UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Gabriel Simon Schafaschek

Elementos de Álgebras de Steinberg

Florianópolis
2024

Gabriel Simon Schafaschek

Elementos de Álgebras de Steinberg

Dissertação de mestrado apresentada para o Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Pura e Aplicada.
Orientador: Gilles Gonçalves de Castro.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Schafaschek, Gabriel Simon
Elementos de Álgebras de Steinberg / Gabriel Simon Schafaschek ; orientador, Gilles Gonçalves Castro, 2024.
74 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de Steinberg. 3. Dualidade de Stone. 4. Teorema de Keimel. 5. Grupoides e Semigrupos Inversos. I. Castro, Gilles Gonçalves. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Gabriel Simon Schafaschek

Elementos de Álgebras de Steinberg

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Alcides Buss
Universidade Federal de Santa Catarina

Daniel Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Mikhailo Dokuchaev
Universidade de São Paulo

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura e Aplicada.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Douglas Soares Goncalves
Data: 18/11/2024 15:51:19-0300
CPF: ***.566.318-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Douglas Soares Gonçalves
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Gilles Goncalves de Castro
Data: 18/11/2024 15:09:24-0300
CPF: ***.977.489-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Gilles Gonçalves de Castro
Orientador

Florianópolis, 5 de setembro de 2024

RESUMO

As Álgebras de Steinberg são álgebras de convolução definidas a partir de grupoides amplos de Hausdorff e que podem ser caracterizadas por meio de álgebras de semigrupos inversos. As álgebras de caminhos de Leavitt são exemplos de Álgebras de Steinberg. Neste trabalho, mostramos como as álgebras de Steinberg se aplicam à teoria de álgebras boolianas, especialmente no que se refere ao Teorema da Representação de Stone, à dualidade de Stone e à boolianização de um semigrupo inverso. Finalmente, estudamos condições necessárias e suficientes a fim de que as álgebras de Steinberg sejam simples ou primitivas. Apresentamos aplicações à teoria de grafos e à topologia algébrica.

Palavras-chave: Álgebras de Steinberg; Dualidade de Stone; Álgebras boolianas; grupoides; semigrupos inversos; Teorema da Representação de Stone.

ABSTRACT

Steinberg algebras are convolution algebras defined from ample Hausdorff groupoids and which can be characterized by inverse semigroup algebras. Leavitt path algebras are examples of Steinberg algebras. In this paper, we show how Steinberg algebras apply to the theory of Boolean algebras, especially with regard to Stone's Representation Theorem, Stone's duality and the Booleanization of an inverse semigroup. Finally, we study necessary and sufficient conditions for Steinberg algebras to be simple or primitive. We present applications to graph theory and algebraic topology.

Keywords: Steinberg Algebras; Stone's duality; Boolean Algebras; groupoids; inverse semigroups; Stone's representation theorem.

Sumário

1 Introdução

A Topologia e a Álgebra exercem papel de ferramenta fundamental ao estudo da Análise, a qual mostra-se repleta de aplicações à física e às engenharias em geral, especialmente levando-se em conta sua importância ao Cálculo, à teoria de equações diferenciais, grafos e aos Sistemas Dinâmicos.

Dentro desse contexto, são de extrema importância todos os estudos que conduzam a uma melhor compreensão topológica por meio de métodos algébricos e vice-versa. A Topologia Algébrica, por exemplo, é uma das áreas que se desenvolve em torno desse dilema. Evidentemente, a maneira mais moderna de abordar as relações entre esses tópicos se retrata numa temática categórica e funtorial, buscando estabelecer e analisar funtores entre categorias topológicas e algébricas.

Levando em conta essa máxima, a noção de grupo topológico se desenvolve naturalmente. Além disso, a importância da ideia de grupoide (que consiste, grosso modo, na flexibilização da noção de grupo) ao estudo dos sistemas de equações parciais, desenvolve naturalmente o interesse pela ideia de grupoide topológico. Esse pensamento se transpõe de maneira análoga ao trocar a palavra grupoide pelo conceito de semigrupo inverso. A conveniência pela escolha do espaço é regulada a partir do contexto e dos objetivos. Além disso, essas duas estruturas também podem ser associados de maneira funtorial, como por exemplo ocorre na definição do grupoide universal de um semigrupo inverso.

Dessa forma, no começo deste século, as chamadas Álgebras de Steinberg surgem com o objetivo de definir e associar, de forma funtorial, uma álgebra a partir de um grupoide topológico, de tal forma que a álgebra do grupoide fundamental de Paterson (veja (PATERSON, 2012)) e a álgebra do semigrupo inverso associado a tal grupoide coincidam.

O trabalho presente objetiva apresentar as definições e ideias acima mencionadas, assim como justificar a sua conceituação. Elas serão definidas a fim de estender o conceito de dualidade Stone, que provavelmente seja o resultado mais importante do Capítulo 1. Seu entendimento deve ser precedido de alguns conceitos mais básicos, como o da noção de álgebras boolianas (generalizadas) e dos homomorfismos de álgebras boolianas, os quais bem poderiam ser apresentados como um apêndice, mas decidimos apresentá-los inicialmente. Além disso, apresentaremos algumas aplicações desses conceitos à teoria de grafos. Por fim, apresentaremos alguns resultados naturais que decorrem dessa ideia, bem como algumas discussões modernas que aparecem com frequência aos pesquisadores dessa área.

Procuramos expor um número considerável de exemplos, a fim de tornar o texto mais concreto aos leitores. A escrita foi pensada para servir como uma divulgação científica, nela predominando um caráter expositivo e divulgador, ao contrário da metodologia assumida em (SCHAFASCHEK, 2018), na qual procuramos fornecer demonstrações bem detalhadas e exemplos fartos a fim de servir de bom proveito até para leitores iniciantes. Assim, as demonstrações aparecerão de forma sucinta, sem maiores preocupações em desenvolver cálculos excessivamente longos, e muitas vezes referenciadas. Cremos que essa decisão permite expor, de forma compacta e informativa, alguns dos problemas mais importantes que vem sendo discutidos acerca desses temas.

A fim de entendimento teórico, sugere-se que a leitura do presente trabalho deve ser precedida do estudo de alguns requisitos e resultados básicos, entre os quais um bom conhecimento de topologia; estruturas de semigrupos, aneis, grupos, módulos e álgebras; e alguns termos introdutórios da teoria de categorias e funtores. Também as noções de grupoides e semigrupos inversos são expostas de maneira direta, sem menção a muitos detalhes.

A referência definitiva para os conceitos de álgebra booliana, bem como dos resultados procedentes, devidos à Stone, estabelecidos no Capítulo 1, é o livro (HALMOS; GIVANT, 2009), de Halmos. As ideias associadas diretamente a semigrupos inversos e grupoides, no final do capítulo, são muito bem definidas e detalhadamente expostas em (PATERSON, 2012) e (BOSSA,).

O Capítulo 2, no qual se formaliza a ideia de boolianização, conta com várias definições e resultados indicados em (STEINBERG, 2010), (EXEL, 2009), (EXEL*, 2008), (PATERSON, 2012), (HALMOS; GIVANT, 2009) e (KUDRYAVTSEVA, 2019).

Finalmente, uma introdução ao estudo da simplicidade e primitividade das álgebras de Steinberg é fornecida no Capítulo 3, cujas referências principais são (STEINBERG, 2010), (STEINBERG, 2016) e (EXEL, 2009).

2 A Representação de Stone

2.1 Noções Iniciais

Em todo esse trabalho, R denotará um anel comutativo com unidade. Todas as R-álgebras mencionadas serão associativas.

Se $\mathscr{A}$ é uma R-álgebra e $B \subseteq \mathscr{A}$, denotamos por $\text{Ann}(B) = \{r \in R;\ r \cdot B = \{0\}\}$ o conjunto dos elementos anuladores de B. Este será chamado o anulador de B.

Se X é um conjunto, denotamos por $P(X) = \{Y :\ Y \subseteq X\}$ o conjunto das partes de X.

Definição 2.1.1. Um conjunto L, munido de uma ordem parcial $\leq$, chama-se um *reticulado* quando, para quaisquer $a, b \in L$, existirem elementos $a \vee b$, $a \wedge b \in L$, chamados o *supremo e o ínfimo* de a e b, respectivamente, os quais cumprem as condições:

i) $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$;

ii) Se $a \leq c$ e $b \leq c$, com $c \in L$, então $a \vee b \leq c$;

iii) $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$;

iv) Se $c \leq a$ e $c \leq b$, com $c \in L$, então $c \leq a \wedge b$.

Noutras palavras, o supremo $a \vee b$ de a e b é o elemento mínimo do conjunto das cotas superiores do conjunto $\{a, b\}$. Analogamente, o ínfimo $a \wedge b$ é o elemento máximo das cotas inferiores do conjunto $\{a, b\}$.

As condições (i) e (ii) acima referem-se ao supremo e as condições (iii) e (iv) referem-se ao ínfimo. Um conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ que cumpre apenas as condições (i) e (ii) ou apenas as condições (iii) e (iv) chama-se um *semirreticulado*. Mais especificamente, as condições (i) e (ii) caracterizam um *semirreticulado superior* e as condições (iii) e (iv) referem-se ao que se costuma chamar um *semirreticulado inferior*.

Exemplo 2.1.1. Um conjunto L, munido de operações internas $\vee$ e $\wedge$, é um reticulado se, e somente se, ambas as operações são comutativas, associativas e que possuem a propriedade de *absorção*, isto é, tal que $a \vee (a \wedge b) = a$ e $a \wedge (a \vee b) = a$, para quaisquer $a, b \in L$.

Com efeito, é imediato demonstrar que essas propriedades ocorrem em todo reticulado. Reciprocamente, supondo que $(L, \wedge, \vee)$ possui tais propriedades, podemos definir a relação de ordem $\leq$ em L, de forma que $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$, para quaisquer $a, b \in L$. Dessa forma, L é um reticulado e as operações $\wedge$ e $\vee$ coincidem exatamente com o ínfimo e o supremo. Mais detalhes podem ser estudados em (STONE, 1936).

Quando um (semir)reticulado possuir um elemento mínimo, denotaremos tal elemento por 0. Analogamente, se um (semir)reticulado possuir um elemento máximo, este será denotado pelo símbolo 1.

Exemplo 2.1.2. Os conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, munidos da ordem usual, são todos reticulados pondo $a \vee b = \max\{a,b\}$ e $a \wedge b = \min\{a,b\}$. Nenhum deles possui elemento máximo, embora $\mathbb{N}$ possua elemento mínimo.

Exemplo 2.1.3. No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, escreva $a \preceq b$ quando $b|a$. Nota-se imediatamente que $\preceq$ é uma relação de ordem segundo a qual $(\mathbb{N}, \preceq)$ é um reticulado. Como $n|0$ e $1|n$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, segue que o elemento mínimo de $\mathbb{N}$ segundo a ordem $\preceq$ é igual a 0 e o elemento máximo é igual a 1. Além disso, tem-se $a \vee b = \mathsf{mdc}(a,b)$ e $a \wedge b = \mathsf{mmc}(a,b)$, para todo a,b naturais não nulos.

Exemplo 2.1.4. Seja L um reticulado. Tem-se $a \vee a = a = a \wedge a$, para todo $a \in L$. Isso estabelece a propriedade da idempotência do supremo e do ínfimo em um reticulado.

Definição 2.1.2. Um reticulado L diz-se *distributivo* quando, para quaisquer $a,b,c \in L$, valem as seguintes condições:

i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

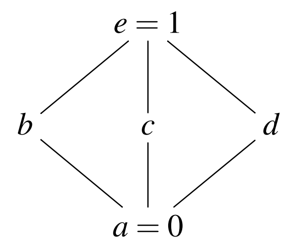
ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Exemplo 2.1.5. O reticulado do Exemplo 2.1.3 na página 11 é distributivo. De fato, isso ocorre porque o cálculo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum entre dois números naturais se reduz ao cálculo do mínimo e do máximo dos expoentes que ocorrem na decomposição desses números em potências de números primos.

Todo reticulado que provém de uma relação de ordem total é distributivo. A demonstração é bastante simples e pode ser encontrada em (HALMOS; GIVANT, 2009).

A fim de fornecer um exemplo de reticulado não distributivo, considere o conjunto $L = \{a,b,c,d,e\}$, com a relação de ordem $\leq$ segundo a qual $a \leq b \leq e$, $a \leq c \leq e$ e $a \leq d \leq e$. Assim, $a = 0$ e $e = 1$ no reticulado R. Tem-se $b \vee (c \wedge d) = b \vee 0 = b$, mas $(b \vee c) \wedge (b \vee d) =$

$1 \wedge 1 = 1$. Segue que L não é um reticulado distributivo.



Definição 2.1.3. Seja $(L, \leq)$ um reticulado. Um filtro em L é um subconjunto próprio não vazio $\mathscr{F} \subseteq L$, tal que:

a) $x \in \mathscr{F}$ e $x \leq y \Rightarrow y \in \mathscr{F}$;

b) $x, y \in \mathscr{F} \Rightarrow x \wedge y \in \mathscr{F}$.

Exemplo 2.1.6. Seja $(L, \leq)$ um reticulado não vazio com elemento mínimo e tome $a \in L$. Seja $A = \{x \in L;\ a \leq x\}$. Tem-se $a \in A$. Se $x \in A$ e $x \leq y$, então $y \in A$ em virtude da transitividade da ordem. Além disso, se $b, c \in A$, então $a \leq b \wedge c$, de forma que $b \wedge c \in A$. É claro que $A = L$ no caso em que $a = 0$. Portanto, A é um filtro em L se, e somente se, $a \neq 0$.

Definição 2.1.4. Seja L um reticulado com elemento mínimo e máximo. Dado $a \in L$, diz-se que $b \in L$ é um complementar de a quando $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$.

Exemplo 2.1.7. Seja $L = \{0, a, b, c, 1\}$ um reticulado tal que $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ e $0 \leq c \leq 1$. Os elementos a, b e c não se comparam entre si. Note que b e c são ambos complementares de a. Isso significa que o complementar, quando existe, não é necessariamente único.

Proposição 2.1.1. Se L é um reticulado distributivo, então os complementares, quando existirem, são únicos.

Demonstração: Tome $a \in L$ e suponha que $b, c \in L$ são complementares de a. Nesse caso, $b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c$. Analogamente, $c = b \wedge c$. Daí $b = c$. **(c.q.d)**

Definição 2.1.5. Seja L reticulado com máximo e mínimo. Diz-se que L é *complementado* quando todos os seus elementos possuem complementar. Se todo intervalo $[a, b] \subseteq L$ é um reticulado complementado, então L chama-se um reticulado *relativamente complementado*.

Seja L um reticulado relativamente complementado. Para cada $c \in [a, b] \subseteq L$, o complementar de c em $[a, b]$ chama-se o complementar de c relativo a $[a, b]$. Esse é, por definição, um elemento $d \in [a, b]$ tal que $c \wedge d = a$ e $c \vee d = b$.

Por convenção, se L tem elemento mínimo e $a,b \in L$, o complementar de a relativo a b é o complementar de a relativo a $[0, a \vee b]$, o qual será denotado por $b \setminus a$.

2.2 Álgebras Boolianas

Definição 2.2.1. Uma *Álgebra booliana* é um reticulado distributivo, com elemento mínimo e relativamente complementado.

Exemplo 2.2.1. Se X é um conjunto, então o conjunto $P(X)$ das partes de X é uma álgebra booliana. Seu elemento mínimo é o conjunto vazio e seu elemento máximo é X. Além disso, tem-se $A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$, para quaisquer $A, B \in P(X)$.

Exemplo 2.2.2. Seja R um anel comutativo. Considere o conjunto $\mathscr{E}(R) = \{a \in R \,:\, a^2 = a\}$ dos elementos idempotentes de R. Pomos $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$. Isso define uma relação de ordem parcial segundo a qual $\mathscr{E}(R)$ é uma álgebra booliana com elemento mínimo $0 = 0_R$ e relativamente complementado. Tem-se $a \wedge b = ab$, $a \vee b = a + b - ab$ e $a \setminus b = a - ab$, como se verifica imediatamente. Os detalhes podem ser encontrados em (HALMOS; GIVANT, 2009).

Definição 2.2.2. Um filtro $\mathscr{F}$ chama-se um *ultrafiltro* quando não existe um filtro em L que o contém propriamente. Isso significa que se $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro, então para todo filtro $\mathscr{D}$ em L tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{D}$, tem-se $\mathscr{F} = \mathscr{D}$.

Exemplo 2.2.3. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ com a ordem usual e seja $\mathscr{F} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Tal $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro em $\mathbb{N}$. De fato, claro que $\mathscr{F}$ é um filtro em $\mathbb{N}$. Se $\mathscr{D}$ é filtro contendo $\mathscr{F}$, então a única maneira de se ter $\mathscr{F} \neq \mathscr{D}$ seria se $\mathscr{D} = \mathbb{N}$, o que não ocorre em razão de $\mathscr{D}$ ser um filtro. Por conseguinte, $\mathbb{F} = \mathscr{D}$, como queríamos demonstrar.

Mais geralmente, se P é um conjunto parcialmente ordenado com elemento mínimo e $0 \neq a \in P$ é um elemento minimal em P, então $\mathscr{G}_a = \{x \in P;\ x \geq a\}$ é um ultrafiltro em P.

Definição 2.2.3. Seja L um reticulado. Um filtro $\mathscr{F}$ chama-se *primo* quando, para quaisquer $a, b \in L$ tais que $a \vee b \in \mathscr{F}$, tem-se $a \in \mathscr{F}$ ou $b \in \mathscr{F}$.

Exemplo 2.2.4. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, com a ordem usual, e seja $\mathscr{F}$ um filtro próprio em $\mathbb{N}$. Suponha que $a, b \in \mathbb{N}$ são tais que $a \vee b \in \mathscr{F}$. Como $a \vee b \in \{a, b\}$, isso significa que $a \in \mathscr{F}$ ou $b \in \mathscr{F}$, ou seja, $\mathscr{F}$ é primo.

Agora, seja $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = P(X)$ o conjunto das partes de X. Como sabemos, relativamente às operações de união e intersecção, Y é uma álgebra booliana. Seja $\mathscr{G} = \{X\}$.

Então $\mathscr{G}$ é um filtro em Y. Entretanto, $\mathscr{G}$ não é primo, pois $\{2,3\}\cup\{1\}=X$, apesar de $\{2,3\}\notin\mathscr{G}$ e $\{1\}\notin\mathscr{G}$.

A razão pela qual o filtro $\mathscr{G}$ do exemplo acima não é um filtro primo se traduz pelo fato de Y ser uma álgebra booliana e $\mathscr{G}$ não ser um ultrafiltro, conforme explicaremos nos resultados que se seguem.

Por notação, se L é um reticulado, $a\in L$ e $\mathscr{F}$ é um filtro em L, escrevemos $a\wedge\mathscr{F}=\{a\wedge x:\ x\in\mathscr{F}\}$.

Proposição 2.2.1. Seja L um reticulado distributivo com elemento mínimo. Se $\mathscr{F}\subseteq L$ é um ultrafiltro, então $\mathscr{F}$ é primo.

Demonstração: Suponha que existem $a,b\in L\setminus\mathscr{F}$ tais que $a\vee b\in\mathscr{F}$. Tem-se $0\notin a\wedge\mathscr{F}$ ou $0\notin b\wedge\mathscr{F}$. De fato, se existissem $x,y\in\mathscr{F}$ para os quais $a\wedge x=0=b\wedge y$, então $0=0\wedge 0=(a\wedge x\wedge y)\vee(b\wedge x\wedge y)=(a\vee b)\wedge x\wedge y\in\mathscr{F}$, uma contradição, pois $\mathscr{F}$ é ultrafiltro, logo próprio. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $0\notin a\wedge\mathscr{F}$.

Considere o conjunto

$$\mathscr{J}=\{x\in L:\ x\geq a\wedge y,\ \text{para algum}\ y\in\mathscr{F}\}.$$

Então $\mathscr{J}$ é um filtro próprio contendo a e tal que $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{J}$. Por conseguinte, como $a\notin\mathscr{F}$, segue que $\mathscr{F}$ não é ultrafiltro, isto é, uma contradição. **(c.q.d)**

Teorema 2.2.1. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. Um filtro próprio $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro se, e somente se, $\mathscr{F}$ é primo.

Demonstração: $(\Rightarrow)$: Segue da proposição acima.

$(\Leftarrow)$: Suponha que $\mathscr{F}$ é primo e seja $\mathscr{J}$ um filtro próprio tal que $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{J}$. Fixe $a\in\mathscr{J}$ e $x\in\mathscr{F}$. Tem-se $a\vee x\in\mathscr{F}$. Por outro lado, $a\vee x=a\vee(x\setminus a)$. Como $\mathscr{F}$ é primo, segue que $a\in\mathscr{F}$ ou $x\setminus a\in\mathscr{F}$. No segundo caso, $x\setminus a\in\mathscr{J}$ e $0=a\wedge(x\setminus a)\in\mathscr{J}$, uma contradição, pois $\mathscr{J}$ é próprio. Daí $a\in\mathscr{F}$. Por conseguinte, $\mathscr{J}=\mathscr{F}$. **(c.q.d)**

2.3 Morfismos de Álgebras Boolianas

Definição 2.3.1. Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ álgebras boolianas. Diz-se que $f:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ é um *morfismo de álgebras boolianas* quando cumpre as seguintes condições:

i) $f(0)=0$;

ii) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$;

iii) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

Toda função f que cumpre os três itens acima deve satisfazer $f(a \setminus b) = f(a) \setminus f(b)$, isto é, f preserva os complementares relativos.

Exemplo 2.3.1. Sejam $\mathscr{A} = P(\{1,2,3\}$ e $\mathscr{B} = P(\{1,2\})$. Seja $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ a aplicação $f(X) = X \cap \{1,2\}$. Então f é um homomorfismo de álgebras boolianas. Com efeito, f satisfaz, para quaisquer $X, Y \in \mathscr{A}$, as condições:

i) $f(\varnothing) = \varnothing \cap \{1,2\} = \varnothing$;

ii) $f(X \cup Y) = (X \cup Y) \cap \{1,2\} = (X \cap \{1,2\}) \cup (Y \cap \{1,2\}) = f(X) \cup f(Y)$;

iii) $f(X \cap Y) = X \cap Y \cap \{1,2\} = (X \cap \{1,2\}) \cap Y(\cap\{1,2\}) = f(X) \cap f(Y)$.

Quando f é também bijetora, diz-se que f é um *isomorfismo de álgebras boolianas*

Teorema 2.3.1. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. Seja A o conjunto dos ultrafiltros em $\mathscr{B}$ e seja C o conjunto dos homomorfismos não nulos de álgebras boolianas de $\mathscr{B}$ em $\{0,1\}$. Existe uma bijeção $\phi : A \to B$.

Demonstração: Dado um ultrafiltro $\mathscr{F}$, seja $\chi_{\mathscr{F}} : \mathscr{B} \to \{0,1\}$ a aplicação característica, dada por $\chi_{\mathscr{F}}(x) = 0$ se $x \notin \mathscr{F}$ e $\chi_{\mathscr{F}}(x) = 1$ se $x \in \mathscr{F}$. Dados $a, b \in \mathscr{F}$, note que $a \wedge b \in \mathscr{F} \Leftrightarrow a \in \mathscr{F}$ e $b \in \mathscr{F}$, pois $\mathscr{F}$ é um filtro. Assim, $\chi_{\mathscr{F}}(a \wedge b) = \chi_{\mathscr{F}}(a) \wedge \chi_{\mathscr{F}}(b)$.

O Teorema 2.2.1 na página 14 assegura que $\mathscr{F}$ é primo, de forma que $a \vee b \in \mathscr{F} \Leftrightarrow a \in \mathscr{F}$ ou $b \in \mathscr{F}$. Daí $\chi_{\mathscr{F}}(a \vee b) = \chi_{\mathscr{F}}(a) \vee \chi_{\mathscr{F}}(b)$. Finalmente, o fato de $\mathscr{F}$ ser ultrafiltro garante que $0 \notin \mathscr{F}$, de forma que $\chi_{\mathscr{F}}(0) = 0$. Por conseguinte, $\chi_{\mathscr{F}}$ é um homomorfismo de álgebras boolianas.

Reciprocamente, seja $f : \mathscr{B} \to \{0,1\}$ um homomorfismo de álgebras boolianas. Considere o ultrafiltro $\mathscr{G} = f^{-1}(\{1\}) \subseteq \mathscr{B}$. Então $f = \chi_{\mathscr{G}}$. Isso significa que a aplicação $\phi : A \to C$, dada por $\mathscr{F} \mapsto \chi_{\mathscr{F}}$ está bem definida e é uma sobrejeção de A em C. O teorema estará demonstrado após provar que ϕ é injetiva. Para isso, suponha que $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ são filtros em $\mathscr{B}$ tais que $\phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{F}')$. Então, para todo $a \in \mathscr{F}$, tem-se $\chi_{\mathscr{F}}(a) = 1 = \chi_{\mathscr{F}'}(a)$, de forma que $a \in \mathscr{F}'$, ou seja, $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$, **(c.q.d)**

2.4 O Teorema de Stone

A noção de filtro pode ser naturalmente estendida à categoria dos conjuntos parcialmente ordenados. Nesse caso, se P é um conjunto parcialmente ordenado, então um filtro $\mathscr{F}$

sobre P é um subconjunto próprio de P que cumpre as condições:

i) Se $x \in P$, $y \in \mathscr{F}$ e $y \leq x$, então $x \in \mathscr{F}$.

ii) Dados $x, y \in \mathscr{F}$, existe $z \in \mathscr{F}$ tal que $z \leq x$ e $z \leq y$.

No caso em que P é um reticulado, a definição acima equivale à Definição 2.1.3 na página 12.

A proposição que se segue garante que, em virtude do Lema de Zorn (o qual será adotado sem maiores discussões neste trabalho), todo conjunto com mais de um elemento, parcialmente ordenado, com elemento mínimo, possui um ultrafiltro.

Proposição 2.4.1. Seja P um conjunto parcialmente ordenado com elemento mínimo. Se $a \in P$ e $a \neq 0$, então existe um ultrafiltro $\mathscr{F} \subseteq P$ tal que $a \in \mathscr{F}$.

Demonstração: Seja A o conjunto dos filtros em P contendo a, ordenado pela relação de inclusão. Tem-se $A \neq \varnothing$, pois o conjunto $\{x \in P : \ a \leq x\}$ é um filtro próprio em P contendo a. Seja $\mathscr{C}$ uma cadeia não vazia de elementos de A e seja $\mathscr{G}$ a reunião de todos os conjuntos de $\mathscr{C}$.

Evidentemente, $a \in \mathscr{G}$. Se $x \in \mathscr{G}$ e $b \in P$ com $a \leq b$, então existe $H \in \mathscr{C}$ tal que $x \in H$. Como H é um filtro, tem-se $y \in H \subseteq \mathscr{G}$. Além disso, dados $x, y \in \mathscr{G}$, tome $H, G \in \mathscr{C}$ tais que $x \in H$ e $y \in G$. Seja $J = \max\{H, G\}$, o qual existe em virtude de $\mathscr{C}$ ser uma cadeia. Então $x, y \in J$. Como J é um filtro, isso significa que existe $z \in J \subseteq \mathscr{G}$ que cumpre $z \leq x$ e $z \leq y$. Portanto $\mathscr{G}$ é um filtro contendo a, logo $\mathscr{G} \in A$.

Além disso, por definição, $\mathscr{G}$ é uma cota superior da cadeia $\mathscr{C}$. Pelo Lema de Zorn, A admite um elemento maximal $\mathscr{F}$. Note que $\mathscr{F} \in A$, logo é um filtro contendo a. Se $I \subseteq P$ é um filtro próprio em P com $\mathscr{F} \subseteq I$, então $a \in I$ e portanto $I \in A$. Segue que $\mathscr{F} = I$. Por conseguinte, $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro contendo a. **(c.q.d)**

As definições a seguir poderiam ter sido juntadas em uma só, mas para efeitos organizacionais foram colocadas separadamente. Elas surgem de forma natural na medida em que consideramos a classe das álgebras boolianas como sendo uma categoria, a fim de enunciar e demonstrar a famosa *dualidade de Stone*.

Definição 2.4.1. Seja $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um morfismo de álgebras boolianas. Diz-se que f é *próprio* se, para todo $B \in \mathscr{B}$, existe $A \in \mathscr{A}$, tal que $B \subseteq f(A)$.

Isso equivale a dizer que $f(\mathscr{A})$ é cofinal em $\mathscr{B}$.

Definição 2.4.2. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana e seja $\widehat{\mathscr{B}}$ o conjunto dos ultrafiltros em $\mathscr{B}$. Para cada $B \in \mathscr{B}$, defina $\mathscr{O}_B = \{\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{B}} : \ B \in \mathscr{F}\}$.

Note que se $\mathscr{B}$ possui mais do que um elemento, a Proposição 2.4.1 garante que $\widehat{\mathscr{B}}$ é não vazio.

Segue-se o Teorema de Stone, que dá nome a essa seção. Ele estabelece que, do ponto de vista algébrico, não há diferença entre uma álgebra booliana e a coleção dos seus ultrafiltros. Portanto, para efeitos práticos, as noções de supremo e ínfimo numa álgebra booliana são caracterizados prontamente pela união e intersecção dos ultrafiltros associados, respectivamente.

Esta versão se assemelha em partes à original, que fora publicada por M.H Stone em 1936, em cujas hipóteses se mencionava, mais precisamente, a teoria de aneis boolianos em vez de álgebras boolianas.

Teorema 2.4.1. [Stone] Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. O conjunto $\mathscr{L} = \{\mathscr{O}_B : B \in \mathscr{B}\}$ é uma álgebra booliana de conjuntos de $\mathscr{B}$. Além disso, a aplicação $f : \mathscr{B} \to \mathscr{L}$, dada por $f(A) = \mathscr{O}_A$, é um isomorfismo de álgebras boolianas.

Demonstração: Como 0 não pertence a ultrafiltro algum, segue que $\mathscr{O}_0 = \varnothing$. Agora, tome $A, B \in \mathscr{B}$. Tem-se $\mathscr{O}_{A \wedge B} = \mathscr{O}_A \cap \mathscr{O}_B$, em virtude da definição de filtro. Além disso, o Teorema 2.2.1 na página 14 garante que $\mathscr{O}_{A \vee B} = \mathscr{O}_A \cup \mathscr{O}_B$. Notemos também que $\mathscr{O}_{A \setminus B} = \mathscr{O}_A \setminus \mathscr{O}_B$.

Com efeito, suponha que $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_{A \setminus B}$. Então $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_A$, já que $A \setminus B \subseteq A$. Como $B \wedge (A \setminus B) = \varnothing$, segue que $\mathscr{F} \notin \mathscr{O}_B$. Daí $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_A \setminus \mathscr{O}_B$. Reciprocamente, tome $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_A \setminus \mathscr{O}_B$. Sendo $B \vee (A \setminus B) = A \vee B \in \mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ filtro primo, conclui-se que $A \setminus B \in \mathscr{F}$, de forma que $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_{A \setminus B}$. Isso estabelece a igualdade.

Dessa forma, fica provado que $\mathscr{L}$ é uma álgebra booliana de conjuntos de $\mathscr{B}$ e que a aplicação f é um morfismo de álgebras boolianas. A sobrejetividade de f segue imediatamente da definição de $\mathscr{L}$. Finalmente, sejam $A, B \in \mathscr{B}$ tais que $A \neq B$. Não há perda de generalidade supor $A \setminus B \neq \varnothing$. Pelo Teorema 2.4.1, segue que existe um ultrafiltro $\mathscr{F}$ tal que $A \setminus B \in \mathscr{F}$. Isso significa que $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_A \setminus \mathscr{O}_B$, de tal forma que $f(A) \neq f(B)$, isto é, f é injetiva. **(c.q.d)**

O conjunto $\mathscr{L}$, acima mencionado, é fechado por interseções finitas, portanto é base de uma topologia em $\widehat{\mathscr{B}}$ (veja (LIMA, 1970)). Isso significa que $\hat{\mathscr{B}}$ será visto como um espaço topológico, com a topologia gerada por $\mathscr{L}$. Segundo essa topologia, têm-se $\mathscr{O}_B$ aberto, para todo $B \in \mathscr{L}$.

Vamos denotar por $\mathscr{B}'$ o conjunto de todos os homomorfismos de álgebras boolianas de $\mathscr{B}$ em $\{0,1\}$. Considere em $\{0,1\}$ a topologia discreta. Pondo $\{0,1\}^{\mathscr{B}}$ como sendo o conjunto das funções de $\mathscr{B}$ em $\{0,1\}$, e considerando-o como um espaço topológico munido da topologia produto, podemos considerar $\mathscr{B}' \subseteq \{0,1\}^{\mathscr{B}}$ como um subespaço topológico.

Segundo a notação acima, o Teorema 2.3.1 pode ser reformulado afirmando-se que há uma bijeção entre $\widehat{\mathscr{B}}$ e $\mathscr{B}'$. Mais forte do que isso: há uma equivalência topológica entre tais estruturas, conforme corolário abaixo.

Corolário 2.4.1. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. A correspondência $\phi : \widehat{\mathscr{B}} \to \mathscr{B}'$, dada por $\phi(\mathscr{F}) = \chi_{\mathscr{F}}$ é um homeomorfismo.

Demonstração: Seja $A \subseteq \{0,1\}^{\mathscr{B}}$ um aberto básico. Escreva

$$A = p_{A_1}^{-1}(\{1\}) \cap \cdots \cap p_{A_n}^{-1}(\{1\}) \cap p_{B_1}^{-1}(\{0\}) \cap p_{B_m}^{-1}(\{0\}),$$

para certos $n,m \in \mathbb{N}$ e $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m \subseteq \mathscr{B}$, onde a aplicação p_{A_i} denota a projeção na coordenada A_i, ou seja, $p_{A_i} : \{0,1\}^{\mathscr{B}} \to \{0,1\}$ é dada por $p_{A_i}(f) = f(A_i)$. Um cálculo simples mostra que

$$\phi^{-1}(A) = \mathscr{O}_{(A_1\cap\cdots\cap A_n)\setminus(B_1\cup\cdots\cup B_m)},$$

ou seja, $\phi^{-1}(A)$ é um aberto básico de $\widehat{\mathscr{B}}$. Por conseguinte, ϕ é contínua.

Além disso, dado $A \in \mathscr{B}$, tem-se $\phi(\mathscr{O}_A) = p_A^{-1}(\{1\}) \cap \mathscr{B}'$. Sendo $p_A^{-1}(\{1\})$ um aberto, segue-se que ϕ aplica abertos básicos de $\widehat{\mathscr{B}}$ em abertos básicos de $\{0,1\}^{\mathscr{B}}$, de forma que ϕ é uma aplicação aberta. **(c.q.d)**

Corolário 2.4.2. $\hat{\mathscr{B}}$ é de Hausdorff localmente compacto.

Demonstração: O espaço $\{0,1\}^{\mathscr{B}}$ é de Hausdorff. Como $\mathscr{B}'$ é um subespaço, segue que $\mathscr{B}'$ é de Hausdorff, logo $\widehat{\mathscr{B}}$ também o é. Para cada $A \in \mathscr{B}$, o conjunto $\phi(\mathscr{O}_A) = p_A^{-1}(\{1\}) \cap \mathscr{B}'$ é fechado em $\{0,1\}^{\mathscr{B}}$, o qual é um espaço compacto de Hausdorff. Por conseguinte, o conjunto $\phi(\mathscr{O}_A)$ é compacto, ou seja, $\mathscr{O}_A$ é compacto. Portanto $\widehat{\mathscr{B}}$ possui uma base de conjuntos compactos e abertos. Em particular, $\widehat{\mathscr{B}}$ é localmente compacto. **(c.q.d)**

2.5 A Dualidade de Stone

Definição 2.5.1. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. O espaço topológico $\widehat{\mathscr{B}}$, definido anteriormente, chama-se o dual (de Stone) de $\mathscr{B}$.

A fim de expandir a noção de uma álgebra booliana ao âmbito topológico, convém fazer uso da definição abaixo.

Definição 2.5.2. Um espaço topológico de Hausdorff X chama-se um *espaço de Stone* quando possui uma base de conjuntos abertos e compactos.

Alguns autores denominam um espaço de Stone como sendo um *Espaço Booliano*.

Exemplo 2.5.1. Considere a topologia usual na reta $\mathbb{R}$. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, então I não é um espaço de Stone. Com efeito, todo espaço compacto em I deve ser fechado, pois I é de Hausdorff. Portanto, se um subconjunto não vazio de I for aberto e compacto, então deve ser aberto e fechado, logo igual a I, tendo em vista a conexidade dos intervalos em $\mathbb{R}$.

Mais geralmente, se X é um espaço conexo de Hausdorff, então X não é um espaço de Stone (a não ser, eventualmente, que X seja um ponto).

Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$ é compacto se, e somente se, é finito. Portanto, todo espaço-ponto é um subconjunto aberto e compacto de $\mathbb{Z}$ e, evidentemente, a coleção $\{\{x\} : \ x \in X\}$ dos espaços-pontos de X é uma base de X. Por conseguinte, $\mathbb{Z}$ é um espaço de Stone.

Exemplo 2.5.2. Seja X um espaço de Hausdorff. Então, a coleção $\mathscr{B} = \mathscr{K}(X)$ dos conjuntos compactos e abertos em X, munidos das operações de reunião e intersecção, forma uma álgebra booliana. De fato, $\mathscr{B}$ é fechada para reuniões e interseções finitas, levando em conta que todo compacto em um espaço de Hausdorf é fechado. A distributividade das operações de intersecção e união de conjuntos é válida em geral. O complementar relativo de um compacto aberto K em relação a um compacto aberto G é simplesmente a diferença $K \setminus G$. Finalmente, claro que $\varnothing = 0_{\mathscr{B}}$ é aberto e compacto.

Para cada $x \in X$, o conjunto $\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{B} : \ x \in A\}$ é um ultrafiltro em $\mathscr{B}$. Com efeito, $\varnothing \notin \mathscr{F}_x$, de forma que $\mathscr{F}_x$ é próprio. Se $A \in \mathscr{F}_x$ e $B \in \mathscr{B}$, com $A \subseteq B$, então B é um compacto aberto contendo x, de forma que $B \in \mathscr{F}_x$. Também, se $A, B \in \mathscr{F}_x$, então $C = A \cap B$ é um aberto compacto tal que $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$. Isso mostra que $\mathscr{F}_x$ é um filtro. Finalmente, suponha que $A, B \in \mathscr{B}$ são tais que $A \cup B \in \mathscr{F}_x$. Então $x \in A$ ou $x \in B$, de forma que $A \in \mathscr{F}_x$ ou $B \in \mathscr{F}_x$. Por conseguinte, $\mathscr{F}_x$ é um filtro primo, ou seja, um ultrafiltro em $\mathscr{B}$.

Esse fato será usado com frequência nos resultados abaixo.

Nas condições do Teorema 2.4.1 na página 17, podemos considerar que $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}(\widehat{\mathscr{B}})$, em que $\mathscr{K}(\widehat{\mathscr{B}})$ é a coleção dos conjuntos compactos e abertos em $\widehat{\mathscr{B}}$. Mais do que isso, é válida também a inclusão contrária, conforme a proposição abaixo.

Proposição 2.5.1. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra boolina e seja $\mathscr{L} = \{\mathscr{O}_A \subseteq \widehat{\mathscr{B}} : \ A \in \mathscr{B}\}$. Então $\mathscr{L} = \mathscr{K}(\widehat{\mathscr{B}})$.

Demonstração: Tome $K \subseteq \widehat{\mathscr{B}}$ conjunto compacto e aberto. Tem-se $K = \bigcup_{A \in \Lambda} \mathscr{O}_A$, para alguma família Λ de subconjuntos de $\mathscr{B}$. Da compacidade de K, existem $A_1, \ldots, A_n \in \Lambda$, com $n \in \mathbb{N}$, tais que $K = \mathscr{O}_{A_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{A_n} = \mathscr{O}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \in \mathscr{L}$. **(c.q.d)**

A dualidade de Stone, que veremos a seguir, estabelece que não há diferença topológica entre um espaço de Stone e o dual da álgebra booliana definida pela coleção dos conjuntos compactos e abertos desse espaço.

Proposição 2.5.2. Seja $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. Existe um isomorfismo de álgebras boolianas entre $\mathscr{B}$ e $\mathscr{K}(\widehat{\mathscr{B}})$.

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 2.5.1 e do Teorema 2.4.1 na página 17. **(c.q.d)**

Proposição 2.5.3. Seja X um espaço de Hausdorff. Seja $\mathscr{B}$ a álgebra booliana formada pelos subconjuntos compactos e abertos em X. Se $\mathscr{B}$ é uma base de X, então $\widehat{\mathscr{B}}$ é homeomorfa ao espaço X.

Demonstração: Para cada $x \in X$, defina $\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{B} : \ x \in A\}$. Tal $\mathscr{F}_x$ é um ultrafiltro em $\mathscr{B}$, vide o Exemplo 2.5.2 na página 19. Defina $\phi : X \to \widehat{\mathscr{B}}$ pondo $\phi(x) = \mathscr{F}_x$. Se fosse $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}_y$ com $x, y \in X$, $x \neq y$, então x pertenceria à interseção de todas as vizinhanças fechadas de y, um absurdo, pois X é de Hausdorff, logo tal interseção é igual a $\{y\}$ (veja o Apêndice de (SCHAFASCHEK, 2018)).

A fim de mostrar a sobrejetividade de ϕ, tome $\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{B}}$ e considere $A \in \mathscr{F}$ arbitrário. Seja $\mathscr{D} = \{B \in \mathscr{F} : \ B \subseteq A\}$. Note que a família $\mathscr{D}$ possui a propriedade da interseção finita. Como A é compacto, isso siginifica que existe $x \in X$ tal que $x \in B$, para todo $B \in \mathscr{D}$.

Agora, tome $B \in \mathscr{F}$. Então $A \cap B \in \mathscr{D}$, de forma que $x \in A \cap B \subseteq B$, donde segue que $B \in \mathscr{F}_x$. Assim $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_x$. Daí decorre que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_x$. **(c.q.d)**

Um anel R chama-se *booliano* quando todos os seus elementos são idempotentes. Sabe-se, da Álgebra, que todo anel booliano R é comutativo e possui característica dois. O semigrupo multiplicativo de R, nesse caso, consiste exatamente numa álgebra booliana. Com efeito, basta por

$$r \wedge s = rs \quad \text{e} \quad r \setminus s = r - rs$$

como o ínfimo e o complementar relativo, respectivamente.

Definição 2.5.3. Diz-se que um espaço topológio X possui *dimensão zero* quando X possui uma base de conjuntos abertos e fechados.

Proposição 2.5.4. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Se X é totalmente desconexo, então X tem dimensão zero.

Demonstração: Tome $x \in X$ e seja $U \subseteq X$ uma vizinhança aberta de x. A proposição ficará demonstrada se provarmos a existência de uma vizinhança $W \subseteq U$ de x que é aberta e fechada em X. Como X é localmente compacto, existe uma vizinhança aberta V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$. Se V é uma vizinhança fechada, então V é a vizinhança procurada e não há o que mostrar.

Caso contrário, tem-se $\partial V \neq \varnothing$, em que ∂V denota a fronteira de V em X, a qual é compacta porque é um subconjunto fechado do espaço de Hausdorff compacto $\overline{V}$. Como X é totalmente desconexo, segue que, para todo $y \in \partial V$, existe uma vizinhança $W_y \subseteq X$ de x, aberta e fechada em X, tal que $y \notin W_y$. Dessa forma, pondo $V_y = X \setminus W_y$, obtêm-se uma cobertura aberta $\{V_y\}_{y \in \partial V}$ de ∂V, da qual podemos extrair uma subcobertura finita $\partial V \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$, em virtude da compacidade de ∂V.

Finalmente, defina $W = W_1 \cap W_2 \cdots W_n$. Tem-se $x \in W$ e, além disso, W é aberto e fechado no compacto $\overline{V}$. Por construção, segue que $W \cap \partial V = \varnothing$, de forma que $W \subseteq V \subseteq U$. Como $W \subseteq V$ é aberto em V e V é aberto em X, segue que W é aberto em X. Como W é fechado em $\overline{V}$, conclui-se também que W é fechado em X. Por conseguinte, W é uma vizinhança aberta e fechada de x em X. **(c.q.d)**

Teorema 2.5.1. Seja X um espaço de Hausdorff. São equivalentes:

a) X é localmente compacto e totalmente desconexo;

b) X é localmente compacto e possui dimensão zero.

c) X é um espaço de Stone.

Demonstração: A implicação (a) $\Rightarrow$ (b) consiste na Proposição 2.5.4. A fim de demonstrar que (b) $\Rightarrow$ (c), tome $x \in X$ e considere uma vizinhança compacta K de x. Seja $U \subseteq K$ aberto e fechado contendo x. Como K é compacto de Hausdorff, segue que U é compacto e aberto. Portanto, a coleção das vizinhanças de x abertas e fechadas em K forma uma base $\mathscr{V}_x$ para o ponto x. Assim $\{U \in \mathscr{V}_x : \ x \in X\}$ forma uma base para X de conjuntos abertos e compactos.

Finalmente, provemos que (c) $\Rightarrow$ (a). Basta mostrar que X é totalmente desconexo. Com efeito, seja $A \subseteq X$ um conjunto contendo dois pontos distintos x e y. Tome K vizinhança aberta e compacta de x tal que $y \notin K$, a qual existe em virtude de K ser de Hausdorff. Note que $A = (K \cap A) \cup (X \setminus K)$ é uma separação não trivial de A, de forma que A não pode ser conexo. **(c.q.d)**

A razão pela qual os morfismos de álgebra booliana na Definição 2.4.1 na página 16 foram chamados de próprios é explicada pela proposição que se segue. Lembremos, da topologia, que uma função contínua $f : X \to Y$ chama-se própria quando $f^{-1}(K) \subseteq X$ é compacto, sempre que $K \subseteq Y$ o for.

Proposição 2.5.5. Seja $f : \mathscr{B} \to \mathscr{D}$ um morfismo próprio de álgebras boolianas. Então a aplicação $\widehat{f} : \widehat{\mathscr{D}} \to \widehat{\mathscr{B}}$, dada por $\widehat{f}(\mathscr{F}) = f^{-1}(\mathscr{F})$, é uma função contínua e própria.

Demonstração: Seja $\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{B}}$. Escreva $\mathscr{G} = f^{-1}(\mathscr{F})$ e tome $A \in \mathscr{F}$. Existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $A \subseteq f(B)$, em virtude de f ser própria. Daí $B \in \mathscr{G}$, de forma que $\mathscr{G} \neq \varnothing$.

Sendo $\mathscr{F}$ um ultrafiltro, tem-se $0 \notin \mathscr{G}$. Se $A, B \in \mathscr{G}$, é evidente que $A \cap B \in \mathscr{G}$, pois $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Também, dados $A \in \mathscr{G}$ e $B \in \mathscr{B}$ com $A \subseteq B$, é claro que $f(A) \subseteq f(B)$, de tal forma que $B \in \mathscr{F}$ em virtude desse último ser um filtro. Finalmente, se $A, B \in \mathscr{B}$ são tais que $A \cup B \in \mathscr{G}$, então $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) \in \mathscr{F}$, de maneira que $f(A) \in \mathscr{F}$ ou $f(B) \in \mathscr{F}$, donde segue que $A \in \mathscr{G}$ ou $B \in \mathscr{G}$.

Mostremos que $\widehat{f}$ é contínua. Com efeito, tem-se $\widehat{f}^{-1}(\mathscr{O}_A) = \mathscr{O}_{f(A)}$, para todo $A \in \mathscr{B}$.

A demonstração estará encerrada após provarmos que $\widehat{f}$ é própria. Para isso, tome $K \subseteq \widehat{\mathscr{B}}$ subconjunto compacto. Tome $A \in \widehat{\mathscr{B}}$ de forma que se tenha $K \subseteq \mathscr{O}_A$ (vide Proposição 2.5.1). Note que $\widehat{f}^{-1}(K) \subseteq \widehat{f}^{-1}(\mathscr{O}_A) = \mathscr{O}_{f(A)}$, o qual, como sabemos, é compacto. Como K é fechado, segue que $\widehat{f}^{-1}(K)$ é um subconjunto fechado de um compacto, logo também é compacto. **(c.q.d)**

Exemplo 2.5.3. Sejam X, Y espaços de Stone e seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e própria. Sejam $\mathscr{K}(X)$ e $\mathscr{K}(Y)$ as álgebras boolianas formadas pelos conjuntos compactos e abertos de X e Y, respectivamente. Então $\widehat{f} : \mathscr{K}(Y) \to \mathscr{K}(X)$ é um homomorfismo de álgebras boolianas.

Exemplo 2.5.4. É importante estender as ideias conceituais do teorema de Stone ao âmbito categórico e functorial. Para tanto, considere a categoria STONE, cujos elementos são os espaços de Stone e os morfismos são funções contínuas próprias. Considere também a categoria BOOL, formadas por álgebras boolianas e morfismos de álgebras boolianas próprias.

Nessas condições, a aplicação $F : STONE \to BOOL$, dada por $F(X) = \mathscr{K}(X)$ para todo X espaço de Stone e

$$F(f) : \mathscr{K}(Y) \to \mathscr{K}(X), \quad F(f)(L) = f^{-1}(L),$$

sempre que $f : X \to Y$ é um morfismo em STONE e $L \in \mathscr{K}(Y)$, define um funtor contravariante de STONE em BOOL.

De forma recíproca, as correspondências

$$G(\mathscr{B}) = \widehat{\mathscr{B}} \quad \text{e} \quad G(\phi) : \widehat{\mathscr{B}_2} \to \widehat{\mathscr{B}_1}, \quad G(\phi)(\mathscr{F}) = \phi^{-1}(\mathscr{F}),$$

sempre que $\phi : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ é um morfismo de álgebras boolianas $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \in$ BOOL, definem um funtor contravariante de BOOL sobre STONE.

Além disso, as aplicações $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathrm{BOOL}}$ E $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathrm{STONE}}$ SÃO isomorfismos naturais, de forma que determinam uma equivalência categórica entre BOOL e STONE.

2.6 O Teorema de Keimel

Seja $\mathscr{A}$ uma R-álgebra comutativa (com ou sem unidade) e seja $\mathscr{E}_{\mathscr{A}}$ o conjunto dos elementos idempotentes de $\mathscr{A}$. Então, as operações

$$e \wedge f = e \cdot f \quad \text{e} \quad e \vee f = e + f - e \cdot f$$

tornam $\mathscr{E}_{\mathscr{A}}$ uma álgebra booliana, vide (FOSTER, 1945).

A partir de agora, examinaremos as álgebras comutativas que são geradas pelo conjunto dos seus elementos idempotentes.

Exemplo 2.6.1. Os aneis boolianos, como por exemplo $R = \mathbb{Z}_2$, são evidentemente R-álgebras comutativas geradas por elementos idempotentes.

O anel dos inteiros $R = \mathbb{Z}$ é gerado pela unidade 1, a qual é idempotente. O mesmo ocorre para $\mathbb{Z}_n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Sejam R um anel munido da topologia e X um espaço de Stone. Seja $\mathscr{L}(X,R)$ o conjunto das funções localmente constantes $f : X \to R$, com suporte compacto.

Para quaisquer $f,g \in \mathscr{L}(X,R)$ e $r \in R$, tem-se $f+g$, fg, $rf \in \mathscr{L}(X,R)$, de forma que $\mathscr{L}(X,R)$ é uma álgebra comutativa.

Convém ressaltar que, tomando-se R como um espaço topológico discreto, então $\mathscr{L}(X,R) = C_C(X,R)$ consiste precisamente no espaço das funções contínuas com suporte compacto de X em R. De fato, uma função que toma valores em um espaço discreto é contínua se, e somente se, é localmente constante.

Seja $U \subseteq X$ um aberto compacto e considere a sua função característica $\chi_U : X \to R$, dada por $\chi_U(x) = 1$ se $x \in U$ e $\chi_U(x) = 0$ se $x \notin U$. Evidentemente, a aplicação $\chi_U \in \mathscr{L}(X,R)$ é idempotente. Além disso, se V é também aberto em X e compacto, então valem as relações

$$\chi_{U\cup V} = \chi_U + \chi_V - \chi_U\chi_V = \chi_U \vee \chi_V \quad \text{e} \quad \chi_{U\cap V} = \chi_U\chi_V = \chi_U \wedge \chi_V.$$

Por conseguinte, a correspondência $U \mapsto \chi_U$ é um morfismo de álgebras boolianas.

A aplicação acima considerada é evidentemente injetiva. Se R não possui elementos idempotentes distintos de zero e da unidade (por exemplo, se R é um domínio de integridade), então tal morfismo é também sobrejetivo.

Agora, seja $f \in \mathscr{L}(X,R)$. Dado $r \in R$, pomos $U_r = f^{-1}(r)$. Então U_r é aberto e fechado. Além disso, se $r \neq 0$ então $U_r \subseteq \operatorname{supp}(f)$, e sendo esse um conjunto compacto (por hipótese), segue-se que U_r também o é.

Note que $X \setminus U_0 = \bigcup_{r\neq 0} U_r$ é fechado em X. Também, $\operatorname{supp}(f) = \bigcup_{r\neq 0} U_r$ é uma cobertura aberta do compacto $\operatorname{supp}(f)$. Por compacidade, podemos escrever $\operatorname{supp}(f) = U_{r_1} \cup \cdots \cup U_{r_k}$, com $r_1,\ldots,r_k \in R\setminus\{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$, de forma que f pode ser escrita como uma soma finita $f = r_1\chi_{U_{r_1}} + \cdots + r_k\chi_{U_{r_k}}$. Em resumo, mostramos a:

Proposição 2.6.1. Sejam R um anel e X um espaço booliano. Então $\mathscr{L}(X,R)$ é uma R-álgebra comutativa gerada pelos seus elementos idempotentes.

Convém observar que se R é um domínio, então $\mathscr{L}(X,R)$ não possui torção, ou seja: $r \in R$, $f \in \mathscr{L}(X,R)$ e $rf = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $f = 0$. Para mais detalhes, veja (KEIMEL, 1970).

A noção de ideal de uma álgebra booliana é completamente análoga à ideia de ideal de um anel, exposta com detalhes em (HALMOS; GIVANT, 2009), e será usada, sem maiores comentários, no que se segue.

Nosso objetivo, por agora, será demonstrar que toda R-álgebra comutativa gerada pelos elementos idempotentes é a imagem homomórfica de uma R-álgebra da forma $\mathscr{L}(X,R)$. Para isso, nos será de grande interesse a importante noção de ultrafiltros, que aparece naturalmente no processo de construção do espaço booliano X. Mais precisamente, demonstraremos o seguinte:

Teorema 2.6.1. [Keimel] Seja $\mathscr{A}$ uma R-álgebra comutativa gerada pelos seus elementos idempotentes. Seja $\widehat{\mathscr{A}}$ o espaço booliano dos ultrafiltros sobre o espaço dos idempotentes $\mathscr{E}(\mathscr{A})$. Então, existe um homomorfismo sobrejetivo $\Phi : \mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}},R) \to \mathscr{A}$. Além disso, se $\mathscr{A}$ é sem torção, então Φ é um isomorfismo.

Demonstração: Para todo $x \in \mathscr{A}$, escreva $x = \sum\limits_{i=1}^{k} r_i e_i$, em que $r_i \in R$ e $e_i \in \mathscr{E}_{\mathscr{A}}$, para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$. Dado $\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{A}}$, seja $I_{\mathscr{F}} = \sum\limits_{j\in\mathscr{F}} (1-j)\cdot\mathscr{A}$, levando em conta que a notação $(1-j)\mathscr{A}$ descreve o conjunto dos elementos da forma $a - ja$, em que $a \in \mathscr{A}$. Como $\mathscr{F}$ é um filtro em $\mathscr{A}$, segue que $I_{\mathscr{F}}$ é um ideal de $\mathscr{A}$ e tem-se

$$I_{\mathscr{F}} = \{a \in \mathscr{A}; \exists j \in \mathscr{F} \text{ tal que } ja = 0\}.$$

Afirmação 1: Todo $j \in \mathscr{F}$ é uma unidade módulo $I_{\mathscr{F}}$ e $\mathscr{E}(\mathscr{A}) \setminus \mathscr{F} \subseteq I_{\mathscr{F}}$.

De fato, tome $j \in \mathscr{F}$. Dado $a \in \mathscr{A}$, tem-se $a - ja \in I_{\mathscr{F}}$, donde segue que $ja \equiv a(\mathrm{mod} I_{\mathscr{F}})$. Agora, tome $b \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$ tal que $b \notin \mathscr{F}$. Então, existe $j \in \mathscr{F}$ tal que $jb = j \wedge b = 0$. Daí $b = b - jb \in I_{\mathscr{F}}$, de forma que a afirmação está provada.

Afirmação 2: A álgebra quociente $\mathscr{A}/I_{\mathscr{F}}$ possui unidade e nenhum dos seus elementos idempotentes é distinto dela ou de zero.

Ora, se $x + I_{\mathscr{F}} \in \mathscr{A}/I_{\mathscr{F}}$ é idempotente, então $x^2 - x \in I_{\mathscr{F}}$, ou seja, existe $j \in \mathscr{F}$ para o qual $j(x^2 - x) = 0$. Pondo $y = jx$, ter-se-á $x \equiv y(\mathrm{mod} I_{\mathscr{F}})$ e $0 = j(x^2 - x) = y^2 - y$, donde segue que $y \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$. Em virtude da Afirmação 1, segue o resultado.

Afirmação 3: $\mathscr{A}/I_{\mathscr{F}}$ é a imagem de R por um homomorfismo.

De fato, seja $\mathscr{B}$ uma R-álgebra comutativa com unidade e, tal que nenhum elemento idempotente é diferente de zero ou de e. Se $\mathscr{B}$ é gerado por tais elementos idempotentes, então tem-se $\mathscr{B} = R \cdot e$, de forma que $\mathscr{B} \cong R/\operatorname{Ann}(e)$. O resultado segue-se tomando-se a aplicação canônica de R sobre o quociente $R/\operatorname{Ann}(e)$.

Afirmação 4: $\displaystyle\bigcap_{\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{A}}} I_{\mathscr{F}} = \{0\}$.

A fim de demonstrar isso, tome $x \in \mathscr{A}$, com $x \neq 0$. Escreva $x = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$, para certos $e_1, \ldots, e_n \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$ idempotentes e $r_1, \ldots, r_n \in R$. Seja $e = e_1 \vee \cdots \vee e_n$. Tem-se $ex = x$, como se verifica imediatamente. Agora, seja J o conjunto dos idempotentes $f \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$ tais que $fx = 0$. Tal J é um ideal de $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ que não contém e, pois $ex = x \neq 0$. Assim, existe um ultrafiltro $\mathscr{F}$ na álgebra de idempotentes $\mathscr{E}(\mathscr{A})$, contendo e, que não intersecta J. Note que $x \notin I_{\mathscr{F}}$, pois caso contrário existiria $e' \in \mathscr{F}$ tal que $e'x = 0$, o que é impossível.

Para cada $e \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$, denotamos por $V(e) = \{\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{A}};\ e \in \mathscr{F}\}$ o conjunto de todos os ultrafiltros em $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ que contém e. Seja $\mathscr{H}$ a família dos conjuntos da forma $V(e)$, com $e \in \mathscr{E}_{\mathscr{A}}$. Verifica-se sem dificuldade que $V(e \wedge f) = V(e) \cap V(f)$, $V(e \vee f) = V(e) \cup V(f)$ e que $\mathscr{H}$ é a base de uma topologia sobre $\widehat{\mathscr{A}}$ que o torna um espaço booliano, cujos abertos compactos são precisamente os conjuntos da família $\mathscr{H}$. Além disso, a correspondência $e \mapsto V(e)$ é um isomorfismo do reticulado $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ sobre $\mathscr{H}$, fato que também é assegurado em virtude da Dualidade de Stone, anteriormente apresentada.

Agora, considere a álgebra $\mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}}, R)$. Para cada $e \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$, seja $\widehat{e} = \chi_{V(e)} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}}, R)$. Já sabemos que a aplicação $e \mapsto \widehat{e}$ é um homomorfismo injetivo de $\mathscr{E}_{\mathscr{A}}$ sobre $\mathscr{E}_{\mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}}, R)}$. Além disso, toda função $f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}}, R)$ é uma soma finita $f = \sum_i r_i \widehat{e_i}$, com $r_i \in R$ e $e_i \in \mathscr{E}_{\mathscr{A}}$.

Afirmação 5: Se $e_1, \ldots, e_n \in \mathscr{E}_{\mathscr{A}}$ e $r_1, \ldots, r_n \in R$ são tais que $\sum_i r_i \widehat{e_i} = 0$, então $\sum_i r_i e_i = 0$.

Conforme afirmação anterior, basta mostrar que $\sum_i r_i e_i \in I_{\mathscr{F}}$, para todo $\mathscr{F} \in \widehat{\mathscr{A}}$. Seja C o conjunto dos índices j tais que $\widehat{e}_j(\mathscr{F}) \neq 0$. Então $\widehat{e}_j(\mathscr{F}) = 1$, sempre que $j \in C$, e $e_j(\mathscr{F}) = 0$ para todo $j \notin C$.

De fato, $\left(\sum r_i \widehat{e_i}\right)(\mathscr{F}) = \sum_{j \in C} r_j$, donde segue que $\sum_{i=1}^{n} r_i \widehat{e_i} = 0$ sempre que $\sum_{j \in C} r_j = 0$.

Se $j \in C$ e $\widehat{e}_j(\mathscr{F}) \neq 0$, então $e_j \in \mathscr{F}$, de forma que e_j é uma identidade módulo $I_{\mathscr{F}}$, para todo $j \in C$, haja vista a Afirmação 1. Portanto $\sum_{j \in C} r_j e_j \in I_{\mathscr{F}}$. Por outro lado, se $j \notin C$, então $\widehat{e_j}(\mathscr{F}) = 0$, logo $e_j \notin \mathscr{F}$ e por conseguinte $e_j \in I_{\mathscr{F}}$, donde conclui-se que, de qualquer maneira, se tem $\sum r_i e_i \in I_{\mathscr{F}}$, de forma que a afirmação está demonstrada.

As afirmações acima garantem que a aplicação $\Phi : \mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}}, R) \to \mathscr{A}$, dada por $\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$, sempre que $f = \sum_{i=1}^{n} r_i \widehat{e_i}$, está bem definida e é um homomorfismo. Além disso, vale a:

Afirmação 6: Se $\mathscr{A}$ é uma R-álgebra sem torção, então a aplicação Φ é injetiva, logo um isomorfismo.

Demonstração: Suponha que $\Phi(f) = 0$, para algum $f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathscr{A}}, R)$. Então existem $r_1, \ldots, r_n \in R$ e $e_1, \ldots, e_n \in \mathscr{E}_{\mathscr{A}}$ não nulos tais que $f = \sum_{i=1}^{n} r_i \widehat{e_i}$ e $e_i e_j = 0$ quando $i \neq j$, sendo que essa última hipótese assegurada em virtude da observação feita no parágrafo anterior ao enunciado da Proposição 2.6.1.

Portanto $0 = \Phi(f) = \sum r_i e_i$, de tal forma que $0 = \left(\sum (r_i e_i)\right) e_j = r_j e_j$, qualquer que seja $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. No caso de $\mathscr{A}$ ser sem torção, e tendo em vista que $e_j \neq 0$, isso significa que $r_j = 0$, para todo j, donde segue que $f = 0$. **(c.q.d)**

Definição 2.6.1. Um anel comutativo com unidade R diz-se *indecomponível* quando seus únicos elementos idempotentes são 0 e 1.

Proposição 2.6.2. Seja R um anel indecomponível e X um espaço de Stone. Os idempotentes de $\mathscr{L}(X, R)$ são da forma χ_K, para algum conjunto compacto e aberto $K \subseteq X$.

Demonstração: Note que $0 = \chi_{\varnothing}$. Seja $f \in \mathscr{L}(X, R)$ uma função não nula. Tem-se

$$f = \sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{K_i},$$

com $r_1, \ldots, r_n \in f(X)$ não nulos, com $r_i \neq r_j$, sempre que $i \neq j$, e $K_i = f^{-1}(r_i)$.

Se f é idempotente, então

$$f = f^2 = \sum e_i^2 \chi_{K_i},$$

donde segue que $r_i = r_i^2$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sendo R indecomponível e os r_i não nulos, isso significa que $i = 1$ e $r_i = 1$. Por conseguinte $f = \chi_K$. **(c.q.d)**

Exemplo 2.6.2. Sejam R um anel indecomponível e $h: X \to Y$ uma aplicação contínua e própria entre os espaços de Stone X e Y. Então, fica bem definida a aplicação $\Phi: \mathscr{L}(Y,R) \to \mathscr{L}(X,R)$, dada por $\Phi(f) = f \circ h$. A aplicação Φ é evidentemente um homomorfismo de R-álgebras e cuja restrição ao conjunto $\mathscr{E}(\mathscr{L}(Y,R))$ dos idempotentes é um homomorfismo próprio de álgebras boolianas. Esses fatos são de verificação imediata. Mostraremos, abaixo, que a recíproca desse resultado também é válida.

Teorema 2.6.2. Sejam X e Y espaços de Stone e suponha que R é um anel indecomponível. Se $\Phi: \mathscr{L}(Y,R) \to \mathscr{L}(X,R)$ é um homomorfismo de R-álgebras cuja restrição aos idempotentes é um homomorfismo próprio de álgebras boolianas, então existe uma aplicação própria e contínua $h: X \to Y$ tal que $\Phi(f) = f \circ h$, para toda $f \in \mathscr{L}(Y,R)$.

Demonstração: Por simplificação, escreva $\mathscr{A} = \mathscr{L}(X,R)$ e $\mathscr{B} = \mathscr{L}(Y,R)$. Defina $\varphi: X \to \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{A})}$ como sendo $\varphi(x) = \{\mathscr{X}_K;\ K \in \mathscr{K}(X),\ x \in K\}$.

Afirmação 01: A aplicação φ é um homeomorfismo.

Com efeito, a aplicação $\psi: \mathscr{K}(X) \to \mathscr{E}(\mathscr{A})$, dada por $\psi(K) = \mathscr{X}_K$, é evidentemente um homomorfismo injetivo de álgebras boolianas. Pela Proposição 2.6.2, segue que ψ é também sobrejetiva. A dualidade de Stone, por outro lado, garante a existência dos homeomorfismos $\mu: X \to \widehat{\mathscr{K}(X)}$, dado por $\mu(x) = \{K \in \mathscr{K}(X):\ x \in K\}$ e $\widehat{\psi^{-1}}: \widehat{\mathscr{K}(X)} \to \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{A})}$, dada por $\widehat{\psi^{-1}}(K) = \psi(K)$. Como $\varphi = \widehat{\psi^{-1}} \circ \mu$, de forma que φ é um homeomorfismo, o que prova a afirmação.

Escreva $\varphi = h_X$. De forma análoga, fica bem definido um homeomorfismo $h_Y: Y \to \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{B})}$. Defina $h = h_Y^{-1} \circ \widehat{\Phi} \circ h_X$, a qual é uma aplicação contínua e própria de X em Y. Além disso, uma conta simples, porém um pouco espalhafatosa, garante que $\Phi(f) = f \circ h$, para toda $f \in \mathscr{L}(Y,R)$. **(c.q.d)**

2.7 Grupoides e Semigrupos Inversos

As estruturas mais importantes que ocorrem no estudo que generaliza a ideia da dualidade de Stone são os grupoides e os semigrupos inversos. Sobre esses, há uma teoria muito fértil e muito bem especificada em (BOSSA,), (PATERSON, 2012) e (STEINBERG, 2003), por exemplo.

Nos que se segue, a fim de estabelecer uma notação conveniente, iremos expor alguns dos resultados mais importantes sobre esses tópicos, bem como mencionar como eles se relacionam com a teoria desenvolvida neste trabalho.

Definição 2.7.1. Um *grupoide* é uma categoria pequena da qual todo morfismo é um isomorfismo.

Os objetos de um grupoide $\mathscr{G}$ podem ser evidentemente identificados com os seus respectivos morfismos identidade associados. Seja $\mathscr{G}^0$ o conjunto dos objetos (ou seja, morfismos identidade) de $\mathscr{G}$. Por simplicidade, vamos identificar $\mathscr{G}$ com o seu conjunto de morfismos. Dado $g \in \mathscr{G}$ um morfismo, o *domínio e a imagem* de g são definidos por $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$, respectivamente. Note que $d(g), r(g) \in \mathscr{G}^0$, para todo $g \in \mathscr{G}$.

Exemplo 2.7.1. [Grupoide Fundamental] Seja X um espaço topológico. Conforme exposto em (SCHAFASCHEK, 2018), o conjunto das classes de homotopia de caminhos em X chama-se o grupoide fundamental de X, e é indicado por $\Pi(X)$. Para cada caminho $a : I \to X$ com $a(0) = x_0$ e $a(1) = x_1$, tem-se $d(a) = [aa^{-1}] = [e_{x_0}]$ e $r(a) = [a^{-1}a] = [e_{x_1}]$, em que e_{x_k} denota o caminho constante em x_k, $k \in \{0, 1\}$. Lembremos que os caminhos constantes em X se identificam com os morfismos identidade no grupoide fundamental $\Pi(X)$.

Definição 2.7.2. Sejam $\mathscr{G}$ e $\mathscr{D}$ grupoides. Diz-se que $F : \mathscr{G} \to \mathscr{D}$ é um morfismo de grupoides quando F é um funtor covariante da categoria $\mathscr{G}$ na categoria $\mathscr{D}$.

Definição 2.7.3. Um grupoide $\mathscr{G}$ diz-se um *grupoide topológico* quando $\mathscr{G}^0$ possui uma topologia segundo a qual a aplicação de multiplicação (isto é: composição de morfismos) e a aplicação inversão são contínuas.

Na definição acima, o conjunto domínio da aplicação de multiplicação (isto é, o conjunto dos morfismos componíveis) é dado pela topologia induzida da topologia produto em $\mathscr{G}^0 \times \mathscr{G}^0$.

Decorre imediatamente da definição acima que se $\mathscr{G}$ é um grupoide topológico, então as aplicações d e r são contínuas e a inversão é um homeomorfismo.

Definição 2.7.4. Um grupoide topológico $\mathscr{G}$ diz-se *étale* quando a aplicação domínio $d : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^0$ é um homeomorfismo local.

Como $r = d \circ \imath$ e a inversão $\imath$ é um homeomorfismo, segue que a aplicação imagem r é um também um homeomorfismo local em todo grupoide étale.

As referências (LIMA, 1970), (MUNKRES, 2017) e (SCHAFASCHEK, 2018) (apêndice) contém os resultados e ideias centrais ligados à noção de homeomorfismo local.

Exemplo 2.7.2. Todo grupoide discreto $\mathscr{G}$ étale. Com efeito, para todo $g \in \mathscr{G}$, a aplicação $r : \{g\} \to \{gg^{-1}\}$, definida de forma óbvia na vizinhança aberta $\{g\}$ de g, é um homeomorfismo.

O resultado a seguir é dos mais importantes e será utilizado com frequência nos tópicos que se seguem. Sua demonstração pode ser encontrada em (BOSSA,) e em (EXEL*, 2008).

Proposição 2.7.1. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide étale. Então:

i) $\mathscr{G}^0$ é aberto em $\mathscr{G}$.

ii) $\mathscr{G}$ é de Hausdorff se, e somente se, $\mathscr{G}^0$ é fechado em $\mathscr{G}$.

iii) A aplicação de multiplicação e as aplicações d e r são abertas.

Definição 2.7.5. Um grupoide étale chama-se *amplo* quando possui uma base $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos compactos e tais que $d|U_\lambda$ e $r|U_\lambda$ são injetivos, para todo $\lambda \in L$.

Isso significa que d_{U_λ} e r_{U_λ} são homeomorfismos sobre $d(U_\lambda)$ e $r(U_\lambda)$, para todo $\lambda \in L$, tendo em vista o item (iii) da proposição acima.

A proposição abaixo conecta as ideias da teoria de grupoides com as noções de espaços boolianos previamente aqui abordadas.

Proposição 2.7.2. Um grupoide étale $\mathscr{G}$ é amplo se, e somente se, $\mathscr{G}^0$ é um espaço de Stone.

Demonstração: Sendo $\mathscr{G}$ étale, a Proposição 2.7.1 garante que $\mathscr{G}^0$ é aberto em $\mathscr{G}$, de tal forma que os conjuntos abertos e compactos de $\mathscr{G}^0$ formam uma base para a sua topologia. Além disso, se $\mathscr{G}$ é amplo, então $\mathscr{G}^0$ é de Hausdorff, por definição. Daí $\mathscr{G}^0$ é um espaço de Stone.

De forma recíproca, todo ponto $x \in \mathscr{G}^0$ possui uma vizinhança aberta $V_x \subseteq \mathscr{G}^0$, de forma que $d|V_x$ é um homeomorfismo sobre $d(V_x)$, pois $\mathscr{G}$ é étale. Em particular, $d(V_x)$ é uma vizinhança aberta de $d(x)$. Como $\mathscr{G}^0$ é de Stone, então podemos tomar um subconjunto $U_x \subseteq d(V_x)$ aberto, compacto e contendo $d(x)$. Então $W_x = d|V_x^{-1}(U_x)$ é compacto, aberto e tal que $d|W_x$ é um homeomorfismo sobre $d(W_x)$. Segue que $\mathscr{G}$ é amplo. **(c.q.d)**

Vejamos, a seguir, como a noção de grupoide amplo permite generalizar melhor algumas das ideias já estipuladas anteriormente. Fixemos, de uma vez por todas, um anel comutativo com unidade R considerado um espaço topológico com a topologia discreta e um grupoide amplo $\mathscr{G}$. Escrevamos $\mathscr{L}(\mathscr{G},R)$ para denotar o espaço gerado por funções $f : \mathscr{G} \to R$, tais que existe um subconjunto aberto de Hausdorff $V \subseteq \mathscr{G}$ para o qual $f|(\mathscr{G} \setminus V) = 0$ e $f|V$ é contínua com suporte compacto.

Exemplo 2.7.3. Se $\mathscr{G}$ é um espaço discreto, então $\mathscr{L}(\mathscr{G},\mathbb{R})$ é o espaço vetorial de todas as funções com suporte finito em $\mathscr{G}$. Com efeito, na topologia discreta, um conjunto é compacto se, e somente se, é finito.

Proposição 2.7.3. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e seja $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G},R)$. Existe um conjunto compacto e aberto $K \subseteq \mathscr{G}$ tal que $\mathrm{supp}(f) = K = f^{-1}(R \setminus \{0\})$.

Demonstração: Tome V aberto de Hausdorff tal que $f|(\mathscr{G} \setminus V) = 0$ e $f|V$ é contínua com suporte compacto. Como R é discreto e $f(\mathrm{supp}(f|V))$ é compacto, segue que esse é finito. Assim $f^{-1}(f(V) \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{supp}(f))$ é um subconjunto aberto e fechado de V, logo é um aberto e compacto. Por conseguinte $K = \mathrm{supp}(f|V) = f^{-1}(R \setminus \{0\})$ é compacto e aberto. **(c.q.d)**

Definição 2.7.6. Seja $\mathscr{S}$ um semigrupo. Diz-se que $\mathscr{S}$ é um *semigrupo inverso* quando, para cada $s \in \mathscr{S}$, existe um único elemento $s^* \in \mathscr{S}$ tal que $ss^*s = s$ e $s^*ss^* = s^*$. Tal s^* chama-se um pseudo-inverso de s.

Exemplo 2.7.4. Todo grupo é um semigrupo inverso. O conjunto $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ dos elementos idempotentes de um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ é um subsemigrupo comutativo de $\mathscr{S}$ que pode ser ordenado pela relação $\leq$ segundo a qual $s \leq t \Leftrightarrow s = t't$, para algum $t' \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Se $e \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$, então o conjunto $G_e = \{s \in \mathscr{S} : \ ss^* = e = s^*s\}$ é um grupo, chamado o subgrupo maximal de $\mathscr{S}$ em e. Para mais detalhes e demonstrações, consulte (PATERSON, 2012).

A partir de agora, a menos que se mencione o contrário, todo grupoide a ser mencionado será automaticamente considerado um **grupoide topológico** cujo espaço das unidade é de Hausdorff (ainda que o espaço todo não o seja).

Definição 2.7.7. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide. Um conjunto aberto $U \subseteq \mathscr{G}$ chama-se uma *bisseção* quando $r|U$ e $d|U$ são injetivos.

Proposição 2.7.4. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide. O conjunto das bisseções compactas de $\mathscr{G}$ é um semigrupo inverso. No caso em que $\mathscr{G}$ é amplo, as bisseções de $\mathscr{G}$ são todas de Hausdorff.

Para a demonstração desse fato, veja (PATERSON, 2012) ou (BOSSA,).

Definição 2.7.8. O semigrupo inverso formado pelas bisseções compactas de um grupoide $\mathscr{G}$ é denotado por $\mathscr{G}^a$.

Exemplo 2.7.5. O conjunto dos elementos idempotentes de $\mathscr{G}^a$ consiste exatamente no semirreticulado $\mathscr{K}(\mathscr{G}^0)$ das partes compactas e abertas de $\mathscr{G}^0$.

Proposição 2.7.5. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo. Então $\mathscr{L}(\mathscr{G},R)$ é gerado pela coleção das funções características de elementos do semigrupo inverso $\mathscr{G}^a$.

Demonstração: Tome $U \in \mathscr{G}^a$. Então $\mathscr{X}_U$ se anula fora do compacto U e sua restrição a esse conjunto é evidentemente contínua, de forma que $\mathscr{X}_U \in \mathscr{L}(\mathscr{G},R)$. Seja P o subespaço gerado pelas funções $\mathscr{X}_U$, com $U \in \mathscr{G}^a$. Tome $f : \mathscr{G} \to R$ tal que $K = f^{-1}(R \setminus \{0\}$ é compacto, aberto e de tal forma que $f|K$ é uma aplicação contínua. A Proposição 2.7.3 garante que o resultado estará demonstrado após provarmos que $f \in P$.

Para isso, note que $f(K) \setminus \{0\}$ é um conjunto finito $\{a_1,\ldots,a_n\}$, com $a_i \in R \setminus \{0\}$, para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Além disso, tem-se $K_i = f^{-1}(a_i)$ aberto e compacto. Portanto $f = a_1\mathscr{X}_{K_1} + \ldots + a_n\mathscr{X}_{K_n}$. Logo $f \in P \Leftrightarrow \mathscr{X}_{K_i} \in P$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Por conseguinte, tem-se $f \in P \Leftrightarrow \mathscr{X}_U \in P$, para todo aberto e compacto de Hausdorff $U \subseteq \mathscr{G}$. Mostremos essa última afirmação.

De fato, como $\mathscr{G}$ é amplo, podemos escrever $U = U_1 \cup \cdots \cup U_m$, com $U_i \in \mathscr{G}^a$. Como cada U_i está contido em U, o qual é um espaço de Hausdorff, segue que toda interseção finita de elementos de $\{U_1,\ldots,U_m\}$ pertente a $\mathscr{G}^a$. Suponha que $m = 2$. Então $\mathscr{X}_U = \mathscr{X}_{U_1\cup U_2} = \mathscr{X}_{U_1} + \mathscr{X}_{U_2} - \mathscr{X}_{U_1\cap U_2} \in P$. O caso geral se demonstra indutivamente, levando em conta o Princípio da Inclusão e Exclusão. **(c.q.d)**

A fim de melhor compreender algebricamente o espaço $\mathscr{L}(\mathscr{G},R)$, tornando-o uma R-álgebra no sentido clássico, introduz-se nele a noção de produto, o qual é definido por intermédio de uma convolução.

Definição 2.7.9. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e sejam $f,g \in \mathscr{L}(\mathscr{G},R)$. A *convolução* de f e g é uma aplicação $f * g : \mathscr{G} \to R$, definida por

$$(f*g)(x) = \sum_{y \in d^{-1}d(x)} f(xy^{-1})g(y),$$

para cada $x \in \mathscr{G}$.

A fim de estabelecer a convolução $*$ como um produto, é necessário provar que a soma presente na definição acima é finita e que $f*g \in \mathscr{L}(\mathscr{G},R)$. Isso segue da seguinte:

Proposição 2.7.6. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo. Se $U,V \in \mathscr{G}^a$, então $\mathscr{X}_U * \mathscr{X}_V = \mathscr{X}_{UV}$.

Demonstração: Tome $x \in UV$. Escreva $x = ab$, com $a \in U$ e $b \in V$. Tem-se $a = xb^{-1}$, $d(x) = d(b)$ e $\mathscr{X}_U(xb^{-1})\mathscr{X}_V(b) = 1$. Como U e V são bisseções, segue-se que $d(x) = d(y)$ e $y \in V$ implica $y = b$. Por conseguinte,

$$\mathscr{X}_U * \mathscr{X}_V(x) = \mathscr{X}_U(xb^{-1})\mathscr{X}_V(b) = 1.$$

Por outro lado, se $x \notin UV$, então tome $y \in d^{-1}d(x)$. Nesse caso, tem-se $\mathscr{X}_V(y) = 0$ ou $\mathscr{X}_U(xy^{-1}) = 0$, conforme seja $y \notin V$ ou $y \in V$, respectivamente. De qualquer forma, isso significa que $\mathscr{X}_U * \mathscr{X}_V(x) = 0$. **(c.q.d)**

Corolário 2.7.1. Nas condições da proposição acima, dadas $f, g \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$, tem-se $f * g \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ e, se f e g são contínuas com suporte compacto em $U, V \subseteq \mathscr{G}^a$, respectivamente, então $f * g$ é contínua com suporte compacto em UV.

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 2.7.6 e do fato de que as funções características de conjuntos de $\mathscr{G}^a$ constituem um conjunto de geradores para a álgebra $\mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$. **(c.q.d)**

Proposição 2.7.7. Sejam $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e R uma anel comutativo com unidade. Então $\mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$, munida do produto de convolução, é uma R-álgebra.

Demonstração: Veja (STEINBERG, 2010) ou (BOSSA,). **(c.q.d)**

Corolário 2.7.2. A aplicação $\varphi : \mathscr{G}^a \to \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$, dada por $\varphi(U) = \chi_U$, é um homomorfismo de semigrupos.

A partir de agora, objetivamos representar $\mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ algebricamente a partir de $\mathscr{L}(\mathscr{G}^a, R)$ e da álgebra booliana $\mathscr{K}(\mathscr{G}^0)$ dos compactos e abertos em $\mathscr{G}^0$. Para isso, vamos definir e fixar, de uma vez por todas, o ideal $I \trianglelefteq \mathscr{K}(\mathscr{G}^0)$, gerado por todos os elementos da forma $(U + V) - (U \cup V)$, com $U, V \in \mathscr{K}(\mathscr{G}^0)$ disjuntos.

Definição 2.7.10. Sejam $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e $U, V \in \mathscr{G}^a$. Diz-se que U é *ortogonal* a V e escreve-se $U \perp V$, quando $UV^{-1} = \varnothing = VU^{-1}$.

Exemplo 2.7.6. Nas condições da definição acima, se $U \perp V$, então $U \cup V$ é uma reunião disjunta e, além disso, $U \cup V \in \mathscr{G}^a$.

Com efeito, $U^{-1}UV^{-1}V = \varnothing = UU^{-1}VV^{-1}$ e, sendo distintas as imagens de U e V por ambas as funções d e r, segue que d e r restritos ao conjunto $U \cup V$ são homeomorfismos sobre $U^{-1}U \cup V^{-1}V$ e $UU^{-1} \cup VV^{-1}$, respectivamente. Portanto $U \cup V$ é uma bisseção aberta e compacta.

Proposição 2.7.8. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e sejam $U, V \in \mathscr{G}^a$ disjuntos e contidos em $W \subseteq \mathscr{G}^a$. Então $U \perp V$.

Demonstração: Se fosse $U^{-1}V \neq \varnothing$, então existiriam $a \in U$ e $b \in V$ tais que $r(a) = r(b)$. Como $a, b \in W \subseteq \mathscr{G}^a$, isso significa que $a = b$, uma contradição. Por conseguinte, tem-se $U^{-1}V = \varnothing$. A igualdade VU^{-1} se prova de forma análoga. **(c.q.d)**

Agora, considere o homomorfismo $\psi : \mathscr{L}(\mathscr{G}^a, R) \to \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ dada por $\psi(U) = \mathscr{X}_U$. Em virtude da Proposição 2.7.5, segue que ψ é sobrejetivo. Além disso, tem-se $I \subseteq \ker \psi$ e $\varnothing \in I$. A inclusão $I \subseteq \ker \psi$ significa, vide um dos Teoremas do Isomorfismo, que a aplicação ψ pode ser fatorada no quociente $\mathscr{L}(\mathscr{G}^a, R)/I$. Além disso, vale que $U + V - (U \cup V) \in I$, sempre que U e V são ortogonais.

Teorema 2.7.1. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo de Hausdorff. Então

$$\mathscr{L}(\mathscr{G}, R) = \frac{\mathscr{L}(\mathscr{G}^a, R)}{I}.$$

Demonstração: Seja ψ a aplicação definida acima. Pelo teorema do isomorfismo, basta mostrar que $I = \ker \psi$. Tome $x \in \ker \psi$. Escreva $x = \sum_{i=1}^{n} r_i U_i$, com $r_i \in R$ e $U_i \in \mathscr{G}^a$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Uma observação simples (veja (PATERSON, 2012)) garante que podemos tomar $V_1, \ldots, V_m \in \mathscr{G}^a$, disjuntos dois a dois, cuja reunião coincide com a reunião dos U_i e de forma que, dados $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $V_i \subseteq U_j$ ou $V_i \cap U_j = \varnothing$. Isso significa que todo U_j é uma reunião disjunta de certos $V_{i_1}, \ldots, V_{i_p}$, os quais são ortogonais em virtude da Proposição 2.7.8. Tem-se $U_j + I = V_{i_1} + \cdots + V_{i_p} + I$ e $\mathscr{X}_{U_j} = \mathscr{X}_{V_{i_1}} + \cdots + \mathscr{X}_{V_{i_p}}$ (pois a reunião dos V_{i_k} é disjunta).

Isso significa que devem existir $s_1, \ldots, s_m \in R$ de tal forma que

$$\sum_{i=1}^{n} r_i U_i + I = \sum_{j=1}^{m} s_j V_j + I \quad \text{e} \quad \sum_{r=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{U_i} = 0 = \sum_{j=1}^{m} s_j \mathscr{X}_{V_j},$$

donde segue que $s_1 = \cdots = s_m = 0$ e portanto $x = \sum_{i=1}^{n} r_i U_i \in I$. **(c.q.d)**

2.8 O grupoide fundamental como um grupoide topológico

Seja $I = [0,1]$.O grupoide fundamental $\Pi(X)$ de um espaço topológico X (vide Exemplo 2.7.1 na página 29) é definido como o quociente do espaço de caminhos $C(I,X)$ pela relação de homotopia de caminhos (com extremos fixos). Em princípio, essa definição leva em conta apenas a sua estrutura enquanto grupoide. Entretanto, sob certas circunstâncias, é possível considerar automaticamente $\Pi(X)$ como um grupoide topológico, com sua topologia proveniente da topologia do espaço X.

Vejamos de que maneira esse processo ocorre. Primeiramente, considere em $C(I,X)$ a topologia compacto-aberta, cuja definição e propriedades mais importantes são encontradas em (LIMA, 1970) e (MUNKRES, 2017). Dessa forma, introduz-se em $\Pi(x)$ a topologia quociente. Isso significa que a topologia em $\Pi(X)$ torna a aplicação canônica $q : C(I,X) \to \Pi(X)$, $q(a) = [a]$, uma aplicação quociente. Denota-se tal topologia por CO'. Nem sempre o espaço $\Pi(X)$ é um grupoide topológico munido da topologia CO'. Entretanto, vale o:

Teorema 2.8.1. Seja X um espaço localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Então o grupoide fundamental $\Pi(X)$, munido da topologia CO', é um grupoide topológico.

Para a definição de um espaço semilocalmente simplesmente conexo, veja (SCHAFASCHEK, 2018). A demonstração do teorema acima é encontrada em (HOLKAR; HOSSAIN, 2023).

Exemplo 2.8.1. Seja X um espaço localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo. Seja $\mathscr{G} = \Pi(X)$ seu grupoide fundamental, munido da topologia CO'. Então, à luz do teorema acima, $\mathscr{G}$ é um grupoide topológico. O espaço das unidades $\mathscr{G}^0$ coincide com a coleção das classes de homotopia de caminhos dos caminhos constantes $e_x : I \to X$, como no Exemplo 2.7.1 na página 29.

Defina $\Omega : X \to \mathscr{G}^0$ pondo $\Omega(x) = [e_x]$. A aplicação Ω consiste exatamente na aplicação induzida (por passagem ao quociente) da função $\gamma : X \to C(I,X)$, definida por $\gamma(x) = e_x$, a qual é contínua em virtude de $\gamma^{-1}(\mathscr{B}(I,V)) = V$, sempre que $V \subseteq X$ é um aberto e $\mathscr{B}(I,V) = \{f \in C(I,X) : \ f(I) \subseteq V\}$ denota a classe dos conjuntos geradores da topologia compacto-aberta em $C(I,X)$.

Afirmamos que Ω é um homeomorfismo. Com efeito, tem-se $\Omega = q \circ \gamma$, de tal forma que Ω é contínua. A fim de mostrar que Ω é uma aplicação aberta, tome $U \subseteq X$ um aberto não vazio. Seja $x \in U$. Pomos $V(z,U) = \{[ae_z c] : \ a,c \in C(I,U); \ a(1) = z = c(0)\}$. Note que $V(z,U) \subseteq \mathscr{G}$ é aberto em $\mathscr{G}$ e que $\Omega(U) = V(z,U) \cap \mathscr{G}^0$. Segue-se, daí, a afirmação.

Para cada $x \in X$, tem-se

$$r^{-1}([e_x]) = \{[a] \in \mathscr{G} : \ a(1) = x\},$$

em que r denota a aplicação imagem do grupoide $\mathscr{G}$. Seja $p : \tilde{X} \to X$ o recobrimento universal de X (vide (SCHAFASCHEK, 2018)). A construção do espaço $\tilde{X}$ garante que $r^{-1}([e_x]) = \tilde{X}$ e que p pode ser identificado com a restrição $d|r^{-1}([e_x])$, em que d denota a aplicação domínio do grupoide $\mathscr{G}$. Isso significa que a topologia em $r^{-1}([e_x]) \subseteq \mathscr{G}$ como subespaço e a topologia de recobrimento $\tilde{X}$ coincidem.

Para cada $x \in X$, o grupo fundamental $\pi_1(X,x) = p^{-1}(x)$, munido com a topologia de subespaço em $\mathscr{G}$, é um grupo topológico discreto. Como p é um homeomorfismo local que pode ser identificado com a restrição de d a $r^{-1}([e_x])$, segue-se que o grupoide $\mathscr{G}$ é localmente trivial (vide (SCHAFASCHEK, 2018)). No entanto, em geral, não é verdade que $\mathscr{G}$ é um grupoide étale.

3 Boolianização de um semigrupo inverso

A ideia de boolianização é de extrema importância no contexto das álgebras de semigrupos e de grupoides, pois permite associar, de maneira funtorial, um semirreticulado a uma álgebra booliana, por intermédio do cálculo intermediário do seu grupoide universal, o qual, por sua vez, é uma forma funtorial de se associar um semigrupo inverso a um grupoide. A ideia dessa associação é estudar um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ por meio das propriedades da álgebra booliana associada, ou vice-versa. Esse conceito é melhor formalizado pela noção de representação de um semigrupo inverso numa álgebra booliana, a qual consiste, grosso modo, numa flexibilização da ideia de homomorfismo de álgebras boolianas.

3.1 A boolianização de um semirreticulado

Definição 3.1.1. Seja L um semirreticulado inferior com elemento mínimo. Uma *representação* de L numa álgebra booliana $\mathscr{B}$ é uma aplicação $\varphi : L \to \mathscr{B}$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$, quaisquer que sejam $a, b \in L$.

Definição 3.1.2. Seja L um semirreticulado inferior com elemento mínimo. Uma representação $\phi : L \to \{0,1\}$, considerando $\{0,1\}$ como uma álgebra booliana definida naturalmente, chama-se uma *avaliação* de L. Uma avaliação $\varphi : L \to \{0,1\}$ chama-se uma *ultra-avaliação* quando $\varphi^{-1}(1)$ é um ultrafiltro em L. A *avaliação nula* é simplesmente a avaliação trivial $a \in L \mapsto 0$.

Seja L um semirreticulado. Como se pode verificar em (HALMOS; GIVANT, 2009), o conjunto $\widehat{L}$ de todas as avaliações de L (removendo-se a avaliação nula) é um subconjunto fechado do produto $\{0,1\}^L$. Além disso, $\widehat{L}$ é um espaço de Stone considerando-se a topologia de subespaço. Esse resultado é semelhante ao já demonstrado Teorema 2.4.1 na página 17, com as devidas modificações e adequações aos espaços envolvidos. O conjunto das ultra-avaliações de L será denotado por $\widehat{L}_r$ e também será considerado um espaço topológico, munido da topologia de subespaço.

Definição 3.1.3. Uma representação $\varphi : L \to \mathscr{B}$ chama-se *própria* quando, para todo $x \in \mathscr{B}$, existem $a_1, \dots, a_k \in L$, com $k \in \mathbb{N}$, tais que $\varphi(a_1) \vee \cdots \vee \varphi(a_k) \geq x$.

Para cada $a, b_1, \dots, b_k \in L$, com $k \in \mathbb{N}^*$ e $b_i \leq a$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, escreva $V_a = \{\varphi \in \widehat{L} : \ \varphi(a) = 1\}$ e

$$V_{a,b_1,\dots,b_k} = \{\varphi \in \widehat{L} : \ \varphi(a) = 1 \ \text{ e } \ \varphi(b_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Tais conjuntos formam a base da topologia de blocos (patch topology) no espaço $\widehat{L}$.

Definição 3.1.4. Seja $\mathscr{K}(\widehat{L})$ a álgebra booliana formada pelos conjuntos compactos e abertos do espaço $\widehat{L}$, em que L é um semirreticulado inferior com elemento mínimo. Essa é chamada a *boolianização* de L.

Exemplo 3.1.1. A aplicação $\iota : L \to \mathscr{K}(\widehat{L})$, dada por $\iota(a) = V_a$, é representação própria de L em $\mathscr{K}(\widehat{L})$. A ideia central da uma boolianização é estudar o semirreticulado L por meio das propriedades da sua boolianização $\mathscr{K}(\widehat{L})$ e vice-versa.

Exemplo 3.1.2. Note-se que, em virtude do Teorema 2.3.1 na página 15, do Corolário 2.4.1 na página 18, decorre que se L é uma álgebra booliana, então o espaço $\widehat{L}$ pode ser, de fato, considerado como o espaço dos ultrafiltros em L. Com efeito, nesse caso, toda avaliação $\varphi : L \to \mathscr{B}$ é um homomorfismo de álgebras boolianas.

Definição 3.1.5. Um subconjunto $C \subseteq L$ de um semirreticulado inferior com elemento mínimo L chama-se uma *cobertura* do ponto $a \in L$ quando, para todo $c \in C$, tem-se $c \leq a$ e, para todo ponto $b \in L$ não nulo, existe $d \in C$ tal que $b \wedge d \neq 0$.

Exemplo 3.1.3. No conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, considere o conjunto $X = \{1\}$. Então X é uma cobertura de todo ponto não nulo de $\mathbb{N}$.

Definição 3.1.6. Uma representação $\varphi : L \to \mathscr{B}$ chama-se *coberta pelo supremo* quando é própria e, para todo $a \in L$ e $C \subseteq L$ cobertura finita de a, tem-se

$$\varphi(a) = \bigvee_{c \in C} \varphi(c).$$

3.2 Representações X-reunidas de um semirreticulado

Definição 3.2.1. Sejam L um semirreticulado e $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana. Uma representação $\varphi : L \to \mathscr{B}$ chama-se *rígida* quando pertence ao fecho do espaço topológico formado pelas ultra-avaliações de L.

No caso de $\mathscr{B}$ ser uma álgebra booliana com unidade (isto é, com elemento máximo), então demonstra-se que uma representação própria coberta pelo supremo é uma *representação rígida* ou, para alguns autores, uma *representação tight*. Esse termo foi introduzido por Exel em (EXEL, 2009).

Definição 3.2.2. Sejam L um semirreticulado, $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana e X um subconjunto do produto $L \times P$, em que P denota o conjunto de todos os subconjuntos finitos de L. Uma representação $\varphi : L \to \mathscr{B}$ chama-se X-reunida quando é própria e tal que

$$\varphi(a) = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi(a_i),$$

para quaisquer $(a, \{a_1, \ldots, a_n\}) \in X$.

O conjunto de todas as avaliações X-reunidas de L será denotado por $\widehat{L}_X$. O conjunto $\widehat{L}_X$ é fechado em $\widehat{L}$ e, de fato, um espaço de Stone com a topologia de subespaço. A coleção $\mathscr{B}_X(L)$ dos espaços compactos e abertos em $\widehat{L}_X$ chama-se a *boolianização X-reunida* de L, a qual é uma álgebra booliana.

A aplicação $\iota : L \to \mathscr{B}_X(L)$, definida por $\iota(a) = V_a \cap \hat{L}_X$ é uma representação X-reunida de L na álgebra booliana $\mathscr{B}_X(L)$. A dualidade de Stone assegura que $\widehat{L}_X$ é o espaço dual de Stone de $\mathscr{B}_X(L)$.

Exemplo 3.2.1. i) Uma representação $\varnothing$-reunida de um semirreticulado é simplesmente uma representação própria de L.

ii) Se X é o conjunto formado por todos os pares da forma $(x, \{a_1, \ldots, a_n\}) \in L \times P$, em que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é uma cobertura de x, então uma representação X-reunida é simplesmente uma representação própria e rígida de L.

O teorema que se segue estabelece a propriedade universal das representações X-reunidas. Para isso, em virtude do Teorema 2.3.1 na página 15, dada uma álgebra booliana $\mathscr{B}$, não faremos diferença entre o conjunto dos ultrafiltros em $\mathscr{B}$ e o conjunto das avaliações em $\mathscr{B}$. Assim, ambos serão denotados pelo mesmo símbolo $\widehat{\mathscr{B}}$.

Teorema 3.2.1. [Propriedade Universal] Sejam L um semirreticulado inferior com elemento mínimo, $\mathscr{B}$ uma álgebra booliana e $\varphi : L \to \mathscr{B}$ uma representação X-reunida. Seja $\iota : L \to \mathscr{B}_X(L)$ a aplicação $a \mapsto V_a \cap \hat{L}_X$. Existe um único morfismo de álgebras boolianas $\psi : \mathscr{B}_X(L) \to \mathscr{B}$ tal que $\varphi = \psi \circ \iota$.

Demonstração: Tem-se $\mathscr{B} \cong \mathscr{K}(\widehat{\mathscr{B}})$ por intermédio da correspondência $a \mapsto V_a \cap \tilde{\mathscr{B}}$. Tome $f \in \widehat{\mathscr{B}}$. Então $f \circ \varphi \in \widehat{L}_X$. Dessa forma, fica bem definida a aplicação $\gamma :$
$widehat\mathscr{B} \to \widehat{L}_X$ dada por $\gamma(f) = f \circ \varphi$.

Dados $f \in \mathscr{B}$ e $a, b_1, b_2, \ldots, b_n \in L$, com $b_i \leq a$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $f \in \gamma^{-1}(V_{a,b_1,\ldots,b_n} \cap \widehat{L}_X)$ se, e somente se $\gamma(f) \in V_{a,b_1,\ldots,b_n} \cap \widehat{L}_X$, o que equivale a dizer que $f \circ \varphi \in V_{a,b_1,\ldots,b_n} \cap \widehat{L}_X$, isto é, $f(\varphi(a)) = 1$ e $f(\varphi(b_i)) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Essa última afirmação significa que $f \in V_{\varphi(a),\varphi(b_1),\ldots,\varphi(b_n)} \cap \tilde{B}$, o qual é um subconjunto aberto e compacto.

Isso mostra que γ é uma aplicação contínua e própria. Para todo $a \in L$, tem-se $\gamma^{-1}(V_a \cap \widehat{L}_X) = \varphi(a)$. Assim, a existência de ψ segue diretamente da dualidade de Stone. Além disso, a unicidade de ψ decorre imediatamente do fato de que a imagem de ι gera o conjunto $\mathscr{B}_X(L)$. **(c.q.d)**

3.3 O grupoide universal de um semigrupo inverso

No Capítulo 1, mostramos que, a partir de um grupoide, é possível formar um semigrupo inverso $\mathscr{G}^a$, formado pelas bisseções compactas de $\mathscr{G}$. Outra relação importantes entre grupoides e semigrupos inversos é exposta a seguir, por meio da ideia de grupoide universal, o qual segue o caminho inverso do processo anterior, isto é, trata-se de um grupoide definido a partir de um semigrupo inverso.

Exemplo 3.3.1. Seja X um espaço topológico. O conjunto I_X de todos os homeomorfismos entre subconjuntos abertos de X é um semigrupo inverso com o produto sendo a composição de funções parciais.

Essa é uma flexibilização do fato segundo o qual o conjunto de todos os homeomorfismos de X em X constitui-se em um grupo munido da operação de composição.

Definição 3.3.1. Uma *ação* de um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ num conjunto X é um homomorfismo $\theta : \mathscr{S} \to I_X$. Diz-se que θ é *não degenerada* quando

$$\bigcup_{e \in \mathscr{E}(\mathscr{S})} X_e = X,$$

em que para cada $e \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$, X_e é o domínio da aplicação $\theta(e)$.

Exemplo 3.3.2 (O Grupoide de Germes)**.** Um dos exemplos mais importantes de grupoide étale consiste no *grupoide de germes*, definido em um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ que age em um espaço X localmente compacto de Hausdorff. O grupoide de germes $\mathscr{G} = \mathscr{S} \ltimes X$ é definido pondo

$$\mathscr{G} = \frac{\{(s,x) \in \mathscr{S} \times X : \ x \in X_{s^*s}\}}{\sim},$$

em que $\sim$ é a relação de equivalência segundo a qual $(s,x) \sim (t,y)$ se, e somente se, $x = y$ e existe um elemento $u \in \mathscr{S}$, com $u \leq s$ e $u \leq t$, de tal forma que $x \in X_{u^*u}$.

A classe de equivalência do par (s,x) é denotada por $[s,x] \in \mathscr{G}$. A fim de introduzir uma topologia no grupoide de germes $\mathscr{G}$, escreva $(s,U) = \{[s,x] : \ x \in U\}$, sempre que $s \in \mathscr{S}$ e $U \subseteq X_{s^*s}$ é um conjunto aberto. A coleção τ dos conjuntos da forma (s,U) é, pois, uma topologia em $\mathscr{G}$. A coleção dos conjuntos da forma (t,U) fornece um sistema fundamental de vizinhanças do ponto $[t,x]$, para todo $x \in X$.

Quando $ty = x$, fica bem definida a multiplicação $[s,x] \cdot [t,y] = [st,y]$. Tem-se $\mathscr{G}^0 = \{[e,x] : e \in \mathscr{E}(\mathscr{S}), x \in X_e\}$., o qual pode ser identificado com o próprio conjunto X vide o homeomorfismo de projeção $[e,x] \mapsto x$. Note-se que $d([s,x]) = x$, $r([s,x]) = sx$ e $[s,x]^{-1} = [s^*, sx]$.

O professor Exel mostrou em (EXEL*, 2008) que tal grupoide de germes é étale. A obra (PATERSON, 2012), de Patterson, fornece mais informações detalhadas acerca do grupoide de germes acima definido.

Definição 3.3.2. Um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ diz-se booliano quando $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ é uma álgebra booliana e, para quaisquer $a, b \in \mathscr{S}$ tais que $a \sim b$, existe o supremo $a \vee b \in \mathscr{S}$.

Exemplo 3.3.3. Seja $\mathscr{B} = \{0, a, b, 1\}$ uma álgebra booliana e tome $c \notin \mathscr{B}$. Seja $\mathscr{S} = \mathscr{B} \cup \{c\}$. Defina $c^2 = 1$ e $xu = x$, sempre que $x \in \mathscr{B}$. Note que $\mathscr{S}$ é um semigrupo inverso e que $\mathscr{B} = \mathscr{E}(\mathscr{S})$ e que $a \vee b = 1$ em $\mathscr{E}(\mathscr{S})$. Por outro lado, tanto 1 quanto c são cotas superiores para $\{a, b\}$ em $\mathscr{S}$, apesar do fato de que não se tenha $1 \leq c$ nem $c \leq 1$. Isso significa que $1 \vee c$ não existe no semigrupo inverso $\mathscr{S}$, de tal forma que $\mathscr{S}$ não é um semigrupo inverso booliano.

Definição 3.3.3. Diz-se que uma aplicação $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$, entre os semigrupos inversos boolianos $\mathscr{S}$ e $\mathscr{T}$, é um *morfismo* quando $\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})$ é um homomorfismo de álgebras boolianas e tal que $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$, sempre que $a, b \in \mathscr{S}$ e $a \sim b$.

Definição 3.3.4. Sejam $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso e $\mathscr{T}$ um semigrupo inverso booliano. Uma *representação* de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{T}$ é um morfismo de semigrupos $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$, tal que $\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S}) : \mathscr{E}(\mathscr{S}) \to \mathscr{E}(\mathscr{T})$ é uma representação própria do semirreticulado $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ na álgebra booliana $\mathscr{E}(\mathscr{T})$.

Definição 3.3.5. Seja $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso. O grupoide de germes $\mathscr{G}(\mathscr{S}) = \mathscr{S} \ltimes \mathscr{E}(\mathscr{S})$, referente à ação natural de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{E}(\mathscr{S})$, chama-se o *grupoide universal* de $\mathscr{S}$. O conjunto

$\mathscr{B}(\mathscr{S})$ das bisseções compactas e abertas de $\mathscr{G}(\mathscr{S})$ é um semigrupo inverso booliano, chamado a *boolianização* de $\mathscr{S}$.

Exemplo 3.3.4. O grupoide universal $\mathscr{G}(\mathscr{S})$ de um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ é um grupoide topológico munido da topologia de caminhos, segundo a qual os elementos da forma

$$\Theta[s] = \{[s,\varphi] \in \mathscr{G}(\mathscr{S}) : \varphi(d(s)) = 1\} \text{ e}$$

$$\Theta[s,s_1,s_2,\ldots,s_n] = \{[s,\varphi] \in \mathscr{G}(\mathscr{S}) : \varphi(d(s)) = 1,\ \varphi(d(s_1)) = \cdots = \varphi(d(s_n)) = 0\},$$

com $s,s_1,\ldots,s_n \in \mathscr{S}$ e $s_i \leq s$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, constituem uma base.

A aplicação $\iota : \mathscr{S} \to \mathscr{B}(\mathscr{S})$, dada por $\iota(s) = \Theta[s]$, é uma representação própria do semigrupo $\mathscr{S}$ no semigrupo inverso booliano $\mathscr{B}(\mathscr{S})$.

Convém observar que $\mathscr{B}(\mathscr{S})$ nem sempre é uma álgebra booliana, porque a reunião de bisseções não necessariamente é também uma bisseção.

3.4 Representações X-reunidas de semigrupos inversos

Definição 3.4.1. Sejam $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso, $\mathscr{T}$ um semigrupo inverso booliano e P o conjunto das partes finitas de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$. Seja $X \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S}) \times P$. Uma representação $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ chama-se X-reunida quando $\varphi|_{\mathscr{E}(\mathscr{S})} : \mathscr{E}(\mathscr{S}) \to \mathscr{E}(\mathscr{T})$ é uma representação X-reunida do semirreticulado $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ na álgebra booliana $\mathscr{E}(\mathscr{T})$. Diz-se que o conjunto X é $\mathscr{S}$*-invariante* ou simplesmente *invariante* quando, dado $s \in \mathscr{S}$, tem-se $(s^{-1}es,\{s^{-1}e_1s,\ldots,s^{-1}e_ns\}) \in X$, sempre que $(e,\{e_1,\ldots,e_n\}) \in X$.

Exemplo 3.4.1. Nas condições da definição acima, note que o conjunto $\mathscr{E}(\mathscr{S}) \times P$ é um conjunto $\mathscr{S}$-invariante e, além disso, a família dos subconjuntos $\mathscr{S}-$invariantes de $\mathscr{E}(\mathscr{S}) \times P$ é fechado para interseções. Dessa, forma a interseção X' de todos os conjuntos dessa família que contém X é também um conjunto $\mathscr{S}$-invariante. Além disso, do ponto de vista da ordem de inclusão, X' é o menor subconjunto $\mathscr{S}$-invariante de $\mathscr{E}(\mathscr{S}) \times P$ contendo X.

Mais precisamente, X' é o conjunto dos pares $(s^{-1}es,\{s^{-1}e_1s,\ldots,s^{-1}e_ns\})$, em que $s \in \mathscr{S}$ e $(e,\{e_1,\ldots,e_n\}) \in X$.

Proposição 3.4.1. Sejam $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso, $X \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S}) \times P$ e $\mathscr{T}$ um semigrupo inverso booliano. Seja X' o conjunto definido como no exemplo acima. Uma representação $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ é X-reunida se, e somente se, é X'-reunida.

Demonstração: Tome $(e,\{e_1,\dots,e_n\}) \in X$ e $s \in \mathscr{S}$. Então

$$\varphi(s^{-1}es) = \varphi(s^{-1}\varphi(e))\varphi(s) = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi(s^{-1})\varphi(e_i)\varphi(s) = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi(s^{-1}e_is),$$

o que estabelece o resultado. **(c.q.d)**

Exemplo 3.4.2. Considere a ação natural de um semigrupo $\mathscr{S}$ sobre $\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}$, definida pondo $(s\cdot\varphi)(e) = \varphi(s^{-1}es)$, sempre que $s \in \mathscr{S}$, $\varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$ e $\varphi(d(s)) = 1$. Quando restringimos tal ação ao subconjunto fechado e invariante $\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_{X'}$, costuma-se denotar o grupoide de germes resultante por $\mathscr{G}_X(\mathscr{S})$.

Definição 3.4.2. O semigrupo booliano dual, isto é, o semigrupo booliano formado pelas bisseções abertas e compactas de $\mathscr{G}_X(\mathscr{S})$, é denotado por $\mathscr{B}_X(\mathscr{S})$, e chama-se a *boolianização X-reunida* de $\mathscr{S}$.

Exemplo 3.4.3. Se $X = \varnothing$, então $\mathscr{G}_X(\mathscr{S}) = \mathscr{G}(\mathscr{S})$ e $\mathscr{B}_X(\mathscr{S}) = \mathscr{B}(\mathscr{S})$.

Definição 3.4.3. Sejam $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ grupoides topológicos étale. Um *morfismo relacional de recobrimento* de $\mathscr{G}$ para $\mathscr{H}$ é um par (f,g), em que $g : \mathscr{G}^0 \to \mathscr{H}^0$ é é uma aplicação própria contínua e $f : \mathbb{G} \to P(\mathscr{H})$ é uma função que cumpre as seguintes condições:

(M1) Se $y \in f(x)$, então $d(y) = g(d(x))$ e $r(y) = g(r(x))$;

(M2) Se $s \in f(x)$ e $t \in f(y)$ são multiplicáveis, então $st \in f(xy)$;

(M3) Para todo $A \subseteq \mathscr{H}$ aberto, o conjunto $f^{-1}(A) = \{x \in \mathscr{G} : f(x) \cap A \neq \varnothing\}$ é aberto em $\mathscr{G}$;

(M4) Para todo $t \in \mathscr{G}^0$, tem-se $g(t) \in f(t)$;

(M5) Para todo $x \in \mathscr{G}$, tem-se $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

(M6) Se $d(x) = d(y)$ ou $r(x) = r(y)$, com $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$, então $x = y$;

(M7) Se $y = g(x)$ e $d(t) = y$ (ou $r(t) = y$), então existe $s \in \mathscr{G}$ tal que $d(s) = x$ (ou $r(s) = x$) e $t \in f(s)$;

A noção acima introduzida é de extrema importância no contexto categórico. Na realidade, um morfismo relacional de recobrimento é um morfismo no contexto da categoria dos grupoides amplos.

Exemplo 3.4.4. A dualidade de Stone, categorizada no Exemplo 2.5.4 na página 23, possui, na realidade, diversas maneiras de ser estendida para o contexto dos semigrupos inversos, cada qual em uma categoria distinta de semigrupos inversos boolianos sobre uma categoria de espaços de Stone. A mudança de uma categoria para outra ocorre na definição dos morfismos. Uma reformulação da dualidade de Stone é, por exemplo, afirmar que a categoria dos semigrupos inversos boolianos e morfismos de semigrupos inversos boolianos é dualmente equivalente à categoria dos grupoides de Stone e dos morfismos relacionais de recobrimentos entre grupoides de Stone. Esse fato será usado no que se segue sem maiores comentários. Para detalhes, veja (LAWSON, 2012).

Definição 3.4.4. O grupoide de germes da restrição da ação natural de $\mathscr{S}$ em $\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}$ ao subconjunto fechado e invariante $\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_T$ chama-se o grupoide rígido de Exel do semigrupo inverso $\mathscr{S}$ e é denotado por $\mathscr{G}_T(\mathscr{S})$.

Teorema 3.4.1. Sejam $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso, $\mathscr{B}$ um semigrupo inverso booliano, P o conjunto das partes finitas de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$, $X \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S}) \times P$ e $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{B}$ uma representação X-reunida. Existe um único morfismo de semigrupos inversos boolianos $\psi : \mathscr{B}_X(\mathscr{S}) \to \mathscr{B}$, tal que $\varphi = \psi \circ \iota$, em que $\iota : \mathscr{S} \to \mathscr{B}_X(\mathscr{S})$ é definida por $\iota(s) = \Theta[s] \cap \mathscr{G}_X(\mathscr{S})$.

Demonstração: Como sabemos, a aplicação ι é uma representação X-reunida de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{B}_X(\mathscr{S})$. Vamos mostrar que existe um morfismo relacional de recobrimento $\gamma : \mathscr{G}_T(\mathscr{B}) \to P(\mathscr{G}_X(\mathscr{S}))$ tal que $\varphi = \gamma^{-1} \circ \iota$. Isso estabelecerá a existência do morfismo $\psi : \mathscr{B}_X(\mathscr{S}) \to \mathscr{B}$ desejado.

Primeiro, note que $f \circ \varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S}) \in \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_{X'}$, sempre que $[a, f] \in \mathscr{G}_T(\mathscr{B})$. Também, vê-se que $\varphi(s) = a$ implica $f(\varphi(d(s)) = f(d(a))$. Assim, pomos

$$\gamma([a, f]) = \{[s, f \circ \varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})] : \ \varphi(s) = a\}.$$

Afirmação 01: $\gamma|\mathscr{G}_T(\mathscr{B})$ é uma aplicação contínua própria tal que $\varphi = \gamma^{-1} \circ \iota$.

Com efeito, tome $s, s_1, \ldots, s_n \in \mathscr{S}$, com $s_i \leq s$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então

$$[a, f] \in \gamma^{-1}(\Theta[s, s_1, \ldots, s_n] \cap \mathscr{G}_X(\mathscr{S})) \Leftrightarrow \gamma([a, f]) \cap \Theta[s, s_1, \ldots, s_n] \cap \mathscr{G}_X(\mathscr{S}) \neq \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \varphi(s), \ f(\varphi(d(s))) = 1, \ f(\varphi(d(s_i))) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [a, f] \in \Theta[\varphi(s), \varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n)] \cap \mathscr{G}_T(\mathscr{B}),$$

donde segue que $\gamma^{-1}(\Theta[s, s_1, \ldots, s_n]|\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_{X'}) = \Theta[(\varphi(s) \setminus (\varphi(s_1) \vee \cdots \vee \varphi(s_n))]|\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{B})}_T$, donde decorre a afirmação 01.

Afirmação 02: γ é um morfismo relacional de recobrimento entre os grupoides $\mathscr{G}_T(\mathscr{B})$ e $\mathscr{G}_X(\mathscr{S})$.

De fato, vamos mostrar que γ cumpre os axiomas (M1)-(M7) da Definição 3.4.3.

(M1): Tome $[s, f\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]\in\gamma([a,f])$, com $\varphi(s)=a$. Então $\varphi(d(s))=d(a)$, de tal forma que $[d(s), f\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]\in\gamma([d(a),f])$.

(M2): Tome $[s, f\circ\varphi|_{\mathscr{E}(\mathscr{S})}]\in\gamma([a,f])$ e $[t,h\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]\in\gamma([b,h])$, em que as multiplicações $[a,f][b,h]$ e $[s,f\circ\varphi_{\mathscr{E}(\mathscr{S}}],[t,h\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]$ estão bem definidas em $\mathscr{G}_T$ e $\mathscr{G}_X(\mathscr{S})$, respectivamente. Tem-se $\varphi(s)=a$, $\varphi(t)=b$, $[a,f][b,h]=[ab,h]$ e

$$[s,f\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})][t,h\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]=[st,h\circ\varphi|_{\mathscr{E}(\mathscr{S})}],$$

donde conclui-se que $[st,h\circ\varphi]|_{\mathscr{E}(\mathscr{S})}\in\gamma([ab,h])$, haja vista que $\varphi(st)=ab$.

(M3): Decorre imediatamente do Teorema 3.2.1 na página 39.

(M4): Tome $f\in\mathscr{G}_T^0=\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{B})}_T$. Vamos identificar f com o germe $[e,f]$, segundo o qual $f(e)=1$. Ora, como $\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})$ é própria, segue que $\varphi(e_1)\vee\cdots\vee\varphi(e_n)\geq e$, para certos $e_1,\ldots,e_n\in\mathscr{E}(\mathscr{S})$. Isso significa que deve-se ter $i\in\{1,\ldots,n\}$ para o qual $f(\varphi(e_i))=1$, ou seja, $[e,f]=[\varphi(e_i),f]$, ou ainda $[e_i,f\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]\in\gamma([e,f])$.

(M5): Dado $[a,f]\in\mathscr{G}_T(\mathscr{B})$, escreva $[a,f]^{-1}=[a^{-1},h]$, em que $h=a\cdot f$. Então $h(e)=f(a^{-1}ea)$, sempre que $e\in\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{B})}_T$. A fim de demonstrar que $\gamma[a,f]^{-1}=\gamma([a,f]^{-1})$, note que $\varphi(t)=a^{-1}\Leftrightarrow\varphi(t^{-1})=a$, de forma que $(a^{-1}\cdot a\cdot f)(e)=f(aa^{-1}eaa^{-1})=f(aa^{-1})f(e)=f(e)$. Assim, a condição (M5) decorre do fato segundo o qual $\gamma([a,f]^{-1})=\gamma([a^{-1},a\cdot f])$ é igual ao conjunto dos germes $[t,(a^{-1}\cdot a\cdot f)\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})]$, com $\varphi(t)=a^{-1}$ e da observação acima.

(M6): A fim de que $d([a,f])=d([b,h])$, é necessário e suficiente ser $f=h$. Daí e da condição (M5), segue-se (M6).

(M7): Tome $h\in\gamma(f)$, com $f\in\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{B})}_T$ e $h\in\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_{X'}$. Então $h=f\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})$. Tem-se $[s,h]\in\gamma([t,f])\Leftrightarrow h=f\circ\varphi|\mathscr{E}(\mathscr{S})$ e $t=\varphi(s)$. Por conseguinte, pondo $t=\varphi(s)$, ter-se-á $[s,h]\in\gamma([t,f])$. Isso estabelece a validade da afirmação 02.

Afirmação 03: A aplicação ψ é única.

Com efeito, isso segue imediatamente da unicidade da aplicação ψ definida no Teorema 3.2.1 e do fato segundo o qual cada elemento de $\mathscr{B}_X(\mathscr{S})$ é dado pelo supremo de finitos elementos da forma $\iota(s)e$, com $s\in\mathscr{S}$ e $e\in\mathscr{E}(\mathscr{B}_X(\mathscr{S}))$. **(c.q.d)**.

3.5 Aplicações às álgebras de caminhos em grafos finitos

A noção de grafo é das mais importantes em matemática, sobretudo em virtude da enorme quantidade de aplicações práticas que podem ser modeladas por tal. Há várias maneiras de se interpretar a definição de um grafo. Do ponto de vista combinatório, basta considerar como um conjunto de vértices, que são pontos do plano, e arestas, as quais são segmentos de reta com extremidades em dois desses vértices.

Do ponto de vista topológico, essa ideia se mantém, porém levando em conta a ideia topológica segundo a qual o conjunto de vértices é discreto e todo ponto de uma aresta que não é um vértice é um ponto interior, conforme especificado e detalhado em (SCHAFASCHEK, 2018). Mais geralmente, em topologia algébrica, convém considerar o caso de grafos com infinitos vértices e arestas e utilizar a ideia da topologia fraca e a topologia quociente para descrevê-lo. Isso se resume na definição segundo a qual um grafo é um CW-complexo de dimensão 1. Segundo essa concepção, pode-se demonstrar que todo poliedro é homeomorfo a um grafo plano, isto é, um grafo cujos pontos e arestas estão contidos no plano $\mathbb{R}^2$.

Quando as arestas passam a ser consideradas como caminhos que começam num vértice e terminam num vértice, o grafo ganha a noção de orientabilidade, pois toda aresta passa a possuir um ponto inicial e um ponto final, isto é, precisamente uma orientação do ponto de vista da Geometria. Nesse caso, o grafo chama-se orientado ou dirigido.

Vejamos como essa ideia pode ser interpretada do ponto de vista dos semigrupos inversos, bem como os conceitos formalizados até aqui podem ser utilizados para modelar esse estudo.

Definição 3.5.1. Um *grafo* dirigido é uma quádrupla $\mathscr{E} = (\mathscr{E}^0, \mathscr{E}^1, d, r)$, na qual $\mathscr{E}^0$ e $\mathscr{E}^1$ são conjuntos e $d, r : \mathscr{E}^1 \to \mathscr{E}^0$ são funções. Os elementos de $\mathscr{E}^0$ chamam-se *vértices* e os elementos de $\mathscr{E}^1$ chamam-se *arestas*. A função d chama-se o *domínio* e a função r chama-se a *imagem*.

A menos que seja estritamente necessário, omitiremos os termos $\mathbb{E}^0$, $\mathscr{E}^1$, r e d, os quais ficarão subentendidos pelos leitores, de tal forma que um grafo $\mathscr{E} = (\mathscr{E}^0, \mathscr{E}^1, d, r)$ será denotado apenas como um grafo $\mathscr{E}$.

Se $e \in \mathscr{E}$ é uma aresta, denota-se por e^* a aresta de orientação inversa, isso é, a aresta segundo a qual $d(e^*) = r(e)$ e $r(e^*) = d(e)$. Seja $\mathscr{E}^* = \{e^* : \; e \in \mathscr{E}^1\}$.

Definição 3.5.2. Um *caminho* a num grafo $\mathscr{E}$ é uma sequência finita $(e_1, \ldots, e_n)$ de arestas $e_1, \ldots, e_n \in \mathscr{E}^1$ tais que $r(e_i) = d(e_{i+1})$, sempre que $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Diz-se, nesse caso, que

$d(a) = d(e_1)$ é o *domínio* de a, $r(a) = r(a_n)$ é a *imagem* de a e $|a| = n$ é o *comprimento* do caminho a. Escreve-se $a : v \to w$ para indicar que a é um caminho que inicia em $v \in \mathscr{E}^0$ e termina em $w \in \mathscr{E}^1$, ou seja, tal que $d(e_1) = v$ e $r(e_n) = w$.

Se $a = (e_1, \ldots, e_n)$ e $b = (t_1, \ldots, t_m)$ são caminhos tais que $r(a) = s(b)$, então fica bem definido o *caminho justaposto* $ab = (e_1, \ldots, e_n, t_1, \ldots, t_m)$. Note-se que se $a : v \to w$ e $b : w \to z$, então $ab : v \to z$.

Todo vértice $v \in \mathscr{E}^0$ pode ser considerado como um caminho constante e_v, de comprimento nulo, utilizando a convenção segundo a qual $d(e_v) = v = r(e_v)$.

O conjunto de todos os caminhos no grafo $\mathscr{E}$ será denotado por $\mathscr{P}(\mathscr{E})$. Por convenção, vamos assumir que os vértices de $\mathscr{E}$ são caminhos de tamanho zero, de tal forma que $\mathscr{E}^0 \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{E})$.

Definição 3.5.3. Um *caminho infinito* num grafo $\mathscr{E}$ é uma sequência $a = (e_1, e_2, \ldots)$ de arestas $e_i \in \mathscr{E}^1$, tais que $r(e_i) = d(e_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Escreve-se $|a| = \infty$ indicar o comprimento do caminho infinito a. O conjunto de todos os caminhos infinitos em $\mathscr{E}$ é denotado por $\mathscr{P}^\infty(\mathscr{E})$.

Se $a = (e_1, \ldots, e_n)$ é um caminho e $b = (f_1, f_2, \ldots)$ é um caminho infinito tal que $r(e_n) = d(f_1)$, fica bem definido o caminho infinito justaposto

$$ab = (e_1, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots).$$

Definição 3.5.4. Seja $a = (e_1, \ldots, e_n)$ um caminho num grafo $\mathscr{E}$. Diz-se que a é um *ciclo* quando $d(a) = r(a)$ e $d(e_i) \neq d(e_j)$, sempre que $i \neq j$. Um ciclo de comprimento 1 chama-se um *laço*. Diz-se que $\mathscr{E}$ é *acíclico* quando não possui ciclos.

Exemplo 3.5.1. Dados $v, w \in \mathscr{E}^0$, escreve-se $w \leq v$ quando existe um caminho $a : v \to w$. Se $b = (e_1, \ldots, e_n)$ é um caminho em $\mathscr{E}$ e $z \in \mathscr{E}^0$ é um vértice, escreve-se $z \leq b$ para indicar que $z \leq r(e_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Analogamente, escreve-se $b \leq z$ quando $r(e_i) \leq z$.

A partir de agora, todos os grafos mencionados serão finitos, ou seja, com um número finito de vértices e arestas.

Definição 3.5.5. Sejam $\mathscr{E}$ um grafo e y um ponto não pertencente a $\mathscr{E}^0 \cup \mathscr{E}^1 \cup \mathscr{E}^*$. O *semigrupo inverso $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\mathscr{E}$ do grafo $\mathscr{E}$* é o semigrupo gerado por $(\mathscr{E}^0 \cup \mathscr{E}^1 \cup \mathscr{E}^*) \cup \{y\}$ e definido no quociente pelas relações:

(1) y é um zero de $\mathscr{S}$;

(2) $d(e)e = e = er(e)$ e $r(e)e^* = e^* = e^*d(e)$, para todo $e \in \mathscr{E}^1$;

(3) Se $x, x' \in \mathscr{E}^0 \cup \mathscr{E}^1 \cup \mathscr{E}^*$ e $r(x) \neq d(x')$, então $xx' = y$;

(4) Se $e, e' \in \mathscr{E}^1$ e $e \neq e'$, então $e^*e' = y$;

(5) $v^2 = v$, para todo $v \in \mathscr{E}^0$;

(6)$e^*e = r(e)$, para toda aresta $e \in \mathscr{E}^1$.

Vamos mostrar que $\mathscr{S}$ é, de fato, um semigrupo inverso. Para isso, vamos definir um semigrupo inverso $\mathscr{T}$ a partir do grafo $\mathscr{E}$ e depois mostrar que $\mathscr{S}$ e e $\mathscr{T}$ são, na realidade, isomorfos.

O conjunto $\mathscr{T}$ é definido como sendo a coleção dos pares de caminhos (a,b) tais que $r(a) = r(b)$, juntamente com um elemento zero y. Pomos $y* = y$ e $(a,b)^* = (b,a)$, para cada $(a,b) \in \mathscr{T}$.

Define-se o produto em $\mathscr{T}$ pondo $(a,a'c)(a',b) = (a,bc)$, $(a,a')(a'c,b') = (ac,b')$ e qualquer outro produto como sendo igual a y.

Proposição 3.5.1. O conjunto $\mathscr{T}$, definido acima, é um semigrupo inverso.

Demonstração: Tome $t \in \mathscr{T}$. Se $t = y$, então $t^* = y$, por definição, de forma que $tt^*t = t = y = t^*tt^* = t^*$. Se $t = (a,b)$, então é claro que $tt^*t = t$ e $t^*tt^* = t^*$. Se $t' = (a',b')$ é tal que $tt't = t$, então não se pode ter $b' = ac$, com $|c| > 0$, pois nesse caso o segundo componente de $tt't$ teria comprimento maior do que b, que é o segundo componente de t, o que seria uma contradição. Da mesma forme, se $t'tt' = t'$, então não se pode ter $a = b'c$, com $|c| > 0$. Isso significa que $b' = a$. De forma recíproca, mostra-se que $a' = b$. Daí $t' = t^*$, o que estabelece a unicidade de t^*.

Resta demonstrar a associatividade. Tome $t_1, t_2, t_3 \in \mathscr{T}$. Se um deles é igual a y, então é evidente que $t_1(t_2t_3) = (t_1t_2)t_3$. Caso contrário, escreva $t_i = (a_i, b_i)$, para cada $i \in \{1,2,3\}$. Escreva $w_1 = t_1(t_2t_3)$ e $w_2 = (t_1t_2)t_3$. Se for $w_1 = y = w_2$, então não há o que mostrar. Assim, consideremos o caso $w_1 \neq y$, sabendo-se que o caso $w_2 \neq y$ é completamente análogo.

Pomos $(a_2,b_2)(a_3,b_3) = w$. Se $w = y$, então seria $w_1 = (a_1,b_1)w = y$, o que não ocorre por hipótese. Escreva $w = (a,b)$. Para que o produto $(a_1,b_1)(a,b)$ seja diferente de y, é necessário que $b_1 = a_2c$ ou $a_2 = b_1d$ (2 casos). Para que $w \neq y$, é necessário que $b_2 = a_3c'$ ou $a_3 = b_2d'$ (2 casos). Por conseguinte, o teorema fundamental da contagem garante que há $2 \cdot 2 = 4$ casos possíveis a serem considerados. É claro que todos eles são análogos.

Demonstremos assim, sem perda de generalidade, o caso em que $b_2 = a_3c'$ e $b_1 = a_2c$. Tem-se $w_1 = (a_1, b_3c'c)$ e $w_2 = (a_1,b_2c)(a_3,b_3) = (a_1,a_3c'c)(a_3,b_3) = (a_1,b_3c'c) = w_1$. **(c.q.d)**

Proposição 3.5.2. Os semigrupos inversos $\mathscr{S}$ e $\mathscr{T}$ de um grafo $\mathscr{E}$, definidos acima, são isomorfos.

Demonstração: Seja $Z = \mathscr{E}^0 \cup \mathscr{E}^1 \cup \mathscr{E}^* \cup \{y\}$. Defina $\Phi : F_Z \to \mathscr{T}$ como sendo o único homomorfismo tal que

$$\Phi(v) = (v,v), \ \Phi(e) = (e,r(e)), \ \Phi(e^*) = (r(e),e) \ \Phi(y) = y,$$

em que F_Z denota o semigrupo livre gerado por Z. A sobrejetividade de Φ segue diretamente do fato segundo o qual se $a = (e_1,\dots,e_n)$, $b = (h_1,\dots,h_m)$ e $t = (a,b) \in \mathscr{T}$, então $t = \Phi(e_1)\cdots\Phi(e_n)\Phi(h_1^*)\cdots\Phi(h_m^*)$.

Note que $\mathscr{S} = F_Z/\sim$, em que $\sim$ é a relação de equivalência determinada pelos itens (1),(2),(3) e (4) da Definição 3.5.5. Portanto, se mostrarmos que os elementos da imagem $\Phi(Z)$ satisfazem essas condições, seguir-se-á, passando-se ao quociente, que Φ pode ser fatorado por um homomorfismo sobrejetivo $\tilde{\Phi} : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$. Com efeito:

1. É evidente.

2. Note-se que, para toda aresta $e \in \mathscr{E}^1$, tem-se

$$(d(e),d(e))(e,r(e)) = (e,r(e)) = (e,r(e))(r(e),r(e)),$$

de tal forma que $\Phi(d(e))\Phi(e) = \Phi(e)\Phi(r(e))$.

3. Suponha que $r(x) \neq d(x')$, com $x \in \mathscr{E}^0$. Então há três possibilidades:

i) $x' \in \mathscr{E}^0 \setminus \{x\}$;

Nesse caso, tem-se $\Phi(x)\Phi(x') = (x,x)(x',x') = y$.

ii) $x' \in \mathscr{E}^1$, com $x \neq d(x')$;

Novamente, vale que $\Phi(x)\Phi(x') = (x,x)(x',r(x')) = y$.

iii) $x' = e^* \in \mathscr{E}^*$, com $x \neq r(e)$.

Mais uma vez, note que $\Phi(x)\Phi(x') = (x,x)(r(e),e) = y$.

De qualquer forma, tem-se $\Phi(x)\Phi(x') = y$. As outras possibilidades para x (a saber: $x \in \mathscr{E}^1$ ou $x \in \mathscr{E}^*$) são tratadas de forma análoga.

4. Tome $e, e' \in \mathscr{E}^1$. Se $e \neq e'$, então $\Phi(e^*)\Phi(e') = (r(e), e)(e', r(e')) = y$, o que estabelece a validade de (4).

Passando-se ao quociente, obtêm-se um homomorfismo sobrejetivo

$$\tilde{\Phi} : \frac{F_Z}{\sim} \to \mathscr{T}.$$

Resta mostrar a injetividade de $\tilde{\Phi}$. Com efeito, tome $s, s' \in F_Z$ tais que $\Phi(s) = \Phi(s')$. Escreva $s \sim t$ e $s' \sim t'$, para $t, t' \in F_Z$.

Se $t = t' = y$, tem-se imediatamente $s \sim s'$ e não há o que se demonstrar. Caso contrário, podemos escolher, sem perda de generalidade, $t = ab^*$ e $t' = a'(b')^*$, em que a, b, a', b' são caminhos e $r(a) = r(b), r(a') = r(b')$. Daí

$$(a, b) = \Phi(t) = \Phi(s) = \Phi(s') = \Phi(t') = (a', b'),$$

donde segue que $a = a'$ e $b = b'$, ou seja, $t = t'$ e $s \sim s'$. **(c.q.d)**

Finalmente, vejamos como calcular o grupoide universal de Paterson $\mathscr{H} = \mathscr{G}(\mathscr{S}(\mathscr{E}))$ do semigrupo inverso de um grafo finito $\mathscr{E}$. A palavra finito poderia ser trocada por enumerável, mas por simplificação decidimos abordar apenas o caso mais simples, o qual, na realidade, costuma ser o mais útil à maior parte das aplicações.

Teorema 3.5.1. Seja $\mathscr{E}$ um grafo finito e seja $\mathscr{H}$ o grupoide universal do semigrupo inverso $\mathscr{S}(\mathscr{E})$. Então $\mathscr{H}$ pode ser identificado com o grupoide definido pela reunião de $\{y\}$ com o conjunto

$$\{(ac, |a| - |b|, bc) : \ a, b \in \mathscr{P}(\mathscr{E}), c \in \mathscr{P}(\mathscr{E}) \cup \mathscr{P}^\infty(\mathscr{E})\},$$

com a multiplicação definida por $(x, m, y)(y, n, z) = (x, m+n, z)$ e com a inversão $(x, m, y)^{-1} = (y, -m, x)$.

Demonstração: Seja $\mathscr{D}$ o semigrupo comutativo (um semirreticulado, de fato) formado pelo idempotentes do semigrupo inverso $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathscr{E})}$. Conforme exposto em (PATERSON, 2012), Capítulo 4, o grupoide universal $\mathscr{H}$ é o quociente $\{(x, s) : \ x \in D_s, \ s \in \mathscr{S}\}/\sim$, em que $\sim$ é a relação segundo a qual $(x, s) \sim (y, t)$ sempre que $x = y$ e tal que existe $e \in \mathscr{D}$ tal que $x(e) = 1$ e

$es = et$. O produto e a involução $*$ de $\mathscr{H}$ são dados por

$$[x,s][x(s),t] = [x,st] \quad \text{e} \quad [x,s]^* = [x.s,s^*],$$

em que $x.s \in \mathscr{H}^0 \cap D_s$ é dado por $x.s(e) = x(ses^*)$ (lembrando que $\mathscr{H}^0$ consiste no espaço das avaliações não nulas $\varphi : \mathscr{D} \to \{0,1\}$). Dessa forma, para cada $s \in \mathscr{S}$, a aplicação $x \mapsto x.s$ define um homeomorfismo de D_s sobre D_{s^*}.

Agora, tome $s = (a,b)$ e $x \in D_s$. Então $x(s^*s) = x(a) = 1$. Dado $a' \in \mathscr{D}$ é tal que $x(a') = 1$ e $a' \leq ss^*$, tem-se $a' = ac \in \mathscr{P}(\mathscr{E})$ e $a's = (ac,bc)$. Assim, pondo $x = acd$, para algum caminho $d \in \mathscr{P}(\mathscr{E}) \cup \mathscr{P}^\infty(\mathscr{E})$, ter-se-á $(acd, |ac| - |bc|, bcd) = (acd, |a| - |b|, bcd)$, de tal forma que a aplicação $(x,s) \mapsto (acf, |a| - |b|, bcd)$ é constante nas classes $[x,s] \in \mathscr{H}$, de tal maneira que fica bem definida como uma aplicação em $\mathscr{H}$. Utilizando o mesmo raciocínio partindo-se de $\mathscr{H}$, obtêm-se a inversa dessa aplicação, de tal forma que essa consiste numa bijeção. **(c.q.d)**.

Teorema 3.5.2. Nas condições do Teorema 3.5.1, o grupoide $\mathscr{H}$ é de Hausdorff.

Demonstração: Vamos identificar $\mathscr{H}$ conforme exposto no Teorema 3.5.1. Tome $A = (a, |a| - |b|, b), B = (a', |a'| - |b'|, b)$, com $A \neq B$. Continuaremos utilizando a notação $D(a, a_1, \ldots, a_n) = D_a \cap D^C_{a_1} \cap \cdots \cap D^C_{a_n}$, sempre que $a, a_i \in \mathscr{D}$, $a \geq a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $D_s = \{x \in \mathscr{H}^0 : \ x(ss^*) = 1\}$, lembrando que tais elementos da forma $D(a, a_1, \ldots, a_n)$ constituem uma base para $\mathscr{H}^0$.

Assim sendo, se $D_{a,b} \cap D_{a',b'} = \varnothing$, então $D_{a,b}$ e $D_{a',b'}$ são abertos disjuntos contendo A e B, respectivamente. Caso contrário, existem c, c' caminhos (podendo ser infinitos) tais que

$$(ac, |a| - |b|, bc) = (a'c', |a'| - |b'|, b'c').$$

Então $|a| - |b| = |a'| - |b'|$ e podemos tomar um caminho u, tal que $a' = au$. Então, existe um caminho v, tal que $b' = bv$, com $|u| = |v|$. Como u e v começam na mesma aresta em que c começa, isso significa que obrigatoriamente $u = v$. Como $|u| > 0$ (pois $A \neq B$), segue que $A \in D_{a,b} \cap D^C_{a',b'}$, $B \in D_{a',b'}$ e $(D_{a,b} \cap D^C_{a',b'}) \cap D_{a',b'} = \varnothing$. Isso estabelece a propriedade de Hausdorff para $\mathscr{H}$. **(c.q.d)**.

4 Simplicidade e primitividade de álgebras de grupoides amplos

As boas propriedades das álgebras de grupoides simples e primitivas, algumas das quais descritas na seção 3 deste capítulo, tornam seu estudo conveniente. As seções 1 e 2 definem e estabelecem condições necessárias (ou suficientes) para que uma álgebra de grupoides seja simples ou primitiva. Essas propriedades, inicialmente algébricas, permitem também descrever propriedades das álgebras de semigrupos.

4.1 A Simplicidade das Álgebras de Grupoides

A fim de estudar as álgebras de grupoides étale, começamos considerando o caso de grupoides amplos. Continuaremos a considerar R um anel comutativo com unidade.

Definição 4.1.1. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide. O *subgrupoide de isotropia* de $\mathscr{G}$ é o subgrupoide $\mathscr{I}(\mathscr{G})$, cujos objetos são os elementos de $\mathscr{G}^0$ e de forma que $g \in \mathscr{I}(\mathscr{G}) \Leftrightarrow d(g) = r(g)$. Diz-se que o grupoide $\mathscr{G}$ é *efetivo* quando $\mathscr{G}^0 = \mathrm{int}(\mathscr{I}(\mathscr{G}))$. Para cada ponto $x \in \mathscr{G}^0$, o conjunto $G_x = \{g \in \mathscr{G} : d(g) = x = r(g)\}$, munido da operação de composição no grupoide $\mathscr{G}$, é um grupo, chamado o *grupo de isotropia* de x. A *órbita* O_x de um ponto $x \in \mathscr{G}^0$ é o conjunto $O_x = \{y \in \mathscr{G}^0 : \ \exists g \in \mathscr{G} \text{ com } d(g) = x \text{ e } r(g) = y\}$. Diz-se que uma parte $X \subseteq \mathscr{G}^0$ é *invariante* quando é uma reunião de órbitas.

Exemplo 4.1.1. Quando $\mathscr{G}$ é um grupoide amplo, as órbitas de $\mathscr{G}$ consistem precisamente nas órbitas da ação natural de $\mathscr{G}^a$ sobre $\mathscr{G}^0$. Da mesma forma, um subconjunto $X \subseteq \mathscr{G}^0$ é invariante se, e somente se, é invariante por tal ação.

Proposição 4.1.1. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo de Hausdorff. São equivalentes: (1) $\mathscr{G}$ é efetivo. (2) Se $U \subseteq \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^0$ é uma bisseção aberta, então existe $x \in U$ de forma que $r(x) \neq d(x)$. (3) Se $K \subseteq \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^0$ é compacto e $V \subseteq \mathscr{G}^0$ é aberto e não vazio, então existe um subconjunto aberto e não vazio $W \subseteq V$ que cumpre $WKW = \varnothing$.

Demonstração: É evidente que (1) $\Rightarrow$ (2). Como $\mathscr{G}$ é amplo, e em particular étale, segue-se que as bisseções abertas de $\mathscr{G}$ formam uma base para a sua topologia, de tal forma que todo aberto deve conter uma bisseção aberta, donde segue que (2) $\Rightarrow$ (1).

Mostremos que (3) $\Rightarrow$ (2). Com efeito, suponha que (3) ocorre, mas (2) é falso. Então existe uma bisseção aberta $U \subseteq \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^0$ tal que $r(x) = d(x)$, para todo $x \in U$, ou seja,

$U \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{G})$. Não há perda de generalidade em supor que $\overline{U} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{G})$ é compacto, pois $\mathscr{G}$ é amplo de Hausdorff. Tome $V \subseteq r(U)$ aberto. Tem-se $V\overline{U} = \overline{U}V$, de forma que $V\overline{U}V \neq \varnothing$. Isso é uma contradição com (3).

Resta mostrar que (2)$\Rightarrow$ (3).

Afirmação 01: Se $U \subseteq \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^0$ é uma bisseção aberta e $x \in U \setminus \mathscr{I}(\mathscr{G})$, então existe um subconjunto aberto $V \subseteq r(U)$ tal que $V \subseteq VU$ e $d(VU) \cap V = \varnothing$.

De fato, sejam $V_1, V_2 \subseteq \mathscr{G}$ vizinhanças abertas e disjuntas de $r(x)$ e $d(x)$, respectivamente. Escreva $V = V_1 \cap r(UV_2)$. Tem-se $r(x) \in V$ e $V \cap d(VU) = \varnothing$, pois $d(VU) = d(V_1U \cap UV_2) \subseteq V_2$. Isso estabelece a afirmação 01.

Agora, considere (2) como hipótese e tome $K \subseteq \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^0$ compacto e $V \subseteq \mathscr{G}^0$ aberto. Se $V \nsubseteq r(K)$, basta tomar $W = V \setminus r(K)$. Caso contrário, escreva $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$, em que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_i \subseteq K$ é uma bisseção aberta tal que $\overline{U}_i$ é compacto e $\overline{U}_i \cap \mathscr{G}^0 = \varnothing$. Novamente, essa decomposição finita de K existe em virtude da regularidade de $\mathscr{G}$ e da compacidade de K. Deve-se ter $VU_j \neq \varnothing$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, (2) garante a existência de $x \in (VU_1 \cup \cdots VU_n) \setminus \mathscr{I}(\mathscr{G})$.

Considere o conjunto A dos índices $i \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $x \in VU_i$. De acordo com a afirmação 01, Para cada elemento $i \in A$, existe um aberto $W_i \subseteq r(VU_i)$ tal que $r(W_iU_i) \cap W_i = \varnothing$. Sejam $W' = \bigcap_{i \in A} W_i$ e W'' a reunião dos conjuntos da forma $\overline{r(U_i)}$, em que $i \notin A$. Finalmente, defina $W = V \cap W' \setminus W''$. Então $r(x) \in W \subseteq V$, o qual é um conjunto aberto.

Tome $y \in WK$. A fim de mostrar que $WKW = \varnothing$, vamos demonstrar que $d(y) \notin W$. De fato, suponha que $d(y) \in W$ e tome $i \in A$ para o qual $y \in U_i$. Então $d(y) \in d(WU_i) \subseteq d(W_iV)$ e $d(WU_i) \cap V \subseteq d(W_iU_i) \cap W_i = \varnothing$, logo $d(y) \notin V$, uma contradição. **(c.q.d)**

Proposição 4.1.2. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo. Se $0 \neq f \in \mathscr{L}(\mathscr{G}^0, R)$ e $I \trianglelefteq \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ é um ideal que contém f, então existem $r \in R$ e $U \subseteq \mathscr{G}^0$ compacto e aberto tal que $r \cdot \mathscr{X}_U \in I$.

Demonstração: Defina $r \in R$ como sendo um elemento não nulo de $f(\mathscr{G}^0)$. Pomos $U = f^{-1}(r)$, o qual é compacto (pois $\mathscr{G}$ é amplo), aberto em $\mathscr{G}^0$ e não vazio. Portanto $r \cdot \mathscr{X}_U = f * \mathscr{X}_U \in I$. **(c.q.d)**

Proposição 4.1.3. Sejam $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ e $U \in \mathscr{G}^a$. Então $f * \mathscr{X}_U(gh) = f(g)$, sempre que $g, h \in \mathscr{G}$ são tais que $d(g) = r(h)$ e $h \in U$.

Demonstração: Tome $x \in U$ de forma que $d(x) = d(gh)$. Como U é bisseção, segue que $x = h$.

Portanto $f * \mathscr{X}_U(gh) = \sum_{d(x)=d(gh)} f(ghx^{-1})\mathscr{X}_U(x) = f(g)$. **(c.q.d)**

A proposição abaixo generaliza a ideia da Proposição 4.1.2, a qual estabelece condições suficientes para garantir que um ideal de uma álgebra de grupoide amplo contenha um múltiplo de uma função característica de um aberto e compacto de $\mathscr{G}^0$

Proposição 4.1.4. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e efetivo de Hausdorff. Seja I um ideal não nulo de $\mathscr{L}(\mathscr{G},R)$. Então existem $s \in R \setminus \{0\}$ e $U \subseteq \mathscr{G}^0$ aberto, compacto e não vazio, tais que $s \cdot \mathscr{X}_U \in I$.

Demonstração: Tome $f \in I$ não nulo. Então existe $g \in \mathscr{G}$ que cumpre $f(g) \neq 0$. Escreva $x = r(g)$ e tome $U \in \mathscr{G}^a$ de forma que $g^{-1} \in U$. A Proposição 4.1.3 garante que $f * \mathscr{X}_U(x) = f(g) \neq 0$. Segue que, pondo $f' = f * \mathscr{X}_U$, tem-se $f'|\mathscr{G}^0 \neq 0$. Além disso, como $\mathscr{G}$ é de Hausdorff, $\mathscr{G}^0 \subseteq \mathscr{G}$ é aberto e fechado em $\mathscr{G}$, de tal maneira que $f'|\mathscr{G}^0 \in \mathscr{L}(\mathscr{G}^0,R)$. Ponha $\lambda = f' - f'|\mathscr{G}^0$ e escreva $K = supp(\lambda)$, o qual é um subconjunto aberto e compacto de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^0$. Tome $r_1,\ldots,r_n \in R$ não nulos e $K_1,\ldots,K_n \subseteq \mathscr{G}^0$ abertos, disjuntos e compactos, tais que $f'|\mathscr{G}^0 = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{K_i}$. Em virtude da Proposição 4.1.1 na página 52, existe um aberto $W \subseteq K_1$ tal que $WKW = \varnothing$. Não há perda de generalidade em supor que W é compacto, pois a topologia de $\mathscr{G}^0$ é gerada por compactos. Ora, a Proposição 4.1.3 garante que $\mathscr{X}_W * \lambda * \mathscr{X}_W = 0$, de tal forma que $\mathscr{X}_W * f' * \mathscr{X}_W = r_1 \cdot \mathscr{X}_W \in I$. **(c.q.d)**

Definição 4.1.2. Um grupoide étale $\mathscr{G}$ chama-se *minimal* quando $\mathscr{G}^0$ não possui subconjuntos próprios, não vazios, fechados e invariantes.

Steinberg provou em (STEINBERG, 2016) uma maneira mais calculável algebricamente a fim de assegurar a minimalidade de um grupoide amplo. Trata-se da:

Proposição 4.1.5. Um grupoide amplo $\mathscr{G}$ é minimal se, e somente se, para todo subconjunto aberto, compacto e não vazio $U \subseteq \mathscr{G}^0$, a função característica χ_U gera $\mathscr{L}(\mathscr{G},R)$, sendo esse último visto como um ideal.

Demonstração: Veja (STEINBERG, 2016). **(c.q.d)**

Teorema 4.1.1. Sejam $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e $\mathbb{K}$ um corpo. Se a $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{L}(\mathscr{G},\mathbb{K})$ é simples, então $\mathscr{G}$ é efetivo e minimal.

Demonstração: Se $\mathscr{L}(\mathscr{G},\mathbb{K})$ é simples, então levando em conta que o ideal I, gerado por $\mathscr{X}_U$, é não nulo sempre que $U \subseteq \mathscr{G}^0$ é aberto, compacto e não vazio, segue que $I = \mathscr{L}(\mathscr{G},\mathbb{K})$, por definição de simplicidade de uma álgebra.

Mostremos que $\mathscr{G}$ é efetivo. De fato, seja $U \in \mathscr{G}^a$ não vazio, com $U \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{G})$. Resta mostrar que $U \subseteq \mathscr{G}^0$. Com efeito, uma conta simples mostra que, para todo $x \in \mathscr{G}^0$, o módulo $\mathbb{K}O_x$ é aniquilado por $\chi_U - \chi_{U^{-1}U}$, em que $U^{-1} = \{u^{-1} : \ u \in U\}$. Mas o módulo $\mathbb{K}O_x$ possui ideais aniquiladores próprios (vide (STEINBERG, 2010)), de tal forma que a simplicidade da álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{K},\mathscr{G})$ nos garante garante que tal módulo é fiel. Isso significa que $\chi_U = \chi_{U^{-1}U}$, donde segue que $U = U^{-1}U$, ou seja, $U \subseteq \mathscr{G}^0$. **(c.q.d)**

Corolário 4.1.1. Sejam $\mathscr{G}$ um grupoide amplo de Hausdorff e $\mathbb{K}$ um corpo. A álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{K},\mathscr{G})$ é simples se, e somente se, $\mathscr{G}$ é efetivo e minimal.

Demonstração: O Teorema 4.1.1 garante que a simplicidade de $\mathscr{G}$ implica sua efetividade e minimalidade(ainda que esse não seja de Hausdorff). Respectivamente, se $\mathscr{G}$ é efetivo e minimal, tome $I \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{K},\mathscr{G})$ ideal não nulo. Pela Proposição 4.1.4, existe $U \subseteq \mathscr{G}^0$ compacto, aberto e não vazio tal que $\chi_U \in I$. Como $\mathscr{G}$ é minimal, conclui-se que $I = \mathscr{L}(\mathbb{K},\mathscr{G})$, isto é, a álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{K},\mathscr{G})$ é simples. **(c.q.d)**

4.2 Primitividade e Semiprimitividade

Definição 4.2.1. Uma álgebra chama-se *primitiva* quando, considerada como um anel, admite um módulo simples e fiel à esquerda. Da mesma forma, diz-se que uma álgebra é *semiprimitiva* quando é um anel semiprimitivo, isto é, que admite um módulo fiel semisimples, ou seja, um módulo fiel que pode ser decomposto em soma direta de submódulos primitivos.

A seguir, vamos expor uma condição suficiente a fim de que a álgebra de um grupoide amplo seja semiprimitiva. Antes disso, é conveniente estabelecer algumas notações e observações.

Considere um grupoide amplo $\mathscr{G}$ e seja V um módulo sobre $\mathscr{L}(\mathscr{G}_x,R)$, em que $x \in \mathscr{G}^0$. Pomos $L_x = d^{-1}(x)$. Então $\mathscr{L}(L_x,R)$ é um módulo sobre $\mathscr{L}(\mathscr{G},R)$, com o produto por escalar dado por

$$f \cdot w = \sum_{y \in L_x} f(yw^{-1})y = \sum_{d(g)=r(w)} f(g)gw,$$

sempre que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G},R)$ e $w \in L_x$. Steinberg demonstrou em (STEINBERG, 2010) que $\mathscr{G}_x$

age livremente à direita sobre L_x e que, pondo $\Delta_x(V) = \mathscr{L}(L_x, R) \otimes V$, a aplicação $V \mapsto \Delta_x(V)$ define um funtor exato da categoria dos módulos simples sobre ela mesma.

Proposição 4.2.1. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e efetivo de Hausdorff. Se o anel comutativo com unidade R é semiprimitivo, então a álgebra $\mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ é semiprimitiva.

Demonstração: Seja V um R-módulo fiel semisimples. Seja

$$M = \bigoplus_{x \in \mathscr{G}^0} \Delta_x(V).$$

Como mostrado em (STEINBERG, 2010), M é um $\mathscr{L}(G_x, R)$-módulo semisimples. Vamos mostrar que M é fiel. Com efeito, se não o fosse, então seu aniquilador conteria um elemento da forma $s \cdot \chi_U$, com $s \in R \setminus \{0\}$ e $U \subseteq \mathscr{G}^0$ bisseção aberta, compacta e não vazia, vide Proposição 4.1.4 na página 54. Tome $x \in U$ e $v \in V$, com $sv \neq 0$. Então $s \cdot \chi_U(x \otimes v) = x \otimes sv \neq 0$ e tem-se

$$\Delta_x(V) = \bigoplus_{y \in O_x} y \otimes V,$$

uma contradição. **(c.q.d)**.

Definição 4.2.2. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo. Diz-se que $X \subseteq \mathscr{G}^0$ é R-denso quando, para toda $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ não nula, existe $g \in \mathscr{G}$ tal que $d(g) \in X$ e $f(g) \neq 0$.

A proposição abaixo correlaciona a ideia definida acima com a noção de densidade no sentido topológico.

Proposição 4.2.2. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e $X \subseteq \mathscr{G}^0$. Se X é R-denso, então X é denso em $\mathscr{G}^0$.

Demonstração: Tome $U \subseteq \mathscr{G}^0$ aberto, compacto e não vazio. Tem-se $\chi_U \neq 0$. Se fosse $\chi_U(x) = 0$, para todo $x \in X$, então para todo $g \in \mathscr{G}$, ter-se-ia $d(g) \in X \Leftrightarrow \chi_U(g) = 0$. Isso contradiz a R-densidade de X. Por conseguinte, existe $x \in X$ tal que $\chi_U(x) = 0$. Daí $U \cap X \neq \varnothing$, o que estabelece a densidade de X em $\mathscr{G}^0$. **(c.q.d)**.

Proposição 4.2.3. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo de Hausdorff. Se $X \subseteq \mathscr{G}^0$ é denso, então X é R-denso.

Demonstração: Tome $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$. Então $K = f^{-1}(R \setminus \{0\})$ é um aberto compacto, de forma que $d(K) \subseteq \mathscr{G}^0$ também o é. Assim, existe $x \in X \cap d(K)$, ou seja, pondo $x = d(g)$, com $g \in K \subseteq \mathscr{G}$, ter-se-á $f(g) \neq 0$ e $d(g) \in X$. **(c.q.d)**

Proposição 4.2.4. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo. Sejam $x \in \mathscr{G}^0$ e V_x um módulo fiel sobre $\mathscr{L}(\mathscr{G}_x, R)$. Se $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ cumpre $f(g) \neq 0$, para algum $g \in \mathscr{G}$ tal que $d(g) \in O_x$, então $f \cdot \Delta_x(V_x) \neq 0$.

Demonstração: Dado $y \in O_x$, escolha um morfismo $t_y \in \mathscr{G}$, com $d(t_y) = x$ e $r(t_y) = y$. Tem-se

$$\Delta_x(V_x) = \mathscr{L}(L_x, R) \otimes_{\mathscr{L}(G_x, R)} V_x = \bigoplus_{y \in O_x} g_y \otimes V_x,$$

considerando a decomposição em soma direta como sendo um R-módulo. Como V_x é fiel, segue que existe $v \in V_x$ tal que $sv \neq 0$, em que

$$0 \neq s = \sum_{w \in A} f(w)(t_{r(g)}^{-1} w t_{d(g)}) \in \mathscr{L}(G_x, R),$$

sendo $A = \{w \in \mathscr{G} : \ d(w) = d(g) \text{ e } r(w) = r(g)\}$. Um cálculo direto mostra que

$$f \cdot (t_{d(g)} \otimes v) = t_{r(g)} \otimes sv + \sum_{y \in O_x \setminus \{r(g)\}} t_y \otimes \sum_{w \in A} f(w)(t_y^{-1} w t_{d(g)})v \neq 0,$$

o que estabelece o resultado. **(c.q.d)**

Proposição 4.2.5. Sejam $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e $\mathbb{K}$ um corpo. Seja V um $\mathscr{L}(\mathbb{K}, \mathscr{G}_x)$ - módulo simples. Então $\Delta_x(V)$ é um $\mathscr{L}(\mathbb{K}, \mathscr{G})$-módulo simples.

Demonstração: Veja (STEINBERG, 2010), Proposição 7.19. **(c.q.d)**

Teorema 4.2.1. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo. Se o conjunto $X = \{x \in \mathscr{G}^0 : \ \mathscr{L}(\mathscr{G}_x, R) \text{ e semiprimitivo}\}$ é R-denso, então $\mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ é semiprimitivo.

Demonstração: Para cada $x \in X$, seja V_x um módulo semisimples fiel sobre $\mathscr{L}(G_x, R)$. Pomos

$$V = \bigoplus_{x \in X} \Delta_x(V_x).$$

Pela Proposição 4.2.5, segue que V é semisimples. Tome $f \in \mathscr{L}(\mathscr{G}, R)$ não nulo e $g \in \mathscr{G}$ tal que $f(g) \neq 0$ e $x = d(g) \in X$. Então $f \cdot \Delta_x(V_x) \neq 0$, em virtude da Proposição 4.2.4. Portanto $f \cdot V \neq 0$, de forma que V é fiel. **(c.q.d)**

Teorema 4.2.2. Seja $\mathscr{G}$ um grupoide amplo e $\mathbb{K}$ um corpo. Seja $x \in \mathscr{G}^0$ um ponto cuja órbita O_x é $\mathbb{K}$-densa. Se a álgebra $\mathbb{K}G_x$ é primitiva, então $\mathbb{K}\mathscr{G}$ também o é.

Demonstração: Seja V_x um módulo simples e fiel sobre $\mathscr{K}\mathscr{G}$. Então $\Delta_x(V_x)$ é simples, vide Proposição 4.2.5. Além disso, a Proposição 4.2.4 na página 57 garante que $\Delta_x(V_x)$ é fiel. **(c.q.d)**

4.3 Uma Aplicação às Álgebras de Semigrupos Inversos

Seja L um semirreticulado. Continuaremos denotando por $\widehat{L}$ o conjunto das avaliações de L, como no Capítulo 2. Pomos $D(a) = \{\varphi \in \widehat{L} : \varphi(a) = 1\}$, para cada $a \in L$. Então os conjuntos da forma $D(a, a_1, \ldots, a_n) = D(a) \cap D(a_1)^C \cap \cdots \cap D(a_n)^C$, em que $a_i \leq a$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, constituem uma base de conjuntos compactos e abertos para a topologia de $\widehat{L}$, o qual é um conjunto de Hausdorff.

Uma avaliação $\varphi : L \to \{0,1\}$ chama-se *rígida* quando, para toda cobertura F de $a \in L$, tem-se $\varphi(a) = \bigvee_{b \in F} \varphi(b)$. Isso significa que

$$\prod_{b \in F} (\varphi(a) - \varphi(b)) = 0,$$

sempre que F é uma cobertura de a.

O espaço das avaliações rígidas é denotado por $\widehat{L}_T$. Os trabalhos de Exel em (EXEL*, 2008) garantem que a definição acima coincide com a definição de avaliações rígidas fornecida no Capítulo 2.

Se $\mathscr{S}$ é um semigrupo inverso, então sabemos que $\mathscr{S}$ age sobre $\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}$ por meio da ação natural. Restringindo-se essa ação à $\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_T$, obtêm-se o grupoide rígido universal de $\mathscr{S}$, denotado por $\mathscr{G}_T(\mathscr{S}) = \mathscr{S} \ltimes \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_T$.

Foi demonstrado por Steinberg em (STEINBERG, 2010) que $\mathscr{L}(\mathscr{S}, R) \cong \mathscr{L}(\mathscr{G}(\mathscr{S}), R)$ vide o isomorfismo $s \mapsto \mathscr{X}_{(s, D(s^*s))}$. Esse fato será utilizado teorema abaixo, que determina o cálculo da restrição do grupoide universal de um semigrupo inverso a um subconjunto fechado invariante X, identificando em $\mathscr{L}(\mathscr{S}, R)$ os termos que se fatoram na forma $(a - a_1) \cdots (a - a_n)$, em que $a_i \leq a$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $D(a, a_1, \ldots, a_n) \cap X = \varnothing$.

Definição 4.3.1. Um semigrupo inverso $\mathscr{S}$ chama-se *de Hausdorff* quando, para quaisquer $s, t \in \mathscr{S}$, existe um subconjunto finito F tal que $x \leq s$ e $x \leq t$, com $x \in \mathscr{S}$, ocorre se, e somente se, existe $u \in F$ tal que $x \leq u$.

Teorema 4.3.1. Seja $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso de Hausdorff e $X \subseteq \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}$ um subespaço fechado e invariante. Se $\mathscr{G} = \mathscr{G}(\mathscr{S})|X$, então

$$\mathscr{L}(\mathscr{G},R) \cong \frac{\mathscr{L}(\mathscr{S},R)}{\langle \prod_{i=1}^{n}(a-a_i) \mid D(a,a_1,\dots,a_n) \cap X = \varnothing \rangle}.$$

Demonstração: Primeiro, note que $\mathscr{G}$ é um subgrupoide fechado do grupoide universal $\mathscr{G}(\mathscr{S})$. Defina $\psi : \mathscr{L}(\mathscr{G}(\mathscr{S}),R) \to \mathscr{L}(\mathscr{G},R)$ pondo $\psi(f) = f|\mathscr{G}$. Então ψ é um homomorfismo sobrejetivo, pois $\mathscr{G}^0$ pode ser expresso como uma reunião de órbitas. Escreva $I = \ker \psi$.

Afirmação 01: I é um ideal gerado pelas funções características χ_U de subconjuntos $U \subseteq \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}$ abertos, compactos e que não intersecta o conjunto X.

Com efeito, se $\psi(f) = f|\mathscr{G} = 0$, então $f^{-1}(R \setminus \{0\})$ é aberto e compacto (pois $\mathscr{G}(\mathscr{S})$ é Hausdorff). Por conseguinte, $U = d(f^{-1}(R \setminus \{0\})$ também o é. Claro que $f = f * \chi_U$. Assim, se $x \in U$, tem-se $x = d(g)$, com $f(g) \neq 0$, de tal forma que $x \notin X$, pois X é invariante. Segue-se que $U \cap X = \varnothing$.

Afirmação 02: I é gerado pelas funções características χ_K, em que $K \subseteq \mathscr{E}(\hat{\mathscr{S}})$ é um aberto básico, compacto e que não intersecta X.

De fato, se U é um aberto, compacto e disjunto de X como acima, escreva $U = K_1 \cup \cdots K_n$, em que cada $K_i \subseteq \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}$ é um aberto básico compacto, disjunto de X. A finitude dessa reunião se deve à compacidade de U. Dessa forma, tem-se $\chi_U = \mathscr{X}_{K_1} \vee \cdots \vee \mathscr{X}_{K_n}$, o que estabelece a afirmação 02.

Agora, escreva cada aberto básico K acima como $K = D(a,a_1,\dots,a_n)$, conforme notação exposta no início dessa seção. Segue-se que

$$\chi_K = \prod_{i=1}^{n}(\mathscr{X}_{D(a)} - \mathscr{X}_{D(a_i)}).$$

Mas χ_K é a imagem do produto $(a-a_1)\cdots(a-a_n)$ pelo isomorfismo $\mathscr{L}(\mathscr{S},R) \cong \mathscr{L}(\mathscr{G}(\mathscr{S}),R)$, donde segue que

$$I = \langle \prod_{i=1}^{n}(a-a_i) \mid D(a,a_1,\dots,a_n) \cap X = \varnothing \rangle,$$

e o resultado decorre do Teorema do Isomorfismo. **(c.q.d)**.

Corolário 4.3.1. Seja $\mathscr{S}$ um semigrupo inverso de Hausdorff com zero. Dado $f \in mathcalE(\mathscr{S})$, seja $F^f = (F_\lambda^f)_{\lambda \in J}$ a família de todos os espaços F_λ^e que cobrem f. Então

$$\mathscr{L}(\mathscr{G}_T(\mathscr{S}),R) \cong \frac{\mathscr{L}(\mathscr{S},R)}{\langle f - \bigvee_{\lambda \in J} F_\lambda \rangle} = \frac{\mathscr{L}(\mathscr{S},R)}{\langle \prod_{\lambda \in J}(f-f') | \ f' \in F_\lambda^f \rangle}.$$

Demonstração: A ideia da demonstração é calcular o ideal I, definido no Teorema 4.3.1. Vamos mostrar que $I = \langle f - \bigvee_{\lambda \in J} F_\lambda \rangle$.

Com efeito, seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma cobertura de $f \in \mathscr{L}(\mathscr{S}, R)$. Isso significa que $D(f, f_1, \ldots, f_n)$ não admite avaliações rígidas. Reciprocamente, suponha que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ não é uma cobertura de f. Então existe $w \leq f$ não nulo tal que $wf_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. A Proposição 2.4.1 na página 16 garante a existência de um ultrafiltro $\mathscr{F}$ que contém w. Tem-se $f \in \mathscr{F}$ e $f_i \notin \mathscr{F}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daí, decorre que $\chi_{\mathscr{F}} \in D(f, f_1, \ldots, f_n) \cap \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{S})}_T$. Como $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro, segue que $\mathscr{F}$ é rígido (vide (EXEL, 2009)). O resultado segue. **(c.q.d)**

5 Conclusão

As Álgebras de Steinberg possuem extrema importância, na medida em que permitem simplificar a construção e o desenvolvimento de outros tipos de álgebras, como por exemplo as Álgebras de caminhos de Leavvit, que são definidas a partir de grafos, as álgebras de semigrupos inversos e as C^*-álgebras. Essas, por sua vez, são de significativa relevância ao contexto das aplicações.

A compreensão de propriedades algébricas de álgebras de Steinberg, tais como a primitividade, simplicidade ou semiprimitividade, permite descrever propriedades topológicas dos grupoides amplos sobre os quais essas álgebras foram definidas. Dessa forma, isso estabelece uma interessante conexão entre topologia e álgebra.

Referências

BEUTER, V. M. Partial actions of inverse semigroups and their associated algebras. 2018.

BOSSA, L. F. Grupoides, semigrupos inversos e suas c*-álgebras. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/214972⟩.

BROWN, J. et al. Simplicity of algebras associated to étale groupoids. In: SPRINGER. *Semigroup Forum*. [S.l.], 2014. v. 88, p. 433–452.

CASTRO, G. G. de; GONÇALVES, D.; WYK, D. W. van. Ultragraph algebras via labelled graph groupoids, with applications to generalized uniqueness theorems. *Journal of Algebra*, Elsevier, v. 579, p. 456–495, 2021.

CLARK, L. O.; EDIE-MICHELL, C. Uniqueness theorems for steinberg algebras. *Algebras and Representation Theory*, Springer, v. 18, p. 907–916, 2015.

EXEL*, R. Inverse semigroups and combinatorial c*-algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, Springer, v. 39, p. 191–313, 2008.

EXEL, R. Tight representations of semilattices and inverse semigroups. In: SPRINGER. *Semigroup forum*. [S.l.], 2009. v. 79, n. 1, p. 159–182.

FOSTER, A. L. The idempotent elements of a commutative ring form a boolean algebra; ring-duality and transformation theory. 1945.

HALMOS, P.; GIVANT, S. *Introduction to Boolean algebras*. [S.l.]: Springer, 2009.

HOLKAR, R. D.; HOSSAIN, M. A. Topological fundamental groupoid. i. *arXiv preprint arXiv:2302.01583*, 2023.

KEIMEL, K. Algèbres commutatives engendrées par leurs éléments idempotents. *Canadian Journal of Mathematics*, Cambridge University Press, v. 22, n. 5, p. 1071–1078, 1970.

KUDRYAVTSEVA, G. Quotients of the booleanization of an inverse semigroup. In: SPRINGER. *International Conference on Semigroups and Applications*. [S.l.], 2019. p. 71–94.

LAWSON, M. V. Non-commutative stone duality: inverse semigroups, topological groupoids and c*-algebras. *International Journal of Algebra and Computation*, World Scientific, v. 22, n. 06, p. 1250058, 2012.

LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. [S.l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.

LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 1977.

LIMA, E. L. *Homologia básica*. [S.l.]: IMPA, 2009.

MACHADO, N.; CASTRO, G. G. de. Étale categories, restriction semigroups, and their operator algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 532, n. 1, p. 127906, 2024.

MAY, J. P. *A concise course in algebraic topology*. [S.l.]: University of Chicago press, 1999.

MUNKRES, J. *Topology*. [S.l.]: Pearson, London, 2017.

PATERSON, A. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 170.

PATERSON, A. L. Graph inverse semigroups, groupoids and their c*-algebras. *Journal of Operator Theory*, JSTOR, p. 645–662, 2002.

SCHAFASCHEK, G. S. Elementos de topologia algébrica. Florianópolis, SC, 2018.

STEINBERG, B. A topological approach to inverse and regular semigroups. *Pacific journal of mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 208, n. 2, p. 367–396, 2003.

STEINBERG, B. A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 223, n. 2, p. 689–727, 2010.

STEINBERG, B. Simplicity, primitivity and semiprimitivity of étale groupoid algebras with applications to inverse semigroup algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Elsevier, v. 220, n. 3, p. 1035–1054, 2016.

STONE, M. H. The theory of representation for boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 40, n. 1, p. 37–111, 1936.

STONE, M. H. Applications of the theory of boolean rings to general topology. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 41, n. 3, p. 375–481, 1937.