UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Elias Kemper Filho

C^*-envelopes e o Teorema de Hamana

Florianópolis
2024

Elias Kemper Filho

C^*-envelopes e o Teorema de Hamana

Dissertação de mestrado apresentada para o Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Pura e Aplicada.
Orientador: Paulinho Demeneghi.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Kemper Filho, Elias
C*-envelopes e o Teorema de Hamana / Elias Kemper Filho ; orientador, Paulinho Demeneghi, 2024.
99 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. C*-álgebras. 3. Álgebra de Matrizes sobre uma C*-álgebra. 4. Aplicações Completamente Positivas. 5. Injetividade. I. Demeneghi, Paulinho. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Elias Kemper Filho

C^*-envelopes e o Teorema de Hamana

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Natã Machado
Universidade Federal de Santa Catarina

Carlos Felipe Lardizabal
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Análise.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Douglas Soares Goncalves
Data: 13/02/2025 13:18:36-0300
CPF: ***.566.318-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenador do Programa
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 13/02/2025 14:34:32-0300
CPF: ***.173.280-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Orientador

Florianópolis, 12 de dezembro de 2024.

AGRADECIMENTO

Ao meu orientador Paulinho Demeneghi por toda colaboração neste trabalho, por me incentivar a buscar novos conhecimentos e por acreditar em mim.

À minha mãe Hilbeth Michels Nuernberg e meu pai Elias Kemper por todo suporte que me deram. Sem vossa ajuda, educação e amor seria impossível eu chegar tão longe.

Aos meus queridos amigos Baltazar Garcia dos Santos e Rosana Rodrigues da Rocha por todo apoio e momentos que passei durante essa passagem morando nos Ingleses.

Aos membros da banca Gilles Gonçalves de Castro, Natã Machado e Carlos Felipe Lardizabal por contribuírem para minha formação como um matemático.

À CAPES por disponibilizar uma bolsa de estudos para viabilizar minha estadia em Florianópolis.

À Universidade Federal de Santa Catarina por ter dado condições de que este trabalho, assim como o mestrado, fosse possível. E por fim, a todo corpo docente do departamento de matemática da UFSC, que foram os responsáveis por me guiar neste caminho do conhecimento.

"Se as pessoas não acreditam que a matemática é simples,

é apenas porque não percebem o quão complicada a vida é."

John von Neumann

RESUMO

Nesta monografia, exploraremos as aplicações completamente positivas e sua contribuição para a construção do C^*-envelope de uma álgebra de operadores. Inicialmente, abordaremos álgebras de matrizes sobre uma C^*-álgebra, elementos positivos, aplicações positivas e completamente positivas. Checamos as propriedades de álgebras comutativas para aplicações completamente positivas. Em seguida, provaremos o Teorema de Krein e abordaremos os operadores trace-class juntamente com a topologia BW para provarmos o Teorema de Arveson. Provamos também o Teorema de Wittstock. Também, estudamos os espaços I tais que para espaços normados $E \subset F$, com $\phi : E \to I$ completamente contrativa admitem uma extensão completamente contrativa $\widetilde{\phi} : F \to I$ com $\widetilde{\phi}\Big|_E = \phi$. Finalizamos provando o Teorema de Hamana que trata sobre a existência do C^*-envelope de uma álgebra de operadores.

Palavras-chave: Espaço de Operadores. Sistemas de Operadores. Aplicações completamente positivas. Aplicações completamente contrativas. Injetividade. Envelope Injetivo.

ABSTRACT

In this monograph, we will explore completely positive maps and their contribution to the construction of the C^*-envelope of an operator algebra. Initially, we will discuss matrix algebras over a C^*-algebra, positive elements, positive and completely positive maps. We will check the properties of commutative algebras for completely positive maps. Then, we will prove Krein's Theorem and discuss trace-class operators together with the BW topology to prove Arveson's Theorem. We will also prove Wittstock's Theorem. We also study the spaces I such that for normed spaces $E \subset F$, with completely contractive $\phi : E \to I$ admit a completely contractive extension $\widetilde{\phi} : F \to I$ with $\widetilde{\phi}\big|_E = \phi$. We conclude by proving Hamana's Theorem which deals with the existence of the C^*-envelope of an operator algebra.

Keywords: Operator Space. Operator Systems. Completely Positive Applications. Completely Contractive Applications. Injectivity. Injective Envelope.

Sumário

1 Introdução

Em uma série de artigos seminais publicados ao longo de quatro décadas [2, 3, 4, 5], Arveson introduziu a noção de C^*-envelope para álgebras de operadores não autoadjuntas, como uma generalização da fronteira de Shilov da análise funcional. Esse conceito tornou-se fundamental na interação entre as teorias de C^*-álgebras e álgebras de operadores não autoadjuntas. Em seu primeiro artigo, Arveson conjecturou a existência do C^*-envelope e calculou o C^*-envelope para diversas álgebras de operadores. Entretanto, o problema da existência do C^*-envelope permaneceu em aberto por quase uma década, sendo resolvido por Hamana [13] em 1979, para o caso de álgebras unitais.

Este resultado fortaleceu a conexão entre as teorias de álgebras de operadores autoadjuntas e não autoadjuntas. Para uma álgebra de operadores $\mathscr{A}$, Hamana demonstrou a existência e unicidade de uma C^*-álgebra minimal $C_e^*(\mathscr{A})$, contendo uma cópia completamente isométrica de $\mathscr{A}$, chamadade de C^*-envelope de $\mathscr{A}$ (veja Definição 4.28 para uma definição precisa). A estrutura e os invariantes do C^*-envelope passaram a oferecer uma nova perspectiva para o estudo de álgebras de operadores não autoadjuntas através da teoria de operadores autoadjunta. De fato, o cálculo do C^*-envelope em vários casos tem sido objeto de estudo de diversos autores ao longo dos anos [8, 9, 11, 12, 14, 16, 19]. C^*-envelopes têm também aplicações recentes na classificação de álgebras de operadores não autoadjuntas [10], em aproximação de dimensão finita [23], produtos cruzados [16], teoria de grupos [15] e geometria não comutativa [1].

Atualmente, é possível definir o C^*-envelope como uma C^*-álgebra universal, utilizando técnicas de teoria de dilatação, o que tem facilitado seu cálculo. Contudo, neste trabalho, vamos nos concentrar na técnica utilizada originalmente por Hamana. A ideia central desenvolvida por Hamana foi criar uma teoria de envelopes injetivos para sistemas de operadores e álgebras de operadores em uma categoria apropriada, garantindo a existência desses envelopes injetivos para álgebras de operadores unitais. Hamana demonstrou que o C^*-envelope de uma álgebra de operadores é dado pela C^*-álgebra gerada por uma cópia completamente isométrica de $\mathscr{A}$ em seu envelope injetivo.

A abordagem que adotaremos neste trabalho segue uma adaptação do trabalho de Hamana realizada por Paulsen em [22]. O roteiro que seguimos para demonstrar a existência do C^*-envelope de uma álgebra de operadores é desenvolvido ao longo do capítulo 4 deste trabalho e inicia-se com a demonstração da existência de envelopes injetivos para espaços de operadores. A técnica empregada para garantir a existência de um envelope injetivo para um sistema de operadores $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ envolve assegurar a existência de F-seminormas minimais (Proposição 4.18). Uma F-seminorma é uma seminorma induzida por um mapa completamente contrativo de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que fixa F e é chamado de F-mapa. Mostramos que a imagem de um F-mapa que induz uma F-seminorma minimal é um envelope injetivo de F (Teorema 4.19). Posteriormente, verificamos que o envelope injetivo de um sistema de operadores na categoria dos espaços de operadores é também um sistema de operadores (Proposição 4.24), o que permite garantir a existência de uma estrutura de C^*-álgebra pelo o Teorema de Choi-Effros (Teorema 4.11). Ademais, o envelope injetivo de uma álgebra de operadores unital $\mathscr{A}$ na categoria dos espaços de operadores coincide com o envelope injetivo do sistema de operadores gerado por $\mathscr{A}$ (Proposição 4.31) e, portanto, é uma C^*-álgebra que contém uma cópia completamente isométrica de $\mathscr{A}$. Finalmente, o Teorema de Hamana (Teorema 4.33) assegura que a C^*-álgebra gerada pela cópia de $\mathscr{A}$ em seu envelope injetivo é um C^*-envelope de $\mathscr{A}$.

No capítulo 2 desenvolvemos a teoria de espaços de matrizes sobre uma C^*-álgebra $\mathscr{A}$, de espaço de operadores e sistema de operadores. Discutimos o que são elementos positivos de uma C^*-álgebra e suas caracterizações. Também estudamos as aplicações positivas e provamos uma versão do Teorema de Hahn-Banach para essas aplicações, vide Teorema 2.18. Destacamos as aplicações completamente positivas e contrativas, tais aplicações são o ponto de partida para entendermos as estruturas dos espaços $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Finalizamos esse capítulo verificando que para C^*-álgebras comutativas para contradomínio, comutativas e unitais para domínio de aplicações positivas garante-se que sejam completamente positivas.

No capítulo 3 começamos dando as ferramentas necessárias para provar o primeiro teorema que trata sobre extensões de aplicações completamente positivas, o Teorema 3.3 (de Krein), nesse teorema o contradomínio em questão é o espaço de matrizes $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Em seguida abordamos sobre os operadores trace-class juntamente com a topologia BW, tais objetos serão fundamentais para provarmos o Teorema 3.16 (de Arveson), que trata a extensão de aplicações completamente positivas sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Finalizamos esse capítulo tratando sobre o Teorema 3.20 (de Wittstock), esse teorema trata sobre a extensão de aplicações completamente limitadas sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Por fim, no Capítulo 5 colocamos um Apêndice sobre a Teoria dos Operadores trace-class e Hilbert-Schmidt. A função desse apêndice é dar suporte para os resultados presentes no Capítulo 3, uma vez que quando se define a Topologia *BW* esses operadores tem uma função muito útil, que é a identificação do dual dos operadores trace-class definidos num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e o espaço de operadores $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Para uma leitura proveitosa dessa monografia, os pré-requisitos necessários para o leitor é o conhecimento de Análise Funcional e a Teoria de Operadores, além de uma noção ampla sobre Topologia Geral. Recomenda-se a leitura dos capítulos 1, 2, 3, 5, 6 e 7 do livro [6] sobre Análise Funcional, leitura dos capítulos 1 ao 4 do livro [21] sobre Teoria de Operadores e [20] sobre Topologia Geral.

2 Aplicações completamente positivas

2.1 Álgebra de matrizes

Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Considere a $*$-álgebra $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $\mathscr{A}$, com as operações de soma, produto e produto por escalar usuais de matrizes e involução induzida pela involução de $\mathscr{A}$. Mais precisamente, denotando por $\left[a_{ij}\right]$ a matriz de $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ cuja (i,j)-ésima entrada é ocupada pelo elemento $a_{ij} \in \mathscr{A}$, definimos:

$$\left[a_{ij}\right] \cdot \left[b_{ij}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\right], \quad \left[a_{ij}\right]^* = \left[a_{ji}^*\right], \quad \lambda \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] = \left[\lambda a_{ij} + b_{ij}\right].$$

em que $\lambda \in \mathbb{C}$.

Agora, queremos introduzir uma norma nessa $*$-álgebra de forma a torná-la uma C^*-álgebra. Para tanto, começamos pelo seguinte lema que primeiro trata o caso em que $\mathscr{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

Lema 2.1. *Sejam $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a C^*-álgebra dos operadores limitados em $\mathcal{H}$. Existe uma norma que torna $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Primeiro, note que $\mathcal{H}^n$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\left\langle (u_i), (v_i) \right\rangle = \left\langle (u_1, u_2, \ldots, u_n), (v_1, v_2, \ldots, v_n) \right\rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i \rangle,$$

em que $(u_i), (v_i) \in \mathcal{H}^n$. Observe que $\left\|(v_i)\right\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2$.

Sejam $\left[T_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e $v = (v_i) = (v_i)_i \in \mathcal{H}^n$ e note que a função

$$T : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n, \quad T(v) = \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}(v_j)\right)_i,$$

é linear. Mostremos que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ e $\|T\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\|T_{ij}\right\|$. Com efeito, para qualquer $v =$

$(v_i) \in \mathcal{H}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \big\|(v_1,0,\dots,0)+(0,v_2,0,\dots,0)+\cdots+(0,0,\dots,0,v_n)\big\| \\
&\leqslant \big\|(v_1,0,\dots,0)\big\|+\big\|(0,v_2,0\dots,0)\big\|+\cdots+\big\|(0,0,\dots,0,v_n)\big\| \\
&= \|v_1\|+\cdots+\|v_n\|.
\end{aligned}$$

Tomando $u=\big(u_j\big) \in \mathcal{H}^n$ obtemos

$$\begin{aligned}
\big\|T\,(u)\big\| &\leqslant \left\|\sum_{j=1}^{n} T_{1j}(u_j)\right\|+\cdots+\left\|\sum_{j=1}^{n} T_{nj}(u_j)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big\|T_{ij}(u_j)\big\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|T_{ij}\|\,\|u_j\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|T_{ij}\|\right)\|u\|.
\end{aligned}$$

Portanto, T é limitado e $\|T\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|T_{ij}\|$.

Mostremos agora que a aplicação

$$\varphi : \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^n), \quad [T_{ij}] \mapsto T.$$

é um $*$-isomorfismo entre $*$-álgebras. Sejam $\big[T_{ij}\big],\big[S_{ij}\big] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $u,v \in \mathcal{H}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\big[T_{ij}\big]+\lambda\,\big[S_{ij}\big]\Big)(u) = \varphi\Big(\big[T_{ij}+\lambda S_{ij}\big]\Big)(u) &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(T_{ik}+\lambda S_{ik}\right)(u_k)\right)_i \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} T_{ik}(u_k)\right)_i+\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} S_{ik}(u_k)\right)_i \\
&= \varphi\Big(\big[T_{ij}\big]\Big)(u)+\lambda\varphi\Big(\big[S_{ij}\big]\Big)(u) \\
&= \Big(\varphi\Big(\big[T_{ij}\big]\Big)+\lambda\varphi\Big(\big[S_{ij}\big]\Big)\Big)(u).
\end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{H}^n$ é arbitrário, segue que $\varphi\Big(\big[T_{ij}\big]+\lambda\,\big[S_{ij}\big]\Big)=\varphi\Big(\big[T_{ij}\big]\Big)+\lambda\varphi\Big(\big[S_{ij}\big]\Big)$, e portanto φ é linear.

Ademais,

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\left[T_{ij}\right]\left[S_{ij}\right]\right)(u) &= \varphi\left(\left[\sum_{l=1}^{n} T_{il}S_{lj}\right]_{ij}\right)(u)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} T_{1l}S_{lk}\right)(u_k),\ldots,\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} T_{nl}S_{lk}\right)(u_k)\right)\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n} T_{1l}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{lk}(u_k)\right),\ldots,\sum_{l=1}^{n} T_{nl}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{lk}(u_k)\right)\right)\\
&= \varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)\left(\varphi\left(\left[S_{ij}\right]\right)(u)\right) = \varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)\varphi\left(\left[S_{ij}\right]\right)(u).
\end{aligned}
$$

Como $u \in \mathcal{H}^n$ é arbitrário, segue que $\varphi\left(\left[T_{ij}\right]\left[S_{ij}\right]\right) = \varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)\varphi\left(\left[S_{ij}\right]\right)$, e assim φ preserva produto.

Vejamos que φ preserva estrela, isto é, $\varphi\left(\left[T_{ij}\right]^*\right) = \varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)^*$. Lembre que, se $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$, então $S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ é o único operador limitado em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle S(u), v\rangle = \langle u, S^*(v)\rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathcal{H}^n$. Portanto, para $u, v \in \mathcal{H}^n$, vale que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)(u), v\right\rangle &= \left\langle \left(\sum_{k=1}^{n} T_{1k}(u_k),\ldots,\sum_{k=1}^{n} T_{nk}(u_k)\right), (v_1,\ldots,v_n)\right\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n}\left\langle \sum_{k=1}^{n} T_{lk}(u_k), v_l\right\rangle = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\langle u_k, T_{lk}^*(v_l)\right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left\langle u_k, \sum_{l=1}^{n} T_{lk}^*(v_l)\right\rangle\\
&= \left\langle (u_1,\ldots,u_n), \left(\sum_{l=1}^{n} T_{l1}^*(v_l),\ldots,\sum_{l=1}^{n} T_{ln}^*(v_l)\right)\right\rangle = \left\langle u, \varphi\left(\left[T_{ji}^*\right]\right)(v)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo, $\varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)^* = \varphi\left(\left[T_{ji}^*\right]\right) = \varphi\left(\left[T_{ij}\right]^*\right)$, ou seja, φ preserva estrela.

Temos que φ é injetiva. De fato, se $\varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right) = 0$, então $\varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)(u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{H}^n$. Faça $u = \left(0,\ldots,0,u_j,0,\ldots,0\right)$ em que $u_j \in \mathcal{H}$ é arbitrário e ocupa a j-ésima coordenada do vetor u. Assim $0 = \varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)(u) = \left(T_{1j}(u_j),\ldots,T_{nj}(u_j)\right)$. Dessarte, $T_{ij} = 0$ para todo i, j, ou seja, $\left[T_{ij}\right] = 0$. Logo φ é injetiva.

Vejamos também que φ é sobrejetiva. Considere $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ e para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ defina o operador $V_i : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}$ pondo $V_i(u) = u_i$, para todo $u \in \mathcal{H}^n$. Note que $V_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n, \mathcal{H})$, pois $\left\|V_i(u)\right\| = \|u_i\| \leqslant \|u\|$, ou seja, $\|V_i\| \leqslant 1$. Agora, defina, para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, o operador $U_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^n$, pondo $U_j(u) = (0,\ldots,u,\ldots,0)$ em que u se encontra na j-ésima coordenada do vetor. Temos $U_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}^n)$, pois $\left\|U_j(u)\right\| = \|(0,\ldots,u,\ldots,0)\| = \|u\|$, ou seja, $\left\|U_j\right\| = 1$. Considere $\left[Q_{ij}\right] := \left[V_i T U_j\right] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Sejam $u = (u_i), u^{(k)} \in \mathcal{H}^n$ em que $u^{(k)} = (0,\ldots,0,u_k,0,\ldots,0)$ o vetor com u_k na k-ésima coordenada e seja $T\left(u^{(k)}\right) := \left(v_1^k,\ldots,v_n^k\right)$. Daí,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left[Q_{ij}\right]\right)(u) &= \left(\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(u_j)\right)_i = \left(\sum_{j=1}^{n} V_i T U_j(u_j)\right)_i = \sum_{j=1}^{n}\left(V_i\left(v_1^j,\ldots,v_n^j\right)\right)_i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(v_1^j,\ldots,v_n^j\right) = \sum_{j=1}^{n} T\left(u^{(j)}\right) = T\left(\sum_{j=1}^{n} u^{(j)}\right) = T(u).\end{aligned}$$

Como essa igualdade vale para todo $u \in \mathcal{H}^n$, segue que $T = \varphi\left(\left[Q_{ij}\right]\right)$. Portanto, φ é sobrejetiva. Assim, concluímos que φ é um $*$-isomorfismo.

Para finalizar, munimos $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ com a norma induzida de $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ por φ, isto é, $\|\left[T_{ij}\right]\| := \left\|\varphi\left(\left[T_{ij}\right]\right)\right\| = \|T\|$, garantindo que $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ seja uma C^*-álgebra. ■

Garantindo que $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é uma C^*-álgebra e conhecendo a construção GNS, o próximo resultado é garantido e é fundamental para todos os objetos de estudo desse trabalho.

Proposição 2.2. *Se $\mathscr{A}$ for uma C^*-álgebra, então $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Então, pela construção GNS, vide [21, 3.1.4. Theorem (Gelgand-Naimark), p. 94], existem um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e uma $*$-homomorfismo injetivo de C^*-álgebras $\pi : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ em que $\pi(\mathscr{A})$ é uma C^*-subálgebra em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim sendo, considere $*$-homomorfismo de $*$-álgebras $\pi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathscr{A}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $\left[a_{ij}\right] \mapsto \left[\pi\left(a_{ij}\right)\right]$. Observe que $\pi^{(n)}$ é injetivo, uma vez que π também é. Pelo Lema 2.1, basta verificar que a $*$-subálgebra $\pi^{(n)}(\mathbb{M}_n(\mathscr{A}))$ é fechada em $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Com efeito, seja $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ tal que $\pi^{(n)}(T_m) \longrightarrow T \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Escreva $T_m = \left[T_{ij,m}\right]$. Seja $\varepsilon > 0$, então existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m > m_0$, é válido que

$$\left\|\pi^{(n)}(T_m) - T\right\| = \sup_{\|u\| \leqslant 1}\left\|\left(\pi^{(n)}(T_m) - T\right)(u)\right\| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Mostremos que $\pi^{(n)}(T_{ij,m}) \longrightarrow T_{ij}$ para quaisquer i,j. Seja $u_j \in \mathcal{H}$ com $\left\|u_j\right\| \leqslant 1$, e

$u = \big(0, \ldots, u_j, \ldots, 0\big) \in \mathcal{H}^n$ em que u_j ocupa a j-ésima coordenada do vetor u. Logo,

$$\begin{aligned}\varepsilon > \left\| \left(\pi^{(n)}(T_m) - T\right)(u) \right\|^2 = \left\| \left[\pi(T_{ij,m}) - T_{ij}\right](u) \right\|^2 = \left\| \Big(\big(\pi(T_{ij,m}) - T_{ij}\big)(u_j) \Big)_i \right\|^2 \\ = \sum_{i=1}^{n} \left\| \big(\pi(T_{ij,m}) - T_{ij}\big)(u_j) \right\|^2.\end{aligned}$$

Portanto $\pi(T_{ij,m}) \longrightarrow T_{ij}$ para quaisquer i, j e como $\pi(\mathscr{A})$ é fechado em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ segue que $T_{ij} \in \pi(\mathscr{A})$ para quaisquer i, j, consequentemente $T \in \pi^{(n)}(\mathbb{M}_n(\mathscr{A}))$. Assim $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é uma C^*-álgebra. ■

Lembre que um elemento a de uma C^*-álgebra unital[1] é *positivo* se for autoadjunto e seu espectro $\sigma(a)$ estiver contido em $\mathbb{R}_+$, isto é, se $a - \lambda 1$ não é invertível sempre que $\lambda \in \sigma(a)$. Caso a C^*-álgebra não seja unital, considera-se a unitização dessa álgebra. O próximo resultado também será utilizado em vários momentos no trabalho:

Lema 2.3. *Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $a \in \mathscr{A}$, então a é positivo se, e só se, $a = b^*b$, para algum $b \in \mathscr{A}$.*

Demonstração. Vide [21, 2.2.5. Theorem, p. 46]. ■

Uma primeira aplicação do Lema 2.3 seria analisarmos a forma dos elementos positivos na C^*-álgebra $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$.

Proposição 2.4. *Um elemento de $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é positivo se, e somente se, pode ser escrito como uma soma finita de matrizes da forma $\left[a_i^* a_j\right]$.*

Demonstração. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$ e considere $\left[a_i^* a_j\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Veja primeiramente que

$$\left[a_i^* a_j\right] = \begin{bmatrix} a_1^*a_1 & a_1^*a_2 & \cdots & a_1^*a_n \\ a_2^*a_1 & a_2^*a_2 & \cdots & a_2^*a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^*a_1 & a_n^*a_2 & \cdots & a_n^*a_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^* & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^* & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{B^*} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{B} = B^*B \geqslant 0.$$

[1] Uma C^*-álgebra unital $\mathscr{A}$ é uma C^*-álgebra com unidade $1 \in \mathscr{A}$, isto é, $1a = a1 = a$, para qualquer $a \in \mathscr{A}$.

Como uma soma de elementos positivos em uma C^*-álgebra é um elemento positivo [21, 2.2.3. Lemma, p. 46], segue que toda soma de matrizes da forma $[a_i^* a_j]$ é positiva. Por outro lado, seja $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ matriz positiva, então existe uma matriz $C = \left[c_{ij}\right]$ tal que $A = C^*C$, ou seja, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^* c_{kj}$. Logo, $\left[a_{ij}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[c_{ki}^* c_{kj}\right]$ como desejamos. ■

Proposição 2.5. *Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Uma matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é positiva se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j \geqslant 0$, quaisquer que sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$.*

Demonstração. Suponha $A = \left[a_{ij}\right] \geqslant 0$. Pela Proposição 2.4 podemos escrever $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^* c_{kj}$, em que $c_{ij} \in \mathscr{A}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}^* c_{kj} \right) x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^* c_{ki}^* c_{kj} x_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (c_{ki} x_i)^* c_{kj} x_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (c_{ki} x_i)^* c_{kj} x_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \right)^* \left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \right) \right] \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j \geqslant 0$ para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$. Mostremos inicialmente que a matriz A é autoadjunta. Com efeito,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j \right)^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{ij}^* x_i. \tag{2.1.1}$$

Fixe primeiramente $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Considere uma unidade aproximada $(w_\lambda)_\lambda$ para $\mathscr{A}$.[2] Tomando $x_m = w_\lambda$ e $x_i = 0$ para $i \neq m$, obtemos $w_\lambda a_{mm} w_\lambda = w_\lambda a_{mm}^* w_\lambda$. Tomando o limite em λ temos

$$a_{mm} = \lim_{\lambda} w_\lambda a_{mm} w_\lambda = \lim_{\lambda} w_\lambda a_{mm}^* w_\lambda = a_{mm}^*.$$

Agora, fixe $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e considere $x_i = 0$ sempre que $i \neq k, l$. Assim sendo, como

[2] Uma unidade aproximada $(w_\lambda)_\lambda \subset \mathscr{A}$ é uma rede de elementos positivos de $\mathscr{A}$ tal que $\lim_{\lambda} w_\lambda a = \lim_{\lambda} a w_\lambda = a$, para todo $a \in \mathscr{A}$. Toda C^*-álgebra admite uma unidade aproximada, vide [21, 3.1.1. Theorem, p.78]

a_{kk}, a_{ll} são autoadjuntos, temos que $x_k^* a_{kl} x_l + x_l^* a_{lk} x_k = x_k^* a_{lk}^* x_l + x_l^* a_{kl}^* x_k$. Tomando $x_k = x_l = w_\lambda$ obtemos $w_\lambda a_{kl} w_\lambda + w_\lambda a_{lk} w_\lambda = w_\lambda a_{lk}^* w_\lambda + w_\lambda a_{kl}^* w_\lambda$. Tomando o limite em λ obtemos

$$a_{kl} + a_{lk} = \lim_\lambda w_\lambda a_{kl} w_\lambda + w_\lambda a_{lk} w_\lambda = \lim_\lambda w_\lambda a_{lk}^* w_\lambda + w_\lambda a_{kl}^* w_\lambda = a_{lk}^* + a_{kl}^*. \tag{2.1.2}$$

Consequentemente, $a_{kl} - a_{lk}^* = a_{kl}^* - a_{lk}$.

Por outro lado, para $x_k = \sqrt{-1} \cdot w_\lambda$ e $x_l = w_\lambda$ e fazendo o mesmo processo de (2.1.2), obtemos $a_{lk}^* - a_{kl} = a_{kl}^* - a_{lk}$. Segue que $a_{lk}^* = a_{kl}$. Como isso vale para $k, l = 1, 2 \ldots, n$, tem-se que a matriz A é autoadjunta.

Agora, mostremos que A é positivo. Como A é autoadjunto podemos escrever $A = T - S$ como uma diferença de elementos positivos em $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$, em que $TS = ST = 0$.[3] Denote $T = [t_{ij}]$ e $S = [s_{ij}]$, e observe que $a_{ij} = t_{ij} - s_{ij}$. Assim, segue que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* s_{ij} x_j \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* t_{ij} x_j$, quaisquer que sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$. Escrevendo $S^2 = [b_{ij}]$ temos $b_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{kj}$. Denotanto $S^3 = [r_{ij}]$, então $S^3 = S^2 S$ e assim

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il} s_{lj} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n s_{ik} s_{kl} \right) s_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{kl} s_{lj}.$$

Mostremos que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* r_{ij} x_j = 0$ para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$. Como S é positivo, segue que S^3 é positivo pelo cálculo funcional contínuo. Segue que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* r_{ij} x_j \geqslant 0$, pelo que vemos no início da demonstração dessa proposição. Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* r_{ij} x_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* \left(\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{kl} s_{lj} \right) x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n x_i^* s_{ik} s_{kl} s_{lj} x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n (s_{ki} x_i)^* s_{kl} s_{lj} x_j = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\left(\sum_{i=1}^n (s_{ki} x_i)^* \right) s_{kl} \left(\sum_{j=1}^n s_{lj} x_j \right) \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n y_k^* s_{kl} y_l,
\end{aligned}$$

[3]Se c é autoadjunto em uma C^*-álgebra, então c^2 também é. Tomando $|c| = (c^2)^{1/2}$, $c^+ = \frac{1}{2}(|c| + c)$, $c^- = \frac{1}{2}(|c| - c)$ e utilizando o cálculo funcional contínuo (vide [21, 2.1.13 Theorem, p. 43]) garantimos a sentença enunciada.

em que $y_l = \sum_{j=1}^{n} s_{lj}x_j$. Como $TS = 0$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^* s_{kl} y_l \leqslant \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^* t_{kl} y_l = \sum_{k=1}^{n} y_k^* \left(\sum_{l=1}^{n} t_{kl} y_l\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} y_k^* \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{l=1}^{n} t_{kl} s_{lj}}_{=0}\right) x_j\right) = 0.$$

Agora, mostremos que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0$, para quaisquer $x_i, y_i \in \mathscr{A}$, em que $i = 1, \ldots, n$. Fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, faça $z_i = x_i + \lambda y_i$. Do que vimos anteriormente, temos

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i^* r_{ij} z_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^* r_{ij} \left(x_j + \lambda y_j\right)$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j}_{=0} + |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} y_j}_{=0} + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j$$
$$= \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j.$$

Tomando $\lambda = 1$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0. \tag{2.1.3}$$

Tomando $\lambda = \sqrt{-1}$ obtemos

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0. \tag{2.1.4}$$

Juntando (2.1.3), e (2.1.4) obtemos $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0$.

Por fim, vejamos que $S^3 = 0$, assim concluindo o resultado, pois como S é positivo e $S^3 = 0$, segue do cálculo funcional contínuo que $S = 0$ e assim $A = T - S = T$ é positivo como desejamos. Com efeito, como $S^3 = \left[r_{ij}\right]$. Fixe $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Escolha $x_k = w_\lambda$, $y_l = w_\lambda$ e $x_i = y_i = 0$ quando $i \neq k, l$. Utilizando o limite em λ e usando o que obtemos acima, temos

$r_{kl} = 0$. Portanto $S^3 = 0$. ■

2.2 Aplicações positivas

Abordamos nessa seção sobre as principais ferramentas desse trabalho, sobre os sistemas de operadores e propriedades fundamentais de aplicações positivas com domínios de sistemas de operadores. Começamos com as seguintes definições:

Definição 2.6. Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Um *espaço de operadores* $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{A}$.

A princípio, a Definição 2.6 pode levar o leitor concluir que um espaço de operadores é simplesmente um espaço normado. Mas, um espaço de operadores não é apenas um espaço normado. Veja que, se $\mathscr{M}$ é um subespaço de uma C^*-álgebra $\mathscr{A}$, então $\mathbb{M}_n(\mathscr{M})$ pode ser visto como um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ que é uma C^*-álgebra pela Proposição 2.2. Dessa forma, $\mathscr{M}$ é um espaço normado que vem naturalmente equipado com normas em $\mathbb{M}_n(\mathscr{M})$ para todo $n \geqslant 1$. Além disso, para cada $m < n$, observe que as inclusões $i_{m,n} : \mathbb{M}_m(\mathscr{M}) \to \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ dadas por adicionar $n-m$ linhas e colunas de 0's são isometrias, de modo que $\mathbb{M}_m(\mathscr{M})$ pode ser visto como um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathscr{M})$.

Na verdade, existe uma caracterização abstrata para espaços de operadores devida a Z. J. Ruan [24]. Não abordaremos isso neste trabalho, mas o leitor interessado pode consultar o Capítulo 13 do livro do Paulsen [22] para uma abordagem completa sobre o assunto.

Definição 2.7. Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra unital. Um *sistema de operadores* $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$, é um subespaço vetorial de $\mathscr{A}$ que é fechado por involução, isto é, $\mathscr{S} = \mathscr{S}^* = \{s^* : s \in \mathscr{S}\}$ e contém a unidade de $\mathscr{A}$.

Veja que, um sistema de operadores $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ é, em particular, um espaço de operadores e, portanto, vem naturalmente equipado com normas em $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ para todo $n \geqslant 1$. Além disso, observe que $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ visto como subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ também contém a unidade de $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ e é fechado por adjunção, sendo portanto um sistema de operadores em $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Ainda, veremos na sequência que todo elemento em um sistema de operadores pode ser escrito como combinação linear de elementos positivos. Logo, um sistema de operadores $\mathscr{S}$ vem naturalmente equipado com uma coleção de cones C_n em $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ para todo $n \geqslant 1$, formado pelos elementos positivos de $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ em $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$, que geram $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ como espaço vetorial.

Assim como no caso dos espaço de operadores, existe uma caracterização abstrata para sistemas de operadores devidas e M. D. Choi e E.G. Effros [7]. Também não abordaremos isso neste trabalho, mas o leitor interessado pode consultar o Capítulo 13 do livro do Paulsen [22] para uma abordagem completa sobre o assunto.

Observação 2.8. Se $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ é um sistema de operadores de uma C^*-álgebra unital $\mathscr{A}$. Vejamos que todo elemento em $\mathscr{S}$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos positivos em $\mathscr{S}$. Primeiro, podemos escrever um elemento autoadjunto $a \in \mathscr{S}$ como uma diferença de dois elementos positivos em $\mathscr{S}$ da seguinte forma

$$a = \underbrace{\frac{1}{2}(\|a\| \cdot 1 + a)}_{a_1} - \underbrace{\frac{1}{2}(\|a\| \cdot 1 - a)}_{a_1} = a_1 - a_2.$$

Tais elementos são positivos, pois tomando a C^*-álgebra $C^*(a,1)$ gerada por a e pela unidade da álgebra pelo cálculo funcional contínuo, existe um $*$-isomorfismo isométrico $\pi : C^*(a,1) \to C(\sigma(a))$, em que $C(\sigma(a))$ é o espaço das funções contínuas definidas no espectro de a, tal que $\pi(1) = 1$ é a função constante e $\pi(a) = z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ é a função inclusão. Pensando em $\|a\| \cdot 1 + a$ e $\|a\| \cdot 1 - a$ como funções, fica fácil perceber que tais elementos são positivos, pois acrescentando à função inclusão sua norma, obtemos uma função não negativa. Note ainda que $\|a\| \cdot 1 + a$ e $\|a\| \cdot 1 - a$ pertencem a $\mathscr{S}$, uma vez que $1, a \in \mathscr{S}$ e $\mathscr{S}$ é espaço vetorial. Agora, como $a = \dfrac{a+a^*}{2} - \dfrac{a-a^*}{2}$, concluímos que dado $a \in \mathscr{S}$ é combinação linear de elementos positivos de $\mathscr{S}$.

Definição 2.9. Se $\mathscr{A}$ for uma C^*-álgebra e $\mathscr{S}$ um sistema de operadores, dizemos que uma aplicação linear $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ é *positiva* se $\varphi(p)$ é positivo, sempre que $p \in \mathscr{S}$ for positivo.

Exemplo 2.10. Um $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é positivo. De fato, se $a \in \mathscr{A}$ é positivo então existe $x \in \mathscr{A}$ tal que $a = x^*x$. Portanto, $\pi(a) = \pi\left(x^*x\right) = \pi\left(x^*\right)\pi(x) = \pi(x)^*\pi(x)$ é positivo, e assim π é uma aplicação linear positiva.

Demonstremos alguns resultados importantes que envolvem aplicações positivas. A começar, o próximo resultado deriva de um clássico da Análise Funcional, no qual diz que para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto e $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, tem-se $\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{R}$. Contudo, para operadores positivos temos algo mais forte:

Proposição 2.11. *Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo se, e somente se, $\langle T(u), u\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Suponha que $T \geqslant 0$. Escreva $T = S^*S$. Daí, segue que $\langle T(u), u\rangle = \left\langle S^*S(u), u\right\rangle = \langle S(u), S(u)\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$.

Reciprocamente, supondo que $\langle T(u), u\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in H$, temos

$$\begin{aligned}
&\langle T(u), u\rangle + \bar{\lambda}\langle T(u), v\rangle + \lambda\langle T(v), u\rangle + |\lambda|^2\langle T(v), v\rangle \\
&\quad = \langle T(u+\lambda v), u+\lambda v\rangle = \overline{\langle T(u+\lambda v), u+\lambda v\rangle} \\
&\quad = \langle T(u), u\rangle + \lambda\langle v, T(u)\rangle + \bar{\lambda}\langle u, T(v)\rangle + |\lambda|^2\langle T(v), v\rangle,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\bar{\lambda}\langle T(u), v\rangle + \lambda\langle T(v), u\rangle = \lambda\langle v, T(u)\rangle + \bar{\lambda}\langle u, T(v)\rangle,$$

para todos $u, v \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Tomando $\lambda = 1$ e $\lambda = -\sqrt{-1}$ obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}
&\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle = \langle v, T(u)\rangle + \langle u, T(v)\rangle \quad \text{e} \\
&\langle T(u), v\rangle - \langle T(v), u\rangle = -\langle u, T(u)\rangle + \langle v, T(u)\rangle.
\end{aligned}$$

Somando as duas equações temos $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$ para todos $u, v \in H$. Consequentemente, $T^* = T$.

Sejam T_+, $T_- \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positivos com $T_+T_- = 0 = T_+T_-$ tais que $T = T_+ - T_-$. Como $\langle T(u), u\rangle \geqslant 0$, segue que $\left\langle T_+(u), u\right\rangle \geqslant \left\langle T_-(u), u\right\rangle$, para todo $u \in \mathcal{H}$. O cálculo funcional contínuo nos garante que $T_-^3 \geqslant 0$. Tome $v \in \mathcal{H}$ arbitrário e escolha $u = T_-(v)$. Então $0 \leqslant \left\langle T_-^3(v), v\right\rangle \leqslant 0$. Logo $\left\langle T_-^3(v), v\right\rangle = 0$, para todo $v \in \mathcal{H}$. Consequentemente, $T_-^3 = 0$. Novamente, pelo cálculo funcional contínuo, temos $T_- = 0$. Daí, $T = T_+ \geqslant 0$. ∎

O resultado a seguir será importante para a demonstração de alguns resultados que envolvem aplicações positivas e completamente positivas, conteúdo da próxima seção.

Proposição 2.12. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra unital e $a, b, p \in \mathscr{A}$, em que p é autoadjunto. São válidas as seguintes afirmações:*

(a) $\|a\| \leqslant 1$ *se, e somente se, a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$ *é positiva em* $\mathbb{M}_2(\mathscr{A})$;

(b) $a^*a \leqslant b$ *se, e somente se, a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix}$ *é positiva em* $\mathbb{M}_2(\mathscr{A})$;

(c) *Se a matriz* $\begin{bmatrix} p & a \\ a^* & p \end{bmatrix}$ *é positiva em* $\mathbb{M}_2(\mathscr{A})$, *então* $a^*a \leqslant \|p\|p$;

(d) *Se a matriz* $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a^* & b \end{bmatrix} \geqslant 0$, *então* $a = 0$.

Demonstração. Considere $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e identifique $\mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ por $\mathcal{B}(\mathcal{H}^2)$, assim como em Álgebra Linear.

(a) Suponha que $\|a\| \leqslant 1$. Sejam u, v vetores quaisquer em $\mathcal{H}$. Note que

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle a(u_2), u_1 \rangle + \langle u_1, a(u_2) \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \quad (2.2.1)$$

$$\geqslant \langle u_1, u_1 \rangle - 2\|a\|\|u_1\|\|u_2\| + \langle u_2, u_2 \rangle,$$

pois $|\langle a(u_2), u_1 \rangle + \langle u_1, a(u_2) \rangle| \leqslant |\langle a(u_2), u_1 \rangle| + |\langle u_1, a(u_2) \rangle| \leqslant 2\|a\|\|u_2\|u_1\|$. Logo,

$$-2\|a\|\|u_1\|\|u_2\| \leqslant \langle a(u_2), u_1 \rangle + \langle u_1, a(u_2) \rangle \leqslant 2\|a\|\|u_1\|\|u_2\|.$$

Além disso,

$$\langle u_1, u_1 \rangle - 2\|a\|\|u_1\|\|u_2\| + \langle u_2, u_2 \rangle \geqslant \langle u_1, u_1 \rangle - 2\|u_1\|\|u_2\| + \langle u_2, u_2 \rangle = (\|u_1\| - \|u_2\|)^2 \geqslant 0.$$

Portanto, a matriz em questão é positiva. Reciprocamente, suponha que a matriz seja positiva. Afirmamos que se $\|a\| > 1$ então existem vetores unitários $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ tais que $\langle a(u_1), -u_2 \rangle < -1$. Como $\|a\| > 1$, existe um vetor unitário $u_1 \in \mathcal{H}$ tal que $\|a(u_1)\| > 1$. Considere o vetor unitário dado por $u_2 = \dfrac{\|a(u_1)\|}{\langle a(u_1), a(u_1)\rangle} a(u_1)$. Note que

$$\langle a(u_1), -u_2\rangle = \left\langle a(u_1), -\frac{\|a(u_1)\|}{\langle a(u_1), a(u_1)\rangle} a(u_1)\right\rangle = -\|a(u_1)\| < -1.$$

Analogamente temos $\langle -u_2, a(u_1)\rangle < -1$. Portanto, se $\|a\| > 1$, a matriz do enunciado não pode ser positiva, pois para esses vetores $u_1, -u_2$, teremos (2.2.1) estritamente negativo.

(b) Suponha que a matriz em questão seja positiva. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ e note que

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle u_1, u_1\rangle + \big\langle a(u_2), u_1\big\rangle + \big\langle u_1, a(u_2)\big\rangle + \big\langle b(u_2), u_2\big\rangle \geqslant 0.$$

Tomando $u_1 = -a(u_2)$ a expressão anterior fica igual a

$$0 \leqslant \big\langle b(u_2), u_2\big\rangle - \big\langle a(u_2), a(u_2)\big\rangle = \Big\langle \big(b - a^*a\big)(u_2), u_2\Big\rangle.$$

Da arbitrariedade de $u_2 \in \mathcal{H}$, segue $a^*a \leqslant b$. Reciprocamente, suponha que $a^*a \leqslant b$ temos que

$$\begin{aligned}
&\langle u_1, u_1\rangle + \big\langle a(u_2), u_1\big\rangle + \big\langle u_1, a(u_2)\big\rangle + \big\langle b(u_2), u_2\big\rangle \\
&\geqslant \langle u_1, u_1\rangle + \big\langle a(u_2), u_1\big\rangle + \big\langle u_1, a(u_2)\big\rangle + \big\langle a^*a(u_2), u_2\big\rangle \\
&= \big\langle u_1 + a(u_2), u_1\big\rangle + \big\langle u_1 + a(u_2), a(u_2)\big\rangle = \big\langle u_1 + a(u_2), u_1 + a(u_2)\big\rangle \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Assim, a matriz em questão é positiva.

(c) Suponha que $\|p\|p - a^*a$ não seja positivo. Então existe um vetor $u \in \mathcal{H}$ tal que $\Big\langle \big(\|p\|p - a^*a\big)(u), u\Big\rangle \in \{z \in \mathbb{C} : z \notin [0, \infty)\}$. Como $\|p\|p - a^*a$ é autoadjunto segue que $\Big\langle \big(\|p\|p - a^*a\big)(u), u\Big\rangle$ é um número real, nesse caso estritamente negativo. Assim $\|p\|\langle p(u), u\rangle < \big\langle a^*a(u), u\big\rangle = \|a(u)\|^2$. Note que

$$\left\langle \begin{bmatrix} p & a \\ a^* & p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \big\langle p(u_1), u_1\big\rangle + \big\langle a(u_2), u_1\big\rangle + \big\langle u_1, a(u_2)\big\rangle + \big\langle p(u_2), u_2\big\rangle. \quad (2.2.2)$$

Podemos ter duas possibilidades, uma para $p = 0$ e outra para $p \neq 0$. Para $p = 0$ escolha

$u_2 = u$ e $u_1 = -a(u)$. Então (2.2.2) fica igual a $\langle a(u), -a(u)\rangle + \langle -a(u), a(u)\rangle = -2\|a(u)\|^2$ e é estritamente negativo pois $\|p\|\langle p(u), u\rangle < \|a(u)\|^2$. Mas isso contradiz a positividade da matriz. Por outro lado, se $p \neq 0$ escolha $u_1 = -\dfrac{1}{\|p\|}a(u)$ e $u_2 = u$. Assim (2.2.2) fica igual a

$$\begin{aligned}\big\langle p(u_1), u_1\big\rangle - \frac{2}{\|p\|}\|a(u)\|^2 + \big\langle p(u_2), u_2\big\rangle &< \|p\|\,\|u_1\|^2 - \frac{2}{\|p\|}\|a(u)\|^2 + \frac{1}{\|p\|}\,\big\|a(u_2)\big\|^2 \\ &= \frac{1}{\|p\|}\|a(u)\|^2 - \frac{2}{\|p\|}\|a(u)\|^2 + \frac{1}{\|p\|}\|a(u)\|^2 = 0.\end{aligned}$$

O que contradiz a positividade da matriz.

(d) Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ e note que

$$0 < \left\langle \begin{bmatrix} 0 & a \\ a^* & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle a(u_2), u_1\rangle + \langle u_1, a(u_2)\rangle + \langle b(u_2), u_2\rangle.$$

Escolhendo $u_1 = 0$, obtemos que $b \geqslant 0$ pela arbitrariedade de $u_2 \in \mathcal{H}$. Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $u_1 = -\dfrac{\alpha}{2}a(u_2)$, então

$$0 \leqslant \langle a(u_2), u_1\rangle + \langle u_1, a(u_2)\rangle + \langle b(u_2), u_2\rangle = \underbrace{\langle b(u_2), u_2\rangle}_{\in\mathbb{R}} - \alpha\,\underbrace{\langle a^*a(u_2), u_2\rangle}_{\geqslant 0} \tag{2.2.3}$$

Caso $a \neq 0$, existe $u_2 \in \mathcal{H}$ tal que $\langle a^*a(u_2), u_2\rangle \neq 0$ e assim podemos tomar α suficientemente grande e obter um valor negativo para a expressão (2.2.3), o que é um absurdo. Portanto, devemos obter $a = 0$. ■

Proposição 2.13. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathscr{S}$ um sistema de operadores. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ é positiva, então $\varphi\left(a^*\right) = \varphi(a)^*$, para todo $a \in \mathscr{S}$.*

Demonstração. Seja $p \in \mathscr{S}$ positivo. Então $\varphi\left(p^*\right) = \varphi(p) = \varphi(p)^*$. Seja $h \in \mathscr{S}$ autoadjunto. Pela Observação 2.8, podemos escrever $h = p_1 - p_2$ como diferença de positivos em $\mathscr{S}$. Portanto

$$\begin{aligned}\varphi\left(h^*\right) &= \varphi\left(p_1^* - p_2^*\right) = \varphi\left(p_1^*\right) - \varphi\left(p_2^*\right) = \varphi\left(p_1\right)^* - \varphi\left(p_2\right)^* \\ &= \left(\varphi\left(p_1\right) - \varphi\left(p_2\right)\right)^* = \left(\varphi\left(p_1 - p_2\right)\right)^* = \varphi(h)^*.\end{aligned}$$

Seja $a \in \mathscr{S}$ qualquer e escreva $a = h_1 + ih_2$ como combinação linear de autoadjuntos em

$\mathscr{S}$, ou seja $a = \dfrac{a+a^*}{2} + i\dfrac{a-a^*}{2i}$. Portanto,

$$\varphi\left(a^*\right) = \varphi\left(h_1^* - ih_2^*\right) = \varphi\left(h_1\right)^* - i\varphi\left(h_2\right)^* = \left(\varphi\left(h_1\right) + i\varphi\left(h_2\right)\right)^* = \varphi(a)^*,$$

em que $\varphi\left(a^*\right) = \varphi(a)^*$ para todo $a \in \mathscr{S}$ como queríamos. ■

Proposição 2.14. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathscr{S}$ um sistema de operadores. Uma aplicação positiva $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ é limitada e $\|\varphi\| \leqslant 2\|\varphi(1)\|$.*

Demonstração. Por conveniência, escrevemos $\|p\| \cdot 1 = \|p\|$ quando necessário. Se $p \in \mathscr{S}$ é positivo então segue, do cálculo funcional contínuo, que $0 \leqslant p \leqslant \|p\| \cdot 1$. Portanto, $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant \|p\|\varphi(1)$ e, vide [21, 2.2.5. Theorem, p. 46], $\|\varphi(p)\| \leqslant \|p\|\|\varphi(1)\|$. Seja $h \in \mathscr{S}$ autoadjunto e sejam $p_1, p_2 \in \mathscr{S}$ positivos tais que $h = p_1 - p_2$, tais como na Observação 2.8. Mais precisamente,

$$h = \underbrace{\frac{1}{2}(\|h\| \cdot 1 + h)}_{p_1} - \underbrace{\frac{1}{2}(\|h\| \cdot 1 - h)}_{p_2}.$$

Note, para $i = 1, 2$, que

$$\|p_i\| = \left\|\frac{1}{2}(\|h\| \cdot 1 \pm h)\right\| \leqslant \frac{1}{2}(\|h\|\|1\| + \|h\|) = \|h\|,$$

e que

$$-\|p_2\| \leqslant -p_2 \leqslant h \leqslant p_1 \leqslant \|p_1\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\|h\|\|\varphi(1)\| &\leqslant -\|p_2\|\|\varphi(1)\| \leqslant -\|p_2\|\varphi(1) = \varphi(-\|p_2\|) \leqslant \varphi(-p_2) \\ &\leqslant \varphi(h) \leqslant \varphi(p_1) \leqslant \varphi(\|p_1\|) = \|p_1\|\varphi(1) \\ &\leqslant \|h\|\varphi(1) \leqslant \|h\|\|\varphi(1)\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\|h\|\|\varphi(1)\| \leqslant \varphi(h) \leqslant \|h\|\|\varphi(1)\|.$$

Como h é autoadjunto, segue que $\varphi(h)$ é autoadjunto pela Proposição 2.13 e que $\|\varphi(h)\| \leqslant \|h\|\|\varphi(1)\|$ pelo cálculo funcional contínuo.

Sejam $a, h_1, h_2 \in \mathscr{S}$, em que $h_1 = \dfrac{a+a^*}{2}$ e $h_2 = \dfrac{a-a^*}{2i}$. Temos $a = h_1 + ih_2$ e que h_1, h_2 são autoadjuntos. Daí,

$$\|\varphi(a)\| \leqslant \left\|\varphi(h_1)\right\| + \left\|\varphi(h_2)\right\| \leqslant (\|h_1\| + \|h_2\|)\,\|\varphi(1)\| \leqslant 2\|a\|\|\varphi(1)\|.$$

Segue $\|\varphi(a)\| \leqslant 2\|a\|\|\varphi(1)\|$ para todo $a \in \mathscr{S}$, ou seja, φ é limitada e $\|\varphi\| \leqslant 2\|\varphi(1)\|$.

■

Observação 2.15. Quando a C^*-álgebra não for unital, temos que para um funcional linear positivo continua sendo contínuo, vide [21, 3.3.1. Theorem, p. 88].

O seguinte exemplo mostra que a estimativa da Proposição 2.14 é a melhor possível para o caso geral.

Exemplo 2.16. Seja $\mathbb{T}$ o círculo unitário no plano complexo, $C(\mathbb{T})$ as funções contínuas em $\mathbb{T}$, $z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ a função inclusão e $\mathscr{S} \subset C(\mathbb{T})$ dado por $\mathscr{S} = \operatorname{span}\{1, z, \bar{z}\}$. Definimos $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ por

$$\varphi(a + bz + c\bar{z}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{bmatrix}.$$

Note que um elemento $f \in \mathscr{S}$ com $f(z) = a + bz + c\bar{z}$ é positivo se, e somente se, $c = \bar{b}$ e $a \geqslant 2|b|$. Temos que um elemento autoadjunto de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ é positivo se, e somente se, suas entradas diagonais e seu determinante forem números reais não negativos. Combinando esses dois fatos, fica claro que φ é um mapa positivo. No entanto, sabendo que $\|z\| = 1$, temos

$$2\|\varphi(1)\| = 2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \|\varphi(z)\| \leqslant \|\varphi\|,$$

de modo que $\|\varphi\| = 2\|\varphi(1)\|$.

Proposição 2.17. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores. Um funcional linear $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ é positivo se, e somente se, $\|\varphi\| = \varphi(1)$.*

Demonstração. Suponha que φ seja positivo. Vemos na demonstração da Proposição 2.14 que, para todo elemento autoadjunto $h \in \mathscr{S}$, é válido que $\|\varphi(h)\| \leqslant \|h\|\varphi(1)$. Seja $x \in \mathscr{S}$

qualquer. Então, existe $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, satisfazendo $|\varphi(x)| = \varphi(e^{i\theta}x)$. Denotando $y = e^{i\theta}x$ temos $\|y\| = \|x\|$. Escreva $y = \mathrm{Re}(y) + i\,\mathrm{Im}(y) = \dfrac{y+y^*}{2} + i\dfrac{y-y^*}{2i}$ e observe que $\mathrm{Re}(y), \mathrm{Im}(y) \in \mathscr{S}$ e são autoadjuntos. Então $|\varphi(x)| = \varphi(y) = \varphi(\mathrm{Re}(y)) + i\varphi(\mathrm{Im}(y)) \in \mathbb{R}$. Usando a Proposição 2.13 temos que $\varphi(\mathrm{Re}(y)), \varphi(\mathrm{Im}(y)) \in \mathbb{R}$. Portanto, $\varphi(\mathrm{Im}(y)) = 0$. Daí,

$$|\varphi(x)| = \varphi(\mathrm{Re}(y)) \leqslant \varphi(1)\|\mathrm{Re}(y)\| \leqslant \varphi(1)\|y\| = \varphi(1)\|x\|.$$

Portanto, $|\varphi(x)| \leqslant \varphi(1)\|x\|$ para todo $x \in \mathscr{S}$. Daí, $\|\varphi\| \leqslant \varphi(1)$. Como $\varphi(1) \leqslant \|\varphi\|$, segue que $\|\varphi\| = \varphi(1)$. Reciprocamente, suponha que $\|\varphi\| = \varphi(1)$. Se $\varphi(1) = 0$ então $\|\varphi\| = 0$ e portanto $\varphi = 0$, ou seja, φ é positivo. Caso $\varphi(1) \neq 0$ então defina $\psi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ por $\psi = \dfrac{1}{\varphi(1)}\varphi$. Então ψ é linear, $\psi(1) = \dfrac{1}{\varphi(1)}\varphi(1) = 1$ e $\|\psi\| = 1$. Mostremos que ψ é positivo. Com efeito, seja $x \in \mathscr{S}$ positivo, assim existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(x) \subset [0,a]$. Note que $\psi(x) \in [0,a]$. De fato, se $p(z) = z - \dfrac{a}{2}$ é polinômio então segue, de [21, 2.1.14. Theorem (Spectral Mapping), p. 43], que

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)) \subset p([0,a]) \subset \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right],$$

e assim temos que $\sigma\left(x - \dfrac{a}{2}\cdot 1\right) \subset \left[-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right]$. Como $x - \dfrac{a}{2}\cdot 1$ é autoadjunto devemos obter $\left\|x - \dfrac{a}{2}\cdot 1\right\| \leqslant \dfrac{a}{2}$, vide [21, 2.1.1. Theorem, p. 37]. Portanto,

$$\left|\psi(x) - \frac{a}{2}\right| = \left|\psi(x) - \frac{a}{2}\psi(1)\right| = \left|\psi\left(x - \frac{a}{2}\cdot 1\right)\right| \leqslant \|\psi\| \left\|x - \frac{a}{2}\cdot 1\right\| \leqslant \frac{a}{2}.$$

Portanto $\psi(x) \in [0,a]$. Como ψ é positivo segue que φ é positivo. ■

Teorema 2.18. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo, então existe uma extensão linear positiva $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ de φ com $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Como φ é contínuo segue do Teorema de Hahn-Banach que podemos estender φ para um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ com $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Como $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = \varphi(1)$ e como $\varphi(1) = \widetilde{\varphi}(1)$, segue do resultado anterior que $\widetilde{\varphi}$ é positivo. ■

As próximas sentenças serão de utilidade para tratar inicialmente de envelopes injetivos.

Lema 2.19. *Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Se $a \in \mathscr{A}$ for um elemento normal, isto é, $a^*a = aa^*$, então o raio espectral de a, denotado por $r(a)$, é igual a $\|a\|$.*

Demonstração. Represente $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, em que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Dado $u \in \mathcal{H}$ temos que

$$\left\|a^2u\right\|^2 = \left\langle a^*a^*aa(u), u\right\rangle = \left\langle a^*aa^*a(u), u\right\rangle = \left\langle a^*a(u), a^*a(u)\right\rangle = \left\|aa^*(u)\right\|^2.$$

Segue que $\left\|a^2\right\| = \|aa^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2$. Para potências de dois e por indução concluímos que $\left\|a^{2^k}\right\| = \|a\|^{2^k}$ para $k \in \mathbb{N}$, pois a e a^* comutam. Daí,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} {}^{4} = \lim_{k\to\infty} \left\|a^{2^k}\right\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \|a\|^{\frac{2^k}{2^k}} = \|a\|.$$

■

Definição 2.20. Definimos a *envoltória convexa* de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ como o fecho da interseção de todos os conjuntos convexos de $\mathbb{C}$ que contém A e a denotamos por $\mathrm{co}(A)$.

Lema 2.21. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra unital, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores e $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ um funcional linear com $\varphi(1) = 1$, $\|\varphi\| = 1$. Se $a \in \mathscr{S}$ for um elemento normal de $\mathscr{A}$, então $\varphi(a) \in \mathrm{co}(\sigma(a))$.*

Demonstração. Suponha que $\varphi(a) \notin \mathrm{co}(\sigma(a))$. Assim, existem $\lambda > 0$ e $r > 0$ tais que $|\varphi(a) - \lambda| > r$, enquanto o espectro de a, $\sigma(a)$, satisfaz

$$\sigma(a) \subset \{z : |z - \lambda| \leqslant r\}.$$

Mas $\sigma(a - \lambda \cdot 1) \subset \{z : |z| \leqslant r\}$ e como a norma e o raio espectral de elementos normais coincidem, temos $\|a - \lambda \cdot 1\| \leqslant r$, enquanto $|\varphi(a) - \lambda| = |\varphi(a - \lambda \cdot 1)| > r$, o que é um absurdo, pois $\|\varphi\| = 1$. Segue o resultado. ■

Definição 2.22. Dizemos que uma aplicação linear $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ entre espaços de operadores é *contrativa* ou *contração* quando $\|\varphi\| \leqslant 1$.

[4] Vide [21, 1.2.7. Theorem (Beurling), p. 10].

Proposição 2.23. *Sejam $\mathscr{S}$ um sistema operador, $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra unital e $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ uma contração unital. Nessas condições φ é positivo.*

Demonstração. Através de [21, 1.3.6. Theorem (Gelfand Representation), p. 15], assuma sem perda de generalidade que $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja $u \in \mathcal{H}$ com $\|u\| = 1$. Definindo $f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ por $f(a) = \langle \varphi(a)(u), u \rangle$, temos que $f(1) = 1$, $\|f\| \leqslant \|\varphi\|$. Pelo Lema 2.21, se a é positivo, então $f(a)$ é positivo. Consequentemente, como u é qualquer, φ é positivo. ■

2.3 Aplicações completamente positivas

Neste capítulo estudaremos os mapas completamente positivos em sistemas de operadores e desenvolveremos a teoria básica por trás destes mapas. De certa forma, estes mapas se comportam melhor que os mapas positivos e, muitos mapas positivos são completamente positivos. Comecemos com a definição a seguir.

Definição 2.24. Sejam $\mathscr{S}$ um sistema de operadores e $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma aplicação linear $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ é *n-positiva* se a aplicação induzida

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) &\to \mathbb{M}_n(\mathscr{A}) \\ [a_{ij}] &\mapsto \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right], \end{aligned}$$

é positiva. Além disso, dizemos que φ é completamente positiva se φ é n-positiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.25. Não é difícil notar que se φ é uma aplicação completamente positiva, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $\varphi^{(n)}$ também é uma aplicação completamente positiva.

Observação 2.26. Dado $[T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, mostremos que

$$\| [T_{ij}] \| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|T_{ij}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Basta notar que para todo $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}^n$, é válido que

$$\begin{aligned}
\left\| \left[T_{ij}\right](u) \right\|^2 &= \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} T_{1j}(u_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} T_{nj}(u_j) \right) \right\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} T_{ki}(u_i), \sum_{j=1}^{n} T_{kj}(u_j) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle T_{ki}(u_i), T_{kj}(u_j) \right\rangle \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \|T_{ki}\| \, \|u_i\| \, \|T_{kj}\| \, \|u_j\| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|T_{ki}\| \, \|u_i\| \right)^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \|T_{ki}\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_j\|^2 \right)^{1/2} \right)^2 = \|u\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\|T_{ij}\right\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left\| \left[T_{ij}\right] \right\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\|T_{ij}\right\|^2 \right)^{1/2}$.

Observação 2.27. Sejam $\mathscr{S}$ um sistema de operadores e $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ for uma aplicação linear contínua, então a aplicação $\varphi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ também é contínua e $\left\| \varphi^{(n)} \right\| \leqslant \sqrt{n} \|\varphi\|$. Com o auxílio da Observação 2.26, é válido que

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi^{(n)}(A) \right\| = \left\| \left[\varphi\left(a_{ij}\right) \right] \right\| &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi\left(a_{ij}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\leqslant \|\varphi\| \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\|a_{ij}\right\|^2 \right)^{1/2} \leqslant n \|\varphi\| \|A\|.
\end{aligned}$$

Logo, $\left\| \varphi^{(n)} \right\| \leqslant n \|\varphi\|$.

Exemplo 2.28. Um $*$-homomorfismo π entre C^*-álgebras é completamente positivo, pois $\pi^{(n)}$ é também um $*$-homomorfismo, logo positivo pelo Exemplo 2.10.

Exemplo 2.29. Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Todo funcional linear positivo $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ é completamente positivo. De fato, seja $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ positivo, então existe $B \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ tal que $A = B^*B$. Assim, para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ temos $0 \leqslant (Bx)^*(Bx) \in \mathscr{A}$, em que

$Bx = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k\right]_{i=1}^{n}$ e

$$\left\langle f^{(n)}(A)(x),x\right\rangle = \left\langle \left[f\left(a_{ij}\right)\right](x),x\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x_i}f(a_{ij})x_j$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x_i}a_{ij}x_j\right) = f(x^*Ax) = f(x^*B^*Bx) = f((Bx)^*(Bx)) \geqslant 0.$$

Pela Proposição 2.11, segue que f é completamente positiva.

Há também os casos em que podemos encontrar uma aplicação positiva em que não é completamente positiva, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 2.30. Seja $\varphi : \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ a aplicação transposição, isto é, $\varphi(A) = A^T$. Tal função é positiva pois $\varphi\left(B^*B\right) = \left(B^*B\right)^T = B^T\left(B^T\right)^* \geqslant 0$. Considere as matrizes canônicas $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Note que a matriz $E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22}\end{bmatrix}$ é autoadjunta e possui espectro igual a $\{0,2\}$ e portanto é positiva em $\mathbb{M}_4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_2\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{C})\right)$. Contudo

$$\varphi^{(2)}(E) = \begin{bmatrix} \varphi\left(E_{11}\right) & \varphi\left(E_{12}\right) \\ \varphi\left(E_{21}\right) & \varphi\left(E_{22}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não é positiva, pois tem autovalores iguais a -1 e 1.

Exemplo 2.31. Sejam $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ C^*-álgebras. Se se $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ e $\psi : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ são aplicações completamente positivas, então $\psi \circ \varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ também é. Com efeito, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos

$$(\psi\circ\varphi)^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \left[(\psi\circ\varphi)\left(a_{ij}\right)\right] = \left[\psi\left(\varphi\left(a_{ij}\right)\right)\right] = \psi^{(n)}\left(\left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right]\right)$$
$$= \psi^{(n)}\left(\varphi^{(n)}\left[a_{ij}\right]\right).$$

Exemplo 2.32. Sejam $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ C^*-álgebras e $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ completamente positiva. Se $b \in \mathscr{B}$, então $\psi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ definido por $\psi(a) = b^*\varphi(a)b$ também é completamente positiva, pois se $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ for positiva tem-se que $[\varphi(a_{ij})]$ é positiva. Logo, $[\varphi(a_{ij})] = B^*B$, para algum $B \in \mathbb{M}_n(\mathscr{B})$. Daí,

$$\psi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \left[\psi\left(a_{ij}\right)\right] = \left[b^*\varphi\left(a_{ij}\right)b\right] =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b^* \end{bmatrix}}_{I_b^*} \underbrace{\left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right]}_{B^*B} \underbrace{\begin{bmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix}}_{I_b} = (BI_b)^*(BI_b) \geqslant 0.$$

Proposição 2.33. *Sejam $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ C^*-álgebras, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores e $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{B}$ uma aplicação linear. Para qualquer $n \geqslant 1$, temos:*

(a) *Se φ é limitada, então $\varphi^{(n)}$ é limitada e $\|\varphi^{(k)}\| \leqslant \|\varphi^{(n)}\|$ para todo $k \leqslant n$.*

(b) *Se $\varphi^{(n)}$ é positiva, então $\varphi^{(k)}$ é positiva para todo $k \leqslant n$.*

Demonstração. (a) Para cada matriz $A \in \mathbb{M}_k(\mathscr{A})$, denote $A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Temos que a aplicação $A \mapsto A'$ é um $*$-homomorfismo injetivo. Portanto, $\|A\| = \left\|A'\right\|$. Agora, dado $A \in M_k(\mathscr{S})$, temos que que $\varphi^{(n)}\left(A'\right) = \begin{bmatrix} \varphi^k(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dessarte, $\left\|\varphi^{(n)}\left(A'\right)\right\| = \left\|\varphi^{(k)}(A)\right\|$. Logo, pela Observação 2.27 $\varphi^{(n)}$ é limitada e, portanto,

$$\left\|\varphi^{(k)}(A)\right\| = \left\|\varphi^{(n)}\left(A'\right)\right\| \leqslant \left\|\varphi^{(n)}\right\| \|A'\| = \left\|\varphi^{(n)}\right\| \|A\|.$$

Como $A \in \mathbb{M}_k(\mathscr{S})$ é arbitrário, temos que $\left\|\varphi^{(k)}\right\| \leqslant \left\|\varphi^{(n)}\right\|$.

(b) Suponha que $\varphi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{M}_n(\mathscr{B})$ seja positivo. Assim, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de modo que podemos visualizar $\mathbb{M}_n(\mathscr{B})$ por $\mathcal{B}\left(\mathcal{H}^n\right)$. Seja $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathcal{H}^k$.

Seja $A \in \mathbb{M}_k(\mathscr{S})$ positivo. Pelo mesmo $*-$ homomorfismo visto no item (a), segue A' é positivo. Como $\varphi^{(n)}\left(A'\right)$ é positivo, temos

$$\left\langle \varphi^{(k)}(A)(u), u \right\rangle = \left\langle \varphi^{(n)}\left(A'\right)(u_1, \ldots, u_k, 0 \ldots, 0), (u_1, \ldots, u_k, 0 \ldots, 0) \right\rangle \geqslant 0.$$

Como isso vale para todo $u \in \mathcal{H}^k$, segue que $\varphi^{(k)}$ é positivo. ■

Proposição 2.34. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ C^*-álgebras unitais e $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{B}$ for uma aplicação 2-positiva e unital, então φ é contrativa e $\varphi(a)^*\varphi(a) \leqslant \varphi\left(a^*a\right)$ sempre que $a, a^*a \in \mathscr{S}$.*

Demonstração. Sejam $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{B}$ 2-positiva e $a \in \mathscr{S}$ com $\|a\| \leqslant 1$. Então $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$ é positivo em $\mathbb{M}_2(\mathscr{S})$ pela Proposição 2.12(a). Como $\varphi\left(a^*\right) = \varphi(a)^*$ pela Proposição 2.13 e φ é 2-positiva, temos que $\varphi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & 1 \end{bmatrix}$ é positivo. Pela Proposição 2.12(a) segue que $\|\varphi(a)\| \leqslant 1$, ou seja, $\|\varphi\| \leqslant 1$, e portanto φ é contrativa.

Além disso, se temos $a, a^*a \in \mathscr{S}$, observe que $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & a^*a \end{bmatrix}$ é positiva em $\mathbb{M}_2(\mathscr{S})$ e assim $= \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & a^*a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & \varphi\left(a^*a\right) \end{bmatrix}$ é positiva, e pela Proposição 2.12 (b) temos que $\varphi(a)^*\varphi(a) \leqslant \varphi\left(a^*a\right)$. ■

Proposição 2.35. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ C^*-álgebras. Uma aplicação linear $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é n-positiva se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(x_i^* x_j\right) y_j \geqslant 0,$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathscr{B}$.

Demonstração. Suponha que φ seja n-positiva. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$ e $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{B}$. A matriz $\left[x_i^* x_j\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é positiva pela Proposição 2.4, daí $\varphi^{(n)}\left(\left[x_i^* x_j\right]\right) = \left[\varphi\left(x_i^* x_j\right)\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{B})$ é positivo. Segue da Proposição 2.5 que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(x_i^* x_j\right) y_j$$

é positivo em $\mathscr{B}$.

Suponha agora que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(x_i^* x_j\right) y_j$ seja positivo em $\mathscr{B}$, para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathscr{B}$. Seja $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ positivo. Pela Proposição 2.4 podemos escrever $\left[a_{ij}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[c_{ki}^* c_{kj}\right]$ em que $c_{ij} \in \mathscr{A}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(a_{ij}\right) y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}^* c_{kj}\right) y_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(c_{ki}^* c_{kj}\right) y_j\right) \geqslant 0.$$

Como isso vale para quaisquer $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathscr{B}$, tem-se pela Proposição 2.5 que $\left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{B})$ é positivo, ou seja, $\varphi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right)$ é positivo. Portanto φ é n-positivo. ■

Exemplo 2.36. Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ espaços de Hilbert, $\pi : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um $*$-homomorfismo e $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ uma aplicação linear limitada. Então $\varphi : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ definido por $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$ é completamente positivo. De fato, seja $A = \left[a_{ij}\right]$ positiva em $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Então existe $B = \left[b_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ tal que $A = B^*B$, ou seja,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}, \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Note que

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right] = \left[V^*\pi\left(a_{ij}\right)V\right] &= \left[V^*\left(\sum_{k=1}^{n}\pi\left(b_{ki}^*\right)\pi\left(b_{kj}\right)\right)V\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[V^*\pi\left(b_{ki}^*\right)\pi\left(b_{kj}\right)V\right].\end{aligned}$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, a matriz

$$P_k = \left[\pi\left(b_{ki}^*\right)\pi\left(b_{kj}\right)\right]_{ij} = \left[\pi\left(b_{ki}\right)^*\pi\left(b_{kj}\right)\right]_{ij},$$

em $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é positivo e pode ser visto por um operador de $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Considere a soma direta de n cópias de V, $v := V \oplus \cdots \oplus V : \mathcal{K}^n \to \mathcal{H}^n$ definida por $v(k_1, \ldots, k_n) = \big(V(k_1), \ldots, V(k_n)\big)$ para todo $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{K}^n$. É claro que $v^* = V^* \oplus \cdots \oplus V^*$ e que $\Big[V^* \pi\left(b_{ki}^*\right) \pi\left(b_{kj}\right) V\Big] = v^* P_k v$. Segue que $v^* P_k v$ é positivo em $\mathcal{B}(\mathcal{K}^n)$ pois

$$\left\langle v^* P_k v(u), u\right\rangle = \left\langle P_k(v(u)), v(u)\right\rangle \geqslant 0, \forall u \in \mathcal{K}^n.$$

Portanto $\varphi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right)$ é uma soma finita de matrizes positivas, logo positiva. Dessa forma φ é completamente positiva.

Definição 2.37. Sejam $\mathscr{M}$ um espaço de operadores e $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Uma aplicação $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{A}$ é dita *completamente limitada* se $\|\varphi\|_{\text{cb}} := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\|\varphi^{(n)}\right\| < \infty$.

Observação 2.38. Seja $\mathscr{S}$ um sistema de operadores e $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma C^*-álgebra, então dada uma aplicação completamente positiva $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ é válido que $\|\varphi(1)\| = \|\varphi^{(n)}(I)\|$. Com efeito, para $u \in \mathcal{H}^n$ temos

$$\|\phi^{(n)}(I)(u)\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \phi(1)(u_1) \\ \vdots \\ \phi(1)(u_n) \end{bmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\phi(1)(u_j)\|^2 \leqslant \|\phi(1)\|^2 \sum_j \|(u_j)\|^2 = \|\phi(1)\|^2 \|u\|^2.$$

Logo, $\|\varphi^{(n)}(I)\| \leqslant \|\varphi(1)\|$. Por outro lado, dado $u \in \mathcal{H}$ com $\|u\| = 1$ e $\|\varphi(1)(u)\| > \|\varphi\| - \varepsilon$ temos $\|\varphi^{(n)}(I)(u, 0, \ldots, 0)\| = \|\varphi(1)\xi\| > \|\varphi\| - \varepsilon$. Portanto, $\|\varphi(1)\| = \|\varphi^{(n)}(I)\|$.

Proposição 2.39. *Sejam $\mathscr{S}$ um sistema de operadores e $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Uma aplicação completamente positiva $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$ é completamente limitada e $\|\varphi(1)\| = \|\varphi\| = \|\varphi\|_{\text{cb}}$.*

Demonstração. Veja que

$$\|\varphi(1)\| \leqslant \|\varphi\| \leqslant \sup_n \left\|\varphi^{(n)}\right\| = \|\varphi\|_{\text{cb}}.$$

Por outro lado, mostremos que $\|\varphi\|_{\text{cb}} \leqslant \|\varphi(1)\|$. Com efeito, fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ tal que $\|A\| \leqslant 1$ e considere a matriz identidade $I \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$. Pela Proposição 2.12(a) a matriz $P = \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}$ é positiva em $\mathbb{M}_2\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{S})\right) \cong \mathbb{M}_{2n}(\mathscr{S})$. Seja $\varphi^{(2n)} : \mathbb{M}_{2n}(\mathscr{S}) \to \mathbb{M}_{2n}(\mathscr{B})$. Então,

$$\varphi^{(2n)}(P) = \begin{bmatrix} \varphi(1) & \cdots & \varphi(0) & \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(0) & \cdots & \varphi(1) & \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \\ \varphi(a_{11}^*) & \cdots & \varphi(a_{n1}^*) & \varphi(1) & \cdots & \varphi(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{1n}^*) & \cdots & \varphi(a_{nn}^*) & \varphi(0) & \cdots & \varphi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^{(n)}(I) & \varphi^{(n)}(A) \\ \varphi^{(n)}(A)^* & \varphi^{(n)}(I) \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Pela Proposição 2.12(c) temos $\varphi^{(n)}(A)^*\varphi^{(n)}(A) \leqslant \|\varphi^{(n)}(I)\|\varphi^{(n)}(I)$. Consequentemente, $\left\|\varphi^{(n)}(A)\right\|^2 = \left\|\varphi^{(n)}(A)^*\varphi^{(n)}(A)\right\| \leqslant \left\|\varphi^{(n)}(I)\right\|^2 = \|\varphi(1)\|^2$. Assim $\left\|\varphi^{(n)}\right\| \leqslant \|\varphi(1)\|$ para todo n natural, ou seja, $\|\varphi\|_{\text{cb}} \leqslant \|\varphi(1)\|$ como queríamos. ■

Nas condições do Exemplo 2.16 vemos que φ definida neste exemplo não é completamente positiva, uma vez que é necessário termos $\|\varphi\| = \|\varphi(1)\|$, sendo que temos $\|\varphi\| = 2\|\varphi(1)\|$.

Proposição 2.40. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\{E_{ij}\}$ a base canônica de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{A}$ é completamente positiva se, e somente se, $\left[\varphi\left(E_{ij}\right)\right]_{ij}$ é positiva em $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$.*

Demonstração. Através de [21, 1.3.6. Theorem (Gelfand Representation), p.15], podemos assumir sem perda de generalidade que $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Ainda, através do isomorfismo visto na demonstração do Lema 2.1, podemos identificar $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ com $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ e ver $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ como uma C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Suponha que $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{A}$ seja completamente positiva. Mostremos que $E = \left[E_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right) \cong \mathbb{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ é positiva e assim obtemos a positividade de $\varphi^{(n)}(E) = \left[\varphi\left(E_{ij}\right)\right]$. Temos que $E = E^*$ e que $E^2 = nE$, donde obtemos que

$$\langle E(x),x\rangle = \frac{1}{n}\left\langle E^2(x),x\right\rangle = \frac{1}{n}\langle E(x),E(x)\rangle \geqslant 0$$

para todo $x \in \mathbb{C}^{n^2}$. Isso significa que E é positivo. Portanto $\left[\varphi\left(E_{ij}\right)\right]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é positivo como queríamos. Reciprocamente, sejam $k \in \mathbb{N}$, $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{H}$. Escreva para cada $l \in \{1,2,\dots,k\}$, $B_l = \left[b_{st,l}\right]_{st}$ e note que $B_i^*B_j = \sum\limits_{s,t,r=1}^{n} \overline{b_{rs,i}} \cdot b_{rt,j}E_{st}$. Defina o vetor $v_{tr} = \sum\limits_{j=1}^{k} b_{rt,j}u_j \in \mathcal{H}$. Denotando $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\varphi\left(B_i^*B_j\right)\right](u),u\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{k}\left\langle \varphi\left(B_i^*B_j\right)(u_j),u_i\right\rangle = \sum_{s,t,r=1}^{n}\left\langle \varphi\left(\sum_{i,j=1}^{k}\overline{b_{rs,i}}\cdot b_{rt,j}E_{st}\right)(u_j),u_i\right\rangle \\
&= \sum_{s,t,r=1}^{n}\left\langle \sum_{i=1}^{k}\overline{b_{rs,i}\varphi}\left(\sum_{j=1}^{k}b_{rt,j}E_{st}\right)(u_j),u_i\right\rangle = \sum_{s,t,r=1}^{n}\left\langle \varphi\left(\sum_{j=1}^{k}b_{rt,j}E_{st}\right)(u_j),\sum_{i=1}^{k}b_{rs,i}u_i\right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{s,t=1}^{n}\left\langle \varphi\left(E_{st}\right)(v_{tr}),v_{sr}\right\rangle\right) = \sum_{r=1}^{n}\left\langle \left[\varphi\left(E_{st}\right)\right]_{st}(v_r),v_r\right\rangle \geqslant 0,
\end{aligned}$$

em que $v_r = (v_{1r}, \dots, v_{nr}) \in \mathcal{H}^n$. Finalmente, dada uma matriz $B \in \mathbb{M}_k\left(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ positiva, escreva B como uma soma de matrizes da forma $\left[B_i^*B_j\right]_{i,j=1}^{k}$ tal como vimos na Proposição 2.33, e obtemos $\left\langle \varphi^{(k)}(B)(u),u\right\rangle \geqslant 0$, ou seja, $\varphi^{(k)}$ é positiva. Como $k \in \mathbb{N}$ é qualquer, segue que φ é completamente positiva. ■

Exemplo 2.41. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathscr{A}$. Defina $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{A}$ de modo que $\varphi\left(E_{ij}\right) = a_i^*a_j$. Então segue do resultado anterior que φ é completamente positiva, pois $\left[\varphi\left(E_{ij}\right)\right] = \left[a_i^*a_j\right] \geqslant 0$ pela Proposição 2.4.

2.4 Aplicações positivas entre álgebras e álgebras comutativas

Nesta seção demonstraremos que para que uma aplicação positiva $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ seja completamente positiva é suficiente que $\mathscr{A}$ seja comutativa e unital ou que $\mathscr{B}$ seja comutativa. Sabemos que se uma C^*-álgebra é comutativa então é C^*-isomorfa a $C_0(X)$[5] em que X é um

[5]Espaço das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, temos que $\{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ é compacto.

espaço topológico localmente compacto e Hausdorff, vide [21, 2.1.10. Theorem (Gelfand), p. 41]. Quando a álgebra em questão tem unidade, X é compacto e então a álgebra é C^*-isomorfa a $C(X) = C_0(X)$.

Começamos pelo caso mais simples em que a álgebra do contradomínio é comutativa.

Proposição 2.42. *Sejam $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ C^*-álgebras. Se $\mathscr{B}$ é comutativa, então qualquer aplicação positiva $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é completamente positiva.*

Demonstração. Sejam X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff tal que $\mathscr{B} = C_0(X)$ e $n \in \mathbb{N}$. Tome $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathscr{B}$. Para qualquer $t \in X$ temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(x_i^* x_j\right) y_j\right)(t) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^*(t) \varphi\left(x_i^* x_j\right)(t) y_j(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\overline{y_i(t)} x_i^* x_j y_j(t)\right)(t) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{y_i(t)} x_i^* x_j y_j(t)\right)(t) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{y_i(t)} x_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j(t) x_j\right)\right)(t) \\ &= \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i(t) x_i\right)\right)^* \left(\sum_{j=1}^{n} y_j(t) x_j\right)\right)(t) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\left(x_i^* x_j\right) y_j$ é positivo e pela Proposição 2.35, φ é n-positiva. Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que φ é completamente positiva. ■

Queremos mostrar que uma aplicação positiva, entre C^*-álgebras, é completamente positiva se a álgebra do domínio é comutativa e unital. Para isso precisamos de alguns resultados auxiliares.

Seja $\mathscr{C} = C\left(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ em que X é um espaço topológico compacto Hausdorff X. Para $F \in \mathscr{C}$ e $x \in X$ escrevemos $F(x) = \left[f_{ij}(x)\right] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Note que $\mathscr{C}$ tem estrutura $*$-algébrica se munido com as operações $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x)$, $(F+G)(x) = F(x) + G(x)$ e $F^*(x) = \left[\overline{f_{ji}(x)}\right]_{ij} = (F(x))^*$, $x \in X$. Para cada $i, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ temos $f_{ij} \in C(X)$ e tomando $x, y \in X$ quaisquer tem-se

$$\left\|f_{ij}(x) - f_{ij}(y)\right\| \leqslant \left\|\left[f_{kl}(x) - f_{kl}(y)\right]_{kl}\right\| = \|F(x) - F(y)\|.$$

Note que $\mathscr{C}$ tem unidade $1_{\mathscr{C}} : X \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, em que $1_{\mathscr{C}}(x) = I_n$ para todo $x \in X$. Portanto, se $H \in \mathscr{C}$ for invertível, então existe $G \in \mathscr{C}$ tal que $HG = GH = 1_{\mathscr{C}}$, ou seja, $H(x)G(x) = G(x)H(x) = I_n$ para todo $x \in X$ e $H(x)$ é uma matriz invertível para todo $x \in X$.

Lema 2.43. *Seja $F \in \mathscr{C}$, então $F(x)$ invertível para todo $x \in X$ se, e somente se, F é invertível.*

Demonstração. De fato, suponha que $F \in \mathscr{C}$ e que $F(x)$ seja invertível para todo $x \in X$. Por [21, 1.2.3. Theorem, p. 7] temos que a aplicação $\mathrm{inv} : GL_n(\mathbb{C})$[6]$\to \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), A \mapsto A^{-1}$, é contínua já que a álgebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é de Banach e unital. Logo, a aplicação composição $G = \mathrm{inv} \circ F$, $x \mapsto (F(x))^{-1}$, é contínua já que F também é contínua. Note que $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x) = F(x)(F(x))^{-1} = I_n = 1_{\mathscr{C}}(x)$ para todo $x \in X$. Então $FG = 1_{\mathscr{C}}$. Analogamente, temos $GF = 1_{\mathscr{C}}$. Assim, F é invertível. Reciprocamente, suponha que F seja contínua e invertível. Logo, existe $G \in \mathscr{C}$ de modo que $FG = GF = 1_{\mathscr{C}}$. Então $F(x)G(x) = G(x)F(x) = I_n$ para todo $x \in X$. Portanto $F(x)$ é invertível para todo $x \in X$. ■

Lema 2.44. *$\mathscr{C} = C\left(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ é uma C^*-álgebra com norma definida por $\|F\| = \sup\{\|F(x)\| : x \in X\}$, e é C^*-isomorfa a $\mathbb{M}_n(C(X))$.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que $\|\cdot\|$ é norma. Como X é compacto segue que $\|F\| < \infty$. É imediato que $\|F\| \geqslant 0$ e, $F = 0$ se, e somente se, $\|F\| = 0$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ então $\|(\lambda F)(x)\| = |\lambda|\|F(x)\| \leqslant |\lambda|\|F\|$ para todo $x \in X$ e temos $\|\lambda F\| \leqslant |\lambda|\|F\|$. Por outro lado, $\|F\| = \left\|\frac{1}{\lambda}(\lambda F)\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda F\|$ para $\lambda \neq 0$, e portanto $|\lambda|\|F\| \leqslant \|\lambda F\|$. Assim, $\|\lambda F\| = |\lambda|\|F\|$. Para $\lambda = 0$ a igualdade anterior é imediata. Note que se $F, G \in \mathscr{C}$ então $\|(F+G)(x)\| = \|F(x) + G(x)\| \leqslant \|F(x)\| + \|G(x)\| \leqslant \|F\| + \|G\|$ para todo $x \in X$. Assim, $\|F+G\| \leqslant \|F\| + \|G\|$. Então $\|\cdot\|$ é norma sobre $\mathscr{C}$.

Veja que, $\|F^*\| = \sup\left\{\|(F(x))^*\| : x \in X\right\} = \sup\{\|F(x)\| : x \in X\} = \|F\|$. Ademais, para cada $x \in X$, temos $\|(FG)(x)\| = \|F(x)G(x)\| \leqslant \|F(x)\|\|G(x)\| \leqslant \|F\|\|G\|$, ou seja, $\|FG\| \leqslant \|F\|\|G\|$. Assim, provamos que $\mathscr{C}$ é uma $*$-álgebra normada.

Mostremos que $\mathscr{C}$ é uma $*$-álgebra de Banach. Seja $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{C}$ e $\varepsilon > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, k \geqslant N$ tem-se $\|F_k - F_m\| < \varepsilon$. Em outras palavras, $\|F_k(x) - F_m(x)\| < \varepsilon$ para cada $x \in X$. Logo, a sequência $\left(F_k(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy e convergente para um $F(x) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, uma vez que $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é completo. Mostremos, então, que

[6]Espaço das matrizes invertíveis de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

$(F_k)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente para a função $F : X \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Com efeito, fixe $x \in X$. Existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geqslant m_0$, então $\left\|F_m(x) - F(x)\right\| < \varepsilon$. Sejam $k \geqslant N$ e $m \geqslant \max\{m_0, N\}$. Então,

$$\left\|F_k(x) - F(x)\right\| \leqslant \left\|F_k(x) - F_m(x)\right\| + \left\|F_m(x) - F(x)\right\| < 2\varepsilon.$$

Dessarte, $\|F_k - F\| = \sup\left\{\left\|F_k(x) - F(x)\right\|; x \in X\right\} \leqslant 2\varepsilon$ para todo $k \geqslant N$ e a sequência $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente para F. Vemos que F é contínua, pois

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(y)\| &\leqslant \left\|F(x) - F_N(x)\right\| + \left\|F_N(x) - F_N(y)\right\| + \left\|F_N(y) - F(y)\right\| \\ &\leqslant 2\left\|F_N - F\right\| + \left\|F_N(x) - F_N(y)\right\|,\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in X$. Daí, fixado $x \in X$ existe um aberto U de X tal que se $y \in U$ temos $\left\|F_N(x) - F_N(y)\right\| < \varepsilon$ pois F_N é contínua. Portanto se $y \in U$ temos $\|F(x) - F(y)\| < 3\varepsilon$. Segue que $F \in \mathscr{C}$. Portanto, $\mathscr{C}$ é Banach. Assim $\mathscr{C}$ é uma $*$-álgebra de Banach. Ademais, como

$$\begin{aligned}\left\|F^*F\right\| &= \sup\left\{\left\|\left(F^*F\right)(x)\right\|; x \in X\right\} = \sup\left\{\left\|F^*(x)F(x)\right\|; x \in X\right\} = \\ &= \sup\left\{\|F(x)\|^2; x \in X\right\} = (\sup\{\|F(x)\|; x \in X\})^2 = \|F\|^2,\end{aligned}$$

segue que $(\mathscr{C}, \|\cdot\|)$ é uma C^*-álgebra.

Por fim, observamos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} T : C\left(X, M_n(\mathbb{C})\right) & \to & \mathbb{M}_n(C(X)) \\ F & \mapsto & \left[f_{ij}\right] \end{array}$$

é um $*$-isomorfismo, e, portanto, $\mathscr{C}$ e $\mathbb{M}_n(C(X))$ são C^*-isomorfos. ■

Lema 2.45. *Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff. Um elemento $F \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ é positivo se, e somente se, $F(x)$ é um elemento positivo de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $F \in C\left(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ um elemento positivo. Assim, $F = G^*G$ para algum $G \in C\left(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$. Note que para todo $x \in X$, temos $F(x) = G^*(x)G(x) = (G(x))^*G(x) \geqslant 0$ e, portanto, $F(x)$ é positivo em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Suponha agora que $F(x)$ é positivo em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ para todo $x \in X$. Note que F é autoadjunto, pois $F^*(x) = (F(x))^* = F(x)$ para todo $x \in X$. Mostremos que o espectro de F está contido na união dos espectros de $F(x)$ e, portanto, F é positivo. Se $\lambda \in \sigma(F)$, então $F - \lambda 1_{\mathscr{C}}$ é não invertível. Segue do Lema 2.43 que existe um $x \in X$ de modo que $F(x) - \lambda I_n$ é não inversível, ou seja, $\lambda \in \sigma(F(x)) \subset \mathbb{R}_+$. ■

Tratamos a seguir o caso em que o domínio de uma aplicação positiva φ seja uma C^*-álgebra unital e abeliana que, neste caso, pode ser identificada a $C(X)$, em que X é um espaço topológico compacto Hausdorff.

Teorema 2.46. *Sejam X espaço topológico compacto Hausdorff e $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. Se $\varphi : C(X) \to \mathscr{A}$ é positiva, então φ é completamente positiva.*

Demonstração. Seja n um número natural. Tome $F \in \mathbb{M}_n(C(X))$ tal que $F = f \cdot R$ em que $f \in C(X)$ e $R = \left[R_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Note que $\varphi^{(n)}(F) = \varphi^{(n)}\left(\left[fR_{ij}\right]\right) = \left[\varphi\left(fR_{ij}\right)\right] = \left[\varphi(f)R_{ij}\right] = \varphi(f)R$. Supondo R positivo, escreva $R = M^*M$ em que $M = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Supondo $f \geqslant 0$ então $\varphi(f) \geqslant 0$ e podemos denotar $\varphi(f) = b^*b \in \mathscr{A}$. Observe que $\varphi^{(n)}(F) \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é positivo, pois

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(F) = \varphi(f)R = b^*b\left[\overline{a_{ji}}\right]\left[a_{ij}\right] &= \left[\sum_{k=1}^{n} b^*b\overline{a_{ki}}a_{kj}\right]_{ij} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{a_{ki}}b^*\right)\left(a_{kj}b\right)\right]_{ij} = \left[\overline{a_{ji}}b^*\right]\left[a_{ij}b\right] = \left[a_{ij}b\right]^*\left[a_{ij}b\right] \geqslant 0.\end{aligned}$$

Agora, sejam $\varepsilon > 0$ e $T \in \mathbb{M}_n(C(X)) = C\left(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ positivo. Como φ é positiva, então pela Proposição 2.14 φ é contínua. Segue daí que $\varphi^{(n)}$ é contínua pela Observação 2.27. Assim, existe um $\delta > 0$ tal que se $\|T - S\| \leqslant \delta$, então $\left\|\varphi^{(n)}(T) - \varphi^{(n)}(S)\right\| < \varepsilon$. Como T é contínua então para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que para todo $y \in V_x$ temos $\|T(x) - T(y)\| < \dfrac{\delta}{2}$. Pela compacidade de X podemos considerar $\left\{V_{x_i}\right\}_{i=1}^{k}$ uma cobertura finita para X. Note que se $y, z \in V_{x_i}$ então $\|T(y) - T(z)\| < \delta$. Tome $\{p_i\}_{i=1}^{k}$ uma partição da unidade subordinada a $\left\{V_{x_i}\right\}_{i=1}^{k}$, ou seja, $p_i : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ é contínua, $p_i = 0$ em $X - V_{x_i}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ em X, o leitor pode verificar em [20, Theorem 36.1, p. 225] a existência de partição da unidade para este caso.[7] Denote $G = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i T\left(x_i\right) \in \mathbb{M}_n(C(X))$. Note que $p_i(x) > 0$ implica $x \in V_{x_i}$, em

[7] No livro o teorema em questão trata para espaços normais, porém um espaço compacto Hausdorff sempre é normal. Dessarte, aplica-se o teorema.

que $\left\|T(x)-T(x_i)\right\| < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned}\|T(x)-G(x)\| &= \left\|T(x)\sum_{i=1}^{k} p_i(x) - \sum_{i=1}^{k} p_i(x)T(x_i)\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i(x)\left\|T(x)-T(x_i)\right\| < \delta,\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Portanto, $\|T-G\| \leqslant \delta$, daí temos $\left\|\varphi^{(n)}(T)-\varphi^{(n)}(G)\right\| < \varepsilon$. Note que $\varphi^{(n)}(G) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(p_i)T(x_i) \geqslant 0$. Assim, $\varphi^{(n)}(T)$ é limite de uma sequência de elementos positivos em $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$, e como o conjunto dos elementos positivos de uma C^*-álgebra é fechado, segue que $\varphi^{(n)}(T)$ é positivo. Já que n foi tomado de forma arbitrária então φ é completamente positivo. ■

3 Teoremas de Extensão

3.1 Teorema de extensão de Krein

Considere $\{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$ e $A = [a_{rs}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Então, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que

$$\langle [a_{rs}]\,(e_j), e_i\rangle = \Big\langle \left(a_{1j}, \ldots, a_{nj}\right), e_i \Big\rangle = a_{ij}$$

Considere um sistema de operadores $\mathscr{S}$ e uma aplicação linear $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Para cada $a \in \mathscr{S}$, denote $\varphi(a)_{ij}$ como sendo a ij-ésima entrada da matriz complexa $\varphi(a)$ e defina a aplicação $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ definida por

$$s_\varphi\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi\left(a_{ij}\right)_{ij}. \tag{3.1.1}$$

Pela linearidade de φ temos que s_φ é linear. Seja $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}^{n^2}$. Usando a identificação dada pelo isomorfismo $\mathbb{M}_n\left(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right) \cong \mathbb{M}_{n^2}(\mathbb{C})$, notamos que

$$\Big\langle \varphi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right)(e), e\Big\rangle = \Big\langle \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right](e), e\Big\rangle = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\langle \varphi\left(a_{rk}\right)(e_k), e_r\right\rangle = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(a_{kr}\right)_{kr}.$$

Temos, portanto, que $s_\varphi\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \Big\langle \varphi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right)(e), e\Big\rangle$. A aplicação $G : \mathcal{B}\left(\mathscr{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$[8]$\to \mathcal{B}\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{S}), \mathbb{C}\right)$, definida por $G(\varphi) = s_\varphi$, é linear, pois para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ quaisquer, tem-se

$$\begin{aligned}
G(\varphi + \lambda\psi)\big|_{[a_{ij}]} &= s_{\varphi+\lambda\psi}\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \Big\langle (\varphi + \lambda\psi)^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right)(e), e\Big\rangle \\
&= \Big\langle \left[(\varphi + \lambda\psi)\left(a_{ij}\right)\right](e), e\Big\rangle = \Big\langle \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right](e), e\Big\rangle + \lambda\Big\langle \left[\psi\left(a_{ij}\right)\right](e), e\Big\rangle \\
&= s_\varphi\left(\left[a_{ij}\right]\right) + \lambda s_\psi\left(\left[a_{ij}\right]\right) = G(\varphi)\big|_{[a_{ij}]} + \lambda G(\psi)\big|_{[a_{ij}]}.
\end{aligned}$$

Observação 3.1. Sejam $s : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ linear e aE_{ij} matriz com a na ij-ésima entrada da matriz e 0 nas entradas restantes. Defina aplicação $\varphi_s : \mathscr{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por $\varphi_s(a) = \left[s\left(aE_{ij}\right)_{ij}\right]$.

[8] $\mathcal{B}(V, W)$ denota o espaço dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados V e W.

É claro que φ_s é linear. Mostremos que as aplicações

$$\begin{array}{rrcl} G: & \mathcal{B}\left(\mathscr{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right) & \to & \mathcal{B}\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{S}), \mathbb{C}\right) \\ & \varphi & \mapsto & s_\varphi \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} F: & \mathcal{B}\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{S}), \mathbb{C}\right) & \to & \mathcal{B}\left(\mathscr{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right) \\ & s & \mapsto & \varphi_s \end{array}$$

são inversas entre si. Com efeito, veja que

$$(F\circ G)(\varphi) = F(G(\varphi)) = F\left(s_\varphi\right) = \varphi_{s_\varphi}$$

e pela definição dada para s_φ, segue que

$$\varphi_{s_\varphi}(a)_{ij} = s_\varphi\left(aE_{ij}\right) = \varphi(a)_{ij},$$

e, portanto $(F\circ G)(\varphi) = \varphi$. Além disso, observe que

$$(G\circ F)(s) = G(F(s)) = G\left(\varphi_s\right) = s_{\varphi_s},$$

e como

$$s_{\varphi_s}\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_s\left(a_{ij}\right)_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s\left(a_{ij}E_{ij}\right) = s\left(\left[a_{ij}\right]\right).$$

Daí, temos que $(G\circ F)(s) = s$. Portanto, temos que os espaços normados $\mathcal{B}\left(\mathscr{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ e $\mathcal{B}\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{S}), \mathbb{C}\right)$ são isomorfos.

Lema 3.2. *Sejam $\mathscr{S}$ um sistema de operadores em uma C^*-álgebra $\mathscr{A}$, $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma aplicação linear e $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ definida em (3.1.1). As seguintes afirmações são equivalentes*

(a) *φ é completamente positiva;*

(b) *φ é n-positiva;*

(c) s_φ *é positiva.*

Demonstração. Segue diretamente da definição de aplicação completamente positiva que (a) implica (b).

Agora, assumindo (b), tome $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ positivo. Por hipótese, $\varphi^{(n)}([a_{ij}]) \geqslant 0$ e, identificando $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{M}_{n^2}(\mathbb{C})$, temos $s_\varphi\left(\left[a_{ij}\right]\right) = \left\langle \varphi^{(n)}\left(\left[a_{ij}\right]\right)(e), e\right\rangle \geqslant 0$ pela Proposição 2.11. Logo, (b) implica (c).

Verifiquemos, por fim, que (c) implica (a). Suponha que $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ positiva. Pelo Teorema 2.18 podemos estender tal aplicação para $s : \mathbb{M}_n(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$ positiva. Pela Observação 3.1, temos que $\mathcal{B}\left(\mathscr{A}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ e $\mathcal{B}\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{A}), \mathbb{C}\right)$ são isomorfos. Seja $\psi : \mathscr{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ associado a s, ou seja, $\psi = \psi_s$. Note que ψ estende φ linearmente, pois qualquer que seja $a \in \mathscr{S}$, temos

$$\psi_s(a)_{ij} = s\left(aE_{ij}\right) = s_\varphi\left(aE_{ij}\right) = \varphi(a)_{ij}.$$

Mostremos que ψ é completamente positiva. Com efeito, dado $m \in \mathbb{N}$, devemos provar que $\psi^{(m)} : \mathbb{M}_m(\mathscr{A}) \to \mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\right)$ é positivo. Pela Proposição 2.4 e por linearidade é suficiente mostrar que $\psi^{(m)}([a_i^* a_j]) \geqslant 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$. Seja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^{nm}$, em que $x_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} e_k \in \mathbb{C}^n$. Note que

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^{(m)}\left(\left[a_i^* a_j\right]\right)(x), x\right\rangle &= \left\langle \left[\psi\left(a_i^* a_j\right)\right](x), x\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \psi\left(a_1^* a_j\right) x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \psi\left(a_m^* a_j\right) x_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle \psi\left(a_i^* a_j\right)(x_j), x_i \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_{jk} \overline{\lambda_{il}} \left\langle \psi\left(a_i^* a_j\right)(e_k), e_l \right\rangle \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_{jk} \overline{\lambda_{il}} \left\langle \psi_s\left(a_i^* a_j\right)(e_k), e_l \right\rangle \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_{jk} \overline{\lambda_{il}} \psi_s\left(a_i^* a_j\right)_{lk} = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_{jk} \overline{\lambda_{il}} s\left(a_i^* a_j E_{lk}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} s\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}}a_i^*a_jE_{lk}\right) = \sum_{i,j=1}^{m} s\left(a_i^*a_j\sum_{k,l=1}^{n} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}}E_{lk}\right).$$

Para cada $i = 1,2,\dots,n$, denote por A_i a matriz em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ com primeira linha $(\lambda_{i1},\dots,\lambda_{in})$ e as demais entradas iguais a zero. Então,

$$A_i^*A_j = \left[\overline{\lambda_{il}}\lambda_{jk}\right]_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{\lambda_{il}}\lambda_{jk}E_{lk}$$

e, tomando uma matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathscr{A}$ e convencionando $bB = [b_{ij}b] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^{(m)}\left(\left[a_i^*a_j\right]\right)(x), x\right\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} s\left(a_i^*a_jA_i^*A_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} s\left(a_i^*A_i^* \cdot a_jA_j\right)\\ &= s\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^*A_i^* \cdot a_jA_j\right) = s\left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_iA_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^{m} a_jA_j\right)\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Segue que ψ é completamente positivo e, como ψ estende φ, temos que φ é uma aplicação completamente positiva. ■

Teorema 3.3 (Krein). *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ for uma aplicação completamente positiva, então existe um aplicação completamente positiva $\psi : \mathscr{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ que estende φ tal que $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Como $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é completamente positivo, então $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ é positivo pelo Lema 3.2. Pelo Teorema 2.18, s_φ admite uma extensão positiva $s : \mathbb{M}_n(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$. Então s possui uma correspondente $\psi = \psi_s : \mathscr{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ via isomorfismo visto na Observação 3.1. Vemos na prova do Lema 3.2 que ψ estende φ e que ψ é completamente positivo. Pela Proposição 2.39 segue que $\|\varphi\| = \|\varphi(1)\| = \|\psi(1)\| = \|\psi\|$. ■

Exemplo 3.4. Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra unital. É claro que $\operatorname{span}\{1\} \subset \mathscr{A}$ é uma C^*-subálgebra. Defina $\varphi : \operatorname{span}\{1\} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por $\lambda 1 \mapsto \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Pela Proposição 2.46 e [21, 1.3.6. Theorem (Gelfand Representation), p. 15] temos que φ é completamente positiva. Pelo Teorema 3.3

temos que existe uma extensão completamente positiva de φ para $\mathscr{A}$. Consequentemente, o conjunto P_n das aplicações completamente positivas $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tais que $\varphi(1) = I_n$ de uma C^*-álgebra nunca é vazio.

3.2 A Topologia BW

Sejam $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ espaços de Banach. Fixe $x \in \mathscr{X}$ e $y \in \mathscr{Y}$. Considere a aplicação $x \otimes y : \mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right) \to \mathbb{C}$ definida por $x \otimes y(L) = L(x)(y)$, para todo $L \in \mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$. Mostremos que $x \otimes y$ é linear. De fato, sejam $L, G \in \mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} x \otimes y(L + \lambda G) &= (L + \lambda G)(x)(y) = (L(x) + \lambda G(x))(y) \\ &= L(x)(y) + \lambda G(x)(y) = x \otimes y(L) + \lambda x \otimes y(G), \end{aligned}$$

segue que $x \otimes y$ é um funcional linear. Temos também que $x \otimes y$ é limitado, pois

$$\|x \otimes y(L)\| = \|L(x)(y)\| \leqslant \|L(x)\| \|y\| \leqslant \|L\| \|x\| \|y\|,$$

ou seja, $\|x \otimes y\| \leqslant \|x\| \|y\|$. Mostremos que $\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|$. Com efeito, se $x \in \mathscr{X}$ ou $y \in \mathscr{Y}$ é nulo, é imediato. Agora, caso $x \in \mathscr{X}$ e $\in \mathscr{Y}$ não sejam nulos, existem $f \in \mathscr{X}', g \in \mathscr{Y}'$ tais que $|f(x)| = \|x\|$ e $|g(y)| = \|y\|$ e $\|f\| = \|g\| = 1$, vide [6, Corolário 3.1.4, p. 60]. Seja $L_{f,g} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}'$ definida por $L_{f,g}(z) = f(z)g$. Observe que $L_{f,g} \in \mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}')$, pois pela linearidade de f segue que $L_{f,g}$ é linear e

$$\left\|L_{f,g}(z)\right\| = \|f(z)g\| = |f(z)| \|g\| = |f(z)| \leqslant \|f\| \|z\| = \|z\|.$$

Ademais, $\left\|L_{f,g}\right\| \leqslant 1$ e temos $|x \otimes y(L_{f,g})| = |L_{f,g}(x)(y)| = |(f(x)g)(y)| = |f(x)g(y)| = \|x\| \|y\|$. Portanto, $\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|$, como desejamos.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{Y}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, $(x_1 + \lambda x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + \lambda \left(x_2 \otimes y\right)$. De fato, para todo $L \in \mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$, temos

$$\begin{aligned} (x_1 + \lambda x_2) \otimes y(L) &= L\left(x_1 + \lambda x_2\right)(y) = \left(L\left(x_1\right) + \lambda L\left(x_2\right)\right)(y) \\ &= L\left(x_1\right)(y) + \lambda L\left(x_2\right)(y) = x_1 \otimes y(L) + \lambda \left(x_2 \otimes y\right)(L). \end{aligned}$$

Do mesmo modo temos $x\otimes(y_1+\lambda y_2)=x\otimes y_1+\lambda\,(x\otimes y_2)$. Considere o conjunto

$$\mathscr{Z}=\overline{\text{span}\{x\otimes y : x\in\mathscr{X},y\in\mathscr{Y}\}}\subset\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}'\right)'.$$

Temos que vale o seguinte resultado:

Lema 3.5. *$\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}'\right)$ é isometricamente isomorfo a $\mathscr{Z}'$.*

Demonstração. Dado $L\in\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}'\right)$ podemos definir a aplicação $F_L:\mathscr{K}=\text{span}\{x\otimes y;x\in\mathscr{X},y\in\mathscr{Y}\}\to\mathbb{C}$ da seguinte forma

$$F_L\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}L\left(x_i\right)\left(y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i(L).$$

É claro que F_L é linear. Além disso, F_L é limitada, pois

$$\left|F_L\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\otimes y_i\right)(L)\right|=\left|\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right)(L)\right|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right\|\|L\|,$$

ou seja, $\|F_L\|\leqslant\|L\|$. Agora, dados $x\in\mathscr{X}$ e $y\in\mathscr{Y}$, temos que $\|L(x)(y)\|=\left\|F_L(x\otimes y)\right\|\leqslant\|F_L\|\,\|x\otimes y\|=\|F_L\|\,\|x\|\|y\|$. Assim, $\|L(x)\|\leqslant\|F_L\|\,\|x\|$. Por conseguinte, $\|L\|\leqslant\|F_L\|$. Logo, $\|L\|=\|F_L\|$. Podemos estender F_L para $\widetilde{F_L}\in\mathscr{Z}'$ de forma que $\left\|\widetilde{F_L}\right\|=\|F_L\|$. É claro que $F_{L+\lambda M}=F_L+\lambda F_M$, quaisquer que sejam $L,M\in\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}'\right)$ e $\lambda\in\mathbb{C}$. Portanto, por continuidade e densidade de $\mathscr{K}$ em $\mathscr{Z}$ temos que $\widetilde{F_{L+\lambda M}}=\widetilde{F_L}+\lambda\widetilde{F_M}$. Com isso em mãos, podemos definir a aplicação linear

$$\begin{aligned}F:\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}'\right)&\to\mathscr{Z}'\\ L&\mapsto\widetilde{F_L}.\end{aligned}$$

Primeiramente, temos que F é isométrica, pois $\|F(L)\|=\left\|\widetilde{F_L}\right\|=\|F_L\|=\|L\|$. Para finalizar mostremos que F é sobrejetiva. Com efeito, seja $f\in\mathscr{Z}'$. Para cada $x\in\mathscr{X}$, considere $f_x:\mathscr{Y}\to\mathbb{C}$ tal que $f_x(y)=f(x\otimes y)$. Note que $f_x\in\mathscr{Y}'$, pois f_x é linear uma vez que $f_x(y_1+\lambda y_2)=f(x\otimes(y_1+\lambda y_2))=f(x\otimes y_1+\lambda x\otimes y_2)=f(x\otimes y_1)+\lambda f(x\otimes y_2)=f_x(y_1)+\lambda f_x(y_2)$ e f_x é limitada pois

$$\left|f_x(y)\right|=|f(x\otimes y)|\leqslant\|f\|\|x\otimes y\|=\|f\|\|x\|\|y\|. \tag{3.2.1}$$

Seja $L : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}'$ dada por $L(x) = f_x$. Temos que L é linear, pois

$$L(x_1 + \lambda x_2)(y) = f_{x_1+\lambda x_2}(y) = f\left((x_1 + \lambda x_2) \otimes y\right) = f(x_1 \otimes y) + \lambda f(x_2 \otimes y)$$
$$= f_{x_1}(y) + \lambda f_{x_2}(y) = L(x_1)(y) + \lambda L(x_2)(y),$$

seja qual for $y \in \mathscr{Y}$. Observe que L é contínua, pois $\|L(x)\| = \|f_x\| \leqslant \|f\|\|x\|$ por (3.2.1). Assim $L \in \mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$ e $\|L\| \leqslant \|f\|$. Observe que

$$F(L)(x \otimes y) = \widetilde{F}_L(x \otimes y) = L(x)(y) = f_x(y) = f(x \otimes y).$$

Como $F(L)$ e f são aplicações lineares, então também são iguais em $\mathscr{K}$. Por continuidade e densidade de $\mathscr{K}$ em $\mathscr{Z}$, segue que $\widetilde{F}(L) = f$. Assim F é sobrejetiva. Portanto, F é o isomorfismo isométrico que desejamos. ∎

Definição 3.6. Munimos $\mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$ com a *topologia BW*, ou seja, com a topologia fraca-$*$ de $\mathscr{Z}'$. Dessa forma, enfatizamos que *uma rede* $(L_\lambda)_\lambda$ *converge para* L em $\mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$ na topologia BW se, e somente se, a rede $\left(F\left(L_\lambda\right)\right)_\lambda$ converge para $F(L)$ em $\mathscr{Z}'$, $*$-fracamente.

Proposição 3.7. *Seja* $(L_\lambda)_\lambda$ *rede em* $\mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$ *limitada. Então* $L_\lambda \longrightarrow L$ *em* $\mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathscr{Y}'\right)$ *na topologia BW se, e somente se,* $L_\lambda(x) \longrightarrow L(x)$ *em* $\mathscr{Y}'$*, $*$-fracamente, para todo* $x \in \mathscr{X}$.

Demonstração. Suponha que $L_\lambda \longrightarrow L$ na topologia BW, ou seja, $F(L_\lambda) \longrightarrow F(L)$ $*$-fracamente. Se $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{Y}$, então $F(L_\lambda)(x \otimes y) \longrightarrow F(L)(x \otimes y)$, ou seja, $L_\lambda(x)(y) \longrightarrow L(x)(y)$ e portanto $L_\lambda(x) \longrightarrow L(x)$ $*$-fracamente em $\mathscr{Y}'$, para todo $x \in \mathscr{X}$.

Reciprocamente, suponha que $L_\lambda(x)(y) \longrightarrow L(x)(y)$ para todo $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{Y}$, ou seja, $F(L_\lambda)(x \otimes y) \longrightarrow F(L)(x \otimes y)$. Por conseguinte, dado $q \in \mathscr{K}$, tem-se que $F(L_\lambda)(q) \longrightarrow F(L)(q)$. Seja $\varepsilon > 0$. Como a rede $(L_\lambda)_\lambda$ é limitada, vide [6, Proposição 6.3.3, p. 153], então existe um número real $a > 0$ tal que $\left\|F(L_\lambda)\right\| < a$, para todo λ. Seja $z \in \mathscr{Z}$ e tome $q \in \mathscr{K}$ tal que $\|z - q\| < \dfrac{\varepsilon}{3(a + \|F(L)\|)}$. Note que existe um λ_0 tal que, para todo $\lambda > \lambda_0$, tem-se $|F(L_\lambda)(q) - F(L)(q)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Portanto, $F(L_\lambda)(z)$ converge para $F(L)(z)$, pois para todo $\lambda > \lambda_0$

tem-se que

$$
\begin{aligned}
\left|F\left(L_{\lambda}\right)(z)-F(L)(z)\right| &= \left|F\left(L_{\lambda}\right)(z)-F\left(L_{\lambda}\right)(q)+F\left(L_{\lambda}\right)(q)-F(L)(q)+F(L)(q)-F(L)(z)\right| \\
&\leqslant \left|F\left(L_{\lambda}\right)(z-q)\right|+\left|F\left(L_{\lambda}\right)(q)-F(L)(q)\right|+|F(L)(q-z)| \\
&< \|F(L_{\lambda})\|\|z-q\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|F(L)\|\|q-z\| \\
&< \|F(L_{\lambda})\|\frac{\varepsilon}{3(a+\|F(L)\|)}+\frac{\varepsilon}{3}+\|F(L)\|\frac{\varepsilon}{3(a+\|F(L)\|)}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

■

3.3 Operadores trace-class e Topologia BW

Como ferramenta, a teoria dos operadores trace-class é necessária para obtermos alguns resultados importantes. O leitor encontra no Apêndice um desenvolvimento completo sobre esse conteúdo para os fins desse trabalho.

Observação 3.8. Se dois espaços de Banach $\mathscr{Y}$ e $\mathscr{Z}$ forem isometricamente isomorfos por uma aplicação $f:\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$, então $\mathcal{B}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ e $\mathcal{B}(\mathscr{X},\mathscr{Z})$ são isometricamente isomorfos pela aplicação $E:\mathcal{B}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\to\mathcal{B}(\mathscr{X},\mathscr{Z})$, dada por $E(T)=f\circ T$. Com efeito, E é linear e sobrejetiva, pois f é invertível. Como $\|E(T)\|=\|f\circ T\|\leqslant\|f\|\|T\|=\|T\|$ e $\|T(x)\|=\|f(T(x))\|\leqslant\|f\circ T\|\|x\|$ para todo $x\in\mathscr{X}$, segue que $\|T\|\leqslant\|f\circ T\|$, e E é isométrica.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B}_1$ o espaço dos operadores trace-classe de $\mathcal{H}$. Fazendo uso da Observação 3.8 e através do Teorema 5.23, temos que a aplicação $p:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}_1'$ dada por $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\mapsto p(B)=E_B:\mathcal{B}_1\to\mathbb{C}$ é definida por $E_B(T)=\mathrm{tr}(BT)=\mathrm{tr}(TB)$, é um isomorfismo isométrico, em que $\mathrm{tr}(T)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\langle T(e_n),e_n\right\rangle$ e, sem perda de generalidade, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}$ (a boa definição de tr fica claro no Apêndice). Assim, $\mathcal{B}(\mathscr{X},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e $\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathcal{B}_1'\right)$ são isometricamente isomorfos pela aplicação

$$
\begin{array}{rccc}
E: & \mathcal{B}(\mathscr{X},\mathcal{B}(\mathcal{H})) & \to & \mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathcal{B}_1'\right) \\
 & T & \mapsto & p\circ T.
\end{array}
\tag{3.3.1}
$$

Definição 3.9. Diremos que uma rede $(L_\lambda)_\lambda\subset\mathcal{B}(\mathscr{X},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *converge para um operador* L na topologia BW se a rede $E(L_\lambda)$ converge para $E(L)$ em $\mathcal{B}\left(\mathscr{X},\mathcal{B}_1'\right)$ na topologia BW.

Observação 3.10. Dada uma base ortonormal qualquer $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, escreva $v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n$.[9] O Teorema 5.20(a) no Apêndice afirma que $\mathcal{B}_1$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Mais que isso, através da aplicação tr obtemos, para $u, v \in \mathcal{H}$, $\langle T(u), v \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(TR_{u,v}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle TR_{u,v}(e_n), e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle T\left(\langle e_n, v \rangle u\right), e_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, v \rangle \left\langle T(u), e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle T(u), \langle v, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \left\langle T(u), \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n \right\rangle = \langle T(u), v \rangle. \end{aligned}$$

Proposição 3.11. *Sejam $\mathscr{X}$ espaço de Banach e $(L_\lambda)_\lambda$ uma rede limitada em $\mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Então, $L_\lambda \longrightarrow L$ em $\mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ na topologia BW se, e somente se, $\left\langle L_\lambda(x)(u), v \right\rangle \longrightarrow \langle L(x)(u), v \rangle$, para quaisquer $x \in \mathscr{X}$ e $u, v \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Suponha que $L_\lambda \longrightarrow L$ na topologia BW. Assim, $E(L_\lambda) \longrightarrow E(L)$ em $\mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathcal{B}_1'\right)$ na topologia BW, em que E está definido em (3.3.1). Pela Proposição 3.7 temos, para qualquer $x \in \mathscr{X}$, que $E(L_\lambda)(x) \longrightarrow E(L)(x)$ $*$-fracamente. Logo, $(E(L_\lambda)(x)(T))_\lambda \longrightarrow E(L)(x)(T)$, para todo $x \in \mathscr{X}$ e para todo $T \in \mathcal{B}_1$. Observe que

$$\begin{aligned} E(L_\lambda)(x)(T) = p \circ L_\lambda(x)(T) = \Big(p\left(L_\lambda(x)\right)\Big)(T) &= E_{L_\lambda(x)}(T) \\ &= \operatorname{tr}\left(L_\lambda(x)T\right). \end{aligned}$$

Analogamente, $E(L)(x)(T) = \operatorname{tr}(L(x)T)$. Considere o operador $R_{u,v} \in \mathcal{B}_1$. Sabemos, pela Observação 3.10, que $\operatorname{tr}\left(BR_{u,v}\right) = \langle B(u), v \rangle$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Segue que $\left\langle L_\lambda(x)(u), v \right\rangle \longrightarrow \langle L(x)(u), v \rangle$, para quaisquer $x \in \mathscr{X}$ e $u, v \in \mathcal{H}$.

Reciprocamente, suponha que $\left\langle L_\lambda(x)(u), v \right\rangle \longrightarrow \langle L(x)(u), v \rangle$, para quaisquer $x \in \mathscr{X}$ e $u, v \in \mathcal{H}$. Mostremos que $L_\lambda \longrightarrow L$, em $\mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, na topologia BW, isto é, mostremos que $E(L_\lambda) \longrightarrow E(L)$ em $\mathcal{B}\left(\mathscr{X}, \mathcal{B}_1'\right)$, na topologia BW. Com efeito, usando a Proposição 3.11, temos, para todo $x \in \mathscr{X}$, que a rede $(E(L_\lambda)(x))_\lambda$ converge $*$-fracamente para $E(L)(x)$ em $\mathcal{B}_1'$. Como estamos supondo que $\left\langle L_\lambda(x)(u), v \right\rangle \longrightarrow \langle L(x)(u), v \rangle$, para quaisquer $x \in \mathscr{X}$ e $u, v \in \mathcal{H}$, segue que $E(L_\lambda)(x)\left(R_{u,v}\right) \longrightarrow E(L)(x)\left(R_{u,v}\right)$. Consequentemente, $E(L_\lambda)(x)(F) \longrightarrow$

[9] Vide [6, Teorema 5.3.10, p. 119].

$E(L)(x)(F)$ para todo $F \in \mathcal{B}_{00}$, uma vez que todo operador de posto finito é uma combinação linear finita de elementos da forma $R_{u,v}$. Ademais, $\mathcal{B}_{00}$ é denso em $\mathcal{B}_1$ na norma $\|\cdot\|_1$, vide Teorema 5.20(d). Sejam $T \in \mathcal{B}_1$ e $F \in \mathcal{B}_{00}$ arbitrariamente próximo de T. Usando o Teorema 5.20(e) na última desigualdade abaixo, temos que

$$\begin{aligned}
|E(L_\lambda)(x)(T) - E(L)(x)(T)| &\leqslant \left|E\left(L_\lambda\right)(x)(T-F)\right| + \left|E\left(L_\lambda\right)(x)(F) - E(L)(x)(F)\right| \\
&\quad + |E(L)(x)(F-T)| \\
&= \left|\operatorname{tr}\left(L_\lambda(x)(T-F)\right)\right| + \left|E\left(L_\lambda\right)(x)(F) - E(L)(x)(F)\right| + |\operatorname{tr}(L(x)(T-F))| \\
&\leqslant \|L_\lambda(x)\|\|T-F\|_1 + |E(L_\lambda)(x)(F) - E(L)(x)(F)| + \|L(x)\|\|T-F\|_1.
\end{aligned}$$

Como a rede $(L_\lambda)_\lambda$ é limitada, então a rede $(E(L_\lambda)(x)(T))_\lambda$ converge para $E(L_\lambda)(x)(T)$. ■

3.4 Teorema da extensão de Arveson

Definição 3.12. Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Fixado um número real $r > 0$, definimos $CP_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ como sendo o *subconjunto formado pelas aplicações completamente positivas de*

$$\mathcal{B}_r(\mathscr{S}, \mathcal{H}) = \{L \in \mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H})) : \|L\| \leqslant r\}.$$

Observação 3.13. Pela Proposição 2.39, segue que o conjunto das aplicações completamente positivas de $\mathscr{S}$ para $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ está contido em $\mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

Observação 3.14. Lembre que se $\mathscr{X}$ é um espaço normado então a bola unitária de $\mathscr{X}'$ é compacto com topologia fraca-$*$, vide [6, Teorema 6.2.9. (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki), p. 155]. Por conseguinte, $\mathcal{B}_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ é compacto na topologia BW de $\mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

Lema 3.15. *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores. Se $\mathscr{S}$ é fechado em $\mathscr{A}$, então $CP_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ é compacto na topologia BW.*

Demonstração. Vejamos três fatos antes de verificar o lema.

Primeiro, sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$, $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede tal que $\langle x_\lambda, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ para todo $y \in \mathcal{H}$ e $r > 0$ tal que $\|x_\lambda\| \leqslant r$. Então, $\|x\| \leqslant r$. De fato, se $x = 0$ é imediato. Por outro lado, se $x \neq 0$, tome $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ e suponha que $\|x\| > r$. Assim, tomando $\varepsilon = \|x\| - r$, existe um λ_0 tal que, para $\lambda \geqslant \lambda_0$, temos

$$\|x\| - |\langle x_\lambda, y\rangle| = |\langle x, y\rangle| - \left|\langle x_\lambda, y\rangle\right| \leqslant \left|\langle x_\lambda, y\rangle - \langle x, y\rangle\right| < \varepsilon = \|x\| - r.$$

Portanto, $r < \langle x_\lambda, y\rangle \leqslant \|x_\lambda\| \, \|y\| = \|x_\lambda\|$, um absurdo.

Segundo, sejam $(L_\lambda)_\lambda$ uma rede em $\mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e $L \in \mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Se existir $r > 0$ tal que $\|L_\lambda\| \leqslant r$ e $\left\langle L_\lambda(a)(x), y\right\rangle \longrightarrow \langle L(a)(x), y\rangle$ para todo $a \in \mathscr{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$, então $\|L\| \leqslant r$. De fato, suponha que $\|L\| > r$. Então existe $a \in \mathscr{S}$ com $\|a\| = 1$ tal que $\|L(a)\| > r$. Pela mesma razão, existe $x \in \mathcal{H}$ com $\|x\| = 1$ tal que $\|L(a)(x)\| > r$. Note que para todo λ temos que $\left\|L_\lambda(a)(x)\right\| \leqslant \|L_\lambda\| \leqslant r$, o que é um absurdo pelo que vemos no parágrafo acima.

Terceiro, sejam $(L_\lambda)_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ uma rede e $L \in \mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Se $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ e $\left\langle L_\lambda(a)(x), y\right\rangle \longrightarrow \left\langle L(a)(x), y\right\rangle$ para todo $a \in \mathscr{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$, então devemos obter $\left\langle \left[L_\lambda\left(a_{ij}\right)\right](u), v\right\rangle \longrightarrow \left\langle \left[L\left(a_{ij}\right)\right](u), v\right\rangle$, para quaisquer $u, v \in \mathcal{H}^n$. Basta ver que

$$\begin{aligned}\left\langle \left[L_\lambda\left(a_{ij}\right)\right](u), v\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle L_\lambda\left(a_{ij}\right)(u_j), v_i\right\rangle \\ &\longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle L\left(a_{ij}\right)(u_j), v_i\right\rangle = \left\langle \left[L\left(a_{ij}\right)\right](u), v\right\rangle.\end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que $CP_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ é fechado em $\mathcal{B}_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ na topologia BW para obter o resultado, uma vez que $CP_r(\mathscr{S}, \mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ e $\mathcal{B}_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ é compacto nesta topologia pela Observação 3.14. Considere uma rede $(L_\lambda)_\lambda$ em $CP_r(\mathscr{S}, \mathcal{H})$ convergente a $L \in \mathcal{B}(\mathscr{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ na topologia BW. Como $\mathscr{S}$ é fechado em $\mathscr{A}$, então é um espaço Banach e podemos usar a Proposição 3.11, pois a rede $(L_\lambda)_\lambda$ é limitada. Daí, $\left\langle L_\lambda(a)(x), y\right\rangle \longrightarrow \langle L(a)(x), y\rangle$ para todo $a \in \mathscr{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$. Pelo que argumentamos no segundo parágrafo, segue que $\|L\| \leqslant r$. Resta provar que L é completamente positivo. Com efeito, sejam $n \in \mathbb{N}$ qualquer e $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ positivo. Como $\left\langle L_\lambda(a)(x), y\right\rangle \longrightarrow \langle L(a)(x), y\rangle$ para todo $a \in \mathscr{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$, então segue do parágrafo anterior que $\left\langle \left[L_\lambda\left(a_{ij}\right)\right](u), u\right\rangle \longrightarrow \left\langle \left[L\left(a_{ij}\right)\right](u), u\right\rangle$ para todo $u \in \mathcal{H}^n$. Por outro lado, como $\left\langle \left[L_\lambda(a_{ij})\right](u), u\right\rangle \geqslant 0$ qualquer que seja $u \in \mathcal{H}^n$, segue que $\left\langle \left[L\left(a_{ij}\right)\right](u), u\right\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in \mathcal{H}^n$. Assim, L é completamente positivo. Portanto,

$CP_r(\mathscr{S},\mathcal{H})$ é fechado em $\mathcal{B}_r(\mathscr{S},\mathcal{H})$ na topologia BW. ■

Teorema 3.16 (Arveson)**.** *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ um sistema de operadores. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ for uma aplicação completamente positiva, então existe uma aplicação completamente positiva $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que estende φ e $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{F} \subset \mathcal{H}$ subespaço vetorial de dimensão finita. Considere $V_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathcal{H}$ a aplicação inclusão, ou seja, definida por $V_{\mathscr{F}}(f) = f$ para todo $f \in \mathscr{F}$. Defina a aplicação $\varphi_{\mathscr{F}} : \mathscr{S} \to \mathcal{B}(\mathscr{F})$ por $\varphi_{\mathscr{F}}(a) = V_{\mathscr{F}}^* \varphi(a) V_{\mathscr{F}}$. É claro que $\varphi_{\mathscr{F}}$ é completamente positiva. Note que $\left\|\varphi_{\mathscr{F}}(a)\right\| = \left\|V_{\mathscr{F}}^* \varphi(a) V_{\mathscr{F}}\right\| \leqslant \|\varphi\|\|a\|$. Assim, $\|\varphi_{\mathscr{F}}\| \leqslant \|\varphi\|$. Da Álgebra Linear, sabe-se que para cada $\mathscr{F}$, existe $n_{\mathscr{F}} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}(\mathscr{F}) \cong \mathbb{M}_{n_{\mathscr{F}}}(\mathbb{C})$. Logo, pelo Teorema 3.3 (de Krein), existe uma aplicação $\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathscr{F})$ completamente positiva que estende $\varphi_{\mathscr{F}}$ e satisfaz $\left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\right\| = \|\varphi_{\mathscr{F}}\| \leqslant \|\varphi\|$. Para cada $\mathscr{F}$, podemos escrever $\mathcal{H} = \mathscr{F} \oplus \mathscr{F}^{\perp}$.[10] Defina $\psi_{\mathscr{F}} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\psi_{\mathscr{F}}(a)\left(f + f^{\perp}\right) = \widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}(a)(f)$. Note que $\left\|f + f^{\perp}\right\|^2 = \|f\|^2 + \left\|f^{\perp}\right\|^2$ e assim $\|f\| \leqslant \left\|f + f^{\perp}\right\|$. Portanto,

$$\left\|\psi_{\mathscr{F}}(a)\left(f + f^{\perp}\right)\right\| = \left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}(a)(f)\right\| \leqslant \left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}(a)\right\| \|f\| \leqslant \left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}(a)\right\| \left\|f + f^{\perp}\right\|$$

e $\left\|\psi_{\mathscr{F}}(a)\right\| \leqslant \left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}(a)\right\| \leqslant \left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\right\| \|a\|$, ou seja, $\|\psi_{\mathscr{F}}\| \leqslant \left\|\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\right\| = \|\varphi_{\mathscr{F}}\| \leqslant \|\varphi\|$. Observe que tal aplicação é completamente positiva pois se $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ é positivo e $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}^n$ é vetor qualquer com $u_i = f_i + f_i^{\perp}$, então

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_{\mathscr{F}}^{(n)}(\left[a_{ij}\right])(u), u \right\rangle &= \left\langle \left[\psi_{\mathscr{F}}\left(a_{ij}\right)\right](u_1, \ldots, u_n), (u_1, \ldots, u_n) \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\left(a_{ij}\right)\right](f_1, \ldots, f_n), \left(f_1 + f_1^{\perp}, \ldots, f_n + f_n^{\perp}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\left(a_{ij}\right)\right](f_1, \ldots, f_n), (f_1, \ldots, f_n) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \left[\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\left(a_{ij}\right)\right](f_1, \ldots, f_n), \left(f_1^{\perp}, \ldots, f_n^{\perp}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}\left(a_{ij}\right)\right](f_1, \ldots, f_n), (f_1, \ldots, f_n) \right\rangle \geqslant 0,
\end{aligned}$$

uma vez que $\widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}}$ é completamente positivo. Agora, considere o conjunto dirigido $\{\mathscr{F} : \mathscr{F} \subset \mathcal{H}\}$ tal que $\mathscr{F}$ tem dimensão finita e $\mathscr{F}_1 \leqslant \mathscr{F}_2$ se, e somente se, $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$. Então, a rede $(\psi_{\mathscr{F}})_{\mathscr{F}}$

[10] Vide [6, Teorema 5.2.5, p. 111].

está contida em $CP_{\|\varphi\|}(\mathscr{A},\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathscr{A},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ que é compacto na topologia BW. Portanto, existe uma subrede $\left(\psi_{\mathscr{F}_\mu}\right)_\mu \subset CP_{\|\varphi\|}(\mathscr{A},\mathcal{H})$ de $(\psi_{\mathscr{F}})_{\mathscr{F}}$ que converge $*$-fracamente, ou seja, converge na topologia BW para um operador completamente positivo $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Mostremos que $\widetilde{\varphi}$ estende φ. Sejam $a \in \mathscr{S}$, $u, v \in \mathcal{H}$ e $\mathscr{F} = \operatorname{span}\{u, v\}$. Seja μ_0 tal que $\mathscr{F}_{\mu_0} \geqslant \mathscr{F}$. Assim, para qualquer $\mu \geqslant \mu_0$, temos $\mathscr{F}_\mu \geqslant \mathscr{F}_{\mu_0} \geqslant \mathscr{F}$ e assim $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_{\mu_0} \subset \mathscr{F}_\mu$ e

$$\left\langle \widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}_\mu}(a)(u), v \right\rangle = \left\langle \varphi_{\mathscr{F}_\mu}(a)(u), v \right\rangle = \left\langle V_{\mathscr{F}_\mu}^* \varphi(a) V_{\mathscr{F}_\mu}(u), v \right\rangle = \langle \varphi(a)(u), v \rangle.$$

Logo, $\langle \varphi(a)(u), v \rangle = \left\langle \widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}_\mu}(a)(u), v \right\rangle$ sempre que $\mu \geqslant \mu_0$. Daí,

$$\langle \varphi(a)u, v \rangle = \left\langle \widetilde{\varphi}_{\mathscr{F}_\mu}(a)(u), v \right\rangle = \left\langle \psi_{\mathscr{F}_\mu}(a)(u), v \right\rangle \longrightarrow \langle \widetilde{\varphi}(a)(u), v \rangle$$

pela Proposição 3.11. Portanto $\widetilde{\varphi}$ estende φ como desejamos. Pelo que foi apontado no segundo parágrafo do Lema 3.15, temos que $\|\widetilde{\varphi}\| \leqslant \|\varphi\|$. Daí, $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$, pois $\widetilde{\varphi}$ é uma extensão de φ. ■

3.5 Teorema de extensão de Wittstock

Proposição 3.17. *Seja $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra. A aplicação*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{A})\right) &\to \mathbb{M}_n\left(\mathbb{M}_m(\mathscr{A})\right) \\ \left[\left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^n\right]_{i,j=1}^m &\mapsto \left[\left[a_{ijkl}\right]_{i,j=1}^m\right]_{k,l=1}^n \end{aligned}$$

é um $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras.

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{A})\right)$. Escreva $A = \left[A_{ij}\right]$ em que $A_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Então podemos escrever $A_{ij} = \left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^n$, em que $a_{ijkl} \in \mathscr{A}$, e assim temos

$$A = \left[\left[a_{ijkl}\right]_{k,l}^n\right]_{i,j}^m$$

Seja T tal como no enunciado. É claro que T é linear e bijetora. Ademais, temos que T

preserva adjunto, pois para todo $A \in \mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{A})\right)$ temos

$$\begin{aligned}
T\left(A^*\right) &= T\left(\left[\left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m\ *}\right) = T\left(\left[\left[a_{jikl}\right]_{k,l=1}^{n\ *}\right]_{i,j=1}^{m}\right) \\
&= T\left(\left[\left[a_{jilk}^*\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right) = \left[\left[a_{jilk}^*\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n} = T(A)^*.
\end{aligned}$$

Temos que T preserva produto. De fato, sejam $A = \left[\left[a_{ijkl}\right]_{kl}^{n}\right]_{ij}^{m}$ e $B = \left[\left[b_{ijkl}\right]_{kl}^{n}\right]_{ij}^{m}$ pertencentes a $\mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{A})\right)$. Note que

$$\begin{aligned}
T(AB) &= T\left(\left[\sum_{r=1}^{m}\left[a_{irkl}\right]_{k,l=1}^{n}\left[b_{rjkl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right) = \sum_{r=1}^{m} T\left(\left[\left[a_{irkl}\right]_{k,l=1}^{n}\left[b_{rjkl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right) \\
&= \sum_{r=1}^{m} T\left(\left[\left[\sum_{s=1}^{n} a_{irks}b_{rjsl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} T\left(\left[\left[a_{irks}b_{rjsl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right) \\
&= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\left[\left[a_{irks}b_{rjsl}\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n} = \sum_{s=1}^{n}\left[\left[\sum_{r=1}^{m} a_{irks}b_{rjsl}\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{n}\left[\left[a_{ijks}\right]_{i,j=1}^{m}\left[b_{ijsl}\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n} = \left[\sum_{s=1}^{n}\left[a_{ijks}\right]_{i,j=1}^{m}\left[b_{ijsl}\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n} \\
&= \left[\left[a_{ijkl}\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n}\left[\left[b_{ijkl}\right]_{i,j=1}^{n}\right]_{k,l=1}^{n} = T(A)T(B).
\end{aligned}$$

Portanto, T é um $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras. ■

Definição 3.18. Dados $m,n \in \mathbb{N}$ e uma C^*-álgebra $\mathscr{A}$, definimos o *$*$-isomorfismo canônico Shuffle* por

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_n(\mathscr{A})\right) &\to \mathbb{M}_n\left(\mathbb{M}_m(\mathscr{A})\right) \\
\left[\left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m} &\mapsto \left[\left[a_{ijkl}\right]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n}.
\end{aligned}$$

Lema 3.19. *Sejam $\mathscr{A},\mathscr{B}$ C^*-álgebras com unidade e $\mathscr{M}$ um espaço de operadores em $\mathscr{A}$ e*

$\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{B}$ linear. Defina o sistema de operadores

$$\mathscr{S}_{\mathscr{M}} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda 1 & a \\ b^* & \mu 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathscr{M} \right\} \subset \mathbb{M}_2(\mathscr{A})$$

e seja $\Phi : \mathscr{S}_{\mathscr{M}} \to \mathbb{M}_2(\mathscr{B})$ dado por

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \lambda 1 & a \\ b^* & \mu 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \lambda 1 & \varphi(a) \\ \varphi(b)^* & \mu 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{B}$ é completamente contrativa, então Φ é completamente positiva.

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere $\left[S_{ij}\right]_{i,j=1}^m \in \mathbb{M}_m\left(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}\right) \subset \mathbb{M}_m\left(\mathbb{M}_2(\mathscr{A})\right)$. Para cada par $i, j \in \{1, 2 \ldots, m\}$, denote

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ij} 1 & a_{ij} \\ b_{ij}^* & \mu_{ij} 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{S}_{\mathscr{M}}.$$

Podemos escrever

$$\left[S_{ij}\right]_{i,j=1}^m = \left[\left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^2\right]_{i,j=1}^m$$

em que $S_{ij} = \left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^2$ e assim $a_{ij11} = \lambda_{ij} 1$, $a_{ij12} = a_{ij}$, $a_{ij21} = b_{ij}^*$ e $a_{ij22} = \mu_{ij} 1$. Portanto,

$$T\left(\left[S_{ij}\right]_{i,j}^m\right) = T\left(\left[\left[a_{ijkl}\right]_{k,l=1}^2\right]_{i,j=1}^m\right) = \left[\left[a_{ijkl}\right]_{i,j=1}^m\right]_{k,l=1}^2$$
$$= \begin{bmatrix} \left[a_{ij11}\right]_{i,j=1}^m & \left[a_{ij12}\right]_{i,j=1}^m \\ \left[a_{ij21}\right]_{i,j=1}^m & \left[a_{ij22}\right]_{i,j=1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\lambda_{ij} 1\right]_{i,j=1}^m & \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^m \\ \left[b_{ij}^*\right]_{i,j=1}^m & \left[\mu_{ij} 1\right]_{i,j=1}^m \end{bmatrix}. \tag{3.5.1}$$

Além disso, veja que

$$\Phi^{(m)}\left(\left[S_{ij}\right]_{i,j=1}^m\right) = \left[\Phi\left(S_{ij}\right)\right]_{i,j=1}^m = \left[\begin{bmatrix} \lambda_{ij} 1 & \varphi\left(a_{ij}\right) \\ \varphi\left(b_{ij}\right)^* & \mu_{ij} 1 \end{bmatrix}\right]_{i,j}^m.$$

Daí, calculando agora T para $\Phi^{(m)}$ temos

$$T\left(\Phi^{(m)}\left[S_{ij}\right]\right)=\begin{bmatrix}\left[\lambda_{ij}1\right]_{i,j=1}^{m} & \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right]_{i,j=1}^{m}\\ \left[\varphi\left(b_{ij}\right)^{*}\right]_{i,j=1}^{m} & \left[\mu_{ij}1\right]_{i,j=1}^{m}\end{bmatrix}. \tag{3.5.2}$$

Para mostrar que Φ é completamente positivo, é suficiente supor, para cada $m\in\mathbb{N}$, que (3.5.1) é positivo e concluir que (3.5.2) é positivo. Denotando $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ji}\right], H=\left[\lambda_{ij}\right], K=\left[\mu_{ij}\right]$, então $A=B$, pois a matriz (3.5.1) é autoadjunta, uma vez que é positiva. Pela Proposição 2.5, temos que H,K são positivos. Seja $\varepsilon>0$ e considere $H_\varepsilon=H+\varepsilon I$ e $K_\varepsilon=K+\varepsilon I$. Considere o polinômio $p(x)=x+\varepsilon$. Seja $\lambda\in\sigma(H)$. Então $p(\lambda)=\lambda+\varepsilon>0$. Usando [21, 2.1.14. Theorem (Spectral Mapping), p.43], sabemos que $\sigma\left(H_\varepsilon\right)=\sigma(H+\varepsilon I)=\sigma(p(H))=p(\sigma(H))\subset\mathbb{R}_+$. Como $0\notin\sigma\left(H_\varepsilon\right)$ segue que H_ε é invertível. Analogamente, K_ε é invertível. Usando [21, 3.1.4. Theorem (Gelgand-Naimark), p. 94] temos que a raiz quadrada de tais operadores ainda é invertível. Note que

$$\begin{bmatrix}H_\varepsilon & A\\ A^* & K_\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H & A\\ A^* & K\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon I & 0\\ 0 & \varepsilon I\end{bmatrix}\geqslant 0$$

e

$$\begin{bmatrix}I & H_\varepsilon^{-1/2}AK_\varepsilon^{-1/2}\\ K_\varepsilon^{-1/2}A^*K_\varepsilon^{-1/2} & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_\varepsilon^{-1/2} & 0\\ 0 & K_\varepsilon^{-1/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_\varepsilon & A\\ A^* & K_\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_\varepsilon^{-1/2} & 0\\ 0 & K_\varepsilon^{-1/2}\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

Assim, $\left\|H_\varepsilon^{-1/2}AK_\varepsilon^{-1/2}\right\|\leqslant 1$ pela Proposição 2.12(a). Ainda, é claro que se $R,S\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $C\in\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$, então $\varphi^{(n)}(RCS)=R\varphi^{(n)}(C)S$. Usando esse fato e denotando $X=\varphi^{(m)}\left(H_\varepsilon^{-1/2}AK_\varepsilon^{-1/2}\right)$, temos

$$\begin{bmatrix}H_\varepsilon & \varphi^{(m)}(A)\\ \left(\varphi^{(m)}(A)\right)^* & K_\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_\varepsilon^{1/2} & 0\\ 0 & K_\varepsilon^{1/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & X\\ X^* & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_\varepsilon^{1/2} & 0\\ 0 & K_\varepsilon^{1/2}\end{bmatrix}.$$

Por hipótese φ é completamente contrativa, temos daí que $\left\|\varphi^{(m)}\left(H_\varepsilon^{-1/2}AK_\varepsilon^{-1/2}\right)\right\| \leqslant 1$. Agora, pela Proposição 2.12(a), a matriz

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}$$

é positiva. Logo, a matriz

$$\begin{bmatrix} H_\varepsilon & \varphi^{(m)}(A) \\ \left(\varphi^{(m)}(A)\right)^* & K_\varepsilon \end{bmatrix}$$

é positiva para todo $\varepsilon > 0$, vide [21, 2.2.5. Theorem, p. 46]. Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ podemos concluir que (3.5.2) é positivo, pois dada uma C^*-álgebra o conjunto dos elementos positivos é fechado.[11] ■

Teorema 3.20 (Wittstock)**.** *Sejam $\mathscr{A}$ uma C^*-álgebra unital, $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}$ um espaço de operadores. Toda aplicação $\varphi : \mathscr{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ completamente limitada admite uma extensão completamente limitada $\psi : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\|\varphi\|_{\mathrm{cb}} = \|\psi\|_{\mathrm{cb}}$.*

Demonstração. Suponha primeiro que $\|\varphi\|_{\mathrm{cb}} = 1$. Sejam $\mathscr{S}_{\mathscr{M}}$ e $\Phi : \mathscr{S}_{\mathscr{M}} \to \mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ como no Lema 3.19. Como $\|\varphi\|_{\mathrm{cb}} = 1$, temos que φ é completamente contrativa e pelo mesmo lema Φ é completamente positiva. Visualizando $\mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ como $\mathcal{B}\left(\mathcal{H}^2\right)$, pelo Teorema 3.16 (de Averson) tem-se que Φ admite uma extensão completamente positiva $\Psi : \mathbb{M}_2(\mathscr{A}) \to \mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Defina $\psi : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de modo que

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} * & \psi(a) \\ * & * \end{bmatrix}.$$

[11] Vide [21, 2.2.2. Lemma, p. 46].

Note que ψ estende φ, pois se $a \in \mathscr{M}$, então $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{S}_{\mathscr{M}}$ e assim

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \varphi(a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de onde segue que $\psi(a) = \varphi(a)$. Mostremos que ψ é completamente contrativa. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$. Note que

$$\Psi^{(n)}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right) = \left[\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{i,j}^{n} = \left[\begin{bmatrix} * & \psi\left(a_{ij}\right) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n},$$

e analogamente, como analisamos no decorrer da demonstração do lema anterior, utilizando o $*$-isomorfismo canônico Shuffle temos

$$T\left(\left[\begin{bmatrix} * & \psi\left(a_{ij}\right) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right) = \begin{bmatrix} * & \psi^{(n)}(A) \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Como Ψ é completamente positivo e unital segue que $\Psi^{(n)}$ é também completamente positivo e unital. Assim, pela Proposição 2.34, $\Psi^{(n)}$ é contrativa. Logo,

$$\begin{aligned} \left\|\psi^{(n)}(A)\right\| &\leqslant \left\|\begin{bmatrix} * & \psi^{(n)}(A) \\ * & * \end{bmatrix}\right\| = \left\|T\left(\left[\begin{bmatrix} * & \psi\left(a_{ij}\right) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right)\right\| = \left\|\left[\begin{bmatrix} * & \psi\left(a_{ij}\right) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right\| \\ &= \left\|\Psi^{(n)}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right)\right\| \leqslant \left\|\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right\| = \left\|T\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{i,j}^{n}\right)\right\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|\psi^{(n)}(A)\right\| \leqslant \left\| T\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{i,j}^{n} \right) \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \|A\|.$$

Daí, temos que $\left\|\psi^{(n)}\right\| \leqslant 1$ para todo n natural. Assim, devemos ter $\|\psi\|_{\text{cb}} \leqslant 1$ e como ψ é uma extensão de φ, $\|\psi\|_{\text{cb}} = 1$.

Considere agora $\varphi : \mathscr{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ completamente limitado e não nulo. Seja $\psi : \mathscr{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por $\psi(a) = \dfrac{\varphi(a)}{\|\varphi\|_{\text{cb}}}$. Evidentemente ψ é completamente limitado e $\|\psi\|_{\text{cb}} = 1$. Daí, existe uma aplicação completamente limitada $\widetilde{\psi} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\widetilde{\psi}\big|_{\mathscr{M}} = \psi$ e $\|\widetilde{\psi}\|_{\text{cb}} = \|\psi\|_{\text{cb}} = 1$. Note que a aplicação $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definida por $\widetilde{\varphi}(a) = \|\varphi\|_{\text{cb}}\widetilde{\psi}(a)$ é uma extensão de φ completamente positiva tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{\text{cb}} = \|\varphi\|_{\text{cb}}$, como desejamos. ■

4 Envelopes injetivos e o Teorema de Hamana

Começamos esse capítulo com o seguinte exemplo, conhecido como Teorema de Phillips.

Exemplo 4.1. Sejam F um subespaço do espaço normado E e $T \in \mathcal{B}(F, \ell_\infty)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, \ell_\infty)$ extensão de T a E. Mais ainda, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o funcional linear contínuo de norma 1 dado por

$$\varphi_n : \ell_\infty \to \mathbb{C}, \quad \varphi_n\left(\left(a_j\right)_{j=1}^{\infty}\right) = a_n.$$

Então, $\varphi_n \circ T \in F'$ para todo n e $T(x) = \left(\left(\varphi_n \circ T\right)(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ para todo $x \in F$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada n existe $\widetilde{\varphi_n}$ extensão de $\varphi_n \circ T$ a E com $\|\varphi_n \circ T\| = \left\|\widetilde{\varphi_n}\right\|$. É fácil ver que o operador

$$\widetilde{T} : E \to \ell_\infty, \quad \widetilde{T}(x) = \left(\widetilde{\varphi_n}(x)\right)_{n=1}^{\infty},$$

é linear, contínuo e estende T. Por fim, relembrando que B_G denota a bola unitária fechada do espaço normado G, temos

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}\| &= \sup_{x \in B_E} \|\widetilde{T}(x)\| = \sup_{x \in B_E} \sup_{n} \left|\widetilde{\varphi}_n(x)\right| = \sup_{n} \sup_{x \in B_E} \left|\widetilde{\varphi}_n(x)\right| \\
&= \sup_{n} \left\|\widetilde{\varphi}_n\right\| = \sup_{n} \|\varphi_n \circ T\| = \sup_{n} \sup_{x \in B_F} \left|\varphi_n(T(x))\right| \\
&= \sup_{x \in B_F} \sup_{n} \left|\varphi_n(T(x))\right| = \sup_{x \in B_F} \|T(x)\| = \|T\|.
\end{aligned}$$

No caso mais geral em se tratando de espaços normados e operadores lineares contínuos, vemos que ℓ_∞ tem a característica peculiar de que qualquer $T \in \mathcal{B}(F, \ell_\infty)$ tem-se que existe uma extensão $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, \ell_\infty)$, com $F \subset E$ espaços normados. Na verdade, estudamos justamente espaços que possuem essa característica nesse capítulo, porém para uma coleção mais restrita de espaços normados e de operadores. Espaços com essa característica são conhecidos como injetivos, mas queremos tratar de uma classe ainda mais restrita entre esses espaços, que, como vemos a seguir, são os envelopes injetivos.

4.1 Envelopes injetivos

Nesse capítulo estamos interessados em estudar envelopes injetivos de um objeto em uma determinada categoria. Em termos gerais, o envelope injetivo de um objeto, é o objeto injetivo "mínimo" que "contém" o objeto original. Veremos adiante o significado disso.

Definição 4.2. Uma *categoria* $\mathscr{C} = (Ob_{\mathscr{C}}, Mor_{\mathscr{C}})$ consiste de uma classe de objetos $Ob_{\mathscr{C}}$ e uma classe de morfismos $Mor_{\mathscr{C}}$, que satisfazem as seguintes condições:

(a) A cada morfismo $f \in Mor_{\mathscr{C}}$, estão associados dois objetos $A, B \in Ob_{\mathscr{C}}$ chamados *Domínio* e *Codomínio*, denotados por $dom(f)$ e $cod(f)$, respectivamente. Nesse caso, escrevemos $f : A \to B$ e denotamos por $Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ a coleção dos morfismos com domínio A e contradomínio B;

(b) Dados $A, B, C \in Ob_{\mathscr{C}}$ existe uma operação

$$\circ : Mor_{\mathscr{C}}(B,C) \times Mor_{\mathscr{C}}(A,B) \to Mor_{\mathscr{C}}(A,C)$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

chamada *Composição*, satisfazendo a lei de associatividade, isto é, para quaiquer $g \in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$, $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ e $h \in Mor_{\mathscr{C}}(C,D)$, temos que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

(c) Para cada $A \in Ob_{\mathscr{C}}(A,A)$, existe um morfismo $1_A \in Mor_{\mathscr{A}}$ chamado *identidade*, satisfazendo e $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$, para quaisquer $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ e $g \in Mor_{\mathscr{C}}(C,A)$, com $B, C \in Ob_{\mathscr{C}}$.

Para este trabalho, não esperamos do leitor conhecimento prévio em teoria de categorias para além da definição, visto sua necessidade. A linguagem trazida de teoria de categorias será usada aqui apenas por conveniência, uma vez que essa linguagem possibilita tratar de construções similares em diversos contextos diferentes de forma unificada. Para o leitor interessado em teoria de categorias recomendamos [18]. Salienta-se ainda que as categorias que estamos interessados nesse trabalho são *categorias concretas*. De forma grosseira, categorias concretas são categorias em que os objetos podem ser interpretados como conjuntos com uma estrutura adicional e os morfismos podem ser interpretados como funções que preservam essa estrutura. A definição de objeto injetivo a seguir se aplica a esse contexto de categorias concretas e, portanto, se adéqua aos objetivos desse trabalho.

Definição 4.3. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria concreta. Um objeto I é chamado *injetivo* em $\mathscr{C}$ sempre que para todo par de objetos E, F em $\mathscr{C}$, com $F \subset E$ e todo morfismo $\varphi : F \to I$, exista um morfismo $\psi : E \to I$ que estende φ, ou seja, tal que $\psi(f) = \varphi(f)$ para cada f em F.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & I \end{tikzcd}$$

Definição 4.4. Denotamos por $\mathfrak{S}$ a categoria cujos os objetos são sistemas de operadores e cujos morfismos são mapas completamente positivos.

O Teorema 3.16 (de Averson) para mapas completamente positivos é equivalente à afirmação de que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é injetivo em $\mathfrak{S}$. Se E e F são sistemas de operadores contidos em uma C^*-álgebra $\mathscr{A}$ e $E \subset F$, então todo mapa completamente positivo $\varphi : E \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se estende para um mapa completamente positivo em $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e, em particular, se estende para um mapa completamente positivo $F \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definição 4.5. Denotamos por $\mathscr{O}$ a categoria cujos objetos são espaços de operadores e cujos morfismos são os mapas completamente limitados.

O Teorema 3.20 (de Wittstock) para mapas completamente limitados mostra que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ também é injetivo em $\mathscr{O}$. Na verdade, esse teorema é ainda mais forte que dizer que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é injetivo em $\mathscr{O}$, já que para $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ser injetivo em $\mathscr{O}$ bastaria que a extensão dada pelo Teorema fosse completamente limitada, não necessitando ter a mesma norma cb.

Para capturar a força completa do Teorema, utilizaremos uma subcategoria de $\mathscr{O}$.

Definição 4.6. Denotamos por $\mathscr{O}_1$ a categoria cujos objetos são espaços de operadores e cujos morfismos são os mapas completamente contrativos.

Proposição 4.7. *Um espaço de operadores I é injetivo em $\mathscr{O}_1$ se, e somente se, todo mapa completamente limitado $\varphi : E \to I$, em que E é um espaço de operadores em uma C^*-álgebra $\mathscr{A}$, admite uma extensão completamente limitada $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to I$ de mesma norma* cb.

Demonstração. Suponha que I seja injetivo em $\mathscr{O}_1$ e seja $\varphi : E \to I$ um mapa completamente limitado. Assim, o mapa $\psi : E \to I$ definido por $\psi = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|_{\mathrm{cb}}}$ é completamente contrativo. Por hipótese, ψ admite uma extensão $\widetilde{\psi} : \mathscr{A} \to I$ completamente contrativa. Sendo $\widetilde{\psi}$ uma extensão de ψ, temos $\|\widetilde{\psi}\|_{\mathrm{cb}} \geqslant \|\psi\|_{\mathrm{cb}} = 1$ e, portanto, $\|\widetilde{\psi}\|_{\mathrm{cb}} = 1$. É claro que $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to I$ definida por $\widetilde{\varphi} = \|\varphi\|_{\mathrm{cb}}\widetilde{\psi}$ é uma extensão de φ tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{\mathrm{cb}} = \|\varphi\|_{\mathrm{cb}}$. Reciprocamente, sejam $E \subset F$ espaços de operadores contidos numa C^*-álgebra $\mathscr{A}$ e $\varphi : E \to I$ um mapa completamente contrativo. Por hipótese, φ admite uma extensão $\widetilde{\varphi} : \mathscr{A} \to I$ completamente limitada e tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{\mathrm{cb}} = \|\varphi\|_{\mathrm{cb}}$. Assim, $\widetilde{\varphi}\big|_F$ é uma extensão de φ completamente contrativa e, portanto, I é injetivo em $\mathscr{O}_1$. ■

Observação 4.8. Segue da Proposição 4.7 que o Teorema 3.20 (de Wittstock) é equivalente à afirmação de que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é injetivo em $\mathscr{O}_1$.

Neste capítulo nos concentramos na injetividade em $\mathscr{O}_1$. Para sistemas de operadores pode parecer natural estudar também injetividade na categoria $\mathfrak{S}_1$ cujos objetos são em sistemas de operadores e os morfismo são mapas unitários completamente positivos, mas temos pela proposição a seguir que a injetividade de sistemas operadores nessas três categorias é equivalente.

Proposição 4.9. *Seja $\mathscr{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um sistema de operadores. Então temos as seguintes equivalências:*

(a) *$\mathscr{S}$ é injetivo em $\mathscr{O}_1$;*

(b) *$\mathscr{S}$ é injetivo em $\mathfrak{S}$;*

(c) *$\mathscr{S}$ é injetivo em $\mathfrak{S}_1$;*

(d) *Existe uma projeção completamente positiva $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{S}$ sobre $\mathscr{S}$.*

Demonstração. Vejamos que (a) é equivalente a (d). Assumindo (a), então a aplicação identidade $\mathrm{id} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ se estende a um mapa completamente contrativo $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{S}$. Como

ϕ estende id, temos que ϕ é uma projeção em $\mathscr{S}$. De fato, se $\phi(a) = s \in \mathscr{S}$, com $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, temos que $\phi^2(a) = \phi(s) = s = \phi(a)$. Ademais, como $\phi^{(n)}(I_n) = I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ϕ deve ser completamente positiva pela Proposição 2.23.

Por outro lado, assuma (d), e suponha que temos espaços de operadores $E \subset F$ e um mapa completamente contrativo, $\gamma : E \to \mathscr{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Observe inicialmente que uma projeção completamente positiva $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{S}$ sobre $\mathscr{S}$ é necessariamente completamente contrativa. De fato, pela Proposição 2.39 temos que $\|\phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\phi\| = \|\phi(1)\| = 1$, uma vez que $\phi(1) = 1$. Assim, pela Observação 4.8, γ tem uma extensão completamente contrativa $\psi : F \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, e $\phi \circ \psi : F \to \mathscr{S}$ é a extensão completamente contrativa desejada de γ em $\mathscr{S}$.

Vejamos que (b) é equivalente a (d). Assumindo (b), obtemos que id : $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ se estende a um mapa completamente positivo $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{S}$. Por um argumento análogo ao feito anteriormente, na implicação de (a) em (d), ϕ é uma projeção sobre $\mathscr{S}$. Reciprocamente, assuma (d) e suponha que $E \subset F$ são sistemas de operadores e $\delta : E \to \mathscr{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um mapa completamente positivo. Pelo Teorema 3.16 (de Arveson), δ admite uma extensão completamente positiva $\widetilde{\delta} : F \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, $\phi \circ \widetilde{\delta} : F \to \mathscr{S}$ é a extensão completamente positiva de δ desejada.

A prova de que (c) é equivalente a (d) segue o mesmo roteiro de da equivalência entre (b) e (d), apenas observando que $\phi \circ \widetilde{\delta}$ é unital se δ for unital, uma vez que ϕ é unital. ■

Definição 4.10. Dizemos que uma aplicação $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$, em que $\mathscr{S}$ e $\mathscr{T}$ são sistemas de operadores, é um *isomorfismo de ordem completa* se φ for inversível e φ, φ^{-1} forem completamente positivos.

O resultado a seguir mostra que todo sistema de operadores injetivo é, em um sentido apropriado, uma C^*-álgebra.

Teorema 4.11 (Choi-Effros)**.** *Sejam $\mathscr{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um sistema de operadores injetivo e $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{S}$ uma projeção completamente positiva sobre $\mathscr{S}$. Então, $\mathscr{S}$ é uma C^*-álgebra com multiplicação $\circ$ definida por $a \circ b = \phi(ab)$. Além disso, o mapa identidade de $\mathscr{S}$ para $(\mathscr{S}, \circ)$ é um isomorfismo unitário de ordem completa.*

Demonstração. Claramente $a \circ b \in \mathscr{S}$ para todo $a, b \in \mathscr{S}$. Além disso, a distributividade de $\circ$ segue imediatamente da linearidade de ϕ e $a \circ 1 = \phi(a \cdot 1) = \phi(a) = a = \phi(a) = \phi(1 \cdot a) = 1 \circ a$.

Para mostrar que $\circ$ define uma multiplicação em $\mathscr{S}$ resta mostrar a associatividade, $a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$, ou seja, que $\phi(a\phi(bc)) = \phi(\phi(ab)c)$ para todo $a,b,c\in\mathscr{S}$.

Afirmamos que para $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $a\in\mathscr{S}$, temos que $\phi(\phi(x)a) = \phi(xa)$ e $\phi(a\phi(x)) = \phi(ax)$. Assumindo a afirmação, temos que

$$\phi(a\phi(bc)) = \phi(abc) = \phi(\phi(ab)c)$$

e assim segue a associatividade.

Para verificar a afirmação, usamos a Proposição 2.34, que nos diz que $\psi\left(y^*y\right) - \psi(y)^*\psi(y) \geqslant 0$ para qualquer ψ completamente positivo e unital. Fazendo $\psi = \phi^{(2)}$ e $y = \begin{pmatrix} a^* & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $y^*y = \begin{pmatrix} aa^* & ax \\ x^*a^* & x^*x \end{pmatrix}$ e aplicando a hipótese de ϕ ser uma projeção em $\mathscr{S}$ temos

$$\begin{aligned}\psi(y^*y) - \psi(y)^*\psi(y) &= \begin{pmatrix} \phi(aa^*) & \phi(ax) \\ \phi(x^*a^*) & \phi\left(x^*x\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi(a)\phi(a^*) & \phi(a)\phi(x) \\ \phi(x)^*\phi(a^*) & \phi(x)^*\phi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi(aa^*) & \phi(ax) \\ \phi(x^*a^*) & \phi\left(x^*x\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} aa^* & a\phi(x) \\ \phi(x)^*a^* & \phi(x)^*\phi(x) \end{pmatrix} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Aplicando $\phi^{(2)}$ a esta desigualdade obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi(ax) - \phi(a\phi(x)) \\ \phi\left(x^*a^*\right) - \phi\left(\phi(x)^*a^*\right) & \phi\left(x^*x\right) - \phi\left(\phi(x)^*\phi(x)\right) \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Como ϕ é autoadjunto, a positividade desta matriz força $\phi(ax) - \phi(a\phi(x)) = 0$ pela Proposição 2.12(d).

Observe que o fato da existência de ϕ garante que $\mathscr{S}$ seja fechado em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, vide [6, Proposição 3.2.2, p. 61] e, portanto, completo.

Em seguida, verificamos a condição C^*, isto é, $\left\|a^*\circ a\right\| = \|a\|^2$. Claramente, $\left\|a^*\circ a\right\| =$

$\left\|\phi\left(a^*a\right)\right\| \leqslant \left\|a^*a\right\| = \|a\|^2$. Novamente pela Proposição 2.34, $\phi\left(a^*a\right) \geqslant \phi(a)^*\phi(a) = a^*a$ e portanto $\left\|a^* \circ a\right\| = \left\|\phi\left(a^*a\right)\right\| \geqslant \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \left\|a^*a\right\| = \|a\|^2$, e a prova de que $(S, \circ)$ é uma C^*-álgebra está completa.

Claramente, o mapa identidade de $\mathscr{S}$ para $(\mathscr{S}, \circ)$ é uma isometria. Argumentemos que é uma isometria de ordem completa. Para este fim, considere $\mathbb{M}_n(\mathscr{S}) \subset \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{B}\left(\mathcal{H}^{(n)}\right)$ e $\phi^{(n)} : \mathcal{B}\left(\mathcal{H}^{(n)}\right) \to \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$. Pelo exposto, $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$ é uma C^*-álgebra com produto $A \circ_n B = \phi^{(n)}(A \cdot B)$, e esta C^*-álgebra é isometricamente isomorfa ao sistema de operadores $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$. Com efeito, sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ e seja $C = A \cdot B$, em que $\cdot$ denota o produto usual de matrizes em $\mathbb{M}_n(\mathscr{S})$. Escrevendo $C = [c_{ij}]$, note que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \phi(a_{ik}b_{kj}) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$ e, portanto, $C = \phi^{(n)}(AB)$ como afirmado.

Pela unicidade da norma C^* em $\mathbb{M}_n((\mathscr{S}, \circ))$, o mapa de identidade de $\mathscr{S}$ para $(\mathscr{S}, \circ)$ é uma n-isometria para todo n. Como o mapa de identidade é completamente isométrico e unital, é um isomorfismo de ordem completa pela Proposição 2.23. ∎

Agora, focamos no problema da injetividade para espaços de operadores. Primeiro precisamos da seguinte caracterização de injetividade em $\mathscr{O}_1$.

Proposição 4.12. *Seja $\mathscr{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um espaço de operadores. Então, temos que $\mathscr{M}$ é injetivo em $\mathscr{O}_1$ se, e somente se, existe uma projeção completamente contrativa $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{M}$ sobre $\mathscr{M}$.*

Demonstração. Se $\mathscr{M}$ é injetivo em $\mathscr{O}_1$, então a identidade $\mathrm{id} : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ se estende para um mapa completamente contrativo $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{M}$. Como φ estende id, temos que φ é uma projeção sobre $\mathscr{M}$. Reciprocamente, suponha que $E \subset F$ são espaços de operadores e $\delta : E \to \mathscr{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um mapa completamente contrativo. Pelo Teorema 3.20 (de Wittstock), δ admite uma extensão completamente contrativa $\widetilde{\delta} : F \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, $\varphi \circ \widetilde{\delta} : F \to \mathscr{M}$ é a extensão completamente contrativa desejada. ∎

Definição 4.13. Dado um espaço de operadores F, dizemos que (E, κ) é um *envelope injetivo* de F desde que

(i) E é injetivo em $\mathscr{O}_1$;

(ii) $\kappa : F \to E$ é completamente isométrico;

(iii) Se E_1 é injetivo com $\kappa(F) \subset E_1 \subset E$, então $E_1 = E$.

Ademais, qualquer (E,κ) que satisfaça (ii) é chamado de *extensão de F*. Quando (E,κ) satisfaz (i) e (ii), então é chamado de *extensão injetiva de F*.

Identificando F com $\kappa(F)$, muitas vezes consideramos apenas E como contendo F, com o entendimento de que agora κ é simplesmente a inclusão de F em E. Assim, um envelope injetivo de F é, vagamente, um injetivo minimal contendo F. Para garantir a existência de tal objeto, seguimos os passos a seguir.

Definição 4.14. Seja $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um espaço de operadores. Chamamos uma função $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de *F-mapa* sempre que φ seja completamente contrativo e $\varphi(x) = x$ para todo x em F. Um F-mapa φ tal que $\varphi \circ \varphi = \varphi$ é chamado de *F-projeção*.

Observação 4.15. Nas condições da Definição 4.14, não precisamos ter $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = F$. Assim, uma F-projeção φ é uma projeção completamente contrativa em $E = \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, com $F \subset E$.

Definimos uma *ordem parcial* nas F-projeções imputando $\psi \prec \varphi$ desde que $\psi \circ \varphi = \psi = \varphi \circ \psi$.

Dado um F-mapa φ, definimos uma *F-seminorma* p_φ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $p_\varphi(x) = \|\varphi(x)\|$. Existe uma ordem parcial natural nas seminormas, definida por $p \leqslant q$ se e somente se $p(x) \leqslant q(x)$ para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

O próximo resultado é útil para verificarmos a existência de uma F-seminorma minimal em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definição 4.16. Fixado um número real $r > 0$, definimos $CB_r(\mathscr{S},\mathcal{H})$ como sendo o conjunto formado pelos elementos de $\mathcal{B}_r(\mathscr{S},\mathcal{H})$ com norma cb menor igual a r.

Lema 4.17. *Se $\mathscr{S}$ é de Banach, então $CB_r(\mathscr{S},\mathcal{H})$ é compacto na topologia BW.*

Demonstração. Seja $(L_\lambda)_\lambda$ uma rede em $CB_r(\mathscr{S},\mathcal{H})$, e suponha que $L_\lambda \longrightarrow L$. Note que $\|L_\lambda\| \leqslant r$ para cada λ. Se $\left(a_{ij}\right) \in \mathbb{M}_n(\mathscr{S})$, e $u, v \in \mathcal{H}^n$, então

$$\langle L(a_{ij})(u), v\rangle = \lim_\lambda \langle L_\lambda(a_{ij})(u), v\rangle.$$

pela Proposição 3.11. Daí, pelo segundo e terceiro parágrafos da demonstração do Lema 3.15, devemos obter $\|L\|_{\text{cb}} \leqslant r$. ■

Proposição 4.18. *Seja $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um espaço de operadores. Então existe uma F-seminorma minimal em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Seja $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede de F-mapas tal que $\left(p_{\varphi_\lambda}\right)_\lambda$ seja uma cadeia decrescente de F-seminormas. Lembre-se da topologia BW. Pelo Lema 4.17, $CB_1(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{H})$ é BW-compacto e, portanto, $(\varphi_\lambda)_\lambda$ tem uma sub-rede $\left(\varphi_{\lambda_\mu}\right)_\mu$ convergindo para, digamos, φ. Claramente, φ é um F-mapa, e como

$$|\langle \varphi(x)u, v\rangle| = \lim_\mu \left|\left\langle \varphi_{\lambda_\mu}(x)u, v\right\rangle\right| \leqslant \liminf_\mu \left\|\varphi_{\lambda_\mu}(x)\right\| \|u\|\|v\|,$$

segue daí que $\|\varphi(x)\| \leqslant \|\varphi_{\lambda_\mu}(x)\|$, isto é, $p_\varphi \leqslant p_{\varphi_{\lambda_\mu}}$ para todo μ, mas pela definição de sub-rede, devemos obter $p_\varphi \leqslant p_{\varphi_\lambda}$, para todo λ. Assim, toda cadeia decrescente de F-seminormas tem uma cota inferior, e segue pelo Lema de Zorn que existe uma F-seminorma minimal. ■

Teorema 4.19. *Seja $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um espaço de operadores. Se $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ for um F-mapa tal que p_φ é uma F-seminorma minimal, então φ é uma F-projeção minimal e $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é um envelope injetivo de F.*

Demonstração. Começamos provando que φ é uma F-projeção. Como $\varphi \circ \varphi$ também é um F-mapa e $\|\varphi(\varphi(x))\| \leqslant \|\varphi\|\|\varphi(x)\| \leqslant \|\varphi(x)\|$, devemos ter que $\|\varphi \circ \varphi(x)\| = \|\varphi(x)\|$ para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pela minimalidade de p_φ. Definindo $\varphi^{(k+1)} = \varphi^{(k)} \circ \varphi$ obtemos por indução que $\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| = \|\varphi(x)\|$ para todo $k \geqslant 1$. Defina $\psi_n(x) = \dfrac{\varphi(x) + \cdots + \varphi^{(n)}(x)}{n}$, logo $\left\|\psi_n(x)\right\| \leqslant \|\varphi(x)\|$, e então $\left\|\psi_n(x)\right\| = \|\varphi(x)\|$, novamente pela minimalidade de p_φ. Daí,

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \varphi \circ \varphi(x)\| &= \|\varphi(x - \varphi(x))\| = \left\|\psi_n(x - \varphi(x))\right\| \\ &= \left\|\frac{\varphi(x) + \cdots + \varphi^{(n)}(x)}{n} - \frac{\varphi^{(2)}(x) + \cdots + \varphi^{(n+1)}(x)}{n}\right\| \leqslant \frac{2\|\varphi(x)\|}{n}.\end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ é qualquer, temos $\|\varphi(x) - \varphi \circ \varphi(x)\| = 0$, e segue-se que φ é uma F-projeção.

Agora suponha que ψ seja uma F-projeção com $\psi \prec \varphi$, de modo que $\psi \circ \varphi = \psi = \varphi \circ \psi$. Já que $\|\psi(x)\| = \|\psi(\varphi(x))\| \leqslant \|\varphi(x)\|$, temos que $\|\psi(x)\| = \|\varphi(x)\|$ para todo x, pela minimalidade de p_φ. Finalmente,

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| = \|\varphi(\varphi(x) - \psi(x))\| = \|\psi(\varphi(x) - \psi(x))\| = \|\psi(x) - \psi(x)\| = 0,$$

e portanto $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo x . Assim, φ é uma F-projeção minimal.

Como $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é uma projeção completamente contrativa, segue-se da Proposição 4.12 que $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ também é injetivo em $\mathcal{O}_1$. Agora suponha que $F \subset E_1 \subset \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ com E_1 injetivo em $\mathcal{O}_1$. Então o mapa de identidade $\mathrm{id} : E_1 \to E_1$ se estende a uma projeção completamente contrativa $\gamma : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to E_1$. Como $\gamma \circ \varphi$ é um F-mapa e $\|\gamma(\varphi(x))\| \leqslant \|\gamma\|\|\varphi(x)\| \leqslant \|\varphi(x)\|$, temos que $\|\gamma \circ \varphi(x)\| = \|\varphi(x)\|$ pela minimalidade da seminorma p_φ. Como γ é uma isometria ao restringir para $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e $\gamma(\varphi(x) - \gamma \circ \varphi(x)) = 0$, temos $\varphi(x) = \gamma(\varphi(x)) \in E_1$. Daí, temos que $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \subset E_1$ e, portanto, $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = E_1$. Logo, $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é um envelope injetivo de F. ■

Observe que o Teorema 4.19 combinado com a Proposição 4.18 garante a existência de envelopes injetivos para qualquer espaço de operadores F. De fato, pela Proposição 4.18, existem F-seminormas minimais. Por sua vez, dada uma F-seminoma minimal, o Teorema 4.19 garante que um F-mapa que induza esta F-seminorma é uma F-projeção e sua imagem é um envelope injetivo de F.

Agora que sabemos da existência de um envelope injetivo, voltamos a nossa atenção para a sua singularidade e outras propriedades.

Lema 4.20. *Sejam $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um espaço de operadores e $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um F-mapa tal que p_φ é uma F-seminorma minimal. Se $\gamma : \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ for completamente contrativo e $\gamma(x) = x$ para todo $x \in F$, então $\gamma(\varphi(x)) = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Já que $\|\gamma(\varphi(x))\| \leqslant \|\varphi(x)\|$, temos que $\|\gamma(\varphi(x))\| = \|\varphi(x)\|$ pela minimalidade de p_φ. Portanto γ é uma isometria e, em particular, injetiva. Dado que $p_{\gamma\circ\varphi} = p_\varphi$ é uma F-seminorma minimal, o Teorema 4.19 implica que $\gamma \circ \varphi$ e φ são F-projeções minimais. Portanto, como φ é uma projeção e a imagem de γ está contida na imagem de φ, segue que $\varphi \circ \gamma(x) = \gamma(x)$ para todo $x \in \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Como $\gamma \circ \varphi$ é uma projeção também, temos $\gamma \circ \varphi = \gamma \circ \varphi \circ \gamma \circ \varphi = \gamma \circ \gamma \circ \varphi$. Assim, $\gamma \circ (\varphi - \gamma \circ \varphi) = 0$. Mas como γ é injetiva, $\varphi = \gamma \circ \varphi$ e o resultado segue. ■

Teorema 4.21. *Sejam (E_1, κ_1) e (E_2, κ_2) dois envelopes injetivos do espaço de operadores F. Então o mapa $i : \kappa_1(F) \to \kappa_2(F)$ definido por $i\big(\kappa_1(m)\big) = \kappa_2(m)$ se estende a um isomorfismo completamente isométrico de E_1 em E_2.*

Demonstração. Seja $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pela Proposição 4.18, existe um F-mapa $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que tal que p_φ é uma F-seminorma minimal e, pelo Teorema 4.19, φ é uma F-projeção minimal. Provando que o mapa $\kappa_1 : F \to E_1$ tem uma extensão para um isomorfismo completamente isométrico $\gamma_1 : \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to E_1$, então o resultado seguirá, já que $\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}$ produzirá o mapa desejado entre E_1 e E_2, em que γ_2 é extensão de $\kappa_2 : F \to E_2$ para $\gamma_2 : \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to E_2$.

Note primeiro que $i = \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}\Big|_{\kappa_1(F)}$. De fato, se $m \in F$, temos

$$\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(\kappa_1(m)) = \gamma_2(\kappa_1^{-1}(\kappa_1(m))) = \gamma_2(m) = \kappa_2(m).$$

Pela injetividade de E_1, existe um mapa completamente contrativo $\gamma_1 : \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to E_1$ estendendo κ_1

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa_1"'] & \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \arrow[d, dashed, "\gamma_1"] \\ & E_1 \end{tikzcd}$$

e como $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é injetivo pela Proposição 4.12, existe um mapa completamente contrativo $\beta : E_1 \to \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ com $\beta\left(\kappa_1(x)\right) = x$ para todo $x \in F$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "\kappa_1"] \arrow[dr, "\varphi"'] & E_1 \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ & \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \end{tikzcd}$$

Como $\beta \circ \gamma_1 : \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é completamente contrativo e $\beta(\gamma_1(x)) = \beta(\kappa_1(x)) = x$, para todo $x \in F$, segue pelo Lema 4.20 que $\beta \circ \gamma_1$ é a identidade em $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

Como β e γ_1 são ambos completamente contrativos, segue-se que γ_1 deve ser uma isometria completa. Por outro lado, a imagem de γ_1 é um subespaço de operadores injetivo de E_1 e, portanto, pela minimalidade de E_1, γ_1 deve ser sobrejetor. Portanto, γ_1 é um isomorfismo completamente isométrico. ■

O resultado acima mostra que o envelope injetivo é único a menos de isomorfismo completamente isométrico e depende apenas do espapaço de operadores em si e não depende do espaço de Hilbert em que ele está representado. Isto é, se $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\kappa : F \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ é uma isometria completa e $\psi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ é um $\kappa(F)$-mapa tal que p_ψ é um $\kappa(F)$-seminorma minimal, então $\left(\psi\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{H}_1\right)\right), \kappa\right)$ é um envelope injetivo de F e, portanto, completamente e isometricamente isomorfo a $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ para qualquer F-mapa φ com p_φ uma F-seminorma minimal.

Corolário 4.22 (Rigidez). *Seja (E,κ) um envelope injetivo de F, e seja $\psi : E \to E$ completamente contrativo com $\psi(\kappa(x)) = \kappa(x)$ para todo x em F. Então, $\psi(e) = e$ para todo e em E.*

Demonstração. Suponha que $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Pela Proposição 4.18, existe um F-mapa $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que p_φ é uma F-seminorma minimal. Pelo Teorema 4.19, φ é uma F-projeção minimal e $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é um envelope injetivo de F. Pelo Teorema 4.21, existe um isomorfismo completamente isométrico $f : E \to \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $f(\kappa(m)) = m$ para todo $m \in F$. Observe que $f \circ \psi \circ f^{-1} : \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é completamente contrativo e satisfaz $f \circ \psi \circ f^{-1}(x) = x$ para todo $x \in F$. Pelo Lema 4.20 temos que $f \circ \psi \circ f^{-1}$ é a identidade em $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Logo, $\psi = f^{-1} \circ \gamma \circ f$ é a identidade em E.

∎

Esta propriedade de rigidez pode ser usada para caracterizar envelopes injetivos. Chame uma extensão (E,κ) de F de *extensão rígida* sempre que $\varphi : E \to E$ for completamente contrativo e $\varphi(\kappa(x)) = \kappa(x)$ para todo $x \in F$, então o mapa φ é a identidade em E.

Definição 4.23. Denotamos por $I(F)$ o *envelope injetivo* em $\mathscr{O}_1$ de um espaço de operadores F.

Como todo sistema de operadores $\mathscr{S}$ é, em particular, um espaço de operadores, podemos considerar o envelope injetivo $I(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{O}_1$. A próxima proposição mostra que $I(\mathscr{S})$ é, automaticamente, um sistema de operadores.

Proposição 4.24. *Seja $\mathscr{S}$ um sistema de operadores. Então o envelope injetivo $I(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{O}_1$ é um sistema de operadores injetivo e, portanto, é completamente ordenado-isomórfico a uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Seja $1 \in \mathscr{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então $I(\mathscr{S}) = \varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ para alguma $\mathscr{S}$-projeção φ que é completamente contrativa e, portanto, completamente positiva pela Proposição 2.23. Assim, $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é um sistema de operadores uma vez que φ preserva adjunto e, portanto, $I(\mathscr{S})$ é uma C^*-álgebra sob o produto $a \circ b = \varphi(a \cdot b)$ pelo Teorema 4.11. ∎

Uma consequência do resultado acima é que se alguém "esquecer" a estrutura de ordem em $\mathscr{S}$ e apenas lembrar da estrutura de espaço do operador, e mergulhar $\mathscr{S}$ completamente isometricamente via $\psi : \mathscr{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com, digamos, $\psi(1) \neq 1$, então $I(\psi(\mathscr{S}))$ é completamente isométrico a $I(\mathscr{S})$ e, portanto, ainda é completamente isometricamente isomorfo a C^*-álgebra.

Os próximos resultados registram como os envelopes injetivos respeitam C^*-estruturas algébricas.

Proposição 4.25. *Seja $1 \in \mathscr{A} \subset \mathscr{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com $\mathscr{S}$ um sistema de operadores e $\mathscr{A}$ uma subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então a inclusão de $\mathscr{A}$ na C^*-álgebra $I(\mathscr{S})$ é um $*$-isomorfismo completamente isométrico.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma $\mathscr{S}$-projeção tal que $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ é isomorfo isometricamente a $I(\mathscr{S})$. Então a multiplicação em $I(\mathscr{S})$ é dada por $x \circ y = \varphi(xy)$. Portanto, para $a, b \in \mathscr{A}$, temos $a \circ b = \varphi(a \cdot b) = a \cdot b$. ■

No caso de uma C^*-álgebra unital $\mathscr{A}$, se definirmos $\mathscr{S} = \mathscr{A}$, então o resultado acima implica que $\mathscr{A}$ é uma C^*-subálgebra de $I(\mathscr{A})$. O próximo resultado explica o caso de C^*-álgebras não unitais.

Proposição 4.26. *Seja $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma C^*-álgebra não unital tal que $\mathscr{A}\mathcal{H} = \{T(x) : T \in \mathscr{A}$ e $x \in \mathcal{H}\}$ é denso em $\mathcal{H}$, e seja $\mathscr{A}_1$ unitização de $\mathscr{A}$. Se $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um $\mathscr{A}$-mapa, então φ é um $\mathscr{A}_1$-mapa. Consequentemente, a inclusão de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{A}_1$ se estende unicamente a uma isometria completa de $I(\mathscr{A})$ em $I(\mathscr{A}_1)$. Assim, $I(\mathscr{A})$ é uma C^*-álgebra unital no $\circ$-produto com $\mathscr{A}_1$ sendo uma C^*-subálgebra de $I(\mathscr{A})$.*

Demonstração. Se todo $\mathscr{A}$-mapa é um $\mathscr{A}_1$-mapa, então para qualquer $\mathscr{A}$-seminorma minimal temos que é, também, uma $\mathscr{A}_1$-seminorma minimal e a última afirmação decorre da caracterização do envelope injetivo em termos de seminormas minimais. Assim, basta provar que se φ é um $\mathscr{A}$-mapa, então $\varphi(I) = I$.

Seja $\{e_\alpha\}$ uma unidade aproximada contrativa e positiva para $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$, temos $e_\alpha \longrightarrow I$ fortemente. Como $\left\{e_\alpha^n\right\}$ também é uma unidade aproximada contrativa para $\mathscr{A}$, temos $e_\alpha^n \longrightarrow I$ fortemente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considerando a série de potências para e^x, vemos que para $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\varphi\left(e^{ite_\alpha}\right) = \varphi(I) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ite_\alpha)^n}{n!} \longrightarrow \varphi(I) + \left(e^{it} - 1\right) I$$

na topologia forte de operador.

Como e^{ite_α} é unitário e φ é contrativo, temos que $\left\|(\varphi(I) - I) + e^{it} I\right\| \leqslant 1$ para todo t. Agora é fácil verificar que $\left\|T + e^{it} I\right\| \leqslant 1$ para todos $t \in \mathbb{R}$ implica que $T = 0$. Portanto $\varphi(I) = I$. De fato, suponha $T \neq 0$, $\|T\| = c > 0$ e sem perda de generalidade seja $v \in \mathcal{H}$ tal que $\|v\| = 1$ e $\|T(v)\| = c$. Então,

$$\|T(v) + e^{it} v\|^2 = c^2 + 2\operatorname{Re}(e^{it} \langle T(v), v\rangle) + 1.$$

Escolhendo $t \in \mathbb{R}$ tal que $e^{it} \langle T(v), v\rangle = |\langle T(v), v\rangle|$ obtemos $\|T(v) + e^{it} v\| > 1$. ■

4.2 Teorema de Hamana

O objetivo desta seção é apresentar a construção de Hamana do C^*-envelope de uma álgebra de operadores $\mathscr{A}$ a partir de seu envelope injetivo. Em certo sentido, o C^*-envelope de $\mathscr{A}$ pode ser pensado como a menor C^*-álgebra contendo $\mathscr{A}$.

Definição 4.27. Uma *álgebra de operadores* $\mathscr{A}$ é uma subálgebra de uma C^*-álgebra.

Definição 4.28. Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de operadores. Dadas uma C^*-álgebra $\mathscr{B}$ e um homomorfismo completamente isométrico $\gamma : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, dizemos que $(\mathscr{B}, \gamma)$ é um *C^*-envelope de $\mathscr{A}$* se $\mathscr{B} = C^*(\gamma(\mathscr{A}))$ e para qualquer outro homomorfismo completamente isométrico $\rho : \mathscr{A} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} = C^*(\rho(\mathscr{A}))$, existe (um único) $*$-homomorfismo sobrejetor $\pi : \mathcal{C} \to \mathscr{B}$ tal que $\pi(\rho(a)) = \gamma(a)$ para todo $a \in \mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\gamma"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathscr{B} \\ & \mathcal{C} \arrow[u, dashed, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

Identificando $\mathscr{A}$ com $\gamma(\mathscr{A})$, muitas vezes consideramos apenas $\mathscr{B}$ como contendo $\mathscr{A}$, com o entendimento de que agora γ é simplesmente a inclusão de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$. Assim, podemos dizer apenas que $\mathscr{B}$ é um C^*-envelope de $\mathscr{A}$.

Observação 4.29. O $*$-homomorfismo π da definição anterior é necessariamente único. De fato, sejam $\pi_1 : \mathcal{C} \to \mathscr{B}$ e $\pi_2 : \mathcal{C} \to \mathscr{B}$ $*$-homomorfismos sobrejetores tais que $\pi_1(\rho(a)) = \gamma(a) = \pi_2(\rho(a))$. Como π_1 e π_2 coincidem em $\rho(A)$ e $\mathcal{C} = C^*(\rho(A))$, devemos ter $\pi_1 = \pi_2$.

Observação 4.30. C^*-envelopes de uma álgebra de operadores $\mathscr{A}$ são unicamente determinados a menos de $*$-isomorfismo. De fato, se $(\mathscr{B}_1, \gamma_1)$ e $(\mathscr{B}_2, \gamma_2)$ forem dois C^*-envelopes de $\mathscr{A}$, então por definição existem $*$-homomorfismos sobrejetores $\pi_1 : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ e $\pi_2 : \mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_1$ tais que $\pi_1(\gamma_1(a)) = \gamma_2(a)$ e $\pi_2(\gamma_2(a)) = \gamma_1(a)$. Assim, $\pi_2(\pi_1(\gamma_1(a))) = \pi_2(\gamma_2(a)) = \gamma_1(a)$ e $\pi_1(\pi_2(\gamma_2(a))) = \pi_1(\gamma_1(a)) = \gamma_2(a)$ e, pela unicidade apontada na Observação 4.29, $\pi_2 \circ \pi_1 = id_{B_1}$ e $\pi_1 \circ \pi_2 = id_{B_2}$, de onde segue que π_1 e π_2 são $*$-isomorfismos.

Como C^*-envelopes de álgebras de operadores são únicos, a menos de $*$-isomorfismo, adotamos a notação $C^*_e(\mathscr{A})$ para nos referimos a um C^*-envelope de $\mathscr{A}$.

Proposição 4.31. *Seja $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma álgebra de operadores unital. Então $I(\mathscr{A}) = I\left(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*\right)$ é uma C^*-álgebra, e a inclusão de $\mathscr{A}$ na C^*-álgebra $I(\mathscr{A})$ é um isomorfismo completamente isométrico.*

Demonstração. Como $1 \in \mathscr{A}$, qualquer $\mathscr{A}$-mapa $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é completamente positivo pela Proposição 2.23, e, portanto, para $a, b \in \mathscr{A}$

$$\varphi\left(a + b^*\right) = \varphi(a) + \varphi(b)^* = a + b^*.$$

Dessarte, todo $\mathscr{A}$-mapa é na verdade um $\left(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*\right)$-mapa. Daí, $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = I(\mathscr{A}) = I\left(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*\right)$, em que φ é tal que p_φ é uma seminorma minimal. Como $\mathscr{A} + \mathscr{A}^*$ é um sistema de operadores, pela Proposição 4.24 segue que $I(\mathscr{A})$ é uma C^*-álgebra. O fato de a inclusão ser um isomorfismo completamente isométrico decorre da Proposição 4.25. ■

Observe que se $\rho : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um isomorfismo completamente isométrico, então os sistemas de operadores $\mathscr{A} + \mathscr{A}^*$ e $\rho(\mathscr{A}) + \rho(\mathscr{A})^*$ são isomorfos completamente ordenados através do mapa $a + b^* \mapsto \rho(a) + \rho(b)^*$ e, portanto, o sistema de operadores $\mathscr{A} + \mathscr{A}^*$ não depende de uma representação particular de $\mathscr{A}$.

Lema 4.32. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ C^*-álgebras unitais, e seja $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ completamente positivo com $\phi(1) = 1$. Então,*

$$\left\{a \in \mathscr{A} : \phi(a)^*\phi(a) = \phi\left(a^*a\right) \text{ e } \phi(a)\phi(a)^* = \phi\left(aa^*\right)\right\} = \tag{4.2.1}$$

$$\{a \in \mathscr{A} : \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \text{ e } \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) \text{ para todo } b \in \mathscr{A}\} \tag{4.2.2}$$

é uma C^*-subálgebra de $\mathscr{A}$, e ϕ é um $*$-homomorfismo quando restrito a este conjunto.

Demonstração. Se a pertence ao conjunto (4.2.2), então escolhendo $b = a^*$ obtemos $\phi\left(a^*a\right) = \phi\left(a^*\right)\phi(a) = \phi(a)^*\phi(a)$, já que ϕ é positivo, analogamente temos que $\phi\left(aa^*\right) = \phi(a)\phi(a)^*$. Por outro lado, seja a pertencente ao conjunto (4.2.1). Então, aplicando a Proposição 2.34 ao mapa $\phi^{(2)}$ e à matriz $\begin{bmatrix} a & b^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \phi(a)^*\phi(a) & \phi(a)^*\phi(b^*) \\ \phi(b)\phi(a) & \phi(b)\phi(b)^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi(a) & \phi\left(b^*\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \phi(a) & \phi\left(b^*\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\leqslant \phi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} a & b^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a & b^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \phi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} a^*a & a^*b^* \\ ba & bb^* \end{bmatrix}\right),
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} \phi\left(a^*a\right) - \phi(a)^*\phi(a) & \phi\left(a^*b^*\right) - \phi(a)^*\phi\left(b^*\right) \\ \phi(ba) - \phi(b)\phi(a) & \phi\left(bb^*\right) - \phi(b)\phi\left(b^*\right) \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Como a $(1,1)$-ésima entrada desta matriz é igual a 0, segue-se que a $(2,1)$-ésima entrada também deve ser igual a 0 pela Proposição 2.12(d). Assim, $\phi(b)\phi(a) = \phi(ba)$. Além disso, alterando $\begin{bmatrix} a & b^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} b & a^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtemos $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$. Portanto, os dois conjuntos são iguais.

O fato de ϕ ser um $*$-homomorfismo segue da definição dos conjuntos mencionados e por

ϕ ser positivo. Como ϕ é contínua e operação de multiplicação também é, segue que o conjunto é fechado, o que garante que é uma C^*-subálgebra de $\mathscr{A}$, uma vez que é claro as operações algébricas, devido a definição do conjunto. ■

O próximo resultado, devido a Hamana, mostra que a C^*-álgebra gerada por uma álgebra de operadores em seu envelope injetivo coincide com seu C^*-envelope, o que garante que toda álgebra de operadores admite um C^*-envelope.

Teorema 4.33 (Hamana)**.** *Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de operadores com unidade. Se $C^*(\mathscr{A})$ é a C^*-subálgebra de $I(\mathscr{A})$ gerada por $\mathscr{A}$, então $C^*(\mathscr{A})$ é um C^*-envelope de $\mathscr{A}$. Mais precisamente, pra qualquer C^*-álgebra $\mathscr{B}$ e qualquer homomorfismo completamente isométrico $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tal que $\mathscr{B} = C^*(\rho(\mathscr{A}))$, existe um $*$-homomorfismo sobrejetor $\pi : \mathscr{B} \to C^*(\mathscr{A})$ tal que $\pi(\rho(a)) = a$ para todo $a \in \mathscr{A}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathscr{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Assim, $\rho : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um homomorfismo completamente isométrico. Pela injetividade de $I(\mathscr{A})$, existe um mapa completamente contrativo $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to I(\mathscr{A})$ tal que $\phi(\rho(a)) = a$ para todo $a \in \mathscr{A}$. Como ρ é unital, segue que ϕ é unital e consequentemente completamente positiva pela Proposição 2.23. Da mesma forma, pela Observação 4.8, existe um mapa completamente contrativo $\psi : I(\mathscr{A}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\psi(a) = \rho(a)$ para todo $a \in A$. Novamente, como ρ é unital, temos que ψ é unital e completamente positiva pela Proposição 2.23. Como $\phi(\psi(a)) = \phi(\rho(a)) = a$ para todo $a \in \mathscr{A}$, pelo Corolário 4.22, temos $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{I(\mathscr{A})}$.

Afirmamos que $\phi\left(\rho(a)^*\rho(a)\right) = a^*a$ e $\phi\left(\rho(a)\rho(a)^*\right) = aa^*$. Com efeito, pela Proposição 2.34, $\phi\left(\rho(a)^*\rho(a)\right) \geqslant \phi(\rho(a))^*\phi(\rho(a)) = a^*a$, enquanto $\psi\left(a^*a\right) \geqslant \psi(a)^*\psi(a) = \rho(a)^*\rho(a)$. Aplicando ϕ à segunda desigualdade resulta

$$a^*a = \phi \circ \psi\left(a^*a\right) \geqslant \phi\left(\rho(a)^*\rho(a)\right) \geqslant a^*a,$$

e então $\phi\left(\rho(a)^*\rho(a)\right) = a^*a$. Da mesma forma, $\phi\left(\rho(a)\rho(a)^*\right) = aa^*$.

Pelo Lema 4.32, nos domínios multiplicativos de aplicações completamente positivas, essas igualdades implicam que ϕ é um $*$-homomorfismo quando restrito a $C^*(\rho(\mathscr{A}))$, isto é, $\pi = \phi|_{C^*(\rho(\mathscr{A}))}$ é o $*$-homormorfismo desejado. A sobrejetividade de π segue do fato de que $\mathscr{A}$ está contido na imagem de π. ■

Definição 4.34. Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff, então uma subálgebra $\mathscr{A} \subset C(X)$ é chamada de *álgebra uniforme em* X se $1 \in \mathscr{A}$ e $\mathscr{A}$ separa pontos, isto é, para qualquer $x \neq y$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Observação 4.35. Se $\mathscr{A} \subset C(X)$ é uma álgebra uniforme em X, então a $*$-álgebra gerada por $\mathscr{A}$ é densa em $C(X)$ pelo Teorema de Stone-Weierstrass. Por consequência, a C^*-álgebra $C^*(\mathscr{A})$ gerada por $\mathscr{A}$ coincide com $C(X)$.

Corolário 4.36 (Silov)**.** *Seja $\mathscr{A} \subset C(X)$ uma álgebra uniforme em X. Existe um único subconjunto $Y \subset X$ compacto satisfazendo*

(i) *O homomorfismo de restrição*

$$\gamma : C(X) \to C(Y)$$
$$f \mapsto f|_Y$$

é isométrico em $\mathscr{A}$;

(ii) *Se $W \subset X$* é um subconjunto compacto tal que o morfismo restrição $f \in C(X) \mapsto f|_W \in C(W)$ é isométrico em $\mathscr{A}$, então $Y \subset W$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.33 (de Hamana), $\mathscr{A}$ admite um C^*-envelope $(C_e^*(\mathscr{A}), \rho)$. Observe que $C_e^*(\mathscr{A})$ é uma C^*-álgebra gerada pela imagem de ρ. Deste modo, podemos assumir sem perda de generalidade que $C_e^*(\mathscr{A}) = C(Z)$ para algum espaço compacto e Hausdorff Z.

Como a inclusão $\mathscr{A} \hookrightarrow C(X)$ é um homomorfismo completamente contrativo, existe um único $*$-homomorfismo sobrejetor $\pi : C(X) \to C(Z)$ tal que $\pi(f) = \rho(f)$ para todo $f \in \mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, hook, "\rho"] \arrow[dr, hook, "\gamma"'] & C(Z) \\
& C(X) \arrow[u, dashed, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Como π é sobrejetor, existe uma injeção contínua $h : Z \to X$ tal que $\pi(f) = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$. Seja $Y = h(Z)$ e note que Y é um subconjunto compacto de X e que $\gamma(f) \circ h = f|_Y \circ h$

$= f \circ h$. Logo, para qualquer $f \in \mathscr{A}$ temos

$$\|f\| = \|\rho(f)\| = \|\pi(f)\| = \|f \circ h\| = \|\gamma(f) \circ h\| \leqslant \|\gamma(f)\| \leqslant \|f\|$$

e, portanto, γ é isométrico em $\mathscr{A}$, concluindo (i).

Para verificar (ii), considere $W \subset X$ um subconjunto compacto tal que o homomorfismo de restrição

$$\begin{aligned} \gamma_W : C(X) &\to C(W) \\ f &\mapsto f\,|_W \end{aligned}$$

seja isométrico em $\mathscr{A}$. Como $\gamma_W\,|_{\mathscr{A}} \colon \mathscr{A} \to C(W)$ é isométrico (e, portanto, completamente isométrico, pois $C(W)$ é abeliana), existe um único $*$-homomorfismo sobrejetor $\pi_W : C(W) \to C(Z)$ tal que $\pi_W(\gamma_W(f)) = \rho(f)$ para todo $f \in \mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\rho"] \arrow[dr, hook, "\gamma_W|_{\mathscr{A}}"'] & C(Z) \\ & C(W) \arrow[u, dashed, "\pi_W"'] \end{tikzcd}$$

Como $\pi_W : C(W) \to C(Z)$ é um $*$-homomorfismo sobrejetor, existe $h_W : Z \to W$ tal que $\pi_W(f) = f \circ h_W$ para todo $f \in C(W)$. Além disso, como $\gamma_W : C(X) \to C(W)$ é o homomorfismo de restrição, podemos escrever $\gamma_W(f) = f \circ i$ para todo $f \in C(X)$, em que $i : W \hookrightarrow X$ é a inclusão. Logo, para qualquer $f \in \mathscr{A}$, temos

$$f \circ i \circ h_W = \pi_W(f \circ i) = \pi_W(\gamma_W(f)) = \rho(f) = \pi(f) = f \circ h.$$

Mostremos que $h = i \circ h_W$. De fato, se $i \circ h_W \neq h$, então existe $z \in Z$ tal que $i \circ h_W(z) \neq h(z)$. Como $\mathscr{A}$ separa pontos, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(i \circ h_W(z)) \neq f(h(z))$ de onde teríamos $f \circ i \circ h_W \neq f \circ h$ com $f \in \mathscr{A}$. Logo, $Y = h(Z) = i(h_W(Z)) \subset W$, verificando (ii).

Para verificar a unicidade de Y, seja Y' um subconjunto compacto de X satisfazendo (i) e (ii). Assim, devemos ter $Y \subset Y'$ e $Y' \subset Y$, concluindo o resultado. ■

Vejamos agora que, a menos de homeomorfismo, o conjunto Y do Corolário 4.36 (de

Silov) é unicamente determinado pela álgebra uniforme $\mathscr{A}$ e não depende do espaço X onde ela está representada.

Proposição 4.37. *Seja $\mathscr{A} \subset C(X)$ uma álgebra uniforme em X e $\phi : \mathscr{A} \to C(X_1)$ um isomorfismo isométrico tal que $\phi(\mathscr{A})$ é uma álgebra uniforme em $C(X_1)$. Se Y e Y_1 são os únicos subconjuntos compactos de X e X_1, respectivamente, satisfazendo as condições* (i) *e* (ii) *do Corolário 4.36 (de Silov), então existe um homeomorfismo $\widetilde{h} : Y_1 \to Y$ tal que $\phi(f)\,|_{Y_1} = f \circ \widetilde{h}$ para todo $f \in \mathscr{A}$.*

Demonstração. Seja $(C(Z), \rho)$ um C^*-envelope de $\mathscr{A}$. Sendo $\phi : \mathscr{A} \to C(X_1)$ isométrico e $C(X_1)$ abeliana, segue que ϕ é completamente isométrico. Assim, temos que existem únicos $*$-homomorfismos sobrejetivos $\pi : C(X) \to C(Z)$ e $\pi_1 : C(X_1) \to C(Z)$ tais que $\pi(f) = \rho(f)$ e $\pi_1(\phi(g)) = \rho(g)$ para todo $f \in C(X)$ e $g \in C(Y_1)$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\rho"] \arrow[dr, hook] & C(Z) \\ & C(X) \arrow[u, dashed, "\pi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\rho"] \arrow[dr, hook, "\phi"'] & C(Z) \\ & C(X_1) \arrow[u, dashed, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

Sendo π e π_1 $*$-homomorfismo sobrejetivos, existem $h : Z \to X$, $h_1 : Z \to X_1$ funções contínuas e injetivas tais que $\pi(f) = f \circ h$ e $\pi_1(g) = g \circ h_1$ para todo $f \in C(X)$ e $g \in C(X_1)$. Lembre da prova do Corolário 4.36 (de Silov) que $Y_1 = h_1(Z)$ e $Y = h(Z)$ são subconjuntos compactos Hausdorff e, portanto, as correstrições $h : Z \to Y$ e $h_1 : Z \to Y_1$ são homeomorfismos. Logo, $\widetilde{h} := h \circ h_1^{-1} : Y_1 \to Y$ é um homeomorfismo. Além disso, para todo $f \in \mathscr{A}$ temos

$$\phi(f) \circ h_1 = \pi_1(\phi(f)) = \rho(f) = \pi(f) = f \circ h$$

e compondo com h_1^{-1}, obtemos $\phi(f)\,|_{Y_1} = f \circ \widetilde{h}$ para todo $f \in \mathscr{A}$. ■

O resultado acima motiva a seguinte definição.

Definição 4.38. Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra uniforme. Chamamos *fronteira de Silov* o espaço compacto Hausdorff dado pelo Corolário 4.36 (de Silov) e denotamos por $\partial_S \mathscr{A}$.

Corolário 4.39. *Se $\mathscr{A}$ for uma álgebra uniforme em X, então $C_e^*(\mathscr{A}) = C(\partial_S \mathscr{A})$*

Demonstração. Suponha que $\mathscr{A} \subset C(X)$ é uma álgebra uniforme em X. Pelo Corolário 4.36 (de Silov), a restição

$$\gamma : C(X) \to C(\partial_S \mathscr{A})$$
$$f \mapsto f\,|_{\partial_S \mathscr{A}}$$

é isométrico em $\mathscr{A}$ e, portanto, a restrição $\gamma\,|_{\mathscr{A}}$, é um homomorfismo completamente isométrico. Vejamos que $(C(\partial_S \mathscr{A}), \gamma\,|_{\mathscr{A}})$ é um C^*-envelope de $\mathscr{A}$. De fato, para qualquer homomorfismo completamente isométrico $\rho : \mathscr{A} \to C(Z)$ tal que $C^*(\rho(\mathscr{A})) = C(Z)$, existe $Y \subset Z$ compacto satisfazendo as condições (i) e (ii) do Corolário 4.36 (de Silov). Pela Proposição 4.37, existe um homeomorfismo $\widetilde{h} : Y \to \partial_S \mathscr{A}$ tal que $\rho(f)\,|_Y = f \circ \widetilde{h}$ para todo $f \in \mathscr{A}$. Observe que $\widetilde{h}^{-1} : \partial_S \mathscr{A} \to Y \subset Z$ é uma função contínua e injetiva. Logo, o $*$-homomorfismo

$$\pi : C(Z) \to C(\partial_S \mathscr{A})$$
$$g \mapsto g \circ \widetilde{h}^{-1}$$

é sobrejetor e satisfaz

$$\pi(\rho(f)) = \rho(f) \circ \widetilde{h}^{-1} = \rho(f)\,|_Y \circ \widetilde{h}^{-1} = f \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{h}^{-1} = f\,|_{\partial_S \mathscr{A}} = f \circ \gamma\,|_{\mathscr{A}}\,(f)$$

para todo $f \in \mathscr{A}$, de onde segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\gamma|_{\mathscr{A}}"] \arrow[dr, "\rho"'] & C(\partial_S \mathscr{A}) \\ & C(Z) \arrow[u, dashed, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo e, de fato, $(C(\partial_S \mathscr{A}), \gamma_{\mathscr{A}})$ é um C^*-envelope de $\mathscr{A}$. ■

Exemplo 4.40. Se $A(\mathbb{D})$ é a álgebra do disco, então $C_e^*(A(\mathbb{D})) = C(\mathbb{T})$. De fato, basta verificar que $\partial_S A(\mathbb{D}) = \mathbb{T}$. Pelo Princípio do Módulo Máximo, toda função contínua $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ atinge seu máximo em $\mathbb{T}$. Logo, a restrição $\gamma : C(\overline{\mathbb{D}}) \to C(\mathbb{T})$ é um homomorfismo isométrico em $A(\mathbb{D})$. Além disso, se $X \subset \overline{\mathbb{D}}$ é um subconjunto compacto tal que a restrição $\gamma : C(\overline{\mathbb{D}}) \to C(X)$ é um homomorfismo isométrico, então novamente pelo Princípio do Módulo Máximo devemos ter $\mathbb{T} \subset X$.

Proposição 4.41. *Seja $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma álgebra de operadores. Se $C^*(\mathscr{A})$ é simples, então $C^*_e(\mathscr{A}) = C^*(\mathscr{A})$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.33 (de Hamana) existe um $*$-homomorfismo sobrejetor $\varphi : C^*(\mathscr{A}) \to C^*_e(\mathscr{A})$. Lembre que $\ker(\varphi)$ é um ideal de $C^*(\mathscr{A})$. Por hipótese $C^*(\mathscr{A})$ é simples, o que implica que $\ker(\mathscr{A}) = \{0\}$. Consequentemente, φ é injetivo. ∎

Exemplo 4.42. Seja $\mathscr{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores. Observe que o adjunto de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior e, portanto, $C^*(\mathscr{A}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Como $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é simples, segue da Proposição 4.41 que $C^*_e(\mathscr{A}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

5 Apêndice - Teoria dos Operadores trace-class e Hilbert-Schmidt

5.1 Decomposição Polar

O leitor pode encontrar as demonstrações dos teoremas dessa seção em [21, p. 50-52]

Definição 5.1. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e considere $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o espaço de Banach dos operadores limitados $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Um operador $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado de *isometria parcial* se W^*W é uma projeção.

Teorema 5.2. *Para um operador $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *W é uma isometria parcial;*

(b) $W = WW^*W$.

Observação 5.3. Para uma isometria parcial $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é válido que $\|W\| \leqslant 1$ pois $\mathcal{H} = \ker^{\perp} W \oplus \ker W$ e $W|_{\ker^{\perp} W}$ é uma isometria.

Observação 5.4. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, lembre-se que $|T| = \sqrt{T^*T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador positivo.

Teorema 5.5. *Todo operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admite uma única decomposição $T = W|T|$ tal que*

(a) *$W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma isometria parcial;*

(b) $\ker(T) = \ker(W) = \ker(|T|)$*;*

(c) $W^*T = |T|$.

Definição 5.6. A decomposição $T = W|T|$, em que W é isometria parcial, é chamada de *decomposição polar* de T.

5.2 Operadores trace-class e Hilbert-Schmidt

Antes de iniciarmos os resultados, é importante ponderar uma observação. Os espaços de Hilbert $\mathcal{H}$ podem ser, ou não, separáveis. No caso em que $\mathcal{H}$ é separável, todos os resultados a seguir não precisam de alterações. Contudo, no caso em que o espaço de Hilbert não for separável, precisamos verificar o que se segue.

Primeiro, assuma que exista $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, em que $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert não separável, com $\sum_i \langle |T|(e_i), e_i \rangle < \infty$, em que $(e_i)_i$ é base ortonormal de $\mathcal{K}$. Nesse caso, é necessário que exista um conjunto enumerável de $\left(e_{i_n}\right)_{n=1}^{\infty} \subset (e_i)_i$ tal que $\sum_i \langle |T|(e_i), e_i \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|(e_{i_n}), e_{i_n} \rangle$. Observe que se $e_j \notin \left(e_{i_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, temos $\langle |T|(e_j), e_j \rangle = 0$.

Por outro lado, $|T|$ é positivo, então, podemos escrever $|T| = S^*S$. Assim, se $\langle |T|(u), u \rangle = 0$, com $u \neq 0$, temos $\|S(u)\|^2 = \langle S(u), S(u) \rangle = \langle S^*S(u), u \rangle = \langle |T|(u), u \rangle = 0$. Daí, teríamos que $S(u) = 0$ e, portanto, $|T|(u) = S^*S(u) = S^*(0) = 0$. Portanto, podemos assumir que $u \notin \overline{\operatorname{span}\{e_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}}$, porém, isso que dizer que o domínio ao qual $|T|$ não se anula é separável, então enxergando $\overline{\operatorname{span}\{e_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ como o domínio de $|T|$, temos que os resultados que se seguem ainda são válidos.

Proposição 5.7. *Se $(e_n)_n, (f_m)_m$ são bases ortonormais de $\mathcal{H}$ e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $\sum_n \left\|A(e_n)\right\|^2 = \sum_m \left\|A^*(f_m)\right\|^2 = \sum_n \sum_m \left|\left\langle A(e_n), f_m \right\rangle\right|^2$.*

Demonstração. Pela identidade de Parseval, vide [6, Teorema 5.3.10, p. 119], temos para cada n que $\left\|A(e_n)\right\|^2 = \sum_m \left|\left\langle A(e_n), f_m \right\rangle\right|^2$. Do mesmo modo, para cada m temos que $\left\|A^*(f_m)\right\|^2 = \sum_n \left|\left\langle e_n, A^*(f_m) \right\rangle\right|^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_n \left\|A(e_n)\right\|^2 &= \sum_n \sum_m \left|\left\langle A(e_n), f_m \right\rangle\right|^2 = \sum_n \sum_m \left|\left\langle e_n, A^*(f_m) \right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_m \sum_n \left|\left\langle e_n, A^*(f_m) \right\rangle\right|^2 = \sum_m \left\|A^*(f_m)\right\|^2.
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.8. *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então o somatório $\sum_n \left\langle |A|(e_n), e_n \right\rangle$ independe da base ortonormal $(e_n)_n$.*

Demonstração. De fato, se $(e_n)_n$ e $(f_m)_m$ são bases ortornormais de $\mathcal{H}$ então

$$\begin{aligned}
\sum_n \left\langle |A|(e_n), e_n \right\rangle &= \sum_n \left\langle \sqrt{A^*A}(e_n), e_n \right\rangle = \sum_n \left\langle \sqrt{\sqrt{A^*A}}(e_n), \sqrt{\sqrt{A^*A}}(e_n) \right\rangle \\
&= \sum_n \left\| \sqrt{\sqrt{A^*A}}(e_n) \right\|^2 = \sum_n \sum_m \left| \left\langle \sqrt{\sqrt{A^*A}}(e_n), f_m \right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_m \sum_n \left| \left\langle \sqrt{\sqrt{A^*A}}(e_n), f_m \right\rangle \right|^2 = \sum_m \left\| \sqrt{\sqrt{A^*A}}(f_m) \right\|^2 = \sum_m \left\langle |A|(f_m), f_m \right\rangle .
\end{aligned}$$

■

Definição 5.9. Um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado *trace-class* se existe uma base ortonormal $(e_n)_n$ tal que $\sum_n \left\langle |A|(e_n), e_n \right\rangle < \infty$. O conjunto de tais operadores será denotado por $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Para cada $A \in \mathcal{B}_1$ definimos a *trace-norm* $\|A\|_1 = \sum_n \left\langle |A|(e_n), e_n \right\rangle$.

Definição 5.10. Um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado *Hilbert-Schmidt* se $|A|^2 \in \mathcal{B}_1$ e denotamos por $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_n \left\langle |A|^2(e_n), e_n \right\rangle} = \sqrt{\left\| |A|^2 \right\|_1}$. O conjunto de tais operadores será denotado por $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

Proposição 5.11. *Para cada $A \in \mathcal{B}_2$, as seguintes proposições são verdadeiras:*

(a) $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_n \left\| A(e_n) \right\|^2}$;

(b) $\left\| A^* \right\|_2 = \|A\|_2$;

(c) $\|A\| \leqslant \|A\|_2$;

(d) $\| \cdot \|_2$ é norma sobre $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2$ é um espaço vetorial;

(e) $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\|AT\|_2, \|TA\|_2 \leqslant \|T\| \|A\|_2$.

Demonstração. (a) Basta ver que

$$\begin{aligned}
\sum_n \left\| A(e_n) \right\|^2 &= \sum_n \left\langle A(e_n), A(e_n) \right\rangle = \sum_n \left\langle A^*A(e_n), e_n \right\rangle \\
&= \sum_n \left\langle \sqrt{A^*A}^2(e_n), e_n \right\rangle = \sum_n \left\langle |A|^2(e_n), e_n \right\rangle = \|A\|_2^2.
\end{aligned}$$

(b) Usando o item (a) e a Proposição 5.7 temos

$$\|A^*\|_2 = \sqrt{\sum_n \|A^*(e_n)\|^2} = \sqrt{\sum_n \|A(e_n)\|^2} = \|A\|_2.$$

(c) Seja $e \in \mathcal{H}$ tal que $\|e\| = 1$. Considere uma base ortonormal $(e_n)_n$ que contenha e. Assim $\|A(e)\| \leqslant \sqrt{\sum_n \|A(e_n)\|^2} = \|A\|_2$. Portanto $\|A\| \leqslant \|A\|_2$.

(d) Sejam $A, B \in \mathcal{B}_2$. Então $\Big(\|A(e_n)\|\Big)_{n=1}^{\infty}, \Big(\|B(e_n)\|\Big)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$.[12] Usando a desigualdade triangular para ℓ^2 temos que

$$\sqrt{\sum_n \Big(\|A(e_n)\| + \|B(e_n)\|\Big)^2} \leqslant \sqrt{\sum_n \|A(e_n)\|^2} + \sqrt{\sum_n \|B(e_n)\|^2} = \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

Daí,

$$\|A+B\|_2^2 = \sum_n \|A(e_n) + B(e_n)\|^2 \leqslant \sum_n \Big(\|A(e_n)\| + \|B(e_n)\|\Big)^2 \leqslant (\|A\|_2 + \|B\|_2)^2 < \infty.$$

Em particular, se $\lambda \in \mathbb{C}$ então $\lambda A \in \mathcal{B}_2$ pelo item (a), e portanto temos que $\mathcal{B}_2$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(e) Seja $(e_n)_n$ base ortonormal e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então $\|TA(e_n)\|^2 \leqslant \|T\|^2 \|A(e_n)\|^2$. Usando o item (a), concluímos que

$$\|TA\|_2 = \sqrt{\sum_n \|TA(e_n)\|^2} \leqslant \sqrt{\sum_n \|T\|^2 \|A(e_n)\|^2} = \|T\|\|A\|_2 < \infty.$$

Logo $TA \in \mathcal{B}_2$ e $\|TA\|_2 \leqslant \|T\|\|A\|_2$. Note que pelo o que acabamos de mostrar vale que $\|T^*A^*\|_2 \leqslant \|T^*\| \|A^*\|_2 = \|T\|\|A\|_2 < \infty$. Também $\|T^*A^*\|_2 = \Big\|(T^*A^*)^*\Big\|_2 = \|AT\|_2$. Assim $AT \in \mathcal{B}_2$ e $\|AT\|_2 \leqslant \|T\|\|A\|_2$. Portanto, $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Observação 5.12. Caso $\mathcal{H}$ não seja separável, em vez de enxergarmos $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, enxergamos por $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, em que $\mathcal{K}$ é separável, com a ressalva que podemos expandir T anulando-o fora de $\mathcal{K}$. Por outro lado, $\mathcal{H}$ sendo separável não se aplica alterações. Nesse caso temos o corolário a seguir.

[12] Espaço das sequências complexas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.

Corolário 5.13. *Todo operador Hilbert-Schmidt é compacto.*

Demonstração. Seja T um operador Hilber-Schmidt. Usando a Observação 5.12, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{K}$ separável tal que T se anula fora de $\mathcal{K}$. Como a imagem de T também é separável, existe um espaço de Hilbert L separável (podemos tomar $L = \overline{\mathcal{K} + T(\mathcal{K})}$) tal que $T : L \to L$ e assim vemos T como um operador em $\mathcal{B}_2(L)$. Pela Proposição 5.11(a), a identidade em $\mathcal{B}(L)$ não pertence a $\mathcal{B}_2(L)$ e daí $\mathcal{B}_2(L)$ é um ideal próprio de $\mathcal{B}(L)$ e, portanto, $T \in \mathcal{B}_2(L) \subset \mathcal{B}_0(L)$.[13] Sendo T compacto quando visto como um operador em $\mathcal{B}(L)$, é claro que estendendo T por 0 fora de L, vemos que $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é compacto. ■

Proposição 5.14. *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então são equivalentes:*

(a) $A \in \mathcal{B}_1$;

(b) $\sqrt{|A|} \in \mathcal{B}_2$;

(c) A é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt;

(d) $|A|$ é o produto de dois operadores Hilbert-Schmidt.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Se $A \in \mathcal{B}_1$, então $\sum_n \langle |A|(e_n), e_n \rangle < \infty$. Portanto,

$$\sqrt{\sum_n \left\langle \left(\sqrt{|A|}\right)^2 (e_n), e_n \right\rangle} = \sqrt{\sum_n \langle |A|(e_n), e_n \rangle} < \infty.$$

(b) $\Rightarrow$ (c). Seja $A = W|A|$ a decomposição polar de A. Então $A = \left(W\sqrt{|A|}\right)\sqrt{|A|}$. Como por hipótese $\sqrt{|A|} \in \mathcal{B}_2$, segue da Proposição 5.11(d) que $W\sqrt{|A|} \in \mathcal{B}_2$. Portanto, A se escreve como produto de dois operadores Hilbert-Schmidt.

(c) $\Rightarrow$ (d) Se $A = BC$ em que $B, C \in \mathcal{B}_2$, note que para a decomposição polar $A = W|A|$, tem-se que $\left(W^*B\right)C = |A|$, ou seja, $|A|$ é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt.

(d) $\Rightarrow$ (a) Suponha que $|A| = BC$ em que $B, C \in \mathcal{B}_2$. Note que $\langle |A|(e_n), e_n \rangle = \langle C(e_n), B^*(e_n) \rangle \leqslant \|C(e_n)\| \|B^*(e_n)\|$. Assim $A \in \mathcal{B}_1$, pois, pela Desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned} \sum_n \langle |A|(e_n), e_n \rangle \leqslant \sum_n \|C(e_n)\| \|B^*(e_n)\| &\leqslant \sqrt{\sum_n \|C(e_n)\|^2} \sqrt{\sum_n \|B^*(e_n)\|^2} \\ &= \|C\|_2 \|B^*\|_2 = \|C\|_2 \|B\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

[13]Ideais de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, em que $\mathcal{H}$ é separável e que contém $\mathcal{B}_{00}$, são espaços M tais que $M \subset \mathcal{B}_0$.

■

Proposição 5.15. *Seja $A \in \mathcal{B}_1$ e considere $(e_n)_n$ uma base ortonormal. Então, $\sum\limits_n \left|\left\langle A(e_n), e_n \right\rangle\right| < \infty$ e $\sum\limits_n \left\langle A(e_n), e_n \right\rangle$ independe da escolha da base ortonormal.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{B}_1$. Escreva $A = C^*B$ como produto de operadores Hilbert-Shmidt tal como vimos na Proposição 5.14(c). Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ qualquer. Note que dado $u \in \mathcal{H}$ temos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|(B-\lambda C)(u)\|^2 &= \langle (B-\lambda C)(u), (B-\lambda C)(u) \rangle \\ &= \|B(u)\|^2 - \overline{\lambda}\langle B(u), C(u)\rangle - \lambda \langle C(u), B(u)\rangle + |\lambda|^2 \|C(u)\|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda = \dfrac{|\langle C(u), B(u)\rangle|}{\langle C(u), B(u)\rangle}$ obtemos $|\langle C(u), B(u)\rangle| \leqslant \dfrac{1}{2}(\|B(u)\|^2 + \|C(u)\|^2)$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_n \left|\left\langle A(e_n), e_n \right\rangle\right| = \sum_n \left|\left\langle B(e_n), C(e_n) \right\rangle\right| &\leqslant \frac{1}{2}\sum_n \left\|B(e_n)\right\|^2 + \frac{1}{2}\sum_n \left\|C(e_n)\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|B\|_2^2 + \frac{1}{2}\|C\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\left\langle A(e_n), e_n \right\rangle\right) &= \frac{1}{2}\left(\left\langle B(e_n), C(e_n)\right\rangle + \left\langle C(e_n), B(e_n)\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left\|(B+C)(e_n)\right\|^2 - \left\|(B-C)(e_n)\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Somando essa última expressão em n, obtemos

$$\operatorname{Re}\left(\sum_n \left\langle A(e_n), e_n \right\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\|B+C\|_2^2 - \|B-C\|_2^2\right).$$

Observe que para um número complexo z vale que $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$, e como $iA = C^*(iB)$, temos que

$$-\operatorname{Im}\left(\sum_n \left\langle A(e_n), e_n \right\rangle\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_n \left\langle iA(e_n), e_n \right\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\|iB+C\|_2^2 - \|iB-C\|_2^2\right).$$

Isso mostra que $\sum_n \langle A(e_n), e_n \rangle$ não depende da base ortonormal escolhida. ■

Definição 5.16. Para cada $A \in \mathcal{B}_1$ definimos $\operatorname{tr}(A) := \sum_n \langle A(e_n), e_n \rangle$, o *traço* de A.

Proposição 5.17. *Seja $\mathcal{B}_{00} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores de posto finito. Então, $T \in \mathcal{B}_{00}$ é uma soma finita de operadores da forma $R_{u,v}$, em que $R_{u,v} \in \mathcal{B}_{00}$ é dado por por $R_{u,v}(w) = \langle w, v \rangle u$, com $u, v \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Considere uma base ortonormal para $T(\mathcal{H})$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Então para cada $u \in \mathcal{H}$, existem únicos $\lambda_{1,u}, \ldots, \lambda_{k,u} \in \mathbb{C}$ tais que $T(u) = \lambda_{1,u}e_1 + \ldots + \lambda_{k,u}e_k$. Para cada $j = 1, 2 \ldots, k$, considere a aplicação $\lambda_j : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por $\lambda_j(u) = \lambda_{j,u}$. Mostremos que λ_j é linear. Sejam $u, v \in \mathcal{H}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ e note que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,u+\alpha v} e_i = T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v) = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{i,u} + \alpha \lambda_{i,v}\right) e_i.$$

Portanto, $\lambda_j(u + \alpha v) = \lambda_{j,u+\alpha v} = \lambda_{j,u} + \alpha \lambda_{j,v} = \lambda_j(u) + \alpha \lambda_j(v)$. Daí, λ_j é linear para todo $j = 1, \ldots, k$. Além disso $\lambda_j \in \mathcal{H}'$, pois para cada $u \in \mathcal{H}$, temos

$$\left|\lambda_j(u)\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left|\lambda_{i,u}\right|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,u} e_i \right\|^2 = \|T(u)\|^2 \leqslant \|T\|^2 \|u\|^2.$$

Logo, λ_j é limitado com $\left\|\lambda_j\right\| \leqslant \|T\|$. Assim, por [6, Teorema 5.5.2 (Teorema de Riesz-Fréchet), p. 126], existe um único $v_j \in \mathcal{H}$ tal que $\lambda_j(u) = \langle u, v_j \rangle$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Portanto,

$$T(u) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,u} e_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{k} R_{e_i, v_i}(u),$$

para todo $u \in \mathcal{H}$, ou seja, $T = \sum_{i=1}^{k} R_{e_i, v_i}$. ■

Observação 5.18. Todo $T \in \mathcal{B}_{00}$ é trace-class. Como $\langle R_{u,v}(w), z \rangle = \langle \langle w, v \rangle u, z \rangle = \langle w, v \rangle \langle u, z \rangle = \langle w, \langle z, u \rangle v \rangle$ para quaisquer $w, z \in \mathcal{H}$, então $R_{u,v}^*(z) = \langle z, u \rangle v$ para todo $z \in \mathcal{H}$. Denotando $L_{u,v} = R_{u,v}^* \circ R_{u,v}$, obtemos $L_{u,v}(w) = R_{u,v}^* \circ R_{u,v}(w) = \langle w, v \rangle \langle u, u \rangle v$. Note que $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por

$$G(w) = \frac{\langle w, v \rangle \|u\| v}{\sqrt{\langle v, v \rangle}}$$

é a raiz quadrada de $L_{u,v}$, isto é, $G^2 = L_{u,v}$. Então,

$$\left\|R_{u,v}\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \left|R_{u,v}\right| e_n, e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle G(e_n), e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle e_n, v\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle}} \|u\| \left\langle v, e_n \right\rangle.$$

Portanto,

$$\frac{\left\|R_{u,v}\right\|_1}{\|v\|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle e_n, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle}} \|u\| \left\langle v, e_n \right\rangle.$$

Tomando uma base ortonormal na qual $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ contém $\dfrac{v}{\|v\|}$. Logo,

$$\left\|R_{u,v}\right\|_1 = \|u\| \frac{\langle v, v\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle}}.$$

Concluindo que $R_{u,v} \in \mathcal{B}_1$, em que $\mathcal{B}_1$ é o espaço dos operadores trace-class, pela Proposição 5.17 e pela Observação abaixo, obtemos o resultado.

Observação 5.19. Para resolver próximo teorema vejamos o seguinte. Para cada par $u, v \in \mathcal{H}$ defina, a aplicação linear $R_{u,v} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por $R_{u,v}(w) = \langle w, v\rangle u$, que é trace-class, segundo a Observação 5.18. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é autoadjunto e compacto então, para todo n, existe $\lambda_n \in \sigma(T) \backslash \{0\}$, e existe base ortonormal $(e_n)_n$ tal que $T(u) = \sum_n R_{\lambda_n e_n, e_n}(u)$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Chamaremos tal decomposição de decomposição espectral de T. O leitor encontra esse resultado em [6, Teorema 7.5.6, p. 208].

Proposição 5.20. *Os seguintes resultados são válidos:*

(a) $\mathcal{B}_1$ é um ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\|\cdot\|_1$ é norma em $\mathcal{B}_1$;

(b) Todo operador trace-class é compacto. Assim, se $A \in \mathcal{B}_1$ e $\{\lambda_n\}_n$ são autovalores de $|A|$, então $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$;

(c) A aplicação traço tr: $\mathcal{B}_1 \to \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo. Se $A \in \mathcal{B}_1$ for positivo e $\operatorname{tr}(A) = 0$ então $A = 0$;

(d) $\mathcal{B}_1$ contém os operadores de posto finito $\mathcal{B}_{00}$ como subespaço denso na norma $\|\cdot\|_1$;

(e) Se $A \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(TA)$ e $|\operatorname{tr}(T|A|)| \leqslant \|T\| \|A\|_1$. Também $|\operatorname{tr}(TA)| \leqslant \|T\| \|A\|_1$;

(f) Para todo $A \in \mathcal{B}_1$, tem-se $\|A\|_1 = \left\|A^*\right\|_1$;

(g) Se $A \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $\|AT\|_1 \leqslant \|T\|\|A\|_1$ e $\|TA\|_1 \leqslant \|T\|\|A\|_1$.

Demonstração. (a) Sejam $A, B \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Escreva $A = XY$ produdo de dois operadores Hilbert-Schmidt. Então $TA = (TX)Y$ é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt, pois $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; e portanto $TA \in \mathcal{B}_1$. Analogamente, $AT \in \mathcal{B}_1$. Considere as decomposições polares $A = W|A|$, $B = V|B|$ e $A+B = U|A+B|$. Como $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e como cada operador trace-class pode ser escrito como produto de dois operadores Hilbert-Shmidt, então $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_0$. Segue que $A, B \in \mathcal{B}_2$, ou seja, $A+B \in \mathcal{B}_2$, ou seja, $|A+B| \in \mathcal{B}_2$ e portanto $|A+B| \in \mathcal{B}_0$. Temos então que $A+B \in \mathcal{B}_1$ e $\|A+B\|_1 \leqslant \|A\|_1 + \|B\|_1$, pois

$$\begin{aligned}\sum_n \big\langle |A+B|(e_n), e_n \big\rangle &= \sum_n \big\langle (A+B)(e_n), U(e_n) \big\rangle \\ &= \sum_n \Big(\big\langle A(e_n), U(e_n) \big\rangle + \big\langle B(e_n), U(e_n) \big\rangle \Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_n \Big(\big\langle |A|(e_n), W^*U(e_n) \big\rangle + \big\langle |B|(e_n), V^*U(e_n) \big\rangle \Big) \\ &= \sum_n \Big(\Big\langle \sqrt{|A|}(e_n), \sqrt{|A|}W^*U(e_n) \Big\rangle + \Big\langle \sqrt{|B|}(e_n), \sqrt{|B|}V^*U(e_n) \Big\rangle \Big) \\ &\leqslant \sum_n \Big(\Big\| \sqrt{|A|}(e_n) \Big\| \Big\| \sqrt{|A|}W^*U(e_n) \Big\| + \Big\| \sqrt{|B|}(e_n) \Big\| \Big\| \sqrt{|B|}V^*U(e_n) \Big\| \Big) \\ &\leqslant \Big\| \sqrt{|A|} \Big\|_2^2 + \Big\| \sqrt{|B|} \Big\|_2^2 = \|A\|_1 + \|B\|_1.\end{aligned}$$

Logo $\mathcal{B}_1$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como as outras propriedades de norma são facilmente verificadas pela definição de $\|\cdot\|_1$, segue que $\|\cdot\|_1$ é norma em $\mathcal{B}_1$.

(b) Pela Proposição 5.14 temos que um operador trace-class é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt e $\mathcal{B}_2$ é ideal. Assim, a compacidade de um operador trace-class segue da inclusão $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_0$.

Seja $A \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e considere sua decomposição polar $A = W|A|$. Como $\mathcal{B}_0$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ segue que $|A| = W^*A$ é compacto. Considere sua diagonalização espectral dada por

$|A| = \sum_m R_{\lambda_m e_m, e_m}$. Se $A \in \mathcal{B}_1$ então

$$\begin{aligned}\sum_n \lambda_n &= \sum_n \langle \lambda_n e_n, e_n\rangle = \sum_n \sum_m \left\langle \langle e_n, e_m\rangle \lambda_m e_m, e_n\right\rangle = \sum_n \sum_m \left\langle R_{\lambda_m e_m, e_m}(e_n), e_n\right\rangle \\ &= \sum_n \left\langle \sum_m R_{\lambda_m e_m, e_m}(e_n), e_n\right\rangle = \sum_n \left\langle |A|(e_n), e_n\right\rangle = \|A\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

(c) Se $A \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ for positivo, então $\operatorname{tr}(A) = \sum_n \left\langle A(e_n), e_n\right\rangle \geqslant 0$. Logo, tr é um funcional linear positivo. Seja $A = \sum_n R_{\lambda_n e_n, e_n}$ sua diagonalização espectral. Se supormos $\operatorname{tr}(A) = 0$, temos $\operatorname{tr}(A) = \sum_n \lambda_n = 0$ e como cada λ_n é positivo, pois A é positivo, segue que $\lambda_n = 0$ para todo n. Logo, $A = 0$.

(d) Seja $A \in \mathcal{B}_1$ e $A = W|A|$ sua decomposição polar. Então $|A| \in \mathcal{B}_0$ e podemos considerar sua diagonalização espectral dada por $|A| = \sum_k R_{\lambda_k e_k, e_k}$. Para cada n, considere o seguinte operador em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por

$$A_n = W\left(\sum_{k=1}^{n} R_{\lambda_k e_k, e_k}\right).$$

Portanto,

$$A - A_n = W\left(\sum_{k>n} R_{\lambda_k e_k, e_k}\right)$$

é a decomposição polar de $A - A_n$ e assim $|A - A_n| = \sum_{k>n} R_{\lambda_k e_k, e_k}$. Mas como $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$, segue que $\|A - A_n\|_1 = \sum_{k>n} \lambda_k$ converge a zero quando n tende a infinito. Logo, o conjunto dos operadores de posto finito $\mathcal{B}_{00}$ é denso em $\mathcal{B}_1$ na norma $\|\cdot\|_1$.

(e) Sejam $A \in \mathcal{B}_1$ e escreva $A = C^*B$ como produto de operadores Hilbert-Schmidt. Sabemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(C^*B)\right) &= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A)) = \frac{1}{4}\left(\|B+C\|_2^2 - \|B-C\|_2^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left\|B^* + C^*\right\|_2^2 - \left\|B^* - C^*\right\|_2^2\right) = \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left(\left(C^*\right)^* B^*\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(CB^*)\right).\end{aligned}$$

Sabemos também que

$$-\operatorname{Im}(\operatorname{tr}(A)) = -\operatorname{Im}\left(\operatorname{tr}(C^*B)\right) = \frac{1}{4}\|iB+C\|_2^2 - \frac{1}{4}\|iB-C\|_2^2$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im}\left(\operatorname{tr}(\left(C^*\right)^* B^*)\right) &= \frac{1}{4}\left\|iB^*+C^*\right\|_2^2 - \frac{1}{4}\left\|iB^*-C^*\right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4}\|-iB+C\|_2^2 - \frac{1}{4}\|iB+C\|_2^2 = \operatorname{Im}\left(\operatorname{tr}(C^*B)\right) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(C^*B) &= \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(C^*B)\right) + i\operatorname{Im}\left(\operatorname{tr}(C^*B)\right) \\ &= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(CB^*)) - i\operatorname{Im}(\operatorname{tr}(CB^*)) = \overline{\operatorname{tr}(CB^*)}. \end{aligned}$$

Agora, se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $TA = T\left(C^*B\right) = \left(CT^*\right)^* B$ é produto de dois Hilbert-Schmidt, e como antes, temos

$$\operatorname{tr}(TA) = \operatorname{tr}\left(\left(CT^*\right)^* B\right) = \overline{\operatorname{tr}\left((CT^*)B^*\right)} = \overline{\operatorname{tr}\left(C(BT)^*\right)} = \operatorname{tr}\left(C^*BT\right) = \operatorname{tr}(AT).$$

Mostramos a segunda parte. Veja que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T|A|)| &= \left|\sum_n \langle T|A|(e_n), e_n\rangle\right| = \left|\sum_n \left\langle \sqrt{|A|}(e_n), \sqrt{|A|}T^*(e_n)\right\rangle\right| \\ &\leqslant \sum_n \left\|\sqrt{|A|}(e_n)\right\| \left\|\sqrt{|A|}T^*(e_n)\right\| \leqslant \sqrt{\sum_n \left\|\sqrt{|A|}(e_n)\right\|^2} \sqrt{\sum_n \left\|\sqrt{|A|}T^*(e_n)\right\|^2} \\ &= \left\|\sqrt{|A|}\right\|_2 \left\|\sqrt{|A|}T^*\right\|_2 \leqslant \left\|\sqrt{|A|}\right\|_2^2 \|T^*\| = \left\|\sqrt{|A|}\right\|_2^2 \|T\| = \|A\|_1 \|T\|. \end{aligned}$$

Por fim, considerando a decomposição polar $A = W|A|$ temos que

$$|\operatorname{tr}(TA)| = |\operatorname{tr}((TW)|A|)| \leqslant \|TW\| \|A\|_1 \leqslant \|T\| \|A\|_1.$$

(f) Seja $A \in \mathcal{B}_1$. Considere a decomposição polar $A = W|A|$. Note que $A^* = |A|W^*$. Logo, $AA^* = W|A|^2W^*$. Como $\left|A^*\right| = \sqrt{AA^*}$, temos $\left|A^*\right|^2 = AA^* = W|A|^2W^*$. Ademais

$$\left(W|A|W^*\right)^2 = W|A|W^*W|A|W^* = W|A|^2W^*.$$

Logo, $\left|A^*\right| = W|A|W^*$ Pela unicidade da raíz temos

$$\left\|A^*\right\|_1 = \operatorname{tr}\left(\left|A^*\right|\right) = \operatorname{tr}\left(W|A|W^*\right) = \operatorname{tr}\left(W^*W|A|\right) \leqslant \left\|WW^*\right\| \|A\|_1 \leqslant \|A\|_1.$$

Como a desigualdade anterior vale para todo $A \in \mathcal{B}_1$, e como pela mesma desigualdade temos $A^* \in \mathcal{B}_1$, então $\|A\|_1 = \left\|\left(A^*\right)^*\right\|_1 \leqslant \left\|A^*\right\|$. Logo $\|A\|_1 = \left\|A^*\right\|$ como desejamos.

(g) Sejam $A \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Escreva $A = W|A|$ e $TA = U|TA|$ decomposições polares. Logo, $|TA| = U^*TA = \left(U^*TW\right)|A|$. Portanto

$$\|TA\|_1 = \operatorname{tr}(|TA|) = \operatorname{tr}\left(\left(U^*TW\right)|A|\right) \leqslant \left\|U^*TW\right\| \|A\|_1 \leqslant \|T\|\|A\|_1.$$

Procede-se analogamente para mostar que $\|AT\|_1 \leqslant \|T\|\|A\|_1$. ■

Podemos para cada $A \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definir a aplicação $\varphi_A : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{C}$ por $\varphi_A(C) = \operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA)$, para todo $C \in \mathcal{B}_0$. Mostramos que o dual dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é, essencialmente, o espaço normado dos operadores trace-class $\left(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_1\right)$. Note que $\varphi_A \in \mathcal{B}_0^{'}$ e $\|\varphi_A\| \leqslant \|A\|_1$, pois considerando a decomposição polar $A = W|A|$, tem-se

$$\left|\varphi_A(C)\right| = |\operatorname{tr}(AC)| = |\operatorname{tr}(CA)| = |\operatorname{tr}(CW|A|)| \leqslant \|CW\|\|A\|_1 \leqslant \|C\|\|A\|_1$$

para todo $C \in \mathcal{B}_0$.

Exemplo 5.21. Nem todo operador compacto é trace-class. Com efeito considere o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle e_n$$

em que $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência harmônica alternada de escalares reais e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é base ortonormal de ℓ_2. Se $\lambda_n \longrightarrow 0$, então T é compacto. Por outro lado, se $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \infty$, então pela Proposição 5.20(b) T não é trace-class.

Teorema 5.22. *A aplicação*

$$p : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0'$$

$$A \mapsto \varphi_A$$

é um isomorfismo isométrico de $\left(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_1\right)$ *no dual dos operadores compactos de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demonstração. Mostramos primeiro que p é linear. Sejam $A, B \in \mathcal{B}_1$, $T \in \mathcal{B}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Da linearidade do traço segue que $p(A+\lambda B)(T) = \varphi_{A+\lambda B}(T) = \operatorname{tr}((A+\lambda B)T) = \operatorname{tr}(AT+\lambda BT) = \operatorname{tr}(AT) + \lambda \operatorname{tr}(BT) = \varphi_A(T) + \lambda \varphi_B(T) = (p(A) + \lambda p(B))(T)$. Assim, p é linear. Além disso, p é limitada, pois $\|p(A)\| = \|\varphi_A\| \leqslant \|A\|_1$, ou seja, $\|p\| \leqslant 1$. Mostramos que p é sobrejetiva e isométrica. Com efeito, seja $\phi \in \mathcal{B}_0'$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : \mathcal{H}^2 &\to \mathbb{C} \\ (u,v) &\mapsto \phi\left(R_{u,v}\right). \end{aligned}$$

Perceba que se $u, v, w \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então

$$R_{u+\lambda w,v}(x) = \langle x, v\rangle(u+\lambda w) = \langle x, v\rangle u + \lambda \langle x, v\rangle w = R_{u,v}(x) + \lambda R_{w,v}(x)$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto $R_{u+\lambda w,v} = R_{u,v} + \lambda R_{w,v}$. Também temos

$$R_{u,w+\lambda v}(x) = \langle x, w+\lambda v\rangle u = \langle x, w\rangle u + \bar{\lambda} \langle x, v\rangle u = R_{u,w}(x) + \bar{\lambda} R_{u,v}(x)$$

para todo $x, \in \mathcal{H}$, ou seja, $R_{u,w+\lambda v} = R_{u,v} + \bar{\lambda} R_{u,v}$. Consequentemente,

$$[u+\lambda v, w] = \phi\left(R_{u+\lambda v,w}\right) = \phi\left(R_{u,w} + \lambda R_{v,w}\right) = \phi\left(R_{u,w}\right) + \lambda \phi\left(R_{v,w}\right).$$

Também

$$[u, v+\lambda w] = \phi\left(R_{u,v+\lambda w}\right) = \phi\left(R_{u,v} + \bar{\lambda} R_{u,w}\right) = \phi\left(R_{u,v}\right) + \bar{\lambda} \phi\left(R_{u,w}\right) = [u,v] + \bar{\lambda}[u,w].$$

Portanto, a aplicação $[\cdot,\cdot]$ é uma forma sesquilinear. Note que é limitada pois $\|[u,v]\| = \left\|\phi\left(R_{u,v}\right)\right\| \leqslant \|\phi\| \left\|R_{u,v}\right\| \leqslant \|\phi\|\|u\|\|v\|$, e assim $\|[\cdot,\cdot]\| \leqslant \|\phi\|$.

Portanto, existe um único operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\phi\left(R_{u,v}\right) = [u,v] = \langle A(u), v\rangle$ para todo $u, v \in \mathcal{H}$, veja vide [17, 3.8-4 Theorem (Riesz representation), p. 192]. Mostramos que $A \in \mathcal{B}_1$ e que $\phi = \varphi_A$. Seja $C \in \mathcal{B}_{00}$. Considere $n \in \mathbb{N}$ e os operadores R_{u_k,v_k} e $C = \sum_{k=1}^{n} R_{u_k,v_k} \in$

$\mathcal{B}_{00}$. Daí,

$$\phi(C) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} R_{u_k,v_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \phi\left(R_{u_k,v_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle A(u_k), v_k \right\rangle \tag{5.2.1}$$

Note que se $(e_m)_m$ é uma base ortornormal de $\mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AC) &= \sum_n \langle AC(e_m), e_m \rangle = \sum_m \left\langle A\left(\sum_{k=1}^{n} R_{u_k,v_k}\right)(e_m), e_m \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_m \langle AR_{u_k,v_k}(e_m), e_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr}\left(AR_{u_k,v_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle A(u_k), v_k \right\rangle = \phi(C).
\end{aligned}$$

Mostramos que A é trace-class. Com efeito, considere sua decomposição polar $A = W|A|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o operador

$$C_n = \left(\sum_{k=1}^{n} R_{e_k,e_k}\right) W^*$$

Note que $\left\| \sum_{k=1}^{n} R_{e_k,e_k} \right\| \leqslant 1$, pois dado $x \in \mathcal{H}$ temos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} R_{e_k,e_k}(x) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \overset{(\star)}{=} \|x\|^2.$$

Para verificar $(\star)$ vide [6, Teorema 5.3.10, p. 119]. Como $\left\|W^*\right\| = \|W\| \leqslant 1$, segue que $\left|\phi\left(C_n\right)\right| \leqslant \|\phi\| \|C_n\| \leqslant \|\phi\|$. Veja que $R_{e_k,e_k} \circ W^* = R_{e_k,W(e_k)}$, para todo $k = 1, 2 \ldots, n$, pois $\left(R_{e_k,e_k} \circ\ W^*\right)(x) = R_{e_k,e_k}\left(W^*(x)\right) = \left\langle W^*(x), e_k \right\rangle e_k = \left\langle x, W(e_k) \right\rangle e_k = R_{e_k,W(e_k)}(x)$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto, segue de (5.2.1) que

$$\begin{aligned}
\|\phi\| \geqslant \left|\phi\left(C_n\right)\right| &= \left| \phi\left[\left(\sum_{k=1}^{n} R_{e_k,e_k}\right) W^*\right] \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \phi\left(R_{e_k,e_k} \circ W^*\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \phi\left(R_{e_k,W(e_k)}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left\langle A(e_k), W(e_k) \right\rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left\langle |A|(e_k), e_k \right\rangle \right|.
\end{aligned}$$

Como $|A|$ é operador positivo, temos que $\left\langle |A|(e_k), e_k \right\rangle$ é positivo. Então a sequência

$\left(\sum_{k=1}^{n}\left\langle |A|(e_k),e_k\right\rangle\right)_{n=1}^{\infty}$ é crescente e limitada superiormente por $\|\phi\|$, logo convergente para seu supremo, a saber $\|A\|_1$. Portanto, $\|\phi\| \geqslant \|A\|_1$, e $A \in \mathcal{B}_1$. De $C \in \mathcal{B}_{00}$ segue que $\phi(C) = \operatorname{tr}(AC) = \varphi_A(C)$. Então, ϕ e φ_A se igualam num conjunto denso de $\left(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|\right)$ e por isso, $\phi = \varphi_A$, e assim p é sobrejetiva. Além disso p é isométrica pois para todo $A \in \mathcal{B}_1$ temos $\|p(A)\| = \|\varphi_A\| = \|\phi\| \geqslant \|A\|_1$. Assim, $\|A\|_1 \leqslant \|p(A)\| \leqslant \|A\|_1$ e $\|p\| = 1$. ■

Segue do Teorema 5.22 que $\left(\mathcal{B}_1, \|.\|_1\right)$ é Banach e por $\mathcal{B}_1$ ser ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ com $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$, temos que a tologia de $\left(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_1\right)$ difere de $\left(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|\right)$, pois não é fechado pelo Exemplo 5.21 e pelo fato de que ideais menores que $\mathcal{B}_0$ tem fecho coincidindo com $\mathcal{B}_0$. Agora, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ podemos definir o funcional linear $E_B : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{C}$ pondo $E_B(A) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, para todo $A \in \mathcal{B}_1$. Dado $A \in \mathcal{B}_1$, considere sua decomposição polar $A = W|A|$. Segue que $\left|E_B(A)\right| = |\operatorname{tr}((BW)|A|)| \leqslant \|BW\|\|A\|_1 \leqslant \|B\|\|A\|_1$, ou seja, E_B é limitada com $\|E_B\| \leqslant \|B\|$. Mostramos que o dual dos operadores trace-class e o espaço de Banach dos operadores limitados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ são, em essência, os mesmos.

Teorema 5.23. *A aplicação dada por*

$$\begin{aligned} p : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\to \mathcal{B}_1' \\ B &\mapsto E_B \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Note que $\|p(B)\| = \|E_B\| \leqslant \|B\|$ e p é um operador linear limitado com $\|p\| \leqslant 1$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Escolha um vetor $u \in \mathcal{H}$ com norma $\|u\| = 1$ tal que $\|B(u)\| > \|B\| - \varepsilon$ e escolha um vetor $v \in \mathcal{H}$ com norma $\|v\| = 1$ tal que $\langle B(u), v\rangle = \|B(u)\|$, por exemplo $v = B(u)\dfrac{\|B(u)\|}{\langle B(u), B(u)\rangle}$. Considere o operador de posto um $R_{u,v}$. Já vimos que tal operador tem norma $\left\|R_{u,v}\right\| = 1$. Portanto $\|E_B\| \geqslant \|B\|$ pois $\|E_B\| \geqslant \left|\operatorname{tr}\left(BR_{u,v}\right)\right| = \langle B(u), v\rangle = \|B(u)\| > \|B\| - \varepsilon$. Assim p é uma isometria.

Vamos mostrar que p é sobrejetivo. Seja $E \in \mathcal{B}_1'$. Como na demonstração do Teorema 5.22, existe um operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle B(u), v\rangle = E\left(R_{u,v}\right)$ para quaisquer $u, v \in \mathcal{H}$. Exatamente como na demonstração do Teorema 5.22 podemos concluir que $\operatorname{tr}(BT) = E(T)$ para todo operador T de posto finito. Mas $E_B(T) = \operatorname{tr}(BT) = E(T)$ e como o conjunto dos operadores de posto finito é denso em $\mathcal{B}_1$ segue que $E = E_B$. Assim p é sobrejetiva como desejávamos. ■

Referências

[1] Walter D. van Suijlekom Alain Connes. “Spectral Truncations in Noncommutative Geometry and Operator Systems”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 383.3 (2021), pp. 2021–2067. ISSN: 1432-0916. DOI: https://doi.org/10.1007/s00220-020-03825-x.

[2] William Arveson. “Subalgebras of C*-algebras”. Em: *Acta Mathematica* 123.1 (1969), pp. 141–224. ISSN: 1871-2509. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392388.

[3] William Arveson. “Subalgebras of C*-algebras II”. Em: *Acta Mathematica* 128.1 (1972), pp. 271–308. ISSN: 1871-2509. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392166.

[4] William Arveson. “Subalgebras of C*-algebras III: Multivariable operator theory”. Em: *Acta Mathematica* 181.2 (1998), pp. 159–228. ISSN: 1871-2509. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392585.

[5] William Arveson. “The Noncommutative Choquet Boundary”. Em: *Journal of the American Mathematical Society* 21.4 (2008), pp. 1065–1084. ISSN: 08940347, 10886834.

[6] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. 2ª ed. SBM, 2015.

[7] Man-Duen Choi e Edward G. Effros. “Injectivity and operator spaces”. Em: *Journal of Functional Analysis* 24.2 (1977), pp. 156–209. ISSN: 0022-1236. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(77)90052-0.

[8] Kenneth Davidson, Adam Fuller e Evgenios Kakariadis. “Semicrossed Products of Operator Algebras by Semigroups”. Em: *Memoirs of the American Mathematical Society* 247 (abr. de 2014). DOI: 10.1090/memo/1168.

[9] Kenneth Davidson e Elias Katsoulis. “Operator Algebras for Multivariable Dynamics”. Em: *Memoirs of the American Mathematical Society* 209 (jan. de 2007). DOI: 10.1090/S0065-9266-10-00615-0.

[10] Adam Dor-On, Soren Eilers e Shirly Geffen. “Classification of irreversible and reversible Pimsner operator algebras”. Em: *Compositio Mathematica* 156 (dez. de 2020), pp. 2510–2535. DOI: 10.1112/S0010437X2000754X.

[11] Adam Dor-On e Daniel Markiewicz. “C*-Envelopes of Tensor Algebras Arising from Stochastic Matrices”. Em: *Integral Equations and Operator Theory* 88 (jun. de 2017). DOI: 10.1007/s00020-017-2382-x.

[12] Adam Dor-On e Guy Salomon. “Full Cuntz-Krieger dilations via non-commutative boundaries”. Em: *Journal of the London Mathematical Society* 98 (fev. de 2017). DOI: 10.1112/jlms.12140.

[13] Masamichi Hamana. “Injective Envelopes of Operator Systems”. Em: *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 15.3 (1979), pp. 773–785. DOI: DOI10.2977/PRIMS/1195187876.

[14] Adam Humeniuk. “C*-envelopes of semicrossed products by lattice ordered abelian semigroups”. Em: *Journal of Functional Analysis* 279 (ago. de 2020), p. 108731. DOI: 10.1016/j.jfa.2020.108731.

[15] Mehrdad Kalantar e Matthew Kennedy. “Boundaries of reduced C*-algebras of discrete groups”. Em: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2017 (2017), pp. 247–267. DOI: https://doi.org/10.1515/crelle-2014-0111.

[16] Elias Katsoulis e Christopher Ramsey. “Crossed Products of Operator Algebras”. Em: *Memoirs of the American Mathematical Society* 258 (dez. de 2015). DOI: 10.1090/memo/1240.

[17] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley Sons, 1978.

[18] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag New York, 1978.

[19] Paul Muhly e Baruch Solel. “Tensor Algebras overC*-Correspondences: Representations, Dilations, andC*-Envelopes”. Em: *Journal of Functional Analysis* 158 (out. de 1998), pp. 389–457. DOI: 10.1006/jfan.1998.3294.

[20] James R. Munkres. *Topology*. 2ª ed. Edinburgh Gate: Pearson, 2024.

[21] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory*. San Diego: Academic Press Inc, 1990.

[22] Vern Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003.

[23] Christopher Ramsey e Raphaël Clouâtre. “Residually finite-dimensional operator algebras”. Em: *Journal of Functional Analysis* (jun. de 2018). DOI: 10.1016/j.jfa.2018.12.016.

[24] Zhong-jin Ruan. “Subspaces of C*-algebras”. Em: *Journal of Functional Analysis* 76.1 (1988), pp. 217–230. ISSN: 0022-1236. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(88)90057-2.