^{\sigma}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

é chamado um **problema de valor inicial**. Uma solução y de (3.1) que satisfaz $y(t_0) = y_0$ é chamada de **solução do PVI** (3.2).

Iniciamos o estudo com um modelo simples de equação dinâmica de primeira ordem dada por:

$$\begin{cases} y^{\Delta} = p(t)y \\ y(t_0) = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

que dará origem à definição da *função exponencial* em escalas temporais. Para isso, apresentamos o *plano complexo de Hilger*.

3.1 PLANO COMPLEXO DE HILGER

Definição 3.2. Seja $h > 0$. O conjunto dos **números complexos de Hilger** é dado por

$$\mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\}.$$

Os **eixos reais e alternados de Hilger** são definidos, respectivamente, por

$$\mathbb{R}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ e } z > -\frac{1}{h} \right\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ e } z < -\frac{1}{h} \right\}.$$

Já o **círculo imaginário de Hilger** é dado por

$$\mathbb{I}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}$$

e a **faixa de Hilger** por

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon -\frac{\pi}{h} < Im(z) \leqslant \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Para completar a definição para $h = 0$, fazemos as seguintes convenções: $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}$, $\mathbb{A}_0 = \varnothing$ e $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Para $h > 0$ e $z \in \mathbb{C}_h$, a **parte real de Hilger** de z é dada por

$$Re_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h},$$

e a **parte imaginária de Hilger** de z é dada por

$$Im_h(z) = \frac{\arg(zh+1)}{h},$$

onde $\arg(\xi)$ denota o argumento principal do número complexo ξ (isto é, o ângulo da representação polar de ξ em $(-\pi, \pi]$).

Por fim, se $-\frac{\pi}{h} < \omega \leqslant \frac{\pi}{h}$, definimos o **número de Hilger puramente imaginário** $\mathbf{i}\omega$ por

$$\mathbf{i}\omega = \frac{e^{i\omega h}-1}{h}.$$

Note que para todo $z \in \mathbb{C}_h$ temos $-\frac{1}{h} < Re_h(z) < \infty$ e $-\frac{\pi}{h} < Im_h(z) \leqslant \frac{\pi}{h}$, já que $-\pi < \arg(zh+1) \leqslant \pi$. Além disso, se $-\frac{\pi}{h} < \omega << \frac{\pi}{h}$, então $|\mathbf{i}\omega|^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\omega h}{2})$, pois

$$|\mathbf{i}\omega|^2 = (\mathbf{i}\omega)(\overline{\mathbf{i}\omega}) = \left(\frac{e^{i\omega h}-1}{h}\right)\left(\frac{e^{-i\omega h}-1}{h}\right) = \frac{2}{h^2}(1-\cos\omega h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right).$$

Em $\mathbb{C}_h$ queremos definir operações que serão úteis a seguir.

Teorema 3.3. *Para todos $z, w \in \mathbb{C}_h$, defina a seguinte operação, chamada de **soma de Hilger**,*

$$z \oplus w = z + w + zwh.$$

Então $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ é um grupo abeliano.

Demonstração. Para $h > 0$ e $z, w \in \mathbb{C}_h$ temos

$$1 + h(z \oplus w) = 1 + h(z + w + zwh) = (1 + hz)(1 + hw),$$

e como $z \neq -\frac{1}{h}$ e $w \neq -\frac{1}{h}$, obtemos $z \oplus w \neq -\frac{1}{h}$. Logo, $z \oplus w \in \mathbb{C}_h$ e a soma de Hilger é fechada.

É claro que 0 é o elemento neutro da soma de Hilger, e o elemento oposto de z, denotado por $\ominus z$, é dado por $w = \frac{-z}{1+hz}$, uma vez que

$$z \oplus \ominus z = 0 \Leftrightarrow z + \ominus z + hz \ominus z = 0 \Leftrightarrow (1 + hz) = -z \Leftrightarrow \ominus z = \frac{-z}{1+hz}.$$

A associatividade e comutatividade seguem diretamente da definição da operação e de propriedades de números complexos, e portanto $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ é um grupo abeliano. □

Note que para $z \in \mathbb{C}_h$ e $w \in \mathbb{C}$, temos

$$z \oplus \frac{w}{1+hz} = z + \frac{w}{1+hz} + \frac{zwh}{1+hz} = \frac{(z+w)(hz+1)}{1+hz} = z+w.$$

Além disso, veja que se $z \in \mathbb{C}_h$, então $z = Re_h(z) \oplus \mathbf{i}Im_h(z)$. De fato

$$\begin{aligned} Re_h(z) \oplus \mathbf{i}Im_h(z) &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{e^{i\arg(zh+1)}-1}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{e^{i\arg(zh+1)}-1}{h} + \left(\frac{|zh+1|-1}{h}\right)\left(\frac{e^{i\arg(zh+1)}-1}{h}\right)h \\ &= \frac{1}{h}(|zh+1|e^{i\arg(zh+1)}-1) = z, \end{aligned}$$

pois $zh+1 = |zh+1|e^{i\arg(zh+1)}$.

Com o elemento oposto da soma de Hilger, definimos a **subtração de Hilger** em $\mathbb{C}_h$ por

$$z \ominus w = z \oplus (\ominus w) \quad \text{para } z, w \in \mathbb{C}_h,$$

e o **quadrado generalizado** de $z \in \mathbb{C}_h$ por

$$z^{②} = (-z)(\ominus z) = \frac{z^2}{1+zh}.$$

É simples verificar as seguintes propriedades: para $h > 0$ e $z, w \in \mathbb{C}_h$ temos

(i) $\ominus(\ominus z) = z$;

(ii) $z \ominus z = 0$;

(iii) $z \ominus w = \frac{z-w}{1+wh}$;

(iv) $\ominus(\mathbf{i}z) = \overline{\mathbf{i}z}$;

(v) Se $h = 0$, então $z \ominus w = z - w$.

(vi) $(\ominus z)^{②} = z^{②}$;

(vii) $1 + zh = \frac{z^2}{z^{②}}$;

(viii) $z + (\ominus z) = z^{②}h$;

(ix) $z \oplus z^{②} = z + z^2$;

(x) $z^{②} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h$;

Por exemplo, para o item (x) seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Deste modo

$$\begin{aligned} z^{②} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z^2}{1+zh} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(a+bi)^2}{1+(a+bi)h} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2+2abi}{1+ah+ibh} \cdot \frac{1+ah-ibh}{1+ah-ibh} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2+2abi)(1+ah-bhi)}{(1+ah)^2+(bh)^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a^2-b^2+2abi)(1+ah-bhi) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 2ab + a^2bh + b^3h = 0 \Leftrightarrow b(2a + a^2h + b^2h) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } \left(a + \frac{1}{h^2}\right) + b^2 = \frac{1}{h^2} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \; ou \; z \in \mathbb{I}_h \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h. \end{aligned}$$

Além disso, temos o seguinte:

Teorema 3.4. *Seja $z \in \mathbb{C}_h$. Então $\overline{z} = \ominus z$ se, e somente se, $z \in \mathbb{I}_h$.*

Demonstração. Suponha $\overline{z} = \ominus z$. Queremos mostrar que $|z + \frac{1}{h}| = \frac{1}{h}$. Note que

$$\left|z + \frac{1}{h}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{h}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{h}\right) = \frac{1 + hz}{h^2(1 + hz)} = \frac{1}{h^2}.$$

Logo, $|z + \frac{1}{h}| = \frac{1}{h}$ e $z \in \mathbb{I}_h$. Agora, seja $z \in \mathbb{I}_h$, assim

$$\left|z + \frac{1}{h}\right|^2 = \frac{1}{h^2} \Leftrightarrow z\overline{z} + z\frac{1}{h} + \overline{z}\frac{1}{h} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}\left(z + \frac{1}{h}\right) = -\frac{z}{h} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{-z}{hz + 1} \Leftrightarrow \overline{z} = \ominus z.$$

□

3.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para definirmos a função exponencial, é essencial a *transformação cilíndrica* definida a seguir.

Definição 3.5. Para $h > 0$, definimos a **transformação cilíndrica** $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ por

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1 + zh) = \frac{1}{h}(\ln|1 + zh| + i\arg(1 + zh)),$$

onde Log é o valor principal do logaritmo complexo. Para $h = 0$, definimos $\xi_0(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Note que, para $h > 0$ a inversa da transformação cilíndrica ξ_h é dada por

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}(e^{zh} - 1) \quad \text{para } z \in \mathbb{Z}_h.$$

Além de ser inversível, $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ também é um homeomorfismo de grupos, quando definimos uma soma conveniente em $\mathbb{Z}_h$.

Teorema 3.6. *A transformação cilíndrica é um homomorfismo de grupos* $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ *em* $(\mathbb{Z}_h, +)$, *onde a soma em* $\mathbb{Z}_h$ *é dada por*

$$z + w = z + w \ \left(mod \frac{2\pi i}{h}\right).$$

Demonstração. Para $h = 0$, o resultado é trivial, para $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \xi_h(z \oplus w) &= \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1 + (z \oplus w)h) = \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1 + (z + w + hzw)h) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{Log}((1 + hw)(1 + hz)) = \frac{1}{h}[\mathrm{Log}(1 + hw) + \mathrm{Log}(1 + hz)] = \xi_h(z) + \xi_h(w), \end{aligned}$$

e portanto ξ_h é um homomorfismo de grupos. □

As funções regressivas têm um papel fundamental para a construção da função exponencial em escalas temporais.

Definição 3.7. Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Uma função $p\colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ é dita **regressiva** se satisfaz

$$1+\mu(t)p(t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

O conjunto de todas as funções rd-contínuas e regressivas é denotado por $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathbb{T}) = \mathscr{R}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Em $\mathscr{R}$ definimos a **soma de Hilger** por

$$(p\oplus q)(t) = p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t) \quad \text{para } t \in \mathbb{T}^k.$$

Se $\mathbb{T}$ tem um máximo m então $\mu(m)=0$, e assim $1+\mu(m)p(m)=1$ para qualquer função $p\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$. Também se, por exemplo, $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, então toda função é regressiva, já que $\mu(t)=0$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Teorema 3.8. *$(\mathscr{R},\oplus)$ é um grupo abeliano, chamado de* ***grupo regressivo****.*

Demonstração. Note que se $p,q\in\mathscr{R}$ temos

$$1+\mu(t)(p\oplus q)(t) = 1+\mu(t)[p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t)] = (1+\mu(t)p(t))(1+\mu(t)q(t)) \neq 0,$$

e a soma de Hilger é fechada em $\mathscr{R}$. É claro que o elemento neutro da operação é 0 e que o elemento simétrico de p é dado por $\ominus p(t) = -\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}$, uma vez que $p\oplus(\ominus p)=0$. A associatividade e comutatividade seguem direto da definição da operação $\oplus$, e portanto $(\mathscr{R},\oplus)$ é um grupo abeliano. □

Da demonstração deste resultado obtemos uma expressão para o elemento simétrico de $p\in\mathscr{R}$, dado por

$$\ominus p = \frac{-p}{1+\mu p}.$$

Com ele, podemos definir a **subtração de Hilger** em $\mathscr{R}$ por

$$(p\ominus q)(t) = (p\oplus(\ominus q))(t) \quad \text{para todos } p,q\in\mathscr{R} \text{ e } t\in\mathbb{T}^k,$$

e para $p,q\in\mathscr{R}$, as seguintes propriedades são facilmente verificadas:

(i) $\ominus(\ominus p) = p$;

(ii) $p\ominus q\in\mathscr{R}$;

(iii) $p\ominus q = \frac{p-q}{1+\mu q}$;

(iv) $\ominus(p\ominus q) = q\ominus p$;

(v) $\ominus(p\oplus q) = (\ominus p)\oplus(\ominus q)$;

(vi) $p\oplus\frac{q}{1+\mu p} = p+q$.

Finalmente, podemos definir a *função exponencial com expoente $p\in\mathscr{R}$.*

Definição 3.9. Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $p\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ uma função regressiva. A **função exponencial com expoente** p é dada por

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right) \quad \text{para } t,s\in\mathbb{T}.$$

Precisaremos verificar algumas condições antes de obtermos propriedades que motivem o nome de *função exponencial*, porém, uma propriedade é imediata:

Teorema 3.10. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $p \in \mathscr{R}$. Então a função exponencial com expoente p satisfaz a* ***propriedade de processo de evolução****, isto é,*

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s) \quad \textit{para todos } s,r,t \in \mathbb{T}.$$

Demonstração. Se $p \in \mathscr{R}$ e $r,s,t \in \mathbb{T}$, temos

$$\begin{aligned} e_p(t,r)e_p(r,s) &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right)\cdot\exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right) = e_p(t,s). \end{aligned}$$

□

Definição 3.11. Se $\mathbb{T}$ é uma escala temporal e $p \in \mathscr{R}$, a equação dinâmica linear de primeira ordem $y^\Delta = p(t)y$ é dita **regressiva**.

Queremos encontrar uma caracterização da função exponencial em termos de uma equação dinâmica. Para isso, comecemos com o seguinte resultado.

Teorema 3.12. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $p \in \mathscr{R}$. Dado $t_0 \in \mathbb{T}$, a função $y(\cdot) = e_p(\cdot,t_0)$ é uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y^\Delta(t) &= p(t)y(t) \\ y(t_0) &= 1 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Considere $t_0 \in \mathbb{T}^k$. Temos

$$y(t_0) = e_p(t_0,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right) = \exp(0) = 1,$$

e só nos resta mostrar que y satisfaz a equação dinâmica. Suponha $t < \sigma(t)$, assim

$$\begin{aligned} e_p^\Delta(t,t_0) &= \frac{e_p(\sigma(t),t_0) - e_p(t,t_0)}{\mu(t)} = \frac{\exp(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau) - \exp(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau)}{\mu(t)} \\ &= \frac{\exp(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau + \int_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau) - \exp(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau)}{\mu(t)} \\ &= \frac{\exp(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau)(\exp(\int_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau) - 1)}{\mu(t)} \\ &= \frac{\exp(\int_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau) - 1}{\mu(t)} e_p(t,t_0). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.30 temos $\displaystyle\int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau = \mu(t)\xi_{\mu(t)}(p(t))$, assim

$$\begin{aligned}
e_p^{\Delta}(t,t_0) =& \frac{\exp(\int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau)-1}{\mu(t)} e_p(t,t_0) = \frac{\exp(\mu(t)\xi_{\mu(t)}(p(t)))-1}{\mu(t)} e_p(t,t_0)\\
=&\xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(t)}(p(t)))e_p(t,t_0) = p(t)e_p(t,t_0),
\end{aligned}$$

e $y(t) = e_p(t,t_0)$ satisfaz a equação dinâmica em todo $t \in \mathbb{T}^k$ tal que $t < \sigma(t)$.

Suponha agora que $t = \sigma(t)$. Note que:

$$\begin{aligned}
&|y(\sigma(t))-y(s)-p(t)y(t)(\sigma(t)-s)| = |y(\sigma(t))-y(s)-p(t)y(t)(t-s)|\\
=&|e_p(t,t_0)-e_p(s,t_0)-p(t)e_p(t,t_0)(t-s)| = |e_p(t,t_0)(1-p(t)(t-s))-e_p(s,t_0)|\\
=&|e_p(t,t_0)(1-p(t))(t-s)-e_p(t,t_0)e_p(s,t)| = |e_p(t,t_0)(1-e_p(s,t)-p(t)(t-s))|\\
=&|e_p(t,t_0)|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - e_p(s,t) + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - p(t)(t-s)\right|\\
\leqslant&|e_p(t,t_0)|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - e_p(s,t)\right| + |e_p(t,t_0)|\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - p(t)(t-s)\right|\\
=&|e_p(t,t_0)|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - e_p(s,t)\right| + |e_p(t,t_0)|\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\,\Delta\tau\right|.
\end{aligned}$$

Como $p \in C_{rd}$ e $\sigma(t) = t$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to t} \xi_{\mu(r)}(p(r)) =& \lim_{r\to t} = \frac{1}{\mu(t)} \mathrm{Log}(1+\mu(r)p(r)) = \lim_{r\to t} \frac{\mu'(r)p(r)+\mu(r)p'(r)}{\mu'(r)(1+\mu(r)p(r))}\\
=& \lim_{r\to t} \frac{p(r)}{1+\mu(r)p(r)} + \frac{\mu(r)p'(r)}{\mu'(r)(1+\mu(r)p(r))} = p(t) = \xi_0(p(t)),
\end{aligned}$$

e dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U_1 de t tal que $|\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))| \leqslant \frac{\epsilon}{3|e_p(t,t_0)|}$, para todo $\tau \in U_1$. Assim para $s \in U_1$ temos

$$|e_p(t,t_0)|\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\,\Delta\tau\right| \leqslant \frac{\epsilon}{3}|t-s|.$$

Note que $\lim_{z\to 0} \frac{1-z-e^{-z}}{z} = 0$, e tomando $z = \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau$ existe uma vizinhança U_2 de t tal que se $s \in U_2$ e $s \leqslant t$ então

$$\left|\frac{1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - e_p(t,s)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau}\right| \leqslant \epsilon_1,$$

onde $\epsilon_1 = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+3|p(t)e_p(t,t_0)|}\right\}$. Para $s \in U = U_1 \cap U_2$ obtemos

$$\begin{aligned}
|e_p(t,t_0)|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau - e_p(s,t)\right| \leqslant& |e_p(t,t_0)|\epsilon_1\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right|\\
\leqslant& |e_p(t,t_0)|\epsilon_1\left\{\left|\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))]\,\Delta\tau\right| + |p(t)||t-s|\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant |e_p(t,t_0)| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))]\Delta\tau \right| + \epsilon_1 |e_p(t,t_0)||p(t)||t-s| \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{3}|t-s| + |e_p(t,t_0)|\epsilon_1 |p(t)||t-s| \leqslant \frac{2\epsilon}{3}|t-s|.
\end{aligned}$$

Juntando estas desigualdades, obtemos

$$|y(\sigma(t)) - y(s) - p(t)y(t)(\sigma(t)-s)| \leqslant \epsilon|t-s| \quad \text{para todo } s \in U,$$

o que conclui a demonstração. □

O Teorema 3.12 conclui, em particular, que equações do tipo (3.4) possuem solução. Vejamos que tal solução é única.

Teorema 3.13. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $p \in \mathscr{R}$. Dado $t_0 \in \mathbb{T}$, a única solução do problema de valor inicial* (3.4) *é dada por $y(t) = e_p(t,t_0)$ para $t \in \mathbb{T}$.*

Demonstração. Seja y uma solução de (3.4) e consideremos o quociente $\frac{y}{e_p(\cdot,t_0)}$, notando que $e_p(t,s) \neq 0$ para toda $p \in \mathbb{R}$ e $t,s \in \mathbb{T}$. Do Teorema 2.16 temos

$$\left(\frac{y(t)}{e_p(t,t_0)}\right)^{\Delta} = \frac{y^{\Delta}(t)e_p(t,t_0) - y(t)e_p^{\Delta}(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} = 0,$$

já que $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)$ e $e^{\Delta}(t,t_0) = p(t)e_p(t,t_0)$. Segue do Corolário 2.24 que $\frac{y}{e_p(\cdot,t_0)}$ é constante, e como $\frac{y(t_0)}{e_p(t_0,t_0)} = 1$ temos $y(t) = e_p(t,t_0)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. □

Tendo a caracterização da função exponencial com expoente p como sendo a única solução do problema de valor inicial (3.4), somos capazes de obter outras propriedades interessantes.

Teorema 3.14. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $p,q \in \mathscr{R}$. Então*

(i) $e_0(t,s) = 1$ *e* $e_p(t,t) = 1$;

(ii) $e_p(\sigma(t),s) = (1+\mu(t)p(t))e_p(t,s)$;

(iii) $e_{\ominus p}(t,s) = \dfrac{1}{e_p(t,s)}$;

(iv) $e_p(t,s) = \dfrac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$;

(v) $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$;

(vi) $e_{p\ominus q}(t,s) = \dfrac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)}$;

(vii) $\left(\dfrac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} = \dfrac{-p(t)}{e_p(\sigma(t),s)}$;

(viii) $e_{p\ominus q}^{\Delta}(\cdot,t_0) = (p-q)\dfrac{e_p(\cdot,t_0)}{e_q^{\sigma}(\cdot,t_0)}$.

Demonstração. A demonstração de (i) é trivial.

(ii) Como e_p é diferenciável em t, temos

$$e_p(\sigma(t),s) = e_p(t,s) + \mu(t)e_p^{\Delta}(t,s) = (1+\mu(t)p(t))e_p(t,s).$$

(iii) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{\Delta}(t) = (\ominus p)(t)y(t) \\ y(s) = 1 \end{cases},$$

que é regressivo já que $\ominus p \in \mathcal{R}$. Temos

$$\left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} = \frac{-e_p^{\Delta}(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} = \frac{-p(t)e_p(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} = \frac{-p(t)}{e_p(\sigma(t),s)}$$
$$= \frac{-p(t)}{(1+\mu(t)p(t))e_p(t,s)} = (\ominus p)(t)y(t),$$

e a unicidade de solução conclui a prova.

Os itens (iv), (v) e (vi) são provados analogamente. O item (vii) é um cálculo direto.

(viii) Sabemos que $e_{p\ominus q}^{\Delta}(\cdot,t_0) = (p\ominus q)e_{p\ominus q}(\cdot,t_0)$. Assim, do item (vi), $e_{p\ominus q}(t,s) = \frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)}$ e, como $p\ominus q = \frac{p-q}{1-\mu q}$, o resultado está completo. □

Outra propriedade bastante útil das funções exponencias é a seguinte:

Teorema 3.15. *Se $p \in \mathcal{R}$ e $a,b,c \in \mathbb{T}$, então $[e_p(c,\cdot)]^{\Delta} = -p[e_p(c,\cdot)]^{\sigma}$ e*

$$\int_a^b p(t)e_p(c,\sigma(t))\,\Delta t = e_p(c,a) - e_p(c,b).$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} p(t)e_p(c,\sigma(t)) &= p(t)e_{\ominus p}(\sigma(t),c) = p(t)(1+\mu(t)(\ominus p)(t))e_{\ominus p}(t,c) \\ &= p(t)\left(1 - \frac{p(t)\mu(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right)e_{\ominus p}(t,c) = \frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}e_{\ominus p}(t,c) \\ &= -(\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t,c) = -e_{\ominus p}^{\Delta}(t,c) = -e_p^{\Delta}(c,t), \end{aligned}$$

e portanto $e_p^{\Delta}(c,t) = -p(t)e_p(c,\sigma(t))$. Ainda, temos

$$\int_a^b p(t)e_p(c\sigma(t))\,\Delta t = -\int_a^b [e_p(c,t)]^{\Delta}\,\Delta t = -(e_p(c,b) - e_p(c,a)) = (e_p(c,a) - e_p(c,b),$$

o que conclui o resultado. □

Vejamos algora alguns exemplos de cálculo de funções exponenciais.

Exemplo 3.16. (a) Seja $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ com $h > 0$. Considere $\alpha \in \mathcal{R}$ constante, isto é $\alpha \in \mathbb{C}_h$, então $e_\alpha(t,0) = (1+h\alpha)^{\frac{t}{h}}$, para todo $t \in \mathbb{T}$. De fato, considere $y(t) = (1+h\alpha)^{\frac{t}{h}}$. Assim $y(0) = 1$ e como todo ponto é isolado em $\mathbb{T}$ temos

$$y^{\Delta}(t) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \frac{(1+h\alpha)^{\frac{t}{h}}h\alpha}{h} = \alpha(1+h\alpha)^{\frac{t}{h}} = \alpha y(t),$$

e segue do Teorema 3.12 que $y(t) = e_\alpha(t,0) = (1+h\alpha)^{\frac{t}{h}}$.

Note que, neste caso, para $s,t \in \mathbb{T}$ temos $e_\alpha(t+s,0) = (1+h\alpha)^{\frac{t+s}{h}} = e_\alpha(t,0)e_\alpha(s,0)$, isto é, $e_p(t,0)$ satisfaz a chamada **propriedade de semigrupo**.

(b) Para $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2$, sabemos que $\sigma(t) = (\sqrt{t}+1)^2$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Note que se $y(t) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$ temos $y(\sigma(t)) = y(t) + \mu(t)y(t)$, e assim $y^{\Delta}(t) = y(t)$. Segue do Teorema 3.12 que $y(t) = e_1(t,0) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

3.3 PROBLEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS E EQUAÇÕES ADJUNTAS

Nosso objetivo nesta seção é encontrar uma versão para a *Fórmula da Variação das Constantes* para o problema

$$\begin{cases} y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \tag{3.5}$$

sob certas condições sobre p e f. Claramente, com os resultados que já conhecemos da seção anterior, podemos enunciar o seguinte:

Teorema 3.17. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $p \in \mathscr{R}$. Dados $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, a função $y(t) = e_p(t,t_0)y_0$ é a única solução do problema de valor inicial* (3.5) *com $f \equiv 0$.*

Definição 3.18. Para $p \in \mathscr{R}$, definimos o operador $L_1 : C_{rd}^1 \to C_{rd}$ por

$$(L_1 y)(t) = y^{\Delta}(t) - p(t)y(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^k,$$

e operador **adjunto** $L_1^* : C_{rd}^1 \to C_{rd}$ por

$$(L_1^* x)(t) = x^{\Delta}(t) + p(t)x(\sigma(t)) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

Desta forma, a equação

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t) \tag{3.6}$$

se lê $L_1 y = f$. Dizemos que y é uma **solução** de (3.6) se $y \in C_{rd}^1$ e $(L_1 y)(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$.

A equação

$$x^{\Delta}(t) = -p(t)x(\sigma(t)) + f(t) \tag{3.7}$$

é chamada de **equação adjunta** de (3.6), e pode ser escrita como $L_1^* x = f$. Uma **solução de** (3.7) é uma função $x \in C_{rd}^1$ com $(L_1^* x)t = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$.

Exemplo 3.19 (Veja item (a) do Exemplo 3.16)**.** Para $h > 0$ e $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, a função $x(t) = (1 + h\alpha)^{-\frac{t}{h}}$ é solução da equação adjunta $x^{\Delta}(t) + \alpha x(\sigma(t)) = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{C}_h$ é uma constante (por vezes chamada de **constante regressiva**). De fato, como em $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ todo ponto é isolado, temos

$$x^{\Delta}(t) = \frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)} = x(t)\Big(-\frac{\alpha}{1 + h\alpha}\Big).$$

Teorema 3.20 (Identidade de Lagrange)**.** *Se $x, y \in C_{rd}^1$, então $x^{\sigma} L_1 y + y L_1^* x = (xy)^{\Delta}$.*

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned}(xy)^\Delta =& x^\sigma y^\Delta + x^\Delta y = x^\sigma y^\Delta - px^\sigma y + px^\sigma y + x^\Delta y = x^\sigma(y^\Delta - py) + y(x^\Delta + px^\sigma)\\ =& x^\sigma L_1 y + y L_1^* x\end{aligned}$$

□

Com este resultado, obtemos o seguinte:

Corolário 3.21. *Se x e y são soluções de $L_1 y = 0$ e $L_1^* x = 0$, respectivamente, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $xy = c$.*

Note que se y é uma solução não-trivial de $L_1 y = 0$ então $x = \frac{1}{y}$ é uma solução não trivial de $L_1^* x = 0$, pois

$$\begin{aligned}L_1^* x(t) =& x^\Delta(t) + p(t)x(\sigma(t)) = \left(\frac{1}{y(t)}\right)^\Delta + p(t)\frac{1}{y(\sigma(t))} = -\frac{y^\Delta(t)}{y(\sigma(t))y(t)} + p(t)\frac{1}{y(\sigma(t))}\\ =& \frac{-(y^\Delta(t) - p(t)y(t))}{y(\sigma(t))y(t)} = 0.\end{aligned}$$

Temos então o teorema de existência e unicidade de solução para o **problema de valor inicial adjunto**.

Teorema 3.22. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $p \in \mathscr{R}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então a única solução do problema de valor inicial adjunto*

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = -p(t)x(\sigma(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

é dada por $x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0$.

Demonstração. Se $t = t_0$, então $x(t_0) = e_{\ominus p}(t_0, t_0)x_0 = x_0$. Agora

$$e_{\ominus p}^\Delta(t, t_0) = \ominus p(t) e_{\ominus p}(t, s) = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \frac{1}{e_p(t, t_0)} = \frac{-p(t)}{e_p(\sigma(t), t_0)},$$

assim

$$x^\Delta(t) = x_0 e_{\ominus p}^\Delta(t, t_0) = x_0 \frac{-p(t)}{e_p(\sigma(t), t_0)} = x_0(-p(t)e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) = -p(t)x(\sigma(t)).$$

e portanto $x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0$ é uma solução de (3.8). A unicidade segue como na prova do Teorema 3.13. □

Vejamos agora como resolver o problema adjunto não-homogêneo.

Teorema 3.23. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $r \in \mathscr{R}$, f uma função rd-contínua, $t_0 \in \mathbb{T}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então a única solução para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -p(t)x(\sigma(t)) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

é dada por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau) f(\tau)\Delta\tau \quad \textit{para } t \in \mathbb{T}. \tag{3.10}$$

Demonstração. A verficação de que a função definida por (3.10) é uma solução para (3.9) pode ser feita diretamente. Agora suponha que x é uma solução de (3.9). Temos

$$\begin{aligned}(e_p(t,t_0)x)^{\Delta}(t) =& e_p(t,t_0)x^{\Delta}(t) + e_p^{\Delta}(t,t_0)x(\sigma(t)) = e_p(t,t_0)x^{\Delta(t)} + p(t)e_p(t,t_0)x(\sigma(t)) \\ =& e_p(t,t_0)[x^{\Delta}(t) + p(t)x(\sigma(t))] = e_p(t,t_0)f(t),\end{aligned}$$

e, sendo f rd-contínua, podemos integrar a igualdade acima de t_0 a t para obter

$$e_p(t,t_0)x(t) - e_p(t_0,t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\,\Delta\tau,$$

e o resultado segue, pois $e_p(t,\tau)e_p(\tau,t_0) = e_p(t,t_0)$. □

Com isso, terminamos esta seção apresentando a *Fórmula da Variação das Constantes* para a equação dinâmica linear de primeira ordem não-homogênea (3.5).

Teorema 3.24 (Fórmula da Variação das Constantes)**.** *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $p \in \mathscr{R}$, f uma função rd-contínua, $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Então a única solução de* (3.5) *é dada por*

$$y(t) = e_p(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau)\,\Delta\tau.$$

Demonstração. Como $p \in \mathscr{R}$, podemos reescrever $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t)$ como

$$y^{\Delta}(t) = -(\ominus p)(t)y(\sigma(t)) + \frac{f(t)}{1+\mu(t)p(t)},$$

e usando o Teorema 3.23 juntamente com o fato de que $\ominus(\ominus p) = p$ obtemos

$$y(t) = e_p(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\tau)\frac{f(\tau)}{1+\mu(\tau)p(\tau)}\Delta\tau.$$

Do Teorema 3.14 e da propriedade de processo de evolução sabemos que

$$\frac{e_p(t,\tau)}{1+\mu(\tau)p(\tau)} = \frac{e_p(t,\tau)}{e_p(\sigma(\tau),\tau)} = e_p(t,\sigma(\tau)),$$

e a demonstração está completa. □

3.4 EQUAÇÕES DINÂMICAS EM $\mathbb{R}^n$

Nas duas seções anteriores, estudamos equações dinâmicas a valores reais. Nosso objetivo aqui é generalizar o estudo de equações dinâmicas para espaços euclidianos e apresentar a *exponencial de matrizes* para escalas temporais. Estaremos interessados assim em estudar a equação dinâmica de primeira ordem

$$\begin{cases} y^{\Delta}(t) = A(t)y(t) \\ y(s) = I \end{cases}, \tag{3.11}$$

onde $y\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial, $A\colon \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$ é uma função matricial e I é o operador identidade em $\mathbb{R}^n$. Aqui, $M_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, e para simplificar a nomenclatura, ao identificarmos $M_n(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}^{n^2}$, podemos ver A também como uma função vetorial.

Claramente, se $y\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial, podemos escrever

$$y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t)) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T},$$

onde $y_i\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é uma função real definida na escala temporal $\mathbb{T}$ para cada $i = 1, \ldots, m$, e denotamos $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Definição 3.25. Dizemos que uma função vetorial $y = (y_1, \ldots, y_m)\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ é **rd-contínua** se y_i é rd-contínua para cada $i = 1, \ldots, m$. O conjunto dessas funções é denotado por $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^m)$.

Dizemos que $y = (y_1, \ldots, y_m)$ é **diferenciável** se y_i é diferenciável para cada $i = 1, \ldots, m$. Escrevemos $y^{\Delta}(t) = (y_1^{\Delta}(t), \ldots, y_m^{\Delta}(t))$. No caso de matrizes, para $A = (a_{ij})$ escrevemos $A^{\Delta} = (a_{ij}^{\Delta})$.

Uma função $Y\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é uma **antiderivada** de y se Y é diferenciável e $Y^{\Delta}(t) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$. Quando Y é uma antiderivada de y, a **integral indefinida** de y é definida por

$$\int y(t)\Delta t = Y(t) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. A **integral de Cauchy** de y é definida por

$$\int_s^t y(\tau)\Delta\tau = Y(t) - Y(s) \quad \text{para todos } s, t \in \mathbb{T}.$$

Aplicando as propriedades já vistas em cada coordenada da função vetorial, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.26. *Se y, w são diferenciáveis e $\alpha \in \mathbb{R}$, então*

(i) $(y + w)^{\Delta} = y^{\Delta} + w^{\Delta}$*;*

(ii) $(\alpha y)^{\Delta} = \alpha y^{\Delta}$*;*

(iii) $y(\sigma(t)) = y(t) + \mu(t)y^{\Delta}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^k$.

Especificamente para funções matriciais, temos as seguintes propriedades.

Teorema 3.27. *Sejam* $\mathbb{T}$ *uma escala temporal e* $A, B\colon \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$ *funções diferenciáveis. Então*

(i) $(AB)^{\Delta} = A^{\sigma}B^{\Delta} + A^{\Delta}B = A^{\Delta}B^{\sigma} + AB^{\Delta}$;

(ii) $(A^{-1})^{\Delta} = -(A^{\sigma})^{-1}A^{\Delta}A^{-1} = -A^{-1}A^{\Delta}(A^{\sigma})^{-1}$ *se A é inversível;*

(iii) $(AB^{-1})^{\Delta} = (A^{\Delta} - AB^{-1}B^{\Delta})(B^{\sigma})^{-1} = (A^{\Delta} - (AB^{-1})^{\sigma}B^{\Delta})B^{-1}$ *se* BB^{σ} *é inversível.*

Demonstração. O item *(i)* é análogo ao resultado para funções reais.

(ii) Suponha A inversível, utilizando o item *(iii)* em $AA^{-1} = I$, temos

$$(AA^{-1})^{\Delta} = I \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} A^{\sigma}(A^{-1})^{\Delta} + A^{\Delta}A^{-1} = 0 \Leftrightarrow (A^{-1})^{\Delta} = -(A^{\sigma})^{-1}A^{\Delta}A^{-1},$$

para a segunda igualdade, basta usar $(AA^{-1})^{\Delta} = -A^{-1}A^{\Delta}(A^{\sigma})^{-1}$.

Para o item *(iii)*, basta utilizar os itens *(i)* e *(ii)*. □

Agora estendemos o conceito de *regressividade* para funções matriciais.

Definição 3.28. Uma função matricial $A\colon \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$ é dita **regressiva** se $I + \mu(t)A(t)$ é inversível para todo $t \in \mathbb{T}^k$. O conjunto de tais funções é denotado por $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathbb{T}) = \mathscr{R}(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$. Para $A, B \in \mathscr{R}$ definimos a **soma de Hilger** por

$$(A \oplus B)(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

Teorema 3.29. $(\mathscr{R}, \oplus)$ *é um grupo.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathscr{R}$, então $I + \mu(t)A(t)$ e $I + \mu(t)B(t)$ são inversíveis para todo $t \in \mathbb{T}^k$ e assim a operação $\oplus$ é fechada em $\mathscr{R}$, pois $[I + \mu(A \oplus B)(t)] = [I + \mu(t)A(t)][I\mu(t)B(t)]$ é produto de matrizes inversíveis.

Claramente a matriz nula é o elemento neutro desta soma e o elemento oposto é dado por

$$(\ominus A)(t) = -[I + \mu(t)A(t)]^{-1}A(t).$$

Além disso, a associatividade segue diretamente da definição da soma, o que conclui o resultado. □

Note que se $A \in \mathscr{R}$, então podemos escrever $(\ominus A)(t) = -A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}$, já que

$$\begin{aligned} A(t) \oplus (\ominus A)(t) &= A(t) - A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1} - \mu(t)A^2(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1} \\ &= \{A(t)[I + \mu(t)A(t)] - A(t) - \mu(t)A^2\}[I + \mu(t)A(t)]^{-1} = 0. \end{aligned}$$

As seguintes propriedades são facilmente verificadas para matrizes regressivas.

Teorema 3.30. *Suponha $A, B \in \mathscr{R}$ e seja A^* a matriz transposta conjugada de A. Então,*

(i) A^* *é regressiva;*

(ii) $\ominus A^* = (\ominus A)^*$;

(iii) $A^* \oplus B^* = (B \oplus A)^*$.

3.4.1 Existência e unicidade em $\mathbb{R}^n$

Nesta subseção, mostraremos que e seguinte equação dinâmica linear de primeira ordem em $M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} X^{\Delta}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = I \end{cases} \tag{3.12}$$

onde $t_0 \in \mathbb{T}$ e A é regressiva, possui uma única solução, que será chamada de **função exponencial com expoente** A. Tais resultados podem ser encontrados de maneira geral para equações dinâmicas semilineares em (BOHNER; PETERSON, 2001). Apresentamos aqui, porém, uma demonstração simples para este caso, mas que dá a representação da solução de tal problema na chamada **série generalizada de Peano-Baker**, como em (CUNHA, 2006).

Existência. Para $t_0 \in \mathbb{T}$ e $K > 0$ fixado, defina $X_0(t) = I$ para todo $t \in [t_0, t_0 + K] \cap \mathbb{T}$ e indutivamente

$$X_{i+1}(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)X_i(s)\Delta s \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + K] \cap \mathbb{T} \text{ e } i \in \mathbb{N}_0.$$

Note que para todo $i \in \mathbb{N}_0$ podemos escrever

$$X_{i+1}(t) = X_0(t) + \sum_{j=0}^{i} (X_{j+1}(t) - X_j(t)), \tag{3.13}$$

e denotando $\alpha = \sup\limits_{t \in t_0, t_0+K] \cap \mathbb{T}} \|A(t)\|$ e $\beta = \int_{t_0}^{t_0+K} \|A(s)\|\Delta s$, temos

$$\|X_1(t) - X_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)X_0(s)\Delta s \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\Delta s \leqslant \beta,$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + K] \cap \mathbb{T}$. Também

$$\begin{aligned} \|X_2(t) - X_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(X_1(s) - X_0(s))\Delta s \right\| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \|X_1(s) - X_0(s)\|\Delta s \leqslant \alpha\beta(t - t_0), \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, t_0+K]$. De forma geral, obtemos

$$\|X_{i+1}(t)-X_i(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\|X_i(s)-X_{i-1}(s)\|\Delta s \leqslant \beta \frac{\alpha^i (t-t_0)^i}{i!}.$$

Portanto, pelo Teste M de Weierstrass, podemos passar o limite absolutamente e uniformemente em (3.13), e portanto existe uma função $X\colon [t_0, t_0+K] \to M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$X(t) = \lim_{t\to\infty} X_i(t) \quad \text{uniformemente em } [t_0, t_0+K] \cap \mathbb{T}.$$

Além disso, como todas as funções X_i são rd-contínuas, X também é. Passando o limite quando $t \to \infty$ obtemos então

$$X(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)X(s)\Delta s,$$

para todo $t \in [t_0, t_0+K] \cap \mathbb{T}$, e portanto X é uma solução de (3.12) em $[t_0, t_0+K] \cap \mathbb{T}$. Como K é arbitrário, construímos a solução em $[t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$. Para a solução em $(-\infty, t_0] \cap \mathbb{T}$, o procedimento é análogo.

Série Generalizada de Peano-Baker. Note que podemos reescrever X_2 da forma

$$\begin{aligned} X_2(t) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)X_1(s_1)\Delta s_1 \\ &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\left(I + \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\Delta s_2\right)\Delta s_1 \\ &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\Delta s_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\Delta s_2 \Delta s_1, \end{aligned}$$

e mais geralmente

$$\begin{aligned} X_i(t) = I &+ \int_{t_0}^{t} A(s_1)\Delta s_1 + \int_{t_0}^{s_1} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\Delta s_2 \Delta s_1 \\ &\cdots + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\cdots\int_{t_0}^{s_{i-1}} A(s_1)\Delta s_i \cdots \Delta s_1. \end{aligned}$$

Fazendo o limite quando $t \to \infty$, como a convergência é uniforme em compactos de $\mathbb{T}$, obtemos a representação de X na *série generalizada de Peano-Baker*, dada por

$$\begin{aligned} X(t) = I &+ \int_{t_0}^{t} A(s_1)\Delta s_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\Delta s_2 \Delta s_1 \\ &+ \cdots + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_1)\cdots\int_{t_0}^{s_{i-1}} A(s_i)\Delta s_i \Delta s_{i-1}\cdots\Delta s_1 + \cdots \end{aligned}$$

Utilizando esta expansão em série, também somos capazes de mostrar que X é solução de (3.12). De fato, derivando a expressão termo-a-termo, obtemos

$$X^{\Delta}(t) = A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(s_2)x_0\Delta s_2 + \cdots + A(t)\int_{t_0}^{t} A(s_2)\cdots\int_{t_0}^{s_{i-1}} A(s_1)\Delta s_i \cdots \Delta s_1 + \cdots$$

$$= A(t)X(t).$$

Unicidade. Para provar a unicidade de soluções de (3.12), precisaremos de uma versão da desigualdade de Gronwall para escalas temporais. Apresentaremos aqui a desigualdade sem demonstração, pois ela requer conceitos que fogem do escopo deste trabalho. Para mais detalhes, sugerimos a consulta de (BOHNER; PETERSON, 2001)[Capítulo 6].

Definição 3.31. Dizemos que uma função regressiva $p\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é **positivamente regressiva** se p é regressiva e $1+\mu(t)p(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$.

Apresentamos então a desigualdade de Gronwall (vide (BOHNER; PETERSON, 2001)[Teorema 6.4]).

Teorema 3.32 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Sejam $y, f \in C_{rd}$ e $p \geqslant 0$ uma função positivamente regressiva. Se*

$$y(t) \leqslant f(t) + \int_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{T},$$

então

$$y(t) \leqslant f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau)p(\tau)\Delta\tau \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Com este resultado, a unicidade de soluções de (3.12) é simples, já que se X, Y são soluções de (3.12), definindo $Z = X - Y$ temos $Z^{\Delta}(t) = A(t)Z(t)$ e $Z(t_0) = 0$. Mas assim, integrando $Z^{\Delta}(t) = A(t)Z(t)$ temos

$$Z(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)Z(s)\,\Delta s,$$

e portanto

$$\|Z(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\|Z(s)\|\,\Delta s \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Pela degigualdade de Gronwall obtemos $Z(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$, e a prova da unicidade está completa.

Concluímos assim o seguinte resultado:

Teorema 3.33. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $t_0 \in \mathbb{T}$ e $A\colon \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$ regressiva. Então:*

(i) dada $B \in M_n(\mathbb{R})$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X^{\Delta}(t) = A(t)X(t) \\ X(t) = B \end{cases}$$

possui uma única solução $X\colon \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$;

(ii) dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$.

Observação 3.34 (Sobre continuidade com relação as dados iniciais)**.** Notamos aqui que a demonstração sobre a continuidade com respeito aos dados iniciais é feita de forma análoga ao caso contínuo, e utiliza a ideia da demonstração da unicidade. Isto é, se X_1 e X_2 são ambas soluções da equação dinâmica $X^{\Delta}(t) = A(t)X(t)$ satisfazendo $X_1(t_0) = x_1$ e $X_2(t_0) = x_2$, então $Z = X_1 - X_2$ é também solução desta equação dinâmica e satisfaz uma limitação da forma

$$\|Z(t)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \|Z(s)\| \Delta s,$$

e o resultado segue da desigualdade de Gronwall.

3.5 EXPONENCIAL DE MATRIZES

Usando a solução única de (3.12) podemos definir a *função exponencial de expoente matricial*, e obter propriedades interessantes a respeito destas funções.

Definição 3.35. Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $t_0 \in \mathbb{T}$ e $A \in \mathscr{R}$. A única solução de (3.12) é chamada de **função exponencial matricial em t_0 de expoente** A, e é denotada por $e_A(t, t_0)$.

Teorema 3.36. *Se $A, B \in \mathscr{R}$, então*

(i) $e_0(t,s) = I$ *e* $e_A(t,t) = I$;

(ii) $e_A(\sigma(t), s) = [I + \mu(t)A(t)]e_A(t,s)$;

(iii) $e_A^{-1}(t,s) = e^*_{\ominus A^*}(t,s)$;

(iv) $e_A(t,s) = e_A^{-1}(s,t) = e^*_{\ominus A^*}(s,t)$;

(v) $e_A(t,s)e_A(s,r) = e_A(t,r)$;

(vi) $e_A(t,s)e_B(t,s) = e_{A\oplus B}(t,s)$, *se* $e_A(t,s)B(s) = B(t)e_A(t,s)$.

Demonstração. *(ii)* Pelo Teorema 3.26, temos $A(\sigma(t)) = A(t) + \mu(t)A^{\Delta}(t)$ e assim

$$e_A(\sigma(t), s) = e_A(t,s) + \mu(t)e_A^{\Delta}(t,s) = e_A(t,s) + \mu(t)A(t)e_A(t,s) = [I + \mu(t)A(t)]e_A(t,s).$$

(iii) Seja $Y(t) = (e_A^{-1}(t,s))^*$, então $Y(s) = (e_A^{-1}(s,s))^* = (I^{-1})^* = I$. Derivando $Y(t)$, temos

$$\begin{aligned} Y^\Delta(t) &= -(e_A(\sigma(t),s)e_A^\Delta(t,s)e_A^{-1}(t,s))^* = -(e_A^{-1}(\sigma(t),s)A(t)e_A(t,s)e_A^{-1}(t,s))^* \\ &= -(e_A(\sigma(t),s)A(t))^* = -(e_A^{-1}(t,s)(I+\mu(t)A(t))^{-1}A(t))^* \\ &= (e_A^{-1}(t,s)(\ominus A)(t))^* = (\ominus A^*)(t)(e_A^{-1}(t,s))^* = (\ominus A^*)(t)Y(t), \end{aligned}$$

assim Y é solução de (3.12), com $t_0 = s$. Então, $Y(t) = (e_A^{-1}(t,s))^* = e_{\ominus A^*}(t,s)$, isto é $(e_A^{-1}(t,s)) = e^*_{\ominus A^*}(t,s)$.

(v) Seja $Y(t) = e_A(t,s)e_A(s,r)$, então

$$Y^\Delta(t) = e_A^\Delta(t,s)e_A(s,r) = A(t)e_A(t,s)e_A(s,r) = A(t)Y(t)$$

e $Y(r) = e_A(r,s)e_A(s,r) \overset{(iv)}{=} I$. Logo, Y é solução de (3.12) com $t_0 = r$ e portanto $e_A(t,r) = e_A(t,s)e_A(s,r)$.

Os itens *(iv)* e *(vi)* são demonstrados de maneira análoga. □

A comutatividade entre A e e_A não é verdadeira em geral, como mostraremos na Subseção 3.5.2. Mas em alguns casos, isso pode ocorrer.

Teorema 3.37. *Suponha $A \in \mathcal{R}$ e C diferenciável. Se C é solução de $C^\Delta(t) = A(t)C(t) - C(\sigma(t))A(t)$, então $C(t)e_A(t,s) = e_A(t,s)C(s)$.*

Demonstração. Fixe $s \in \mathbb{T}$ e denote $F(t) = C(t)e_A(t,s) - e_A(t,s)C(s)$, assim $F(s) = 0$. Veja que

$$\begin{aligned} F^\Delta(t) &= C(\sigma(t))e_A^\Delta(t,s) + C^\Delta(t)e_A(t,s) - e_A(t,s)C(s) \\ &= C(\sigma(t))A(t)e_A(t,s) + C^\Delta(t)e_A(t,s) - A(t)e_A(t,s)C(s) \\ &= [C(\sigma(t))A(t) + C^\Delta(t)]e_A(t,s) - A(t)e_A(t,s)C(s)[-A(t)C(t)e_A(t,s) + A(t)C(t)e_A(t,s)] \\ &= [C^\Delta(t) + C(\sigma(t))A(t) - A(t)C(t)]e_A(t,s) + A(t)[C(t)e_A(t,s) - e_A(t,s)C(s)] \\ &= [A(t)C(t) - C(\sigma(t))A(t) + C(\sigma(t))A(t) - A(t)C(t)]e_A(t,s) + A(t)F(t) = A(t)F(t). \end{aligned}$$

Portanto F é solução de $F^\Delta(t) = A(t)F(t)$ com $F(s) = 0$ e, pelo Teorema 3.33 temos $F = 0$. □

Corolário 3.38. *Suponha $A \in \mathcal{R}$ e C matriz constante de mesma ordem. Se as matrizes C e A são comutativas, então C e $e_A(t,s)$ também são. Em particular, se A é uma matriz constante, então A e $e_A(t,s)$ comutam.*

Apresentamos agora a versão não homogênea de equações dinâmicas em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.39. *Seja $A \in \mathcal{R}$ e suponha $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ rd-contínua. Considere ainda $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y^\Delta(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $y: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, que á dada por:

$$y(t) = e_A(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau \tag{3.14}$$

Demonstração. Sabemos que $e_A(t,\sigma(\tau)) = e_A(t,t_0)e_A(t_0,\sigma(\tau))$, e podemos reescrever $y(t)$ dada por (3.14) como

$$y(t) = e_A(t,t_0)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau\right).$$

Derivando $y(t)$, temos

$$\begin{aligned} y^{\Delta}(t) =& e_A^{\Delta}(t,t_0)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau\right) + e_A(\sigma(t),t_0)e_A(t_0,\sigma(t))f(t) \\ =& A(t)e_A(t,t_0)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau\right) + e_A(\sigma(t),\sigma(t))f(t) \\ =& A(t)y(t) + f(t), \end{aligned}$$

então, $y(t)$ é uma solução do problema de valor inicial, uma vez que $y(t_0) = y_0$.

Suponha agora que $\tilde{y}$ seja outra solução para o problema de valor inicial e denote $v(t) = e_A(t_0,t)\tilde{y}(t)$. Novamente, como $e_A(t,t_0)e_A(t_0,t) = I$, temos $\tilde{y} = e_A(t,t_0)v(t)$. Então

$$\begin{aligned} A(t)e_A(t,t_0)v(t) + f(t) =& A(t)\tilde{y}(t) + f(t) = \tilde{y}^{\Delta}(t) = e_A^{\Delta}(t,t_0)v(t) + e_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t) \\ =& A(t)e_A(t,t_0)v(t) + e_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t), \end{aligned}$$

assim, $e_A(\sigma(t),t+0)v^{\Delta}(t) = f(t)$ e $v^{\Delta}(t) = e_A(t_0,\sigma(t))f(t)$. Como $v(t_0) = y_0$, temos

$$v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau.$$

e portanto $y = \tilde{y}$. □

3.5.1 Coeficientes Constantes

Nesta subseção veremos brevemente o caso onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz constante regressiva, isto é $1 + \mu(t)A$ é inversível para todo $t \in \mathbb{T}^k$. Mas antes de começarmos, vejamos que podemos transporta a regressividade de uma matriz para o seus autovalores.

Teorema 3.40. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz regressiva então todos os autovalores de A são regressivos.*

Demonstração. Suponha λ autovalor de A com autovetor v associado. Note que

$$(I + \mu(t)A)v = v + \mu(t)Av = v + \mu(t)\lambda v = (1 + \mu(t)\lambda)v.$$

Se A for regressiva, temos $(I + \mu(t)A)v \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$ então, pela igualdade acima, $(1 + \mu(t)\lambda)v \neq 0$ e $1 + \mu(t)\lambda \neq 0$. Logo λ é regressivo. □

Com isto podemos encontrar soluções para a equação

$$\begin{cases} y^{\Delta}(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

quando $y_0 = v$ é um autovetor associado a algum autovalor de A e A é regressiva.

Teorema 3.41. *Seja λ um autovalor de A com autovetor associado v. Então $y(t) = e_{\lambda}(t, t_0)v$ é uma solução de* (3.15) *com $y_0 = v$.*

Demonstração. Como A é regressiva, então λ é regressivo e $y(t) = e_{\lambda}(t, t_0)$ está bem definido em $t \in \mathbb{T}$. Assim

$$y^{\Delta}(t) = [e_{\lambda}(t, t_0)v]^{\Delta} = \lambda e_{\lambda}(t, t_0)v = e_{\lambda}(t, t_0)A(t)v = A(t)e_{\lambda}(t, t_0)v = A(t)y(t).$$

□

Exemplo 3.42. Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e assuma que

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

é regressiva. Vamos resolver a equação $y^{\Delta}(t) = Ay(t)$. Note que $v_1 = (1, -3)^T$ e $v_2 = (-2, 1)^T$ são autovetores associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ da matriz A.

Da unicidade de soluções para os problemas de valor inicial em $\mathbb{R}^n$ (como na teoria de equações diferenciais ordinárias) sabemos que a solução geral da equação é dada por

$$y(t) = c_1 e_3(t, t_0)v_1 + c_2 e_{-2}(t, t_0)v_2,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3.5.2 Exemplos sobre comutatividade

Nesta subseção veremos três exemplos a respeito da comutatividade (ou não) das funções exponenciais.

Exemplo 3.43 (Comutatividade)**.** Sejam

$$C(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D(t) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix},$$

com $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$. Neste caso, temos

$$e_C(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e_D(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{-t^2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-t^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

Então, $e_C(t,0)$ e $e_D(t,0)$ comutam já que ambas são matrizes diagonais. Ainda, temos

$$D(t)e_C(t,0)=\begin{pmatrix} -te^{\frac{t^2}{2}} & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}=e_C(t,0)D(t) \text{ e } C(t)e_D(t,0)=\begin{pmatrix} te^{\frac{-t^2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=e_D(t,0)C(t).$$

Como $C(t)\oplus D(T)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$, temos $e_{C\oplus D}(t,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-t^2}{2}} \end{pmatrix}$ e portanto $e_{C\oplus D}(t,0)=e_C(t,0)e_D(t,0)$.

Exemplo 3.44 (A e e_A não comutam)**.** Considere $A(t)=\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da série generalizada de Peano-Baker, temos

$$\begin{aligned} e_A(t,\tau)=I+\int_\tau^t A(s_1)\,\Delta s_1+\int_\tau^t A(s_1)\int_\tau^{s_1} A(s_2)\,\Delta s_2\,\Delta s_1+\cdots \\ +\int_\tau^t A(s_1)\int_\tau^{s_1} A(s_2)\cdots\int_\tau^{s_{i-1}} A(s_i)\,\Delta s_i\cdots\Delta s_1+\cdots, \end{aligned}$$

onde a integração de matrizes é feita entrada a entrada. Portanto se $\tau=0$ temos

$$e_A(t,0)=\begin{pmatrix} 1+\int_0^t s_1\,\Delta s_1+\int_0^t s_1\int_0^{s_1} s_1\,\Delta s_2\,\Delta s_1+\cdots & \int_0^t \Delta s_1+\int_0^t s_1\int_0^{s_1}\Delta s_2\,\Delta s_1+\cdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$e_A(0,t)=\begin{pmatrix} 1+\int_t^0 s_1\,\Delta s_1+\int_t^0 s_1\int_0^{s_1} s_1\,\Delta s_2\,\Delta s_1+\cdots & \int_t^0 \Delta s_1+\int_t^0 s_1\int_0^{s_1}\Delta s_2\,\Delta s_1+\cdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ obtemos

$$\int_0^t s_1\,ds_1=\frac{t^2}{2};\quad \int_0^t s_1\int_0^{s_1} s_2\,ds_2\,ds_1=\frac{t^4}{2\cdot 4},\quad \ldots,$$

assim

$$e_A(t,0)=\begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+\cdots & t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Assim, em (3.16), obtemos

$$e_A(t,0)=\begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & \sum_{n=1}^\infty \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^n(2i-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } e_A(0,t)=\begin{pmatrix} e^{-\frac{t^2}{2}} & \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^n(2i-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$A(t)e_A(t,0)=\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & \sum_{n=1}^\infty \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^n(2i-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} te^{\frac{t^2}{2}} & 1+\sum_{n=1}^\infty \frac{t^{2n}}{\prod_{i=1}^n(2i-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$e_A(t,0)A(t)=\begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & \sum_{n=1}^\infty \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^n(2i-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} te^{\frac{t^2}{2}} & e^{\frac{t^2}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $A(t)e_A(t,0)\neq e_A(t,0)A(t)$, para todo $t\in\mathbb{R}^*$.

Exemplo 3.45. Vamos mostrar que para $e_A(t,0)B(t) = B(t)e_A(t,0)$ é necessário que $e_{A\oplus B}(t,0) = e_A(t,0)e_B(t,0)$. Em $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, sejam

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repetindo os cálculo do exemplo acima, obtemos

$$e_A(t,0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e_B(t,0) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t^2}{2}} & 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n-1}t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i)(2n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$e_A(t,0)B(t) = \begin{pmatrix} -te^{\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, por outro lado

$$B(t)e_A(t,0) = \begin{pmatrix} -te^{\frac{t^2}{2}} & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} \\ e^{\frac{t^2}{2}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} \end{pmatrix}.$$

Logo $e_A(t,0)B(t) \neq B(t)e_A(t,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}-\{0\}$. Veja que

$$e_A(t,0)e_B(t,0) = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n-1}t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i)(2n-1)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n-1}t^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i)(2n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por definição, temos $A(t) \oplus B(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e assim

$$\begin{aligned} e_{A\oplus B}(t,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \int_0^t ds_1 \\ \int_0^t ds_1 & 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{s_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ds_2\, ds_1 + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{t^3}{2\cdot 3} \\ \frac{t^3}{2\cdot 3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4} \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $e_{A\oplus B}(t,0) \neq e_A(t,0)e_B(t,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}-\{0\}$.

NOTAS

Estudamos aqui as equações dinâmicas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, e para isto, a ferramenta fundamental é a função exponencial. Para estudos mais aprofundados sobre estes tópicos, sugerimos (BOHNER; PETERSON, 2001), (CUNHA, 2006) e (HAMZA; AL-QUBATY, 2012).

Utilizamos neste capítulo os nomes *soma de Hilger* e *subtração de Hilger*. Estes nomes foram dados por nós exclusivamente para este trabalho, já que não foram encontradas traduções para os nomes em inglês: *circle plus addition* e *circle minus subtraction*.

Uma observação importante a ser mencionada é que na literatura, o que chamamos de *propriedade de processo de evolução* é comumente chamada de *propriedade de semigrupo*. Porém vale ressaltar que exponenciais em escalas temporais são inerentemente não-autônomas (isto é, tempo dependentes), uma vez que a definição da função exponencial envolve a função granulação $\mu(t)$, que somente em casos bastante específicos não depende de t (tais casos são chamados de **escalas temporais homogêneas**). Sendo assim, a função exponencial não define um semigrupo, mas sim um processo de evolução.

Por último, gostaríamos de comentar sobre o sinal da função exponencial, que nem sempre é positivo. Na desigualdade de Gronwall que apresentamos, aparece o conceito de *função positivamente regressiva*, que garante a positividade da função exponencial e é fundamental para a demonstração. Mais resultados sobre o sinal da função exponencial podem ser encontrados em (BOHNER; PETERSON, 2001).

4 ATRATORES PARA PROCESSOS DE EVOLUÇÃO EM ESCALAS TEMPORAIS

Neste capítulo estudaremos os *processos de evolução em escalas temporais* e seus *atratores*. Mais precisamente, nosso objetivo final é encontrar resultados sobre a *semicontinuidade superior* para tais atratores, quando a escala temporal $\mathbb{T}$ dada é sujeita a pequenas perturbações. Para isso, começaremos com o estudo dos processos de evolução em escalas temporais.

4.1 PROCESSOS DE EVOLUÇÃO EM ESCALAS TEMPORAIS

A teoria de atratores para processos de evolução nos casos contínuo ($\mathbb{T}=\mathbb{R}$) e discreto ($\mathbb{T}=\mathbb{Z}$) não é recente, e conta com uma vasta literatura, como por exemplo (CARABALLO; ŁUKASZEWICZ; REAL, 2006) e (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013). Aqui, vamos estender os conceitos e resultados encontrados em (CARABALLO; ŁUKASZEWICZ; REAL, 2006) para o caso de escalas temporais em geral.

No que segue, X é um espaço métrico com métrica $d\colon X\times X\to[0,\infty)$ e $C(X)$ denota o conjunto das funções contínuas de X em X. Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal e defina o conjunto $\mathbb{T}_0$ por

$$\mathbb{T}_0=\begin{cases}\mathbb{T}-\inf\mathbb{T} & \text{se } \mathbb{T} \text{ é limitada inferiormente,}\\ \mathbb{T} & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Defina também

$$s_0=\begin{cases}\inf\mathbb{T} & \text{se } \mathbb{T} \text{ é limitada inferiormente,}\\ -\infty & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Por fim considere $P_0=\{(t,s)\in\mathbb{T}_0^2\colon t\geqslant s\}$.

Definição 4.1. Um **processo de evolução** em X na escala temporal $\mathbb{T}$ é uma família de funções $U=\{U(t,s)\colon(t,s)\in P_0\}\subset C(X)$ que satisfaz:

(1) $U(t,t)x=x$, para todo $x\in X$ e $t\in\mathbb{T}_0$;

(2) $U(t,s)=U(t,\tau)U(\tau,s)$, para todos $(t,\tau),(\tau,s)\in P_0$;

Os processos de evolução surgem naturalmente quando resolvemos equações dinâmicas, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 4.2. Sejam $A\colon\mathbb{T}\to M_n(\mathbb{R})$ uma função matricial regressiva e $f\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$ rd-contínua. Sabemos, do Teorema 3.39, que para cada $s\in\mathbb{T}_0$ e $y_0\in\mathbb{R}^n$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases}y^\Delta(t)=A(t)y(t)+f(t)\\ y(s)=y_0\end{cases}\tag{4.1}$$

possui uma única solução $y(\cdot,s,y_0)\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$. Se denotarmos $U(t,s)y_0=y(t,s,y_0)$, então a família $U=\{U(t,s)\colon(t,s)\in P_0\}$ define um processo de evolução em $\mathbb{R}^n$. De fato, claramente $U(t,t)y_0 = y_0$ para todo $t \in \mathbb{T}_0$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Agora, para $y_0 \in X$, considere a função $z(t) = U(t,\tau)U(\tau,s)y_0$ para $t \geqslant \tau \geqslant s$. Para $t = \tau = s$ obtemos $z(s) = y_0$. Derivando em t obtemos

$$z^{\Delta}(t) = U^{\Delta}(t,\tau)U(\tau,s)y_0 = A(t)U(t,\tau)U(\tau,s)y_0 + f(t),$$

e portanto $z(t)$ é solução de (4.1). Da unicidade de soluções segue que $z(t) = U(t,s)y_0$, e conclui a prova de que U é um processo de evolução.

4.2 ATRATORES PARA PROCESSOS DE EVOLUÇÃO

Os processos de evolução são também conhecidos como *sistemas não-autônomos*, isto é, sistemas nos quais a lei de evolução varia com o tempo e a solução depende explicitamente dos instantes inicial s e final t. Para alguns sistemas em particular, esta solução não depende explicitamente de s e t, mas sim de sua diferença $t-s$, isto é, $U(t,s) = U(t-s,0)$ para todos $t,s \in \mathbb{T}$. Nestes casos especiais, os processos de evolução são chamados de *semigrupos* e surgem de equações nas quais o termo forçante não depende explicitamente do tempo. Porém, em escalas temporais, esses casos são muito raros, pois mesmo que o termo forçante (o que está do lado direito da equação dinâmica) não dependa explicitamente do tempo, a *delta derivada* em geral depende (a menos que a escala temporal seja homogênea).

Sendo assim, a teoria a ser trabalhada em escalas temporais é a de processos de evolução. Para estes processos vamos trabalhar do ponto de vista *pullback*, isto é, trabalharemos com famílias de conjuntos, como veremos a seguir.

Definição 4.3. Um **conjunto não-autônomo** é uma família $\hat{C} = \{C(t)\}_{t\in\mathbb{T}_0}$ de subconjuntos de X. Para cada $t \in \mathbb{T}_0$, o conjunto $C(t)$ é chamado **fibra** de $\hat{C}$.

Um conjunto $\hat{C}$ não-autônomo é chamado de **aberto (ou fechado ou compacto ou limitado)** se cada $C(t)$ é um subconjunto aberto (fechado ou compacto ou limitado) de X.

Diremos que $\hat{C}_1 \subset \hat{C}_2$ se $C_1(t) \subset C_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}_0$.

Para todo $(t,s) \in P_0$, a imagem de um subconjunto B de X por U é denotada por $U(t,s)B = \{U(t,s)x, x \in B\}$. Os principais conceitos para se definir de maneira consistente um *atrator* são os conceitos de *invariância* e *atração*, como veremos a seguir.

Definição 4.4 (Invariância)**.** Sejam U um processo de evolução e $\hat{C}$ um conjunto não-autônomo. Dizemos que $\hat{C}$ é **U-invariante** se $U(t,s)C(s) = C(t)$, para todo $(t,s) \in P_0$. Quando $U(t,s)C(s) \subset C(t)$ para todo $(t,s) \in P_0$ dizemos que $\hat{C}$ é **positivamente U-invariante**, e **negativamente U-invariante** se $U(t,s)C(s) \supset C(t)$ para todo $(t,s) \in P_0$.

Claramente $\hat{C}$ é U-invariante se e somente se é positivamente e negativamente U-invariante.

Para definir o conceito de *atração*, neste caso, o de *atração pullback*, é necessário definir corretamente uma métrica para a qual analisaremos essa atração. Em geral, a métrica utilizada é a da **semidistância de Hausdorff**, definida por

$$H_d^*(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b),$$

onde A, B são subconjuntos não-vazios de X. Também é utilizada a **distância de Hausdorff** entre A, B definida por

$$H_d(A,B) = \max\{H_d^*(A,B), H_d^*(B,A)\}.$$

Neste ponto, sugerimos cautela ao leitor. Esta não é a distância usual entre conjuntos, e $H_d^*(A,B)$ mede, em termos simples, *o quão longe A está de estar dentro de B*, no sentido de que $H_d^*(A,B) = 0$ se, e somente se, $A \subset \overline{B}$. Além disso, a distância de Haursdorff não é uma distância, a não ser que nos restrinjamos aos subconjuntos fechados de X. Com respeito a semidistância de Hausdorff, valem as seguintes propriedades.

Proposição 4.5. *Para A, B, C subconjuntos não-vazios de X temos*

(i) $H_d^*(A,B) \leqslant H_d^*(A,C) + H_d^*(C,B)$;

(ii) $H_d^*(A,B) = H_d^*(\overline{A},B)$.

Demonstração. *(i)* Sejam $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, temos $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$, assim $\inf_{b\in B} d(a,b) \leqslant d(a,c) + \inf_{b\in B} d(c,b) \leqslant d(a,c) + H_d^*(C,B)$. Portanto, $d(a,C) \leqslant d(a,c) + H_d^*(C,B)$. Ainda, $d(a,C) \leqslant d(a,C) + H_d^*(C,B)$ e $H_d^*(A,B) \leqslant H_d^*(A,C) + H_d^*(C,B)$.

(ii) Dados $x \in \overline{A}$ e $\epsilon > 0$ existe $a = (a,\epsilon) \in A$ tal que $d(x,a) < \epsilon$. Se existe $b \in B$, temos $d(x,b) \leqslant d(x,a) + d(a,b) < \epsilon + d(a,b)$. Logo, $d(x,B) \leqslant \epsilon + d(a,B) \leqslant \epsilon + H_d^*(A,B)$ e $H_d^*(\overline{A},B) \leqslant \epsilon + H_d^*(A,B)$. Portanto, $H_d^*(\overline{A},B) \leqslant H_d^*(A,B)$. Ainda, é claro que $H_d^*(A,B) \leqslant H_d^*(\overline{A},B)$ e, assim, segue o resultado. □

Com a semidistância de Hausdorff, podemos definir o que queremos dizer com *atração pullback*:

Definição 4.6 (Atração Pullback)**.** Considere $\mathbb{T}$ uma escala temporal e assuma que s_0 é um ponto de acumulação de $\mathbb{T}$ ou $s_0 = -\infty$. Seja U um processo de evolução. Dizemos que $\hat{A}$ **pullback U-atrai** $\hat{B}$ se para cada $t \in \mathbb{T}_0$ temos

$$\lim_{s\to s_0} H_d^*(U(t,s)B(s), A(t)) = 0,$$

A grosso modo a atração pullback nos diz que para cada tempo final fixado t, o processo $U(t,s)$ leva um conjunto de estados $B(s)$ cada vez mais no passado (instante inicial $s \to s_0$) dentro de $A(t)$. Então a *atração* aqui é vista retrocedendo o tempo inicial s, mas mantendo fixo o tempo final t.

A menos de uma menção contrária, no que segue s_0 é um ponto de acumulação da escala temporal $\mathbb{T}$.

Um conceito útil, que está intimamente relacionado ao conceito de atração pullback é o de *absorção pullback*, definido a seguir.

Definição 4.7 (Absorção Pullback)**.** Seja U um processo de evolução. Dizemos que $\hat{A}$ **pullback U-absorve** $\hat{B}$ se dado $t \in \mathbb{T}_0$ existe $s_1 = s_1(B,t) \leqslant t$, $s_1 \in \mathbb{T}_0$ tal que

$$U(t,s)B(s) \subset A(t) \quad \text{para } s \leqslant s_1 \text{ e } s \in \mathbb{T}_0.$$

Claramente, se $\hat{A}$ pullback U-absorve $\hat{B}$ então $\hat{A}$ pullback U-atrai B. Reciprocamente, se $\hat{A}$ pullback U-atrai $\hat{B}$, então dado $\epsilon > 0$, o conjunto não-autônomo $\hat{A}_\epsilon$ dado por

$$A_\epsilon(t) = \{x \in X : \inf_{a \in A(t)} d(x,a) < \epsilon\} =: \mathcal{O}_\epsilon(A(t)) \text{ para cada } t \in \mathbb{T}_0,$$

pullback U-absorve $\hat{B}$. De fato, para este $\epsilon > 0$ existe $s_1 \leqslant t$, $s_1 \in \mathbb{T}_0$ tal que

$$H_d^*(U(t,s)B(s), A(t)) < \epsilon \text{ para } s \leqslant s_1 \text{ e } s \in \mathbb{T}_0,$$

e portanto

$$U(t,s)B(s) \subset \mathcal{O}_\epsilon(A(t)) \text{ para } s \leqslant s_1 \text{ e } s \in \mathbb{T}_0.$$

Por fim, antes de definir o *atrator pullback*, precisamos do conceito de *universo*, isto é, queremos restringir a coleção de conjuntos não-autônomos que serão atraídos pelo atrator. Um **universo** $\mathfrak{D}$ é uma coleção não-vazia qualquer de conjuntos não-autônomos que é fechada por inclusão, isto é, se $\hat{D}_1 \in \mathfrak{D}$ e $\hat{D}_2 \subset \hat{D}_1$ então $\hat{D}_2 \in \mathfrak{D}$.

Definição 4.8. Sejam U um processo de evolução, $\mathfrak{D}$ um universo. Um conjunto não-autônomo $\hat{A}$ é chamado de um **$\mathfrak{D}$-atrator pullback** para U se

1. $\hat{A}$ é compacto;
2. $\hat{A}$ é U-invariante;
3. $\hat{A}$ pullback U-atrai cada $\hat{B} \in \mathfrak{D}$;

4.3 EXISTÊNCIA DE ATRATORES PULLBACK

Nesta seção, buscaremos condições para U sobre as quais conseguimos garantir a existência de um atrator pullback, dado um universo $\mathfrak{D}$. Nesta busca, analogamente ao caso de processos de evoluções contínuos, o *conjunto ω-limite* tem um papel fundamental. Para um processo de evolução U e um conjunto não-autônomo $\hat{B}$, definimos o **conjunto ω-limite** de $\hat{B}$ em $t \in \mathbb{T}_0$ por

$$\omega(\hat{B},t) = \bigcap_{\substack{\tau \leqslant t \\ \tau \in \mathbb{T}_0}} \overline{\bigcup_{\substack{s \leqslant \tau \\ s \in \mathbb{T}_0}} U(t,s)B(s)}.$$

A seguinte caracterização para o conjunto ω-limite é crucial.

Proposição 4.9. *Se $t \in \mathbb{T}_0$ então $x \in \omega(\hat{B}, t)$ se, e somente se, existem uma sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{T}$ com $s_0 < s_n \leqslant t$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \to s_0$ quando $n \to \infty$ e uma sequência $x_n \in B(s_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n)x_n$.*

Demonstração. Sejam $t_0 \in \mathbb{T}_0$ e $x \in \omega(\hat{B}, t)$. Como s_0 é ponto de acumulação de $\mathbb{T}$, existe uma sequência $p_n \in \mathbb{T}_0$ tal que $s_0 < p_n \leqslant t$ tal que $p_n - s_0 \leqslant \frac{1}{n}$. Então existem $s_n \in \mathbb{T}_0$ tal que $s_0 < s_n \leqslant p_n$ e $x_n \in B(s_n)$ tal que $d(U(t, s_n)x_n, x) \leqslant \frac{1}{n}$ e, assim, $x = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n)x_n$. A recíproca é direta. □

Vejamos agora dois conceitos que, juntos, nos darão a existência de atratores.

Definição 4.10. Dado um universo $\mathfrak{D}$, dizemos que um processo de evolução U é

(i) **pullback $\mathfrak{D}$-dissipativo** se existe $\hat{B}_0$ tal que $\hat{B}_0$ pullback U-absorve cada $\hat{B} \in \mathfrak{D}$. Um conjunto não-autônomo $\hat{B}_0$ satisfazendo esta condição é chamado **conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo** para U;

(ii) **pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto** se dados $\hat{B} \in \mathfrak{D}$, $t \in \mathbb{T}_0$, $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$, a sequência $\{U(t, s_n)x_n\}$ tem uma subsequência convergente.

Provemos alguns resultados auxiliares, para obter propriedades importantes sobre conjuntos ω-limites.

Lema 4.11. *Sejam $\mathfrak{D}$ um universo e U um processo de evolução. Se U é pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto e $\hat{B} \in \mathfrak{D}$ então o conjunto ω-limite*

$$\omega(\hat{B}) = \{\omega(\hat{B}, t)\}_{t\in\mathbb{T}_0}$$

é não-vazio, compacto, U-invariante e pullback U-atrai $\hat{B}$.

Demonstração. Seja $\hat{B} \in \mathfrak{D}$ e fixe $t \in \mathbb{T}_0$. Como U é pullback $\mathfrak{D}$-assinstoticamente compacto, fixe também $\{s_n\} \subset \mathbb{T}_0$ tal que $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$, então $\{U(t, s_n)x_n\}$ possui uma subsequência convergente (que vamos utilizar a mesma notação) para um ponto $x \in X$. Pela proposição anterior, $x \in \omega(\hat{B}, t)$. Portanto, $\omega(\hat{B})$ é não vazio.

Para obtermos o a compacidade, vamos mostrar que toda sequência possui uma subsequência convergente. Para isso, fixe $t \in \mathbb{T}_0$ e tome $\{y_n\} \subset \omega(\hat{B}, t)$, existem sequências $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$ tais que $d(y_n, U(t, s_n)x_n) < \frac{1}{n}$.

De fato, como $\{y_n\} \subset \omega(\hat{B}, t)$, temos $y_1 \in \omega(\hat{B}, t)$. Pela proposição anterior, existem $x_n^1 \in B(s_n^1)$ e $s_n^1 \to s_0$ tais que $y_1 = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n^1)x_n^1$. Então, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_1, U(t, s_{n_1}^1)x_{n_1}^1) < 1$ e $|s_{n_1}^1 - s_0| < 1$. Como $y_2 \in \omega(\hat{B}, t)$, existem $s_n^2 \to s_0$ e $x_n^2 \in B(s_n^2)$ tais que $y_2 = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n^2)x_n^2$. Então, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_2, U(t, s_{n_2}^2)x_{n_2}^2) < \frac{1}{2}$. Logo para $n \in \mathbb{N}$ temos $d(y_n, U(t, s_n)x_n) < \frac{1}{n}$. A sequência $\{U(t, s_n)x_n\}$ possui uma subsequência convergente (que denotaremos da mesma forma) para $x \in \mathbb{X}$ e, pela proposição,

$x \in \omega(\hat{B})$. Assim, utilizando a desigualdade triangular obtemos

$$d(y_n, x) \leqslant d(y_n, U(t, s_n)(x_n) + d(U(t, s_n)x_n, x) < \frac{1}{n} + d(U(t, s_n)x_n, x)$$

e quando $n \to \infty$, $d(y_n, x) \to 0$. Logo, $y_n \to x$ ao longo de uma subsequência. Portanto, $\omega(\hat{B})$ é compacto.

Mostremos que $\omega(\hat{B})$ é U-invariante. Fixe $(t, s) \in P_0$. Se $x \in \omega(\hat{B}, s)$, então $x = \lim_{n\to\infty} U(s, s_n)x_n$, $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$. Assim,

$$U(t, s)x = U(t, s) \lim_{n\to\infty} U(s, s_n)x_n = \lim_{n\to\infty} U(t, s)U(s, s_n)x_n = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n)x_n,$$

então, $U(t, s)x \in \omega(\hat{B}, t)$. Se $z \in \omega(\hat{B}, t)$, então $z = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n)x_n$, $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$ (podemos assumir $s_n \leqslant s$, pois $s_0 < s$ e $s_n \to s_0$). Considere a sequência $\{U(s, s_n)x_n\}$ que possui subsequência convergente para $x \in \mathbb{X}$ (e $x \in \omega(\hat{B}, s)$). Logo, $U(t, s)x = U(t, s) \lim_{n\to\infty} U(s, s_n) = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n)x_n = z$ e $U(t, s)x = z$, com $z \in U(t, s)\omega(\hat{B}, s)$, o que conclui a U-invariância.

Finalmente, mostremos que $\omega(\hat{B})$ pullback U-atrai $\hat{B}$. Suponha, por contradição, que $\omega(\hat{B})$ não pullback U-atrai $\hat{B}$, assim existem $t \in \mathbb{T}_0$, $\epsilon_0 > 0$, $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$ tais que $H_d^*(U(t, s_n)x_n, \omega(\hat{B}, t)) \geqslant \epsilon_0$. Como U é pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto, então ao longo de uma subsequência temos $U(t, s_n)x_n \to x \in \omega(\hat{B}, t)$. Logo

$$0 = H_d^*(U(t, s_n)x_n, \omega(\hat{B}, t)) \geqslant \epsilon_0 > 0,$$

o que nos dá uma contradição e conclui a demonstração. □

Lema 4.12. *Se U é pullback $\mathfrak{D}$-dissipativo com conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo $\hat{B}_0$ e $\hat{B} \in \mathfrak{D}$ então $\omega(\hat{B}, t) \subset \overline{B_0(t)}$ para $t \in \mathbb{T}_0$.*

Demonstração. Se $x \in \omega(\hat{B}, t)$, então $x = \lim_{n\to\infty} U(t, s_n)x_n$, $s_n \to s_0$ e $x_n \in B(s_n)$. Como $\hat{B}_0$ é um conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, temos $U(t, s_n)B(s_n) \subset B_0(t)$, logo $\{U(t, s_n)x_n\} \subset B_0(t)$ e, assim, $x \in \overline{B_0(t)}$. □

Com estes dois resultados somos capazes de mostrar a existência de $\mathfrak{D}$-atratores pullback para um processo de evolução pullback $\mathfrak{D}$-dissipativo e pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto.

Teorema 4.13. *Sejam $\mathfrak{D}$ um universo e U um processo de evolução. Se U é pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto e pullback $\mathfrak{D}$-dissipativo com conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo $\hat{B}_0$ tal que $\overline{\hat{B}_0} \in \mathfrak{D}$, então U tem um $\mathfrak{D}$-atrator pullback $\hat{A} \in \mathfrak{D}$ dado por $A(t) = \omega(\hat{B}_0, t)$, para $t \in \mathbb{T}_0$. Além disso, este atrator é minimal no sentido de que se $\hat{C}$ é um conjunto não-autônomo fechado que pullback U-atrai todo $\hat{D} \in \mathfrak{D}$ então $\hat{A} \subset \hat{C}$.*

Demonstração. Defina $A(t) = \omega(\hat{B}_0, t)$ para todo $t \in \mathbb{T}_0$. Como U é pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto, pelo Lema 4.3, temos $\hat{A}$ não-vazio, compacto, invariante e pullback

U-atrai $\hat{B}_0$. Do Lema 4.12, $\hat{A} \subset \overline{\hat{B}_0} \in \mathfrak{D}$, e sendo $\mathfrak{D}$ um universo, $\hat{D} \in \mathfrak{D}$. Agora, se $\hat{B} \in \mathfrak{D}$, temos

$$\begin{aligned} H_d^*(U(t,s)B(s),A(t)) \leqslant & H_d^*(U(t,s)B(s),\omega(\hat{B},t)) + H_d^*(\omega(\hat{B},t),A(t)) \\ = & H_d^*(U(t,s)B(s),\omega(\hat{B},t)) + H_d^*(U(t,s)\omega(\hat{B},s),A(t)) \\ \leqslant & H_d^*(U(t,s)B(s),\omega(\hat{B},t)) + H_d^*(U(t,s)\overline{B_0(s)},A(t)) \\ = & H_d^*(U(t,s)B(s),\omega(\hat{B},t)) + H_d^*(\overline{U(t,s)B_0(s)},A(t)) \\ = & H_d^*(U(t,s)B(s),\omega(\hat{B},t)) + H_d^*(U(t,s)B_0(s),A(t)), \end{aligned}$$

onde usamos a U-invariância de $\omega(\hat{B})$, que $\omega(\hat{B},s) \subset \overline{B_0(s)}$ pelo Lema 4.12, também que $U(t,s)\overline{B_0(s)} \subset \overline{U(t,s)B_0(s)}$ pela continuidade de $U(t,s)$ e a Proposição 4.5. Usando que $\omega(\hat{B},t)$ pullback U-atrai $\hat{B}$, que $\hat{A}$ pullback U-atrai $\hat{B}_0$ obtemos

$$\lim_{s \to s_0} H_d^*(U(t,s)B(s),A(t)) = 0 \text{ para cada } t \in \mathbb{T}_0,$$

e portanto $\hat{A}$ pullback U-atrai cada $\hat{B} \in \mathfrak{D}$, e $\hat{A}$ é um $\mathfrak{D}$-atrator pullback para U.

Para mostrar a propriedade de minimalidade, seja $\hat{C}$ um conjunto não-autônomo fechado que pullback U-atrai todo $\hat{B} \in \mathfrak{D}$. Se $x \in A(t) = \omega(\hat{B}_0,t)$ então podemos escrever $x = \lim_{n\to\infty} U(t,s_n)x_n$, onde $s_n \to s_0$ e $x_n \in B_0(s_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim

$$H_d^*(x,C(t)) = \lim_{n\to\infty} H_d^*(U(t,s_n)x_n,C(t)) \leqslant \lim_{n\to\infty} H_d^*(U(t,s_n)B_0(s_n),C(t)) = 0.$$

Logo, $H_d^*(x,C(t)) = 0$ e $x \in \overline{C(t)} = C(t)$. Portanto, $A(t) \subset C(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}_0$, isto é, $\hat{A} \subset \hat{C}$ e completa a demonstração. $\square$

Observação 4.14. Nas aplicações práticas, para mostrar a existência de atratores pullback para um processo de evolução precisamos então, fixado um universo $\mathfrak{D}$, encontrar um conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo (que de preferência seja fechado e esteja em $\mathfrak{D}$) e mostrar que o processo U é pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto. A primeira tarefa costuma ser a mais simples das duas, e envolve cálculos de estimativa de energia para as equações. Já a segunda é mais complicada, e requer um estudo caso a caso, para encontrar a melhor técnica a ser utilizada. Porém, se estamos trabalhando em espaços de dimensão finita, uma boa maneira de obter a compacidade assintótica é encontrar um conjunto dissipativo B_0 fixo (isto é, $B_0(t) = B_0$ para todo $t \in \mathbb{T}$) que seja fechado e limitado (e portanto, compacto). A compacidade assintótica nesse caso é uma consequência imediata da existência de tal conjunto.

4.4 SEMICONTINUIDADE SUPERIOR DE ATRATORES

Em modelos matemáticos que descrevem problemas reais, perturbações estão fadadas a acontecer, seja por simplificações, uso de dados escassos ou leis empíricas.

Assim, modelos matemáticos são, em geral, aproximações do real fenômeno e, portanto, devemos ser capazes de prever e tratar possíveis perturbações deste modelo, e entender como elas se comportam. Neste contexto, a pergunta que surge aqui é: como se comportam os atratores para processos de evolução quando perturbamos a escala temporal utilizada?

Dito de outra maneira, se considerarmos uma escala temporal $\mathbb{T}'$ *próxima* a $\mathbb{T}$, processos de evolução U' em $\mathbb{T}'$ e U em $\mathbb{T}$, com atratores $\hat{A}'$ e $\hat{A}$, respectivamente, somos capazes de controlar a *proximidade* de $\hat{A}'$ e $\hat{A}$, sabendo controlar a *proximidade* entre U' e U?

Esta pergunta claramente precisa de uma fundamentação teórica para ser completamente compreendida e estudada. A saber, o que queremos dizer com a *proximidade* entre $\mathbb{T}'$ e $\mathbb{T}$, entre U' e U e entre $\hat{A}'$ e $\hat{A}$? São muitas as possíveis definições para esta *proximidade*. Mas neste trabalho, focaremos na *distância de Hausdorff* para medir a proximidade entre $\mathbb{T}'$ e $\mathbb{T}$ (chamada usualmente na literatura de *continuidade*) e a *semidistância de Hausdorff* entre $\hat{A}'$ e $\hat{A}$ (chamada de *semicontinuidade superior em* $\hat{A}$). Em outras palavras, queremos medir o quão longe $A'(t')$ está de estar dentro de $A(t)$ quando $|t'-t|$ é pequeno, com $t' \in \mathbb{T}'$ e $t \in \mathbb{T}$, desde que sejamos capazes de controlar a distância entre os processos U' e U.

Vamos agora colocar matematicamente o problema em questão. Sejam duas escalas temporais $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$, $D = \mathbb{T} \cup \mathbb{T}'$ e $f\colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função, e consideremos os problemas

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \tag{4.2}$$

e

$$x^{\Delta'}(t) = f(t, x(t)), \tag{4.3}$$

onde Δ denota a delta derivada na escala temporal $\mathbb{T}$ e Δ' a delta derivada na escala $\mathbb{T}'$. Vamos supor que (4.2) e (4.3) gerem processos de evolução $U = \{U(t,s)\colon (t,s) \in P_0\}$ e $U' = \{U'(t,s)\colon (t,s) \in P_0'\}$, respectivamente.

Gostaríamos de responder às seguintes perguntas:

(1) sob quais condições (e para qual universo) estes processos possuem atratores pullback?

(2) Quando estes atratores pullback existem, como podemos medir a *proximidade* entre eles?

Para responder estas perguntas, seguiremos o trabalho feito em (KLOEDEN, 2006), e vamos assumir algumas condições sobre a escala temporal $\mathbb{T}$ e o processo de evolução U gerado por (4.2).

Definição 4.15. Diremos que uma escala temporal $\mathbb{T}$ **não possui buracos rapidamente crescentes**, se para cada $T > 0$, existe $N_T > 0$ tal que

$$[t - T - N_T, t - T] \cap \mathbb{T} \neq \varnothing \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Veja que esta condição implica, em particular, que $\inf \mathbb{T} = -\infty$ e $\sup \mathbb{T} = \infty$. Portanto, $s_0 = -\infty$ e $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}$ (veja Seção 4.1).

O universo que consideraremos é a coleção $\mathfrak{D}$ formada por conjuntos não-autônomos da forma $D = \{D(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ com $\bigcup_{t \in \mathbb{T}} D(t)$ limitado em $\mathbb{R}^n$, chamado de **universo das uniões limitadas**. Não é difícil ver que com este universo, basta provar a pullback U-atração para conjuntos limitados *fixos*, já que se $\hat{A}$ pullback U-atrai todos os conjuntos limitados fixos e $D \in \mathfrak{D}$ e $B = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} D(t)$ então

$$H_d^*(U(t,s)D(s), A(t)) \leqslant H_d^*(U(t,s)B, A(t)) \to 0 \quad \text{quando } s \to -\infty.$$

No que segue, para um conjunto não-vazio A de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|,$$

e notamos que $d(x, A) = H_d^*(\{x\}, A)$. Além disso, para $r > 0$ denotamos

$$B[A, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leqslant r\}.$$

Vamos assumir que U satisfaz a condição de pullback dissipatividade: existe um conjunto compacto e conexo $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $\gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to [0, \infty)$ tal que para todos $t, \tau \in \mathbb{T}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$d(U(t,\tau)x, B_0) \leqslant \gamma(t,\tau) d(x, B_0), \tag{4.4}$$

com $\gamma(t,t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{T}$, $\tau \mapsto \gamma(t,\tau)$ é decrescente para zero quando $\tau \to -\infty$ e para cada $t \in \mathbb{T}$, para cada $\epsilon > 0$ e $R > 0$, existe $T_{R,\epsilon} > 0$ para o qual para todo $t \in \mathbb{T}$ temos

$$\gamma(t,\tau) R \leqslant \epsilon \quad \text{para todo } \tau \leqslant t - T_{R,\epsilon} \text{ e } \tau \in \mathbb{T}. \tag{4.5}$$

Teorema 4.16. *Se $\mathbb{T}$ não possui buracos rapidamente crescentes e o processo de evolução $U = \{U(t,s) : (t,s) \in P_0\}$ satisfaz* (4.4)*, então U tem um $\mathfrak{D}$-atrator pullback $\hat{A}$, onde $\mathfrak{D}$ é o universo das uniões limitadas e $\hat{A} \subset B[B_0, 1]$.*

Demonstração. Para garantir a existência de um $\mathfrak{D}$-atrator pullback, usaremos o Teorema 4.13. Mostraremos primeiro que $B_1 = \mathcal{O}_1(B_0)$ é um conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo para U. De fato, seja $B \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $R = \max_{x \in B} d(x, B_0)$. De (4.4)-(4.5), seja $T_{R,1/2} > 0$ tal que

$$\gamma(t,\tau) R \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{para todo } \tau \leqslant t - T_{R,1/2} \text{ e } \tau \in \mathbb{T}.$$

Assim para $\tau \leqslant t - T_{R,1/2}$ e $\tau \in \mathbb{T}$ obtemos

$$H_d^*(U(t,\tau)B, B_0) \leqslant \gamma(t,\tau)R \leqslant \frac{1}{2} < 1,$$

o que implica que $U(t,\tau)B \subset B[B_0, 1]$. Portanto B_0 é um conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo para B_0.

O fato de que U é pullback $\mathfrak{D}$-assintoticamente compacto segue diretamente da Observação 4.14, e assim, o Teorema 4.13 nos garante a existência de um $\mathfrak{D}$-atrator pullback $\hat{A}$ para U. □

Queremos agora estudar o que acontece quando mudamos da escala $\mathbb{T}$ para uma escala $\mathbb{T}'$ com a distância de Hausdorff $H_d(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$ entre $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$ pequena. Para isso, precisaremos da seguinte hipótese de *continuidade com relação aos dados iniciais* dos processos U e U' gerados por (4.2) e (4.3), respectivamente. Para todo $\epsilon > 0$, $R > 0$, $T_1 < T_2$ em $\mathbb{R}$, existe $\delta = \delta_{\epsilon, R, T_2 - T_1} > 0$ tal que

$$\| U'(t', \tau')x - U(t,\tau)x \| < \epsilon, \tag{4.6}$$

para todos $(t', t_0') \in P_0' \cap [T_1, T_2]^2$, $(t, t_0) \in P_0 \cap [T_1, T_2]^2$, $x \in B[B_0, R]$, com $|t' - t|$, $|t_0', t_0| \leqslant H_d(\mathbb{T}', \mathbb{T}) \leqslant \delta$.

Esta condição implica, em particular, que soluções de U' não explodem em intervalos finitos, desde que as escalas temporais $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$ estejam próximas.

Observação 4.17. Esta condição é, na verdade, um resultado demonstrado em (GARAY; HILGER; KLOEDEN, 2003) (ou (KLOEDEN, 2004)). Decidimos aqui colocá-la como uma hipótese para não perdemos o foco principal do trabalho, que é obter a semicontinuidade superior dos atratores pullback. Em ambos os trabalhos, pode-se notar das demonstrações destes resultados que, como mencionado, δ depende de ϵ, R e da *diferença* $T_2 - T_1 > 0$, e é nesta parte da demonstração que a condição de $\mathbb{T}$ não possuir buracos rapidamente crescentes é fundamental, bem como a hipótese de que o campo f esteja definido na primeira variável, para toda a reta real e seja uniformemente contínuo nesta variável. Também é necessário que f seja contínua nas duas variáveis e que satisfaça uma condição de Lipschitz local na segunda variável (como no caso contínuo).

Teorema 4.18. *Assuma que $\mathbb{T}$ que não possui buracos rapidamente crescentes, que o processo de evolução U satisfaz* (4.4)-(4.5) *e que os processos U e U' satisfazem* (4.6)*. Então $B_1 = B[B_0, 1]$ é um conjunto $\mathfrak{D}$-dissipativo para U', desde que $H_d(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$ seja pequena.*

Demonstração. Para mostrar que B_1 pullback U'-absorve limitados de $\mathbb{R}^n$, devemos mostrar que para cada $D \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $t' \in \mathbb{T}'$ existe $T_{t,D} > 0$ tal que $U_{\mathbb{T}'}(t', \tau')D \subset B_1$, para todo $\tau' \in \mathbb{T}'$ e $\tau' \leqslant t' - T_{t,D}$.

Para isso, mostraremos que dado $R>1$ existem $T>0$ e $\delta>0$ tais que para todo $x\in B[B_0,R]$ temos

$$d(U'(t',\tau')x,B_0)\leqslant 1 \quad \text{para } \tau'\leqslant t'-T-2\delta.$$

Como cada limitado $D\subset\mathbb{R}^n$ está contido em algum conjunto da forma $B[B_0,R]$ para algum $R>1$ suficientemente grande, o resultado segue.

Fixados $t\in\mathbb{T}$ e $R>1$, usando (4.4)-(4.5) com $\epsilon=1/2$, existe $T=T_{2R}>0$ tal que para $t,\tau\in\mathbb{T}$, $\tau\leqslant t-T$ e $x\in B[B_0,2R]$ temos

$$d(U(t,\tau)x,B_0)\leqslant\gamma(t,\tau)d(x,B_0)\leqslant\gamma(t,\tau)2R\leqslant\frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Para este $T>0$, como $\mathbb{T}$ não possui buracos rapidamente crescentes, existe $N=N_T>0$ tal que

$$[t-T-N,t-T]\cap\mathbb{T}\neq\varnothing \quad \text{para todo } t\in\mathbb{T}.$$

Defina $K=2T+N+2>0$. Para este K, de (4.6), existe $\delta^*=\delta^*_{1/2,2R,K}>0$ tal que para todos $x\in B[B_0,2R]$, $T_1<T_2$ com $K=T_2-T_1$, $(t,\tau)\in P_0\cap[T_1,T_2]^2$, $(t',\tau')\in P_0'\cap[T_1,T_2]^2$ e

$$|t-t'|,\ |\tau-\tau'|\leqslant H_d(\mathbb{T},\mathbb{T}')\leqslant\delta^*,$$

então

$$\|U(t,\tau)x-U'(t',\tau')x\|\leqslant\frac{1}{2}. \tag{4.8}$$

Fixe $\delta=\min\{1,\delta^*,\frac{T+N}{3}\}$ e considere uma escala temporal $\mathbb{T}'$ com $H_d(\mathbb{T},\mathbb{T}')<\delta$. Fixado $t'\in\mathbb{T}'$, existe $t\in\mathbb{T}$ com $|t-t'|\leqslant\delta$ e a desigualdade (4.7) é válida para todo $\tau\leqslant t-T$ e $x\in B[B_0,2R]$.

Como um primeiro caso, vamos supor que

$$t'-2T-N+\delta\leqslant\tau_0'\leqslant t'-T-2\delta. \tag{4.9}$$

Como $H_d(\mathbb{T},\mathbb{T}')<\delta$, existe $\tau_0\in\mathbb{T}$ tal que $|\tau_0'-\tau_0|\leqslant\delta$.

Afirmação 1. $\tau_0\in[t'-2T-N,t'-T-\delta]\subset[t-2T-N-1,t-T]$.

Como $|\tau_0'-\tau_0|\leqslant\delta$, temos $-\delta\leqslant\tau_0'-\tau_0\leqslant\delta$, então $-\delta-\tau_0'\leqslant-\tau_0\leqslant\delta-\tau_0'$, ou seja, $-\delta+\tau_0'\leqslant\tau_0\leqslant\delta+\tau_0'$. Assim, de (4.9) segue que $\tau_0\geqslant\tau_0'-\delta\geqslant t'-2T-N$ e como $\tau_0\leqslant\delta+\tau_0'$, temos $\tau_0\leqslant\delta+t'-T-2\delta=t'-T-\delta$. Portanto $\tau_0\in[t'-2T-N,t'-T-\delta]$.

Para concluir esta afirmação, devemos mostrar que $t-2T-N-1\leqslant t'-2T-N\leqslant t'-T-\delta\leqslant t-T$. De fato, sabemos que $|t-t'|\leqslant\delta$, assim $-\delta\leqslant t-t'\leqslant\delta$ e então:

$$t-2T-N-1\leqslant t'+\delta-2T-N-1\leqslant t'-2T-N\leqslant\tau_0\leqslant t'-T-\delta\leqslant t+\delta-T-\delta=t-T,$$

pois $\delta<1$. A afirmação está então demonstrada.

Usando (4.7) e (4.8) obtemos

$$d(U'(t',\tau_0')x,B_0)\leqslant\|U'(t',\tau_0')x-U(t,\tau_0)x\|+d(U(t,\tau_0)x,B_0)\leqslant 1,$$

para $x \in B[B_0, 2R]$.

Para o segundo caso, vamos supor que $\tau_1' \in \mathbb{T}'$ e

$$t' - 3T - N + 2\delta \leqslant \tau_1' \leqslant t' - T - 2\delta. \tag{4.10}$$

Novamente, existe $\tau_1 \in \mathbb{T}$ tal que $|\tau - \tau_1| \leqslant \delta$.

Afirmação 2. $\tau_1 \in [t' - 3T - N, t' - T - \delta] \subset [t - 3T - N - 1, t - T]$.

Temos $-\delta + \tau_1' \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_1' + \delta$, por (4.10) e então

$$-\delta + t' - 3T - N + 2\delta \leqslant \tau_1' - \delta \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_1' + \delta \leqslant t' - T - \delta$$

Portanto $t' - 3T - N + \delta \leqslant \tau_1 \leqslant t' - T - \delta$. Nos resta mostrar que $[t' - 3T - N, t' - T - \delta] \subset [t - 3T - N - 1, t - T]$, isto é, $t - 3T - N - 1 \leqslant t' - 3T - N \leqslant t' - T - \delta \leqslant t - T$. Novamente, como $|t - t'| \leqslant \delta$, obtemos

$$t - 3T - N - 1 \leqslant t' + \delta - 3T - N - 1 \overset{\delta<1}{\leqslant} t' - 3T - N \leqslant \tau_1 \leqslant t' - T - \delta \leqslant t + \delta - T - \delta = t - T,$$

e a afirmação está demonstrada.

Utilizando (4.8) no intervalo $[t - 3T - N - 1, t - T]$ temos

$$\|U'(\tau_0', \tau_1')x - U(\tau_0, \tau_1)x\| \leqslant \frac{1}{2},$$

aonde τ_0' e τ_0 são como no primeiro caso.

Segue ainda de (4.4) que quando $\tau_1 \leqslant \tau_0$ temos

$$d(U(\tau_0, \tau_1)x, B_0) \leqslant d(x, B_0) \leqslant R \quad \text{para todo } x \in B[B_0, R].$$

Combinando as duas últimas desigualdades, obtemos

$$d(U'(\tau_0', \tau_1')x, B_0) \leqslant \frac{1}{2} + R < 2R.$$

Assim $y = U'(\tau_0', \tau_1')x \in B[B_0, 2R]$. Usando a propriedade de procesos de evolução temos

$$U'(t', \tau_1')x = U'(t', \tau_0')U'(\tau_0', \tau_1')x = U(t', \tau_0')y,$$

e do que fizemos no primeiro caso, como $y \in B[B_0, 2R]$, obtemos

$$d(U'(t', \tau_1')x, B_0) = d(U'(t', \tau_0')y, B_0) \leqslant 1.$$

Este argumento pode ser repetido indutivamente para intervalos de comprimento $2T + N + 2$ indo para $-\infty$, e podemos concluir que

$$d(U(t', \tau')x, B_0) \leqslant 1,$$

para qualquer $x \in B[B_0, R]$ e $\tau' \in \mathbb{T}'$ com $\tau' \leqslant t' - T - 2\delta$, o que conclui a demonstração.

□

Corolário 4.19. *Nas hipóteses do Teorema 4.18, o processo de evolução U' na escala $\mathbb{T}'$ possui um $\mathfrak{D}$-atrator pullback $\hat{A}'$, desde que $H_d(\mathbb{T},\mathbb{T}')$ seja pequena, e $\hat{A} \subset B_1$.*

Agora podemos enunciar e demonstrar o resultado final deste trabalho, que mostra a *semicontinuidade superior* dos atratores $\hat{A}'$ em $\hat{A}$, quando $\mathbb{T}'$ se aproxima de $\mathbb{T}$.

Teorema 4.20. *Nas hipóteses do Teorema 4.18, o $\mathfrak{D}$-atrator pullback $\hat{A}'$ do processo de evolução U' na escala temporal $\mathbb{T}'$* ***converge semicontínuo-superiormente*** *para o $\mathfrak{D}$-atrator pullback $\hat{A}$ do processo de evolução U na escala temporal $\mathbb{T}$ quando $H_d(\mathbb{T},\mathbb{T}')$ converge a zero, isto é, para cada $t \in \mathbb{T}$*

$$H_d^*(A'(t'),A(t)) \to 0$$

quando $|t'-t| \leqslant H_d(\mathbb{T}',\mathbb{T}) \to 0$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que o resultado não seja verdadeiro. Então existem $t \in \mathbb{T}$, $\epsilon_0 > 0$, uma sequência de escalas temporais $\{\mathbb{T}_k\}$ com $H_d(\mathbb{T}_k,\mathbb{T}) \to 0$ quando $k \to \infty$, pontos $t_k \in \mathbb{T}_k$ para $k \in \mathbb{N}$ com $t_k \to t$ tais que para os $\mathfrak{D}$-atratores pullback $\hat{A}^k$ dos processos associados U^k nas escalas temporais $\mathbb{T}_k$ temos

$$H_d^*(A^k(t_k),A(t)) \geqslant \epsilon_0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Da compacidade dos $A^k(t_k)$, existe $a_k \in A^k(t_k)$ tal que

$$d(a_k,A(t)) = H_d^*(A^k(t_k),A(t)) \geqslant \epsilon_0 \tag{4.11}$$

Da atração pullback de $A(t)$ e do fato de $\mathbb{T}$ não possuir buracos rapidamente crescentes, existem $T>0$, $N>0$ e $\tau \in [t-T-N,t-T] \cap \mathbb{T}$ tal que

$$d(U(t,\tau)x,A(t)) \leqslant \frac{\epsilon_0}{4} \quad \text{para todo } x \in B[B_0,R]. \tag{4.12}$$

Seja $\delta > 0$ tal que (4.6) é valida com $\frac{\epsilon_0}{4}$, R e $T_2-T_1 = T+N+1$, e escolha $t_{0,k} \in \mathbb{T}_k$ tal que $(t_k,t_{0,k}) \in P_0^k \cap [t-T-N,t+1]^2$ e $|t_{0,k}-t-T| \leqslant H_1(\mathbb{T}_k,\mathbb{T}) \leqslant \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como cada $\hat{A}^k$ é U^k-invariante, existe $b_k \in A^k(t_{0,k})$ tal que $a_k = U^k(t_k,t_{0,k})b_k$. Assim, por (4.6), obtemos

$$\|a_k-U(t,\tau)b_k\| = \|U^k(t_k,t_{0,k})b_k-U(t,\tau)b_k\| \leqslant \frac{\epsilon_0}{4},$$

uma vez que $b_k \in A^k(t_{0,k}) \subset B[B_0,R]$.

Usando (4.12) temos

$$d(a_k,A(t)) \leqslant d(a_k,U(t,\tau)b_k) + d(U(t,\tau)b_k,A(t)) \leqslant \frac{\epsilon_0}{2},$$

o que contradiz (4.11) e conclui a demonstração do resultado. □

Exemplo 4.21. Consideraremos a equação

$$x^{\Delta} = -x^3$$

nas escalas temporais $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{T}_h = h\mathbb{Z}$, para $0 < h \leqslant 1$. Ambas as escalas temporais são homogêneas, pois $\mu(t) = 0$ ou $\mu(t) = h$ para todo $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, respectivamente. Ainda mais, o termo forçante $f(x) = -x^3$ é independente do tempo, e assim o processo de evolução resultante desta equação , em ambas as escalas, é na verdade um semigrupo, e os atratores pullback são conjuntos fixos ($A(t) = A$ para todo $t \in \mathbb{T}$), também conhecidos como *atratores globais*.

Para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos a equação diferencial ordinária

$$x' = -x^3$$

que tem o atrator global $A = \{0\}$. Esta escala não possui buracos rapidamente crescentes, e esta equação satisfaz a condição (4.6). Podemos calcular a fórmula explítica das soluções para $x_0^2 \geqslant 1$ e obter

$$|x(t)^2 - 1| \leqslant \frac{1}{1 + 2(t - t_0)} |x^2(t_0) - 1| \quad \text{para todo } t \geqslant t_0,$$

e podemos tomar $B_0 = [-1, 1]$ em (4.4).

Para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, a equação é um *esquema de Euler* com passo h dada por

$$x_{n+1} = x_n - h x_n^3 \quad \text{para } n \in \mathbb{Z},$$

que tem $A_h = \{0\}$ como um atrator, porém nesse caso, somente *local*, isto é, A_h atrai conjuntos limitados que estão dentro da sua *base de atração* $(-1/\sqrt{h}, 1/\sqrt{h})$.

Exemplo 4.22. Considere as equações

$$x^{\Delta_\delta} = -x + \sin(\pi t),$$

onde Δ_δ é a derivada na escala temporal

$$\mathbb{T}_\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n + 1 - \delta],$$

com $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}$. Esta equação nesta escala consiste da equação diferencial ordinária

$$x' = -x + \sin(\pi t) \quad \text{para } t \in (2n, 2n + 1 - \delta),$$

e saltos de $t = 2n + 1 - \delta$ até $t = 2n + 2$ dados por

$$\frac{x(2n+2) - x(2n+1-\delta)}{1 + \delta} = -x(2x + 1 - \delta) + \sin(\pi\delta), \tag{4.13}$$

o que nos dá

$$x(2n+2) = -\delta x(2n+1-\delta) + (1+\delta)\sin(\pi\delta).$$

A solução da equação diferencial pode ser calculada explicitamente, e é dada por $x(t) = c_1 e^{-t} + \frac{\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)}{1+\pi^2}$, onde $c_1 \in \mathbb{R}$ e supondo o instante inicial como $t_0 = 2n$, temos

$$x(2n) = c_1 e^{-2n} + \frac{\sin(\pi 2n) + \pi\cos(\pi 2n)}{1+\pi^2} \Leftrightarrow c_1 = e^{2n}\left(x(2n) + \frac{\pi}{1+\pi^2}\right),$$

e assim

$$x(t) = c_1 e^{-t} + \frac{\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)}{1+\pi^2} = e^{2n-t}x(2n) + \frac{1}{1+\pi^2}(\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t) - \pi e^{2n-t}).$$

Note que se $\tau \in [0, 1-\delta]$ e $n \in \mathbb{Z}$, então

$$x(2n+\tau) = e^{-\tau}x(2n) + \frac{1}{1+\pi^2}(\sin(\pi\tau) - \pi\cos(\pi\tau) - \pi e^{-\tau}). \qquad (4.14)$$

Escolhendo $\tau = 1-\delta$ temos $x(2n+1-\delta) = e^{-1+\delta}x(2n) + \frac{1}{1+\pi^2}(\sin(\pi\delta) + \pi\cos(\pi\delta) - \pi e^{-1+\delta})$.

Para $\delta = 0$, a dinâmica é relativamente simples, pois $x(2n+2) = 0$, independente do valor de $x(2n+1)$. Isto nos diz que depois de apenas um período, toda a dinâmica do problema é ditada pela solução periódica

$$\overline{x}(2n+\tau) = \frac{1}{1+\pi^2}(\sin(\pi\tau) - \pi\cos(\pi\tau) + \pi e^{-\tau}),$$

para todo $\tau \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, o atrator pullback $\hat{A}^{\mathbb{T}_0}$ é o conjunto unitário construído a partir desta solução periódica, isto é

$$A^{\mathbb{T}_0}_{2n+\tau} = \{\overline{x}(2n+\tau)\}.$$

Para $\delta > 0$ porém, a dinâmica deixa de ser simples. Se $\tau > 0$, por (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} x(2n+2) &= -\delta x(2n+1-\delta) + (1+\delta)\sin(\pi\delta) \\ &= -\delta\left(e^{-1+\delta}x(2n) + \frac{1}{1+\pi^2}(\sin(\pi\delta) + \pi\cos(\pi\delta) + \pi e^{-1+\delta})\right) + (1+\delta)\sin(\pi\delta) \\ &= A_\delta x(2n) + B_\delta \end{aligned}$$

com $A_\delta = -\delta e^{-1+\delta}$ e $B_\delta = (1+\delta)\sin(\pi\delta) - \frac{\delta}{1+\pi^2}(\sin(\pi\delta) + \pi\cos(\pi\delta) + \pi e^{-1+\delta})$. Considerando o instante inicial como $x(2k) = x_0$ temos $x(2n) = A_\delta^{n-k}x_0 + \frac{B_\delta}{1-A_\delta}(1 - A_\delta^{n-k-1})$. Note que com n e x_0 fixos, fazendo $k \to -\infty$, temos

$$\overline{x}_\delta(2n) = \frac{B_\delta}{1-A_\delta} = \frac{1}{1+\delta e^{-1+\delta}}[(1+\delta)\sin(\pi\delta) - \frac{\delta}{1+\pi^2}(\sin(\pi\delta) + \pi\cos(\pi\delta) + \pi e^{-1+\delta})].$$

Na igualdade (4.14), considerando o valor inicial como o descrito acima, temos

$$\overline{x}_\delta(2n+\tau) = C_\delta e^{-\tau} + \frac{1}{1+\pi^2}(\sin(\pi\tau) - \pi\cos(\pi\tau) + \pi e^{-\tau}),$$

onde

$$C_\delta = \frac{1}{1+\delta e^{-1+\delta}}[(1+\delta)\sin(\pi\delta) - \frac{\delta}{1+\pi^2}(\sin(\pi\delta) + \pi\cos(\pi\delta) + \pi e^{-1+\delta})],$$

para $\tau \in [0, 1-\delta]$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Então, o atrator pullback $\hat{A}^{\mathbb{T}_\delta}$ consiste em conjuntos únicos formados pela solução periódicas, ou seja, $A^{\mathbb{T}_\delta}_{2n+\tau} = \{\overline{x}_\delta(2n+\tau)\}$, para todo $\tau \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Neste caso podemos ver diretamente das expressões de $\overline{x}$ e $\overline{x}_\delta$ que a convergência dada pelo Teorema 4.20 vale.

NOTAS

O trabalho desenvoldido neste capítulo segue (CARABALLO; ŁUKASZEWICZ; REAL, 2006) para os resultados envolvendo atratores pullback para processos de evolução e (KLOEDEN, 2006) para a parte de semicontinuidade superior de atratores pullback. Na primeira parte, os resultados foram adapatos do caso contínuo para o caso de escalas temporais em geral. Na segunda parte, a definição de atrator pullback foi levemente modificada, pois em (KLOEDEN, 2006) o autor considera um *atrator pullback* um conjunto não-autônomo $\hat{A} = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ que é compacto, U-invariante e *pullback atrai pontos*, isto é

$$H^*_d(U(t,s)x, A(t)) \to 0 \quad \text{quando } s \to -\infty$$

para cada $t \in \mathbb{T}$. Além disso, em alguns de seus resultados, o autor considera que os atratores possam ter somente propriedades *locais* de atração, como mencionado no Exemplo 4.21.

REFERÊNCIAS

BOHNER, Martin; PETERSON, Allan. **Dynamic Equations on Time Scale: An Introduction with Applications**. [*S.l.*]: Birkhäuser, 2001.

CARABALLO, T.; ŁUKASZEWICZ, G.; REAL, J. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems. **Nonlinear Analysis**, n. 64, p. 484–498, 2006.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. **Attractors for Infinite Dimensional Non-autonomous Dynamical Systems**. [*S.l.*]: Springer, 2013.

CUNHA, Jeffrey J. da. Transition matrix and generalized matrix exponential via the Peano-Baker series. **Journal of Difference Equations and Applications**, v. 11, n. 15, p. 1245–1264, 2006.

GARAY, B.M.; HILGER, S.; KLOEDEN, P. E. Continuous dependence in time scale dynamics. **New Progress in Difference Equations**, p. 279–288, 2003.

HAMZA, Alaa E.; AL-QUBATY, Moneer A. On the exponential operator functions on time scales. **Advances in Dynamical Systems and Applications**, v. 7, n. 1, p. 57–80, 2012.

HILGER, S. Ein Maβkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. **Ph.D. Thesis**, 1988.

KLOEDEN, P.E. A gronwall-like inequality and continuous dependence on time scales. **Nonlinear Analysis and Applications**, v. II, p. 645–660, 2004.

KLOEDEN, P.E. Upper semicontinuous dependence of pullback attractors on time scales. **Journal of Difference Equations and Applications**, v. 12, n. 3-4, p. 357–368, 2006.

ÍNDICE