UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Vinícius Scussel Accordi

ÁLGEBRAS BASE E O CENTRO DE UMA CATEGORIA MONOIDAL

Florianópolis
2024

Vinícius Scussel Accordi

ÁLGEBRAS BASE E O CENTRO DE UMA CATEGORIA MONOIDAL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática na concentração de Álgebra.
Orientadora: Prof.a Dr.a Virgínia Silva Rodrigues.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Accordi, Vinícius Scussel
Álgebras base e o centro de uma categoria monoidal / Vinícius Scussel Accordi ; orientadora, Virginia Silva Rodrigues, 2024.
149 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Centro de categoria monoidal. 3. Álgebra base. 4. Categoria trançada. 5. Álgebra de Hopf. I. Rodrigues, Virginia Silva. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Vinícius Scussel Accordi

ÁLGEBRAS BASE E O CENTRO DE UMA CATEGORIA MONOIDAL

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado, em 11 de dezembro de 2024, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. John William MacQuarrie, Dr.
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Mykola Khrypchenko, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.a Virginia Silva Rodrigues, Dr.a
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Vitor de Oliveira Ferreira, Dr.
Universidade de São Paulo

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Douglas Soares Gonçalves, Dr.
Coordenador do Programa

Prof.a Virginia Silva Rodrigues, Dr.a
Orientadora

Florianópolis, 2024.

Ao meu *nonno* Dovílio Scussel, *in memoriam*.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, expresso profunda gratidão aos meus pais, Almiro e Hotília. Obrigado por acreditarem em mim e me incentivarem a perseguir meus sonhos, mesmo nos momentos mais desafiadores. Agradeço por todos os sacrifícios que fizeram e pelo exemplo de determinação, perseverança e generosidade que me proporcionaram. Além disso, suas palavras de encorajamento e os valores que me transmitiram ao longo da vida foram pilares fundamentais que me sustentaram durante toda essa jornada.

Aos meus amigos, que estiveram ao meu lado durante os altos e baixos, oferecendo palavras de encorajamento, horchatas e combuchás, bem como, uma companhia para os momentos de distração quando mais se precisava. A amizade e o apoio de vocês foram essenciais para manter minha sanidade e, concomitantemente, um bom-humor ao longo deste caminho. Cada saída para desanuviar a mente, cada conversa, profunda ou até mesmo banal, foram muito bem aproveitadas nestes dois anos. Vocês são como uma família para mim e saber que posso contar com vocês em, praticamente, qualquer situação é algo pelo qual me traz felicidade.

Agradeço imensamente à minha estimada orientadora, Virginia Silva Rodrigues. Obrigado por acreditar no meu potencial e por me guiar com sabedoria e discernimento. Sua dedicação e paixão pelo que faz são inspiradoras e certamente deixaram uma marca em minha jornada. As inúmeras reuniões e seminários, os comentários e as conversas sobre mais problemas e exercícios para resolver, bem como, o tempo dedicado a revisar e melhorar meus trabalhos foram inestimáveis. Sinto-me privilegiado pela oportunidade de aprender com alguém tão dedicada e experiente.

Aos professores John William MacQuarrie, Mykola Khrypchenko e Vitor de Oliveira Ferreira que gentilmente aceitaram participar como avaliadores na banca examinadora deste trabalho. Obrigado pelo tempo dedicado, bem como, pela experiência ao contribuir com este projeto.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo apoio financeiro durante todos os processos para a realização deste trabalho.

“There is always a catch.”
(Flemeth)

RESUMO

O presente trabalho consiste em descrever o centro de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, denotado por $Z(\mathcal{C})$ como uma categoria trançada de modo que seja possível generalizar o conceito de uma álgebra base para uma categoria monoidal qualquer como álgebras comutativas em seu centro. Em particular, as usuais álgebras bases são essencialmente álgebras comutativas na categoria dos módulos esquerda-esquerda de Yetter-Drinfel'd, denotada por ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$, quando H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Para isso, obtém-se o resultado de que essa categoria é isomorfa como categoria trançada ao centro da categoria dos H-módulos à esquerda. Logo, neste trabalho, estão dispostos, mediante noções básicas da teoria de categoria e de produto tensorial entre espaços vetoriais, todos os conceitos categóricos necessários para descrever o que são categorias trançadas e isomorfismos entre tais, bem como, definições e resultados advindos das ações e coações de álgebras de Hopf.

Palavras-chave: Centro de categoria monoidal; Álgebra base; Categoria trançada; Álgebra de Hopf.

ABSTRACT

The present work consists of describing the center of a monoidal category $\mathcal{C}$, denoted by $Z(\mathcal{C})$ as a braided category so that it is possible to generalize the concept of a base algebra for any monoidal category as commutative algebras in its center. In particular, the usual base algebras are essentially commutative algebras in the category of left-left Yetter-Drinfel'd modules, denoted by ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$, when H is a Hopf algebra with bijective antipode. For this purpose, we obtain the result that the latter category is isomorphic as a braided category to the center of the category of left H-modules. Therefore, in this work, all the categorical concepts necessary to describe braided categories and isomorphisms between those are laid out using basic notions of category theory and tensor product between vector spaces as well as definitions and results arising from actions and coactions of Hopf algebras.

Keywords: Center of monoidal category; Base algebra; Braided category; Hopf algebra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dentre os exemplares da teoria de categorias, desenvolvida por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em meados do século passado, é possível retratar uma tradução algébrica de algumas estruturas da teoria de conjuntos. Em particular, tem-se dois moldes de categorias necessárias para este trabalho, as monoidais e as trançadas. Para a primeira, conforme o nome intui, há uma abstração da estrutura de um monoide, usualmente denotado por $(M, \cdot, 1)$, para uma categoria, mediante a estritização de Mac Lane, da forma $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$. Enquanto que a segunda concerne-se ao entorno de um monoide comutativo e, com uma notação ainda mais simplificada, M é visto como uma categoria $(\mathcal{C}, \tau)$.

Com isso, toma-se proveito das duas estruturas citadas para tratar da tradução algébrica do centro de um monoide, isto é, o centro de uma categoria monoidal. Na teoria de conjuntos, dado um monoide, o seu centro é uma subestrutura comutativa, todavia essa realidade não é exatamente a mesma na teoria de categorias a menos de um detalhe. Dada uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, o seu centro, denotado por $Z(\mathcal{C})$, é uma categoria naturalmente trançada que não é uma subcategoria de $\mathcal{C}$. Essa observação é pertinente ainda que a noção de inclusão entre as categorias seja melhor vista por intermédio de um funtor esquecimento $U : Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ que é monoidal e estrito.

Em termos explícitos, os objetos de $Z(\mathcal{C})$ são pares da forma $(V, c_{-,V})$ em que V é um objeto em $\mathcal{C}$ e $c_{-,V} : - \otimes V \to V \otimes -$ é um isomorfismo natural responsável por duas identidades designadas por um diagrama triangular e outro hexagonal. Ademais, ao definir-se a estrutura de categoria monoidal para $Z(\mathcal{C})$, o tensor entre os objetos $(V, c_{-,V})$ e $(W, c_{-,W})$ é o par $(V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ de modo que $c_{-,V\otimes W}$ é definido por um outro diagrama hexagonal. Desta forma, com os dois diagramas hexagonais e uma súbita verificação da naturalidade de c para a segunda entrada, garante-se a estrutura de categoria trançada para o centro, como comentado.

Ante o exposto, aproveita-se os afazeres sobre o centro para tratar de uma estrutura algébrica bem comum, as álgebras comutativas, de modo a manifestar a definição categórica de uma álgebra base. Em suma, sob um ponto de vista de espaços vetoriais, dada uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, uma H-álgebra base é um H-módulo acrescido da estrutura de um H-comódulo, ambos à esquerda, interligados por duas compatibilidades. Com essa definição e uma verificação de isomorfismos entre categorias trançadas, tem-se a definição de uma álgebra base em $\mathcal{C}$ monoidal como uma álgebra comutativa em $Z(\mathcal{C})$.

Assim, toma-se proveito das notas de aula do professor Juan Martín Mombelli para melhor estabelecer o centro, bem como, utiliza-se um artigo de Joseph Donin e Andrey Mudrov para laborar com álgebras base. Logo, o objetivo deste trabalho é efetuar um estudo da categoria centro além de evidenciar a utilidade da mesma através da generalização do conceito de álgebra base. No mais, as demais referências são utilizadas pontualmente para melhor tracejar uma rota iniciada na teoria de categorias, passando pelas álgebras de Hopf na categoria dos espaços vetoriais, para enfim alcançar o centro de uma categoria monoidal e as álgebras base. Por conseguinte, a estruturação deste trabalho é dada de modo a evidenciar o viés categórico e, quando necessário, usufruir da álgebra linear para motivar e introduzir novos agentes para a teoria de categorias. Outrossim, os pré-requisitos para este trabalho são bem acessíveis por tratarem de noções elementares do produto tensorial entre espaços vetoriais.

Deste modo, no próximo capítulo, há um preâmbulo no que se concerne à teoria de categorias para permitir a apresentação de todos os conceitos necessários para introduzir as categorias monoidais. Assim, encontram-se definições e exemplos envolvendo categorias - ainda que outras sejam apresentadas no quarto e quinto capítulo - usuais, funtores covariantes e, principalmente, transformações naturais. Além disso, há certas verificações para uso futuro como, por exemplo, o *twist* de espaços vetoriais sobre um mesmo corpo, responsável por indicar que $V \otimes W \simeq W \otimes V$, é visto como um morfismo da coleção de um isomorfismo natural.

Diante disso, no terceiro capítulo, seguem as categorias monoidais, as quais são responsáveis por apresentar um objeto na categoria, dito unidade e denotado por **1**, bem como um funtor-tensor $\otimes$ tanto entre dois objetos quanto dois morfismos. Em especial, este tensor satisfaz, para quaisquer objetos X, Y e Z, os isomorfismos $(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$ e $\mathbf{1} \otimes X \simeq X \simeq X \otimes \mathbf{1}$ através de três naturalidades. Ademais, pede-se a comutatividade de dois diagramas, designados como compatibilidades entre os isomorfismos naturais, ditos axiomas do triângulo e do pentágono.

Naturalmente, dentro da teoria de categorias, ao descrever uma categoria monoidal apresentam-se conceitos envolvendo funtores e isomorfismos naturais que envolvem sua estrutura monoidal. Mediante estes aparatos, o leitor deve tomar conhecimento de um famoso resultado, o Teorema de Estritização de Mac Lane, responsável por garantir que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita. Assim, os isomorfismos apresentados no parágrafo anterior são substituídos por igualdades que, por conseguinte, reduzem uma significativa quantidade de esforço necessário para obter boa parte dos resultados.

Ainda que o teorema mencionado anteriormente seja interessante, neste trabalho, elegeu-se deixar de lado este resultado. A justificativa é simples, evidenciar o comportamento da categoria centro, presente no último capítulo, através de verificações menores e resultados envolvendo isomorfismos entre categorias. Em particular, o custo de estender alguns argumentos não é alarmante como, por exemplo, na garantia da boa definição do funtor-tensor da categoria centro. Outrossim, vale ressaltar ao leitor que, por motivos de coerência com a escolha tomada, os feitos realizados na categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo $\Bbbk$ não são dados através de uma notação estrita.

Com essa nota devidamente exposta, é dada continuidade ao desenvolvimento do terceiro capítulo. Em especial, seguem as categorias trançadas, categorias monoidais responsáveis por garantir, para quaisquer objetos X e Y, que $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$ por um isomorfismo natural. Denominado a trança da categoria, esse isomorfismo natural é acompanhado por dois diagramas hexagonais de compatibilidade envolvendo três objetos arbitrários. No mais, vale mencionar que, ao final deste capítulo, são introduzidas estruturas algébricas em uma categoria monoidal como, por exemplo, álgebras e coálgebras devido a um papel fundamental para o próximo capítulo.

Para o quarto capítulo, o objetivo inicial é tomar proveito da estrutura de categoria trançada dos espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbf{k}$ para construir a estrutura de biálgebra e, em seguida, de álgebra de Hopf. Lembrando que uma biálgebra acopla as estruturas de álgebra e coálgebra além de uma compatibilidade entre multiplicação e comultiplicação, bem como, unidade e counidade. Assim, para construir o conceito das álgebras de Hopf, toma-se proveito da álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(H)$ sobre uma biálgebra H de modo a introduzir a ideia de antípoda, o morfismo $S \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(H)$ cuja inversa, com relação ao produto de convolução na álgebra citada, é o morfismo id_H.

Dessa forma, ao tomar proveito dessas novas estruturas, é possível retornar, na segunda seção, à teoria de categorias para construir outras categorias monoidais. Em especial, tem-se as categorias de módulos à esquerda e de comódulos à esquerda sobre uma biálgebra H, denotadas respectivamente por ${}_H\mathcal{M}$ e ${}^H\mathcal{M}$, bem como, a categoria dos módulos esquerda-esquerda de Yetter-Drinfel'd, denotada por ${}^H_H\mathcal{YD}$. Ademais, a última seção tem como objetivo obter o conceito de uma H-álgebra base, a qual é uma álgebra comutativa em ${}^H_H\mathcal{YD}$ quando H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora.

Por fim, apresenta-se um estudo sobre o centro de uma categoria monoidal, inicialmente dada por Vladimir Gershonovich Drinfel'd. A primeira etapa é evidenciar a natural estrutura de categoria trançada e outras propriedades como, por exemplo, o isomorfismo entre as duas categorias que podem representar o centro. Vale ressaltar a dificuldade para determinar exemplos dos centros, ainda assim, garante-se que as categorias $Z({}_H\mathcal{M})$ e ${}^H_H\mathcal{YD}$ são isomorfas como categorias trançadas quando H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. É importante notar que esse resultado não é usualmente apresentado dessa forma, uma vez que é sabido, para H uma álgebra de Hopf finito-dimensional, o isomorfismo entre as categorias $Z({}_H\mathcal{M})$ e ${}_{D(H)}\mathcal{M}$ para $D(H)$ o duplo de Drinfel'd. Com isso, pode-se generalizar a definição de uma álgebra base para uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ qualquer como uma álgebra comutativa em $Z(\mathcal{C})$.

2 PRELIMINARES

Este capítulo exprime uma noção básica com relação à teoria de categorias de modo que as definições e resultados, dispostos como seguem, são um esqueleto para o próximo capítulo. Nesse sentido, o leitor pode reparar que certas conexões entre demasiados itens estão condensadas e isso decorre justamente da necessidade pontual de assuntos a serem tratados ao longo do trabalho. Deste modo, são evitadas algumas noções envolvendo, por exemplo, funtores contravariantes e a composição horizontal de transformações naturais.

Em particular, as referências para esta discussão são dadas em (BORCEUX, 1994) e (MACLANE, 1970).

Definição 2.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ é composta por

(i) uma coleção de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$[1];

(ii) para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, existe uma coleção de morfismos de X para Y em $\mathcal{C}$, denotada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;

(iii) para cada $X \in \mathcal{C}$, existe um morfismo $id_X : X \to X$ dito morfismo identidade de X;

(iv) para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, existe uma operação, denotada por $\circ$, de composição a qual é definida por

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Ademais, para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, a composição satisfaz as identidades

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \qquad \text{e} \qquad f \circ id_X = f = id_Y \circ f,$$

em que a primeira delas é chamada associatividade.

Definição 2.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \to Y$ é dito isomorfismo[2] se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$.

Para os exemplos de categorias dispostas a seguir, não são demonstradas as identidades em (iv); contudo, ambas as coleções propostas em (i) e (ii) são devidamente citadas.

[1] Por abuso de notação, utiliza-se $X \in \mathcal{C}$ ao invés de $X \in Obj(\mathcal{C})$.

[2] Para indicar que X e Y são objetos isomorfos sem apresentar o morfismo, utiliza-se a notação $X \simeq Y$.

Exemplo 2.3. Diz-se a respeito de Set a categoria cujos objetos são conjuntos quaisquer e os morfismos são quaisquer funções entre tais conjuntos; nesse sentido, denotamos $\mathrm{Hom}_{Set}(X, Y)$ por $\mathcal{F}(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in Set$.

Exemplo 2.4. Diz-se a respeito de Grp a categoria cujos objetos e morfismos são grupos e homomorfismos de grupos, respectivamente. Além disso, a restrição em Grp para grupos abelianos promove a categoria Ab.

Exemplo 2.5. Diz-se a respeito de $Ring$ a categoria cujos objetos e morfismos são anéis e homomorfismos de anéis, respectivamente. Além disso, a restrição em $Ring$ para anéis comutativos promove a categoria $CRing$.

Observação 2.6. Note que ao tratar apenas com anéis que admitem unidade tem-se a categoria $URing$ cujos morfismos $f : A \to B$ são homomorfismos de anéis tais que $f(1_A) = 1_B$, para quaisquer A e B anéis com unidade. Além disso, a restrição em $URing$ para anéis comutativos e com unidade promove a categoria $UCRing$.

Exemplo 2.7. Para R um anel, diz-se a respeito de ${}_R\mathcal{M}$ a categoria cujos objetos são R-módulos à esquerda e os morfismos são as funções R-lineares com multiplicação por elementos de R à esquerda.

Observação 2.8. Repare que, com o último exemplo, surgem naturalmente as categorias $\mathcal{M}_R$, dos R-módulos à direita, bem como, ${}_R\mathcal{M}_S$ dos (R, S)-bimódulos.

No quarto capítulo trabalha-se a respeito de categorias envolvendo ações e coações de biálgebras de modo que, em especial, a notação atribuída a essas novas categorias é semelhante à disposta anteriormente.

Exemplo 2.9. Para $\mathbf{k}$ um corpo, diz-se a respeito de $Vect_{\mathbf{k}}$ a categoria cujos objetos são espaços vetoriais sobre $\mathbf{k}$ e os morfismos são as transformações $\mathbf{k}$-lineares; nesse sentido, denotamos $\mathrm{Hom}_{Vect_{\mathbf{k}}}(V, W)$ por $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ para quaisquer $V, W \in Vect_{\mathbf{k}}$.

Observação 2.10. Repare na possibilidade de considerar apenas $\mathbf{k}$-espaços vetoriais de dimensão finita; assim, tem-se a categoria $vect_{\mathbf{k}}$.

O próximo exemplo envolve a generalização de um produto cartesiano, uma noção essencial ao longo de todo o trabalho, uma vez que tal está diretamente vinculado à definição de uma categoria monoidal.

Exemplo 2.11. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Diz-se a respeito de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a categoria produto entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tal que

(i) a coleção de objetos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é dada pelos pares $(X, X') \in (\mathcal{C}, \mathcal{D})$;

(ii) para quaisquer $(X, X'), (Y, Y') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, tem-se que a coleção de morfismos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é dada por

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}\big((X, X'), (Y, Y')\big) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X', Y');$$

(iii) para todo $(X, X') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, o morfismo identidade em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é dado por

$$id_{(X,X')} \stackrel{\text{def}}{=} (id_X, id_{X'});$$

(iv) para quaisquer $\overline{X} = (X, X'), \overline{Y} = (Y, Y'), \overline{Z} = (Z, Z') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, a composição é definida entrada-a-entrada, isto é, tem-se que

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{Y}, \overline{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X}, \overline{Y}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X}, \overline{Z}) \\ (\overline{g}, \overline{f}) \qquad\qquad &\mapsto \overline{g} \circ \overline{f} \stackrel{\text{def}}{=} (g \circ f, g' \circ f'), \end{aligned}$$

para $\overline{g} = (g, g')$ e $\overline{f} = (f, f')$.

Para garantir as identidades que envolvem a composição, sejam $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X}, \overline{Y})$, $\overline{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X}, \overline{Z})$ e $\overline{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{Z}, \overline{W})$; logo, valem

$$\begin{aligned} (\overline{h} \circ \overline{g}) \circ \overline{f} &= (h \circ g, h' \circ g') \circ (f, f') \\ &= \big((h \circ g) \circ f, (h' \circ g') \circ f'\big) \\ &= \big(h \circ (g \circ f), h' \circ (g' \circ f')\big) \\ &= (h, h') \circ (g \circ f, g' \circ f') \\ &= \overline{h} \circ (\overline{g} \circ \overline{f}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{f} \circ id_{\overline{X}} &= (f, f') \circ (id_X, id_{X'}) \\ &= (f \circ id_X, f' \circ id_{X'}) \\ &= \overline{f} \\ &= (id_Y \circ f, id_{Y'} \circ f') \\ &= (id_Y, id_{Y'}) \circ (f, f') \\ &= id_{\overline{Y}} \circ \overline{f}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é, de fato, uma categoria.

No quinto capítulo, descreve-se, brevemente, que o centro de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ não é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ e, para isso, faz-se necessário apresentar a noção de subcategoria.

Definição 2.12. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Diz-se que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ quando

(i) para todo $X \in \mathcal{D}$, segue que $X \in \mathcal{C}$;

(ii) para qualquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$, segue que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Além disso, se as coleções de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ forem iguais para quaisquer $X, Y \in \mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ é dita uma subcategoria plena.

Exemplo 2.13. É fácil ver que Ab é uma subcategoria plena de Grp ao passo que Grp não é uma subcategoria plena de Set. Similarmente, vale que $UCRing$ é uma subcategoria plena de $URing$, todavia ambas são apenas subcategorias de $Ring$.

Normalmente, a partir do momento que foram definidos os agentes de estudo, são apresentadas relações ou aplicações as quais interligam aqueles. Assim, um funtor é, sob certo abuso, a tradução dessas aplicações na teoria de categorias.

Definição 2.14. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é representado por

(i) uma aplicação de cada $X \in \mathcal{C}$ a um objeto $F(X) \in \mathcal{D}$, isto é,

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C} &\to \mathcal{D} \\ X &\mapsto F(X); \end{aligned}$$

(ii) uma aplicação, semelhante ao item anterior, de cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a um outro morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, isto é,

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ f &\mapsto F(f); \end{aligned}$$

(iii) para todo $X \in \mathcal{C}$, segue que $F(id_X) = id_{F(X)}$;

(iv) se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Observação 2.15. Ao longo do texto, os funtores covariantes serão descritos apenas por funtores. Logo, ao trabalhar com funtores contravariantes, tais serão especificados a fim de evitar problemas de interpretação ao longo do texto com certos resultados.

Exemplo 2.16. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Define-se $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ o funtor identidade de $\mathcal{C}$ com $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$ para todo $X \in \mathcal{C}$ e todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, cuja verificação de funtorialidade é trivial.

Exemplo 2.17. O produto tensorial entre $\mathbf{k}$-espaços vetoriais, $\otimes_{\mathbf{k}} \overset{\text{not}}{=} \otimes$, é um funtor da forma

$$\begin{aligned} \otimes : Vect_{\mathbf{k}} \times Vect_{\mathbf{k}} &\to Vect_{\mathbf{k}} \\ (V, W) \qquad &\mapsto V \otimes W \end{aligned}$$

$$(T, S) \qquad \mapsto T \otimes S,$$

para V e W espaços vetoriais, bem como, $T : V \to W$ e $S : U \to Z$ transformações lineares. De fato, visto que

$$\begin{aligned}
\left(\otimes\left((id_{(V,W)})\right)\right)(v, w) &= \otimes(id_V, id_W)(v, w) \\
&= (id_V \otimes id_W)(v \otimes w) \\
&= v \otimes w \\
&= id_{V \otimes W}(v \otimes w) \\
&= id_{\otimes(V,W)}(v \otimes w)
\end{aligned}$$

e, dadas $T' : W \to X$ e $S' : Z \to Y$ transformações lineares, tem-se que

$$\begin{aligned}
\left(\otimes((T' \circ T), (S' \circ S))\right)(v \otimes u) &= ((T' \circ T) \otimes (S' \circ S))(v \otimes u) \\
&= T'(T(v)) \otimes S'(S(u)) \\
&= (T' \otimes S')(T(v) \otimes S(u)) \\
&= ((T' \otimes S') \circ (T \otimes S))(v \otimes u) \\
&= (\otimes(T', S') \circ \otimes(T, S))(v \otimes u),
\end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $u \in U$.

Exemplo 2.18. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbf{k}$. Sabendo, consoante o exemplo anterior, que o produto tensorial $\otimes$ entre espaços vetoriais é um funtor, é possível construir os funtores

$$\begin{aligned}
- \otimes V : Vect_{\mathbf{k}} &\to Vect_{\mathbf{k}} \\
X &\mapsto X \otimes V \\
f &\mapsto f \otimes id_V
\end{aligned}$$

e, similarmente,

$$\begin{aligned}
V \otimes - : Vect_{\mathbf{k}} &\to Vect_{\mathbf{k}} \\
X &\mapsto V \otimes X \\
f &\mapsto id_V \otimes f.
\end{aligned}$$

De fato, para o primeiro, dado $X \in Vect_{\mathbf{k}}$, tem-se que

$$(- \otimes V)(id_X) = id_X \otimes id_V \stackrel{(*)}{=} id_{X \otimes V} = id_{(-\otimes V)(X)},$$

bem como, para $Y, Z \in Vect_{\mathbf{k}}$ com $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(X, Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(Y, Z)$, segue

$$(- \otimes V)(g \circ f) \; = (g \circ f) \otimes id_V$$

$$
\begin{aligned}
&= (g \circ f) \otimes (id_V \circ id_V) \\
&\overset{(*)}{=} (g \otimes id_V) \circ (f \otimes id_V) \\
&= (- \otimes V)(g) \circ (- \otimes V)(f)
\end{aligned}
$$

tendo em vista que, em $(*)$, usa-se o fato de $\otimes$ ser um funtor. Enquanto isso, para o segundo valem

$$(V \otimes -)(id_X) = id_V \otimes id_X \overset{(*)}{=} id_{V \otimes X} = id_{(V \otimes -)(X)}$$

e

$$
\begin{aligned}
(V \otimes -)(g \circ f) &= id_V \otimes (g \circ f) \\
&= (id_V \circ id_V) \otimes (g \circ f) \\
&\overset{(*)}{=} (id_V \otimes g) \circ (id_V \otimes f) \\
&= (V \otimes -)(g) \circ (V \otimes -)(f),
\end{aligned}
$$

como desejado.

No mais, vale ressaltar que este modelo de construção dos funtores apresentados admite uma generalização para $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, devidamente apresentada no próximo capítulo, qualquer e $V \in \mathcal{C}$. Esse comentário é importante tendo em vista a definição dos objetos do centro de uma categoria monoidal, disposta no quinto capítulo.

Exemplo 2.19. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Defina o funtor twist em $\mathcal{C}$, que relaciona pares de objetos, por

$$
\begin{aligned}
Tw : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\
(X, X') &\mapsto (X', X) \\
(f, f') &\mapsto (f', f).
\end{aligned}
$$

Para a funtorialidade de Tw, consideremos $(X, X') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e note que

$$Tw\left(id_{(X,X')}\right) = Tw(id_X, id_{X'}) = (id_{X'}, id_X) = id_{(X',X)} = id_{Tw(X,X')},$$

bem como, infere-se que

$$
\begin{aligned}
Tw((g, g') \circ (f, f')) &= Tw(g \circ f, g' \circ f') \\
&= (g' \circ f', g \circ f) \\
&= (g', g) \circ (f', f) \\
&= Tw(g, g') \circ Tw(f, f'),
\end{aligned}
$$

para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ e $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Z')$ quaisquer, como desejado.

Exemplo 2.20. Um funtor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito funtor esquecimento se U "descarta" ou "esquece" algumas ou todas propriedades relativos aos objetos e morfismos em $\mathcal{C}$ com relação aos objetos e morfismos em $\mathcal{D}$. Esse é o caso para os funtores $U : Ring \to Set$, $U : Ring \to Grp$ e $U : {}_R\mathcal{M} \to Set$.

Exemplo 2.21. Dados funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ dois funtores, é possível definir o funtor composição entre os funtores F e G por

$$\begin{aligned} GF : \mathcal{C} &\to \mathcal{E} \\ X &\mapsto G(F(X)) \\ f &\mapsto G(F(f)). \end{aligned}$$

Logo, para todo $X \in \mathcal{C}$, vale

$$GF(id_X) = G\left(F(id_X)\right) = G\left(id_{F(X)}\right) = id_{G(F(X))} = id_{GF(X)},$$

bem como,

$$\begin{aligned} GF(g \circ f) &= G\left(F(g \circ f)\right) \\ &= G\left(F(g) \circ F(f)\right) \\ &= G\left(F(g)\right) \circ G\left(F(f)\right) \\ &= GF(g) \circ GF(f). \end{aligned}$$

Portanto, a composição de funtores é um funtor.

Observação 2.22. Funtores preservam isomorfismos. De fato, seja $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ um isomorfismo, então existe $f^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que $f^{-1} \circ f = id_X$ e $f \circ f^{-1} = id_Y$. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor; logo, segue, da funtorialidade de tal, que

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(id_X) = id_{F(X)}$$

e

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(id_Y) = id_{F(Y)}.$$

Portanto, tem-se que $F(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$ com $F(f)^{-1} \overset{\text{def}}{=} F(f^{-1})$.

A utilização da próxima definição ocorrerá unicamente no final da primeira seção do quinto capítulo em um resultado responsável por descrever uma relação entre uma categoria trançada e seu centro. Todavia, um breve comentário, conforme discussão iniciada em (PAREIGIS, 1970), é necessário de antemão. Em algumas categorias, as suas coleções de objetos e morfismos são vistas como classes ao passo que, em outras, tais coleções são conjuntos. Para o segundo caso, dá-se o nome de categorias localmente pequenas, quando os morfismos formam um conjunto, e pequenas, caso a coleção de objetos seja descrita por um conjunto. Com isso, tendo em vista que as categorias consideradas neste trabalho são localmente pequenas, pode-se considerar a definição a seguir sem problemas envolvendo a axiomatização da teoria de conjuntos.

Definição 2.23. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, seja a função

$$\begin{aligned} F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ f \quad &\mapsto \quad F(f). \end{aligned}$$

Diz-se que F é

(i) fiel se a função $F_{X,Y}$ for injetora;

(ii) pleno se a função $F_{X,Y}$ for sobrejetora.

Exemplo 2.24. O funtor identidade de uma categoria $\mathcal{C}$ é plenamente fiel.

Exemplo 2.25. O funtor twist de uma categoria $\mathcal{C}$ descrito no Exemplo 2.19 é plenamente fiel.

Exemplo 2.26. Os funtores esquecimentos apresentados no Exemplo 2.20 são fiéis; entretanto, não são plenos.

Enquanto funtores relacionam categorias, as transformações naturais atuam sobre os primeiros de modo a proporcionar a essência da teoria apresentada, a comutatividade de diagramas.

Definição 2.27. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Diz-se que $\alpha : F \to G$ é uma transformação natural se for uma coleção de morfismos $\alpha = \{\alpha_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ em $\mathcal{D}$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

seja comutativo para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Além disso, diz-se que $\alpha : F \to G$ é um isomorfismo natural quando todo morfismo na coleção for um isomorfismo.

Recomenda-se observar, ao longo do texto, a importância da comutatividade do diagrama, usualmente descrita como a naturalidade da transformação.

Exemplo 2.28. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Diz-se a respeito do isomorfismo natural identidade $ID_F : F \to F$ com $(ID_F)_X \overset{\text{def}}{=} id_{F(X)}$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Afinal, são imediatas as verificações de que $id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ é isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$, bem como, do diagrama de naturalidade para ID_F.

Exemplo 2.29. Seja $\alpha : F \to G$ um isomorfismo natural. Define-se $\alpha^{-1} : G \to F$ como sendo a coleção de morfismos $\{\alpha_X^{-1} : G(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ em $\mathcal{D}$, a qual também é um isomorfismo natural. De fato, por hipótese, sabe-se que todo morfismo na coleção de α^{-1} é isomorfismo; logo, resta garantir a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\alpha_X^{-1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ G(Y) \arrow[r, "\alpha_Y^{-1}"'] & F(Y), \end{tikzcd}$$

o que é trivial tendo em vista que, pela naturalidade de α, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Exemplo 2.30. Dados $V, W \in Vect_{\mathbf{k}}$, o isomorfismo canônico $V \otimes W \simeq W \otimes V$ visto por

$$\begin{aligned} \tau_{V,W} : V \otimes W &\to W \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto w \otimes v, \end{aligned}$$

é visto como um isomorfismo natural. De fato, defina $\tau : \otimes \to \otimes \circ Tw$ de modo que, para V e W espaços vetoriais, $\tau_{V,W}$ esteja dado acima. Logo, dados $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, U)$ e $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(W, Z)$, segue que

$$\begin{aligned} (\tau_{U,Z} \circ (T \otimes S))(v \otimes w) &= \tau_{U,Z}(T(v) \otimes S(w)) \\ &= S(w) \otimes T(v) \\ &= (S \otimes T)(w \otimes v) \\ &= ((S \otimes T) \circ \tau_{V,W})(v \otimes w) \end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$; por conseguinte, o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "\tau_{V,W}"] \arrow[d, "T \otimes S"'] & W \otimes V \arrow[d, "S \otimes T"] \\ U \otimes Z \arrow[r, "\tau_{U,Z}"'] & Z \otimes U \end{tikzcd}$$

é comutativo, como desejado.

Para encerrar este breve capítulo, resta apresentar a composição vertical de transformações naturais.

Exemplo 2.31. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\beta : F \to G$ e $\alpha : G \to H$ transformações naturais. Diz-se que $\alpha \circ \beta : F \to H$ é a composição vertical de α e β de modo que $\alpha \circ \beta$ é definida por $\{(\alpha \circ \beta)_X : F(X) \to H(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ com $(\alpha \circ \beta)_X \overset{\text{def}}{=} \alpha_X \circ \beta_X$. De fato, $\alpha \circ \beta$ é uma transformação natural, uma vez que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "(\alpha\circ\beta)_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "(\alpha\circ\beta)_Y"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo, tendo em vista que, no diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & G(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "G(f)"] \arrow[dr, phantom, "(ii)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & H(Y), \end{tikzcd}$$

cada um dos quadrados enumerados é comutativo e, assim, vale que

$$\begin{aligned} H(f) \circ (\alpha \circ \beta)_X &= H(f) \circ \alpha_X \circ \beta_X \\ &\overset{(ii)}{=} \alpha_Y \circ G(f) \circ \beta_X \\ &\overset{(i)}{=} \alpha_Y \circ \beta_Y \circ F(f) \\ &= (\alpha \circ \beta)_Y \circ F(f), \end{aligned}$$

como desejado.

Uma vez que o termo “vertical” é citado na composição de transformações naturais, espera-se que, pelo menos, exista uma outra versão, método ou meio de compor transformações naturais. Essa nova composição é denominada composição horizontal; contudo, tal não será utilizada neste trabalho e, portanto, toda composição de transformações naturais a ser utilizada nos demais capítulos é, necessariamente, uma composição vertical.

3 CATEGORIAS TRANÇADAS

Neste capítulo, apresenta-se e contextualiza-se a estrutura de categoria a ser evidenciada ao longo de todo o trabalho e, com isso, não são medidos esforços para a demonstração de resultados e a construção de exemplos clássicos. Dessa forma, introduzem-se noções de categorias e funtores monoidais para que, em seguida, seja possível considerar as versões trançadas de cada um deles. No final deste capítulo, há uma breve seção responsável por descrever algumas estruturas algébricas em categorias monoidais como, por exemplo, álgebras e módulos sobre álgebras. Em particular, todas as estruturas e morfismos apresentados são traduções relativamente diretas da categoria dos $\mathbf{k}$-espaços vetoriais ao evidenciar o produto tensorial $\otimes_{\mathbf{k}}$.

Em particular, a principal referência para esta discussão é dada em (ETINGOF *et al.*, 2015).

3.1 CATEGORIAS MONOIDAIS

O leitor pode observar que pelo nome "categoria monoidal" é possível traçar uma relação direta entre a teoria de categorias e a estrutura de um monoide. Lembre que um monoide é um par composto por um conjunto não-vazio e uma operação binária no conjunto de modo que tal seja fechada, associativa e admita elemento neutro bilateral. Dessa forma, a relação entre a teoria e a estrutura há de ser, na primeira, a tradução algébrica da segunda.

Definição 3.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Diz-se que a 6-upla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal se

(i) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um funtor, dito funtor-tensor, tal que

$$\begin{aligned} \otimes : \quad \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\ (X, Y) &\mapsto X \otimes Y \\ (f, g) &\mapsto f \otimes g; \end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{1}$ é um objeto de $\mathcal{C}$, dito unidade da categoria;

(iii) a é um isomorfismo natural tal que

$$a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$$

de modo que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, segue

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z),$$

dito associatividade da categoria;

(iv) l, r são dois isomorfismos naturais tais que

$$l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}} \qquad \text{e} \qquad r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}}$$

de modo que, para todo $X \in \mathcal{C}$, tem-se

$$l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X \qquad \text{e} \qquad r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X;$$

(v) para quaisquer X, Y, Z, W em $\mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y \otimes Z,W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

são comutativos.

Usualmente, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal para simplificar a escrita associada à 6-upla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$. Os diagramas (3.1) e (3.2) são ditos axiomas do triângulo e do pentágono, respectivamente.

Observação 3.2. A unidade de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é única, a menos de isomorfismo. Afinal, se $\overline{\mathbf{1}} \in \mathcal{C}$ é outra unidade de $\mathcal{C}$, existe um isomorfismo natural $\bar{l} : \overline{\mathbf{1}} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}}$ e, assim,

$$r_{\overline{\mathbf{1}}} \circ (\bar{l}_{\mathbf{1}})^{-1} : \mathbf{1} \to \overline{\mathbf{1}}$$

é composição de isomorfismos; logo, um isomorfismo.

Observação 3.3. Dados $f : X \to Y$, $g : Y \to W$, $f' : X' \to Y'$ e $g' : Y' \to W'$ quatro morfismos em $\mathcal{C}$, a relação entre o funtor $\otimes$ e a composição de morfismos é dada por

$$(g \otimes g') \circ (f \otimes f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f'),$$

uma vez que

$$\begin{aligned}(g \otimes g') \circ (f \otimes f') &= \otimes(g, g') \circ \otimes(f, f') \\ &= \otimes \big((g, g') \circ (f, f')\big) \\ &= \otimes(g \circ f, g' \circ f') \\ &= (g \circ f) \otimes (g' \circ f').\end{aligned}$$

Ao passo que a relação entre o funtor $\otimes$ e o morfismo identidade é dada por

$$id_{X \otimes Y} = id_X \otimes id_Y,$$

já que

$$id_{X \otimes Y} = id_{\otimes(X,Y)} = \otimes \left(id_{(X,Y)}\right) = \otimes(id_X, id_Y) = id_X \otimes id_Y.$$

A partir deste momento, apresentam-se alguns exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 3.4. Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A categoria com a seguinte estrutura $(\mathcal{C}, \otimes^{rev}, \mathbf{1}, a^{rev}, l^{rev}, r^{rev})$ tal que

$$\begin{aligned} \otimes^{rev} : \ \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\to \ \ \mathcal{C} \\ (X, Y) \ &\mapsto Y \otimes X \\ (f, g) \ &\mapsto g \ \otimes f \end{aligned}$$

bem como, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$, $l^{rev}_X = r_X$ e $r^{rev}_X = l_X$ é, notoriamente, uma categoria monoidal dita categoria reversa de $\mathcal{C}$ e denotada por $\mathcal{C}^{rev}$.

Exemplo 3.5. A categoria Set é monoidal.

- o funtor $\otimes$ representa o produto cartesiano $\times : Set \times Set \to Set$ da forma

$$\begin{aligned} \times : Set \times Set &\to Set \\ (X, Y) \ &\mapsto X \times Y \end{aligned}$$

  e

$$\begin{aligned} \times : \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(Z, W) &\to \mathcal{F}(X \times Z, Y \times W) \\ (f, g) \qquad\qquad &\mapsto \qquad f \times g. \end{aligned}$$

  Relembre que $(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$ para quaisquer $x \in X$ e $z \in Z$. De fato, $\times$ é funtor, já que

$$\times(id_X, id_Y)(x, y) = (id_X \times id_Y)(x, y) = (id_X(x), id_Y(y)) = (x, y) = id_{X \times Y}(x, y),$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, isto é, $\times(id_X, id_Y) = id_{X \times Y}$. Ao passo que, com as funções $f' : Y \to V$ e $g' : W \to U$, tem-se

$$\begin{aligned}\times(f' \circ f, g' \circ g)(x,z) &= ((f' \circ f) \times (g' \circ g))(x,z)\\ &= ((f' \circ f)(x), (g' \circ g)(z))\\ &= (f'(f(x)), g'(g(z)))\\ &= (f' \times g')(f(x), g(z))\\ &= ((f' \times g') \circ (f \times g))(x,z)\\ &= (\times(f'g') \circ \times(f,g))(x,z),\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in X$ e $z \in Z$.

- A identidade é um conjunto unitário qualquer, adote $\{*\}$.
- A associatividade a é dada por

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z} : (X \times Y) \times Z &\to X \times (Y \times Z)\\ ((x,y),z) &\mapsto (x,(y,z)).\end{aligned}$$

Notemos que, para quaisquer $X, Y, Z \in Set$, $a_{X,Y,Z}$ é uma bijeção; logo, resta mostrar que a é transformação natural, isto é, diagrama

$$\begin{tikzcd} (X \times Y) \times Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "(r \times s) \times t"'] & X \times (Y \times Z) \arrow[d, "r \times (s \times t)"] \\ (V \times W) \times U \arrow[r, "a_{V,W,U}"'] & V \times (W \times U) \end{tikzcd}$$

é comutativo para $r : X \to V$, $s : Y \to W$ e $t : Z \to U$ funções. De fato, vide

$$\begin{aligned}\big(a_{V,W,U} \circ ((r \times s) \times t))\big)\, ((x,y),z) &= a_{V,W,U}((r(x), s(y)), t(z))\\ &= (r(x), (s(y), t(z)))\\ &= (r \times (s \times t))\, (x, (y,z))\\ &= \big((r \times (s \times t)) \circ a_{X,Y,Z}\big)\, ((x,y),z),\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$.

- Os isomorfismos naturais l, r são dados por

$$\begin{aligned} l_X : \{*\} \times X &\to X \\ (*, x) &\mapsto x \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} r_X : X \times \{*\} &\to X \\ (x, *) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Notemos que, para qualquer $X \in Set$, l_X e r_X são bijeções; assim, basta garantir que l e r sejam transformações naturais, ou seja, que os diagramas

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\{*\}} \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \{*\} \times Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} X \times \{*\} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f \times id_{\{*\}}"'] & X \times \{*\} \arrow[d, "f"] \\ Y \times \{*\} \arrow[r, "r_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

são comutativos. Certamente, pois

$$\left(l_Y \circ \left(id_{\{*\}} \times f\right)\right)(*, x) = l_Y(*, f(x)) = f(x) = (f \circ l_X)(*, x)$$

e

$$\left(r_Y \circ \left(f \times id_{\{*\}}\right)\right)(x, *) = r_Y(f(x), *) = f(x) = (f \circ r_X)(x, *),$$

para todo $x \in X$. Notemos que o axioma do triângulo é válido, já que para quaisquer $X, Y \in Set$ com $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\begin{aligned} \left((id_X \times l_Y) \circ a_{X,\{*\},Y}\right)((x, *), y) &= (id_X \times l_Y)(x, (*, y)) \\ &= (x, y) \\ &= (r_X \times id_Y)((x, *), y). \end{aligned}$$

Já para o axioma do pentágono, segue

$$\begin{aligned} &\left((id_X \times a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\times Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \times id_W)\right)(((x, y), z), w) \\ &= \left((id_X \times a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\times Z,W}\right)((x, (y, z)), w) \\ &= (id_X \times a_{Y,Z,W})(x, ((y, z), w)) \\ &= (x, (y, (z, w))) \\ &= a_{X,Y,Z\times W}((x, y), (z, w)) \\ &= (a_{X,Y,Z\times W} \circ a_{X\times Y,Z,W})(((x, y), z), w), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, W, Z \in Set$ com $x \in X$, $y \in Y$, $w \in W$ e $z \in Z$.

Exemplo 3.6. Para $\mathbf{k}$ um corpo, a categoria $Vect_{\mathbf{k}}$ é monoidal.

- O funtor $\otimes \overset{\text{not}}{=} \otimes_{\mathbf{k}} : Vect_{\mathbf{k}} \times Vect_{\mathbf{k}} \to Vect_{\mathbf{k}}$ representa o produto tensorial sobre $\mathbf{k}$ e sua verificação foi dada no Exemplo 2.17.
- A identidade é o corpo $\mathbf{k}$.
- A associatividade a é dada por

$$\begin{aligned} a_{V,W,U} : (V \otimes W) \otimes U &\to V \otimes (W \otimes U) \\ (v \otimes w) \otimes u &\mapsto v \otimes (w \otimes u). \end{aligned}$$

Repare que, para quaisquer $V, W, U \in Vect_{\mathbf{k}}$, $a_{V,W,U}$ é isomorfismo $\mathbf{k}$-linear; logo, resta mostrar que a é transformação natural, ou seja, que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \otimes U \arrow[r, "a_{V,W,U}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"'] & V \otimes (W \otimes U) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"'] & X \otimes (Y \otimes Z)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Certamente, afinal

$$\begin{aligned}
&(a_{X,Y,Z} \circ ((f \otimes g) \otimes h))((v \otimes w) \otimes u) \\
&= a_{X,Y,Z}((f(v) \otimes g(w)) \otimes h(u)) \\
&= f(v) \otimes (g(w) \otimes h(u)) \\
&= (f \otimes (g \otimes h))(v \otimes (w \otimes u)) \\
&= ((f \otimes (g \otimes h)) \circ a_{V,W,U})((v \otimes w) \otimes u),
\end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $u \in U$.

- Os isomorfismos naturais l, r são dados por

$$\begin{aligned} l_V : \mathbf{k} \otimes V &\to V \\ \lambda \otimes v &\mapsto \lambda v \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} r_V : V \otimes \mathbf{k} &\to V \\ v \otimes \lambda &\mapsto \lambda v. \end{aligned}$$

Notemos que, para qualquer $V \in Vect_{\mathbf{k}}$, l_V e r_V são isomorfismos $\mathbf{k}$-lineares; assim, resta mostrar que l e r são transformações naturais. Portanto, é necessário que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \otimes V \arrow[r, "l_V"] \arrow[d, "id_{\mathbf{k}}\otimes T"'] & V \arrow[d, "T"] \\
\mathbf{k} \otimes W \arrow[r, "l_W"'] & W
\end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd}
V \otimes \mathbf{k} \arrow[r, "r_V"] \arrow[d, "T\otimes id_{\mathbf{k}}"'] & V \arrow[d, "T"] \\
W \otimes \mathbf{k} \arrow[r, "r_W"'] & W
\end{tikzcd}$$

sejam comutativos. Para quaisquer $v \in V$ e $\lambda \in \mathbf{k}$, tem-se que

$$(l_W \circ (id_{\mathbf{k}} \otimes T))(\lambda \otimes v) = l_W(\lambda \otimes T(v)) = \lambda T(v) = T(\lambda v) = (T \circ l_V)(\lambda \otimes v)$$

e

$$(r_W \circ (T \otimes id_{\mathbf{k}}))(v \otimes \lambda) = r_W(T(v) \otimes \lambda) = \lambda T(v) = T(\lambda v) = (T \circ r_V)(v \otimes \lambda),$$

como desejado.

O axioma do triângulo é verídico, pois, para quaisquer $V, W \in Vect_{\mathbf{k}}$ com $v \in V$ e $w \in W$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\big((id_V \otimes l_W) \circ a_{V,\mathbf{k},W}\big)\left((v \otimes \lambda) \otimes w\right) &= (id_V \otimes l_W)\left(v \otimes (\lambda \otimes w)\right) \\
&= v \otimes \lambda w \\
&= \lambda v \otimes w \\
&= (r_V \otimes id_W)\left((v \otimes \lambda) \otimes w\right).
\end{aligned}$$

O axioma do pentágono é verificado, uma vez que é possível inferir, para quaisquer $V, W, U, Z \in Vect_{\mathbf{k}}$, que

$$\begin{aligned}
&\big((id_V \otimes a_{W,U,Z}) \circ a_{V,W\otimes U,Z} \circ (a_{V,W,U} \otimes id_Z)\big)\left(((v \otimes w) \otimes u) \otimes z\right) \\
&= \big((id_V \otimes a_{W,U,Z}) \circ a_{V,W\otimes U,Z}\big)\left((v \otimes (w \otimes u)) \otimes z\right) \\
&= (id_V \otimes a_{W,U,Z})(v \otimes ((w \otimes u) \otimes z)) \\
&= v \otimes (w \otimes (u \otimes z)) \\
&= a_{V,W,U\otimes Z}((v \otimes w) \otimes (u \otimes z)) \\
&= (a_{V,W,U\otimes Z} \circ a_{V\otimes W,U,Z})(((v \otimes w) \otimes u) \otimes z),
\end{aligned}$$

para $v \in V$, $w \in W$, $u \in U$ e $z \in Z$.

Exemplo 3.7. Analogamente, para $\mathbf{k}$ um corpo, a categoria $vect_{\mathbf{k}}$ é monoidal.

Observação 3.8. Mais geralmente, se R for um anel com unidade, então a categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ dos (R, R)-bimódulos admite estrutura de categoria monoidal, ao passo que, quando R for comutativo e unital, as categorias ${}_R\mathcal{M}$ e, por conseguinte, $\mathcal{M}_R$ também admitem uma estrutura de categoria monoidal.

O leitor não deve se preocupar com relação à quantidade de exemplos de categorias monoidais, uma vez que, nos próximos capítulos, são apresentadas novas categorias como, por exemplo, as categorias de H-módulos à esquerda para H uma biálgebra sobre um corpo $\mathbf{k}$ e o centro de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Outrossim, resta considerar todos os resultados necessários para o prosseguimento deste trabalho e, portanto, segue uma sequência de pequenas e simples proposições, todas devidamente demonstradas.

Proposição 3.9. Seja $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ funtor presente no item (i) da Definição 3.1 e sejam f, g morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$. Sob tais considerações, os seguintes itens são verdadeiros:

(i) $f \otimes g = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_Z)$, bem como, $f \otimes g = (f \otimes id_W) \circ (id_X \otimes g)$;

(ii) se f e g são isomorfismos, então $f \otimes g$ é um isomorfismo e $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Demonstração. Para (i), infere-se, pela relações estabelecidas previamente na Observação 3.3, que

$$f \otimes g = (id_Y \circ f) \otimes (g \circ id_Z) = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_Z),$$

bem como,

$$f \otimes g = (f \circ id_X) \otimes (id_W \circ g) = (f \otimes id_W) \circ (id_X \otimes g).$$

Para (ii), ao supor que f e g são isomorfismos, existem $f^{-1} : Y \to X$ e $g^{-1} : W \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$, $g^{-1} \circ g = id_Z$ e $g \circ g^{-1} = id_W$. Logo, novamente mediante a Observação 3.3, valem

$$(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) = (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) = id_X \otimes id_Z = id_{X \otimes Z}$$

e

$$(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = (f \circ f^{-1}) \otimes (g \circ g^{-1}) = id_Y \otimes id_W = id_{Y \otimes W},$$

como desejado. ■

Proposição 3.10. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Se vale que $id_{\mathbf{1}} \otimes f = id_{\mathbf{1}} \otimes g$ ou $f \otimes id_{\mathbf{1}} = g \otimes id_{\mathbf{1}}$, então $f = g$.

Demonstração. Uma vez que l é transformação natural, os diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{1} \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes g"'] & X \arrow[d, "g"] \\ 1 \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

são comutativos. Por hipótese, $id_{\mathbf{1}} \otimes f = id_{\mathbf{1}} \otimes g$; logo, vide os diagramas acima, segue que

$$f \circ l_X = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes f) = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes g) = g \circ l_X.$$

Assim, já que l_X é isomorfismo, segue que $f = g$. Analogamente, como r é transformação natural, os diagramas

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f \otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_Y"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "g \otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

são comutativos. Por hipótese de que vale $f \otimes id_{\mathbf{1}} = g \otimes id_{\mathbf{1}}$, tem-se que

$$f \circ r_X = r_Y \circ (f \otimes id_{\mathbf{1}}) = r_Y \circ (g \otimes id_{\mathbf{1}}) = g \circ r_X$$

e, como r_X é isomorfismo, segue que $f = g$.

■

Proposição 3.11. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, para todo $X \in \mathcal{C}$, infere-se que $l_{\mathbf{1}\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X$ e $r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}}$.

Demonstração. Tendo em vista que l e r são transformações naturais, segue que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "l_{1\otimes X}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes l_X"'] & \mathbf{1} \otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{X\otimes \mathbf{1}}"] \arrow[d, "r_X\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "r_X"] \\
X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

são comutativos, isto é,

$$l_X \circ l_{\mathbf{1}\otimes X} = l_X \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes l_X) \qquad \text{e} \qquad r_X \circ r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \circ (r_X \otimes id_{\mathbf{1}}).$$

Uma vez que l_X e r_X são isomorfismos, obtém-se

$$l_{\mathbf{1}\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X \qquad \text{e} \qquad r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}},$$

como desejado. ■

O teorema a seguir exprime uma compatibilidade entre o isomorfismo natural de associatividade e os isomorfismos naturais l e r separadamente, diferente do axioma do triângulo responsável por combinar uma relação entre a, l e r, concomitantemente.

Teorema 3.12. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X\otimes id_Y"'] & & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X\otimes Y}"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes Y & \\
(X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"'] \arrow[ur, "r_{X\otimes Y}"] & & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \arrow[ul, "id_X\otimes r_Y"']
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

são comutativos.

Demonstração. Consideremos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ e, pelo axioma do pentágono, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) \otimes Z \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z"] \arrow[d, "a_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z}"'] & & (X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{X,\mathbf{1} \otimes Y,Z}"] \\
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z}"'] & & X \otimes ((\mathbf{1} \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}"] \\
& X \otimes (\mathbf{1} \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}
$$

é comutativo de modo a obter o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) \otimes Z \arrow[rrrr, "a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z"] \arrow[drr, "(r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z"'] \arrow[ddd, "a_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z}"'] & & {} \arrow[d, phantom, "(i)"] & & (X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \otimes Z \arrow[dll, "(id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z"] \arrow[ddd, "a_{X,\mathbf{1} \otimes Y,Z}"] \\
& & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"'] & & \\
& (ii) & X \otimes (Y \otimes Z) & (iii) & \\
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[urr, "r_X \otimes id_{Y \otimes Z}"] \arrow[drr, "a_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z}"'] & (iv) & & (v) & X \otimes ((\mathbf{1} \otimes Y) \otimes Z) \arrow[ull, "id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z)"'] \arrow[dll, "id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}"] \\
& & X \otimes (\mathbf{1} \otimes (Y \otimes Z)). \arrow[uu, "id_X \otimes l_{Y \otimes Z}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Repare que o axioma do triângulo garante a comutatividade dos diagramas (i) e (iv), enquanto que a comutatividade dos trapézios laterais (ii) e (iii) é dada pela naturalidade de $a_{-,Y,Z}$ e de $a_{X,-,Z}$, respectivamente. Resta garantir a comutatividade do diagrama (v) e, para isso, notemos que

$$
\begin{aligned}
&(id_X \otimes l_{Y \otimes Z}) \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) \\
&\overset{(iv)}{=} (r_X \otimes id_{Y \otimes Z}) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z} \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) \\
&\overset{(ii)}{=} a_{X,Y,Z} \circ ((r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z} \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) \\
&\overset{(i)}{=} a_{X,Y,Z} \circ (id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z) \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z} \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) \\
&\overset{(iii)}{=} (id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z)) \circ a_{X,\mathbf{1} \otimes Y,Z} \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z} \circ \\
&\quad (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) \\
&\overset{(3.2)}{=} id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z);
\end{aligned}
$$

logo, o diagrama (v) é comutativo. Assim, por tal, quando $X = \mathbf{1}$, infere-se que

$$id_{\mathbf{1}} \otimes (l_{Y\otimes Z} \circ a_{\mathbf{1},Y,Z}) = (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{Y\otimes Z}) \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) = id_{\mathbf{1}} \otimes (l_Y \otimes id_Z).$$

Pela Proposição 3.10, segue que

$$l_{Y\otimes Z} \circ a_{\mathbf{1},Y,Z} = l_Y \otimes id_Z.$$

Este resultado garante a comutatividade do diagrama em (3.3). Repare que, para o diagrama inferior, basta considerar a categoria monoidal reversa $\mathcal{C}^{rev}$ e o diagrama superior. Logo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, garante-se que o diagrama

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{1} \otimes^{rev} X) \otimes^{rev} Y \arrow[rr, "a^{rev}_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l^{rev}_X \otimes^{rev} id_Y"'] & & \mathbf{1} \otimes^{rev} (X \otimes^{rev} Y) \arrow[dl, "l^{rev}_{X\otimes^{rev} Y}"] \\ & X \otimes^{rev} Y & \end{tikzcd}$$

é comutativo, *i.e.*, o diagrama

$$\begin{tikzcd} (Y \otimes X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "r_{Y\otimes X}"'] & & Y \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \arrow[dl, "id_Y \otimes r_X"] \\ & Y \otimes X & \end{tikzcd}$$

é comutativo, como desejado. ■

Corolário 3.13. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$.

Demonstração. Pelo axioma do triângulo e pelo Teorema 3.12, ao admitir $X = Y = \mathbf{1}$, infere-se que

$$(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} \qquad \text{e} \qquad r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = (id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}.$$

Pela Proposição 3.11, segue que $r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}$; logo,

$$(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = (id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}.$$

No mais, tendo em vista que $a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}$ é um isomorfismo, infere-se que

$$id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}.$$

Por fim, pela Proposição 3.10, segue que $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$. ■

Definidas as categorias monoidais, é fundamental trabalhar com os funtores que conseguem interligar as estruturas monoidais entre duas categorias; em especial, tais são definidos a seguir.

Definição 3.14. Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ e $(\mathcal{D}, \overline{\otimes}, \overline{\mathbf{1}}, \overline{a}, \overline{l}, \overline{r})$ duas categorias monoidais. Diz-se que a terna $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor monoidal se

(i) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor;

(ii) $\alpha : \overline{\otimes} \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural com

$$\alpha_{X,Y} : F(X)\overline{\otimes}F(Y) \to F(X \otimes Y),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$.

(iii) $\phi : \overline{\mathbf{1}} \to F(\mathbf{1})$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$;

(iv) os diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (F(X)\overline{\otimes}F(Y))\overline{\otimes}F(Z) \arrow[dl, "\alpha_{X,Y}\overline{\otimes}id_{F(Z)}"'] \arrow[dr, "\overline{a}_{F(X),F(Y),F(Z)}"] & \\
F(X \otimes Y)\overline{\otimes}F(Z) \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y,Z}"'] & & F(X)\overline{\otimes}(F(Y)\overline{\otimes}F(Z)) \arrow[d, "id_{F(X)}\overline{\otimes}\alpha_{Y,Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dr, "F(a_{X,Y,Z})"'] & & F(X)\overline{\otimes}F(Y \otimes Z) \arrow[dl, "\alpha_{X,Y\otimes Z}"] \\
 & F(X \otimes (Y \otimes Z)), &
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbf{1}}\,\overline{\otimes}F(X) \arrow[r, "\overline{l}_{F(X)}"] \arrow[d, "\phi\overline{\otimes}id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(\mathbf{1})\overline{\otimes}F(X) \arrow[r, "\alpha_{\mathbf{1},X}"'] & F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
F(X)\overline{\otimes}\,\overline{\mathbf{1}} \arrow[r, "\overline{r}_{F(X)}"] \arrow[d, "id_{F(X)}\overline{\otimes}\phi"'] & F(X) \\
F(X)\overline{\otimes}F(\mathbf{1}) \arrow[r, "\alpha_{X,\mathbf{1}}"'] & F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

são comutativos para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Além disso, F é dito um funtor estrito se valem $F(X)\overline{\otimes}F(Y) = F(X \otimes Y)$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, e $\overline{\mathbf{1}} = F(\mathbf{1})$.

Exemplo 3.15. O funtor identidade de uma categoria monoidal é estrito.

Proposição 3.16. A composição de funtores monoidais é um funtor monoidal.

Demonstração. Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$, $(\mathcal{D}, \overline{\otimes}, \overline{\mathbf{1}}, \overline{a}, \overline{l}, \overline{r})$ e $(\mathcal{E}, \widetilde{\otimes}, \widetilde{\mathbf{1}}, \widetilde{a}, \widetilde{l}, \widetilde{r})$ três categorias monoidais, além disso, sejam $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $(G, \beta, \psi) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ dois funtores monoidais. Em especial, como a composição de dois funtores é um funtor, segue que $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor. Com isso, defina

$$\gamma : \widetilde{\otimes} \circ (GF \times GF) \to (GF) \circ \otimes$$

como uma coleção de isomorfismos em $\mathcal{E}$ dados por

$$\gamma_{X,Y} = G(\alpha_{X,Y}) \circ \beta_{F(X),F(Y)} : GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y) \to GF(X \otimes Y) \tag{3.7}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. A naturalidade de γ é associada ao diagrama

$$\begin{tikzcd}
GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y) \arrow[r, "\gamma_{X,Y}"] \arrow[d, "GF(f)\widetilde{\otimes}GF(g)"'] & GF(X \otimes Y) \arrow[d, "GF(f\otimes g)"] \\
GF(Z)\widetilde{\otimes}GF(W) \arrow[r, "\gamma_{Z,W}"'] & GF(Z \otimes W)
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$. Para isso, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y) \arrow[rr, "\gamma_{X,Y}"] \arrow[dr, "\beta_{F(X),F(Y)}"'] \arrow[ddd, "GF(f)\widetilde{\otimes}GF(g)"'] & {} \arrow[d, phantom, "(i)"] & GF(X \otimes Y) \arrow[ddd, "GF(f\otimes g)"] \\
& G(F(X)\overline{\otimes}F(Y)) \arrow[ur, "G(\alpha_{X,Y})"'] \arrow[d, "G(F(f)\overline{\otimes}F(g))"] \arrow[l, phantom, "(ii)"] \arrow[r, phantom, "(iii)"] & {} \\
{} & G(F(Z)\overline{\otimes}F(W)) \arrow[dr, "G(\alpha_{Z,W})"] \arrow[d, phantom, "(iv)"] & \\
GF(Z)\widetilde{\otimes}GF(W) \arrow[rr, "\gamma_{Z,W}"'] \arrow[ur, "\beta_{F(Z),F(W)}"] & {} & GF(Z \otimes W)
\end{tikzcd}$$

a fim de observar que (i) e (iv) comutam pela definição de γ, ao passo que (ii) comuta pela naturalidade de β e (iii) comuta pela naturalidade de α, dada por

$$\alpha_{Z,W} \circ (F(f)\overline{\otimes}F(g)) = F(f \otimes g) \circ a_{X,Y},$$

transladada pelo funtor G. Disso, segue a comutatividade do diagrama procurado, pois

$$\begin{aligned}
GF(f \otimes g) \circ \gamma_{X,Y} &\overset{(i)}{=} GF(f \otimes g) \circ G(\alpha_{X,Y}) \circ \beta_{F(X),F(Y)} \\
&\overset{(iii)}{=} G(\alpha_{Z,W}) \circ G(F(f)\overline{\otimes}F(g)) \circ \beta_{F(X),F(Y)} \\
&\overset{(ii)}{=} G(\alpha_{Z,W}) \circ \beta_{F(Z),F(W)} \circ (GF(f)\widetilde{\otimes}GF(g)) \\
&\overset{(iv)}{=} \gamma_{Z,W} \circ (GF(f)\widetilde{\otimes}GF(g)).
\end{aligned}$$

No mais, defina

$$\chi = G(\phi) \circ \psi : \widetilde{\mathbf{1}} \to GF(\mathbf{1}) \tag{3.8}$$

um isomorfismo em $\mathcal{E}$. Disso, resta garantir a comutatividade dos diagramas dados em (3.5) e (3.6). Para o primeiro, repare que

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{X,Y\otimes Z}\circ(id_{GF(X)}\widetilde{\otimes}\gamma_{Y,Z})\circ\widetilde{a}_{GF(X),GF(Y),GF(Z)}\\
&\overset{(3.7)}{=} G(\alpha_{X,Y\otimes Z})\circ\beta_{F(X),F(Y\otimes Z)}\circ(id_{GF(X)}\widetilde{\otimes}G(\alpha_{Y,Z}))\circ\left(id_{GF(X)}\widetilde{\otimes}\beta_{F(Y),F(Z)}\right)\circ\\
&\quad\widetilde{a}_{GF(X),GF(Y),GF(Z)}\\
&\overset{(ii)}{=} G(\alpha_{X,Y\otimes Z})\circ G\left(id_{F(X)}\overline{\otimes}\alpha_{Y,Z}\right)\circ\beta_{F(X),F(Y)\overline{\otimes}F(Z)}\circ\left(id_{GF(X)}\widetilde{\otimes}\beta_{F(Y),F(Z)}\right)\circ\\
&\quad\widetilde{a}_{GF(X),GF(Y),GF(Z)}\\
&\overset{(3.5)}{=} G(\alpha_{X,Y\otimes Z})\circ G\left(id_{F(X)}\overline{\otimes}\alpha_{Y,Z}\right)\circ G\left(\overline{a}_{F(X),F(Y),F(Z)}\right)\circ\beta_{F(X)\overline{\otimes}F(Y),F(Z)}\circ\\
&\quad\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&= G(\alpha_{X,Y\otimes Z}\circ(id_{F(X)}\overline{\otimes}\alpha_{Y,Z})\circ\overline{a}_{F(X),F(Y),F(Z)})\circ\beta_{F(X)\overline{\otimes}F(Y),F(Z)}\circ\\
&\quad\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&\overset{(3.5)}{=} G(F(a_{X,Y,Z})\circ\alpha_{X\otimes Y,Z}\circ(\alpha_{X,Y}\overline{\otimes}id_{F(X)}))\circ\beta_{F(X)\overline{\otimes}F(Y),F(Z)}\circ\\
&\quad\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&= GF(a_{X,Y,Z})\circ G(\alpha_{X\otimes Y,Z})\circ G\left(\alpha_{X,Y}\overline{\otimes}id_{F(Z)}\right)\circ\beta_{F(X)\overline{\otimes}F(Y),F(Z)}\circ\\
&\quad\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&\overset{(ii)}{=} GF(a_{X,Y,Z})\circ G(\alpha_{X\otimes Y,Z})\circ\beta_{F(X\otimes Y),F(Z)}\circ\left(G(\alpha_{X,Y})\widetilde{\otimes}G\left(id_{F(Z)}\right)\right)\circ\\
&\quad\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&\overset{(3.7)}{=} GF(a_{X,Y,Z})\circ\gamma_{X\otimes Y,Z}\circ\left(G(\alpha_{X,Y})\widetilde{\otimes}G\left(id_{F(Z)}\right)\right)\circ\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&= GF(a_{X,Y,Z})\circ\gamma_{X\otimes Y,Z}\circ\left(G(\alpha_{X,Y})\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\circ\left(\beta_{F(X),F(Y)}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right)\\
&\overset{(3.7)}{=} GF(a_{X,Y,Z})\circ\gamma_{X\otimes Y,Z}\circ\left(\gamma_{X,Y}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}\right);
\end{aligned}
$$

assim, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & (GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y))\widetilde{\otimes}GF(Z) \arrow[dl, "\gamma_{X,Y}\widetilde{\otimes}id_{GF(Z)}"'] \arrow[dr, "\widetilde{a}_{GF(X),GF(Y),GF(Z)}"] & \\
GF(X\otimes Y)\widetilde{\otimes}GF(Z) \arrow[d, "\gamma_{X\otimes Y,Z}"'] & & GF(X)\widetilde{\otimes}(GF(Y)\widetilde{\otimes}GF(Z)) \arrow[d, "id_{GF(X)}\widetilde{\otimes}\gamma_{Y,Z}"] \\
GF((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dr, "GF(a_{X,Y,Z})"'] & & GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y\otimes Z) \arrow[dl, "\gamma_{X,Y\otimes Z}"] \\
 & GF(X\otimes(Y\otimes Z)), &
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Para o segundo, nota-se que

$$
\begin{aligned}
& GF(l_X) \circ \gamma_{\mathbf{1},X} \circ \left(\chi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& \overset{(3.7)}{=} GF(l_X) \circ G(\alpha_{\mathbf{1},X}) \circ \beta_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ \left(\chi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& \overset{(3.8)}{=} GF(l_X) \circ G(\alpha_{\mathbf{1},X}) \circ \beta_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ \left((G(\phi) \circ \psi) \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& = GF(l_X) \circ G(\alpha_{\mathbf{1},X}) \circ \beta_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ \left(G(\phi) \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \circ \left(\psi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& \overset{(ii)}{=} GF(l_X) \circ G(\alpha_{\mathbf{1},X}) \circ G\left(\phi \overline{\otimes} id_{F(X)}\right) \circ \beta_{\overline{\mathbf{1}},F(X)} \circ \left(\psi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& = G(F(l_X) \circ \alpha_{\mathbf{1},X} \circ (\phi \overline{\otimes} id_{F(X)})) \circ \beta_{\overline{\mathbf{1}},F(X)} \circ \left(\psi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& \overset{(3.6)}{=} G\left(\bar{l}_{F(X)}\right) \circ \beta_{\overline{\mathbf{1}},F(X)} \circ \left(\psi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}\right) \\
& \overset{(3.6)}{=} \widetilde{l}_{GF(X)},
\end{aligned}
$$

isto é, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{1}} \widetilde{\otimes} GF(X) \arrow[r, "\widetilde{l}_{GF(X)}"] \arrow[d, "\chi \widetilde{\otimes} id_{GF(X)}"'] & GF(X) \\
GF(\mathbf{1}) \widetilde{\otimes} GF(X) \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{1},X}"'] & GF(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[u, "GF(l_X)"']
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Por fim, para o terceiro, tem-se que

$$
\begin{aligned}
& GF(r_X) \circ \gamma_{X,\mathbf{1}} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \chi\right) \\
& \overset{(3.7)}{=} GF(r_X) \circ G(\alpha_{X,\mathbf{1}}) \circ \beta_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \chi\right) \\
& \overset{(3.8)}{=} GF(r_X) \circ G(\alpha_{X,\mathbf{1}}) \circ \beta_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} (G(\phi) \circ \psi)\right) \\
& = GF(r_X) \circ G(\alpha_{X,\mathbf{1}}) \circ \beta_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} G(\phi)\right) \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \psi\right) \\
& \overset{(ii)}{=} GF(r_X) \circ G(\alpha_{X,\mathbf{1}}) \circ G\left(id_{F(X)} \overline{\otimes} \phi\right) \circ \beta_{F(X),\overline{\mathbf{1}}} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \psi\right) \\
& = G(F(r_X) \circ \alpha_{X,\mathbf{1}} \circ (id_{F(X)} \overline{\otimes} \phi)) \circ \beta_{F(X),\overline{\mathbf{1}}} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \psi\right) \\
& \overset{(3.6)}{=} G\left(\overline{r}_{F(X)}\right) \circ \beta_{F(X),\overline{\mathbf{1}}} \circ \left(id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \psi\right) \\
& \overset{(3.6)}{=} \widetilde{r}_{GF(X)},
\end{aligned}
$$

ou seja, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
GF(X) \widetilde{\otimes} \widetilde{\mathbf{1}} \arrow[r, "\widetilde{r}_{GF(X)}"] \arrow[d, "id_{GF(X)} \widetilde{\otimes} \chi"'] & GF(X) \\
GF(X) \widetilde{\otimes} GF(\mathbf{1}) \arrow[r, "\gamma_{X,\mathbf{1}}"'] & GF(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "GF(r_X)"']
\end{tikzcd}
$$

é comutativo.

■

Conforme a demonstração acima, é direta a verificação de que a composição de funtores estritos é um funtor estrito.

3.2 CATEGORIAS TRANÇADAS

Definição 3.17. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e Tw o funtor twist de $\mathcal{C}$ apresentado no Exemplo 2.19. Diz-se que o isomorfismo natural $\tau : \otimes \to \otimes \circ Tw$ é uma trança para $\mathcal{C}$ se os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\tau_{X\otimes Y,Z}"] & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[dr, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "id_X\otimes\tau_{Y,Z}"'] & & & (Z\otimes X)\otimes Y \\
 & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[ur, "\tau_{X,Z}\otimes id_Y"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "\tau_{X,Y\otimes Z}"] & (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\tau_{X,Y}\otimes id_Z"'] & & & Y\otimes(Z\otimes X) \\
 & (Y\otimes X)\otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[ur, "id_Y\otimes\tau_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

são comutativos, isto é, valem as identidades

$$a^{-1}_{Z,X,Y} \circ \tau_{X\otimes Y,Z} \circ a^{-1}_{X,Y,Z} = (\tau_{X,Z} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,Z,Y} \circ (id_X \otimes \tau_{Y,Z}) \tag{3.11}$$

e

$$a_{Y,Z,X} \circ \tau_{X,Y\otimes Z} \circ a_{X,Y,Z} = (id_Y \otimes \tau_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (\tau_{X,Y} \otimes id_Z) \tag{3.12}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$.

Definição 3.18. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que o par $(\mathcal{C}, \tau)$ é uma categoria trançada se τ é uma trança para $\mathcal{C}$. Além disso, se para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vale $\tau_{Y,X} \circ \tau_{X,Y} = id_X \otimes id_Y$, então o par $(\mathcal{C}, \tau)$ é dita uma categoria simétrica.

Exemplo 3.19. Dada τ uma trança para $\mathcal{C}$, a categoria $(\mathcal{C}, \overline{\tau})$ é trançada para

$$\overline{\tau}_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{-1}_{Y,X} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

dita a trança reversa de τ, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. De fato, a priori, repare que $\overline{\tau} : \otimes \to \otimes \circ Tw$ é um isomorfismo natural por causa de τ e, a posteriori, notemos que

$$\begin{aligned}
a^{-1}_{Z,X,Y} \circ \overline{\tau}_{X\otimes Y,Z} \circ a^{-1}_{X,Y,Z} &= a^{-1}_{Z,X,Y} \circ \tau^{-1}_{Z,X\otimes Y} \circ a^{-1}_{X,Y,Z} \\
&= (a_{X,Y,Z} \circ \tau_{Z,X\otimes Y} \circ a_{Z,X,Y})^{-1} \\
&\stackrel{(3.12)}{=} \big((id_X \otimes \tau_{Z,Y}) \circ a_{X,Z,Y} \circ (\tau_{Z,X} \otimes id_Y)\big)^{-1} \\
&= (\tau^{-1}_{Z,X} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,Z,Y} \circ (id_X \otimes \tau^{-1}_{Z,Y}) \\
&= (\overline{\tau}_{X,Z} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,Z,Y} \circ (id_X \otimes \overline{\tau}_{Y,Z}),
\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}
a_{Y,Z,X} \circ \overline{\tau}_{X,Y\otimes Z} \circ a_{X,Y,Z} &= a_{Y,Z,X} \circ \tau^{-1}_{Y\otimes Z,X} \circ a_{X,Y,Z} \\
&= (a^{-1}_{X,Y,Z} \circ \tau_{Y\otimes Z,X} \circ a^{-1}_{Y,Z,X})^{-1} \\
&\stackrel{(3.11)}{=} \Big((\tau_{Y,X} \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{Y,X,Z} \circ (id_Y \otimes \tau_{Z,X})\Big)^{-1} \\
&= (id_Y \otimes \tau^{-1}_{Z,X}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (\tau^{-1}_{Y,X} \otimes id_Z) \\
&= (id_Y \otimes \overline{\tau}_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (\overline{\tau}_{X,Y} \otimes id_Z),
\end{aligned}$$

isto é, $\overline{\tau}$ satisfaz os diagramas hexagonais de trança.

Exemplo 3.20. A categoria reversa de uma categoria trançada também é trançada. De fato, dada uma categoria $(\mathcal{C}, \tau)$ trançada, basta reparar que a categoria reversa $\mathcal{C}^{rev}$ admite uma trança τ^{rev} dada por

$$\tau^{rev}_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\tau}_{Y,X} : X \otimes^{\text{rev}} Y \to Y \otimes^{\text{rev}} X,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, cujas propriedades são garantidas pelo exemplo anterior.

Exemplo 3.21. A categoria Set é simétrica quando, dados $X, Y \in Set$, tem-se

$$\begin{aligned}
\tau_{X,Y} : X \times Y &\to Y \times X \\
(x, y) &\mapsto (y, x).
\end{aligned}$$

De fato, nota-se que $\tau_{X,Y}$ é uma bijeção com $\tau^{-1}_{X,Y} = \tau_{Y,X}$ ao passo que, para a naturalidade de τ, ao admitir $f : X \to Z$ e $g : Y \to W$ duas funções, obtém-se

$$\begin{aligned}
(\tau_{Z,W} \circ (f \times g)(x, y) &= \tau_{Z,W}(f(x), g(y)) \\
&= (g(y), f(x))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (g \times f)(y, x) \\
&= ((g \times f) \circ \tau_{X,Y})(x, y),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Isto é, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] \arrow[d, "f \times g"'] & Y \times X \arrow[d, "g \times f"] \\
Z \times W \arrow[r, "\tau_{Z,W}"'] & W \times Z
\end{tikzcd}
$$

é comutativo, como desejado. Para o primeiro diagrama hexagonal, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\left(a^{-1}_{Z,X,Y} \circ \tau_{X \otimes Y,Z} \circ a^{-1}_{X,Y,Z}\right)(x, (y, z)) \\
&= \left(a^{-1}_{Z,X,Y} \circ \tau_{X \otimes Y,Z}\right)((x, y), z) \\
&= a^{-1}_{Z,X,Y}(z, (x, y)) \\
&= ((z, x), y) \\
&= (\tau_{X,Z} \otimes id_Y)((x, z), y) \\
&= \left((\tau_{X,Z} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,Z,Y}\right)(x, (z, y)) \\
&= \left((\tau_{X,Z} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,Z,Y} \circ (id_X \otimes \tau_{Y,Z})\right)(x, (y, z))
\end{aligned}
$$

ao passo que, para o segundo, segue

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{Y,Z,X} \circ \tau_{X,Y \otimes Z} \circ a_{X,Y,X}\right)((x, y), z) \\
&= \left(a_{Y,Z,X} \circ \tau_{X,Y \otimes Z}\right)(x, (y, z)) \\
&= a_{Y,Z,X}((y, z), x) \\
&= (y, (z, x)) \\
&= (id_Y \otimes \tau_{X,Z})(y, (x, z)) \\
&= \left((id_Y \otimes \tau_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z}\right)((y, x), z) \\
&= \left((id_Y \otimes \tau_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (\tau_{X,Y} \otimes id_Z)\right)((x, y), z),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$, como desejado.

Exemplo 3.22. Dado $\mathbf{k}$ um corpo, as categorias $Vect_{\mathbf{k}}$ e $vect_{\mathbf{k}}$ são simétricas pelo isomorfismo canônico

$$
\begin{aligned}
\tau_{V,W} : V \otimes W &\to W \otimes V \\
v \otimes w &\mapsto w \otimes v.
\end{aligned}
$$

Em particular, a naturalidade de τ está garantida consoante o Exemplo 2.30, enquanto que a comutatividade do primeiro diagrama hexagonal é dada por

$$
\begin{aligned}
&\left(a^{-1}_{U,V,W} \circ \tau_{V\otimes W,U} \circ a^{-1}_{V,W,U}\right)(v \otimes (w \otimes u))\\
&= \left(a^{-1}_{U,V,W} \circ \tau_{V\otimes W,U}\right)((v \otimes w) \otimes u)\\
&= a^{-1}_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w))\\
&= (u \otimes v) \otimes w\\
&= (\tau_{V,U} \otimes id_W)((v \otimes u) \otimes w)\\
&= \left((\tau_{V,U} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{V,U,W}\right)(v \otimes (u \otimes w))\\
&= \left((\tau_{V,U} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{V,U,W} \circ (id_V \otimes \tau_{W,U})\right)(v \otimes (w \otimes u))
\end{aligned}
$$

e a comutatividade do segundo é dada por

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{W,U,V} \circ \tau_{V,W\otimes U} \circ a_{V,W,V}\right)((v \otimes w) \otimes u)\\
&= \left(a_{W,U,V} \circ \tau_{V,W\otimes U}\right)(v \otimes (w \otimes u))\\
&= a_{W,U,V}((w \otimes u) \otimes v)\\
&= w \otimes (u \otimes v)\\
&= (id_W \otimes \tau_{V,U})(w \otimes (v \otimes u))\\
&= \left((id_W \otimes \tau_{V,U}) \circ a_{W,V,U}\right)((w \otimes v) \otimes u)\\
&= \left((id_W \otimes \tau_{V,U}) \circ a_{W,V,U} \circ (\tau_{V,W} \otimes id_U)\right)((v \otimes w) \otimes u),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $u \in U$, como desejado.

Exemplo 3.23. Dado R um anel comutativo com unidade, analogamente ao exemplo anterior, a categoria ${}_R\mathcal{M}$ é simétrica. Mais geralmente, para R não-comutativo, ao menos garante-se que a categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ é simétrica.

Ainda que estejam dispostos tais exemplos para familiarizar-se com a estrutura de categoria trançada, é imprescindível ressaltar que nem toda categoria monoidal é trançada. A categoria em questão, dada em (PINTER, 2013), é a dos módulos sobre a álgebra $(\mathbf{k}[G])^*$ à esquerda, para G um grupo não-abeliano finito. No mais, vale reparar que todos os exemplos de categorias trançadas citadas são simétricas. Todavia, no próximo capítulo, será introduzida a categoria de módulos esquerda-esquerda de Yetter-Drinfel'd, uma categoria que, sob certas hipóteses, é trançada e não é simétrica. Esse exemplo também é dado em (PINTER, 2013).

Proposição 3.24. Seja $(\mathcal{C}, \tau)$ uma categoria monoidal trançada. Sob tal consideração, os diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[rr, "\tau_{\mathbf{1},X}"] \arrow[dr, "l_X"'] & & X \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "r_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\tag{3.13}
$$

e

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \otimes \mathbf{1} \arrow[ur, "r_X"] \arrow[rr, "\tau_{X,\mathbf{1}}"'] & & \mathbf{1} \otimes X \arrow[ul, "l_X"'] \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

são comutativos, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathcal{C}$, a partir da comutatividade do diagrama dado em (3.9), segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[r, bend left, "id_X \otimes \tau_{\mathbf{1},Y}"] & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \\ (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[u, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[d, "\tau_{X\otimes\mathbf{1},Y}"'] & (X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[u, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"'] \arrow[d, "\tau_{X,Y} \otimes id_{\mathbf{1}}"] \\ Y \otimes (X \otimes \mathbf{1}) & (Y \otimes X) \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "a_{Y,X,\mathbf{1}}"] \end{tikzcd}$$

é comutativo e, assim, é possível obter um novo diagrama, o qual é dado por

$$\begin{tikzcd} X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[rr, "id_X \otimes l_Y"] \arrow[rrrr, bend left, "id_X \otimes \tau_{\mathbf{1},Y}"] \arrow[rrrr, phantom, bend left=15, "(i)"] & & X \otimes Y \arrow[d, "\tau_{X,Y}"] & & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \arrow[ll, "id_X \otimes r_Y"'] \\ & (ii) & & (iii) & \\ (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[uu, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[uurr, "r_X \otimes id_Y"'] \arrow[dd, "\tau_{X\otimes\mathbf{1},Y}"'] & (iv) & Y \otimes X & (v) & (X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[uu, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"'] \arrow[uull, "r_{X\otimes Y}"] \arrow[dd, "\tau_{X,Y} \otimes id_{\mathbf{1}}"] \\ & & (vi) & & \\ Y \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \arrow[uurr, "id_Y \otimes r_X"'] & & & & (Y \otimes X) \otimes \mathbf{1}. \arrow[llll, "a_{Y,X,\mathbf{1}}"] \arrow[uull, "r_{Y\otimes X}"] \end{tikzcd}$$

Em especial, procura-se a comutatividade de (i) para garantir (3.13), tendo em vista que (ii) representa o axioma do triângulo dado em (3.1), (iii) e (vi) são comutativos em função do Teorema 3.12, enquanto que (iv) e (v) indicam as naturalidades de τ e r, respectivamente. Dessa forma, como o diagrama exterior comuta, obtém-se a identidade necessária em (i), vide

$$
\begin{aligned}
&(id_X \otimes r_Y) \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) \\
&\overset{(iii)}{=} r_{X\otimes Y} \circ a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}} \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) \\
&\overset{(v)}{=} \tau^{-1}_{X,Y} \circ r_{Y\otimes X} \circ (\tau_{X,Y} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}} \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) \\
&\overset{(vi)}{=} \tau^{-1}_{X,Y} \circ (id_Y \otimes r_X) \circ a_{Y,X,\mathbf{1}} \circ (\tau_{X,Y} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}} \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) \\
&\overset{(iv)}{=} (r_X \otimes id_Y) \circ \tau^{-1}_{X\otimes\mathbf{1},Y} \circ a_{Y,X,\mathbf{1}} \circ (\tau_{X,Y} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}} \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) \\
&\overset{(ii)}{=} (id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y} \circ \tau^{-1}_{X\otimes\mathbf{1},Y} \circ a_{Y,X,\mathbf{1}} \circ (\tau_{X,Y} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}} \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) \\
&\overset{(3.9)}{=} id_X \otimes l_Y
\end{aligned}
$$

e, assim,

$$id_X \otimes (r_Y \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) = (id_X \otimes r_Y) \circ (id_X \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) = id_X \otimes l_Y$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Logo, ao admitir $X = \mathbf{1}$, tem-se que

$$id_{\mathbf{1}} \otimes (r_Y \circ \tau_{\mathbf{1},Y}) = id_{\mathbf{1}} \otimes l_Y$$

e pela Proposição 3.10, segue a comutatividade do diagrama dado em (3.13). Por fim, para garantir a comutatividade do diagrama dado em (3.14), basta utilizar o resultado acima para a trança reversa $\overline{\tau}$. Afinal, tem-se que

$$\tau_{X,\mathbf{1}} = \overline{\tau}^{-1}_{\mathbf{1},X} \overset{(3.13)}{=} (r^{-1}_X \circ l_X)^{-1} = l^{-1}_X \circ r_X,$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, como desejado. ■

No final desta seção estão presentes os conceitos suficientes de isomorfismos entre categorias trançadas, essencial para definir o conceito de uma álgebra base em uma categoria monoidal qualquer.

Definição 3.25. Sejam $(\mathcal{C}, \tau)$ e $(\mathcal{D}, \sigma)$ duas categorias trançadas. Diz-se que a terna $(F, \alpha, \phi) : (\mathcal{C}, \tau) \to (\mathcal{D}, \sigma)$ é um funtor trançado se

(i) $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor monoidal;

(ii) o diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
F(X)\overline{\otimes}F(Y) & \xrightarrow{\alpha_{X,Y}} & F(X\otimes Y) \\
{\scriptstyle \sigma_{F(X),F(Y)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\tau_{X,Y})} \\
F(Y)\overline{\otimes}F(X) & \xrightarrow[\alpha_{Y,X}]{} & F(Y\otimes X)
\end{array}
\tag{3.15}
$$

é comutativo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$.

Exemplo 3.26. O funtor identidade de uma categoria trançada é trançado.

Proposição 3.27. A composição de funtores trançados é um funtor trançado.

Demonstração. Sejam $(F, \alpha, \phi) : (\mathcal{C}, \tau) \to (\mathcal{D}, \sigma)$ e $(G, \beta, \psi) : (\mathcal{D}, \sigma) \to (\mathcal{E}, \omega)$ dois funtores trançados. Vide a Proposição 3.16, resta garantir a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y) \arrow[r, "\gamma_{X,Y}"] \arrow[d, "\omega_{GF(X),GF(Y)}"'] & GF(X \otimes Y) \arrow[d, "GF(\tau_{X,Y})"] \\
GF(Y)\widetilde{\otimes}GF(X) \arrow[r, "\gamma_{Y,X}"'] & GF(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

com $\gamma_{X,Y}$ dado em (3.7) para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Para isso, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
GF(X)\widetilde{\otimes}GF(Y) \arrow[rr, "\gamma_{X,Y}"] \arrow[dr, "\beta_{F(X),F(Y)}"'] \arrow[ddd, "\omega_{GF(X),GF(Y)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "(i)"] & GF(X \otimes Y) \arrow[ddd, "GF(\tau_{X,Y})"] \\
{} \arrow[dr, phantom, "(ii)"] & G(F(X)\overline{\otimes}F(Y)) \arrow[ur, "G(\alpha_{X,Y})"'] \arrow[d, "G(\sigma_{F(X),F(Y)})"] & {} \arrow[dl, phantom, "(iii)"] \\
 & G(F(Y)\overline{\otimes}F(X)) \arrow[dr, "G(\alpha_{Y,X})"] \arrow[d, phantom, "(iv)"] & \\
GF(Y)\widetilde{\otimes}GF(X) \arrow[rr, "\gamma_{Y,X}"'] \arrow[ur, "\beta_{F(Y),F(X)}"] & {} & GF(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

a fim de observar que (i) e (iv) comutam pela definição de γ, ao passo que (ii) comuta já que G é trançado e (iii) comuta tendo em vista que F é trançado e o diagrama é transladado pelo funtor G. Disso, segue a comutatividade do diagrama procurado, pois

$$\begin{aligned}
GF(\tau_{X,Y}) \circ \gamma_{X,Y} &\overset{(i)}{=} GF(\tau_{X,Y}) \circ G(\alpha_{X,Y}) \circ \beta_{F(X),F(Y)} \\
&\overset{(iii)}{=} G(\alpha_{Y,X}) \circ G\left(\sigma_{F(X),F(Y)}\right) \circ \beta_{F(X),F(Y)} \\
&\overset{(ii)}{=} G(\alpha_{Y,X}) \circ \beta_{F(Y),F(X)} \circ \omega_{GF(X),GF(Y)} \\
&\overset{(iv)}{=} \gamma_{Y,X} \circ \omega_{GF(X),GF(Y)}.
\end{aligned}$$

■

Notemos que, dadas $(\mathcal{C}, \tau)$ e $(\mathcal{D}, \sigma)$ duas categorias trançadas de modo que existam $(F, \alpha, \phi) : (\mathcal{C}, \overline{\tau}) \to (\mathcal{D}, \sigma)$ e $(G, \beta, \psi) : (\mathcal{D}, \overline{\sigma}) \to (\mathcal{C}, \tau)$ dois funtores trançados, segue, conforme o item (ii) da Definição 3.25, a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} F(X)\overline{\otimes}F(Y) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"] \arrow[d, "\sigma_{F(X),F(Y)}"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F(\overline{\tau}_{X,Y})"] \\ F(Y)\overline{\otimes}F(X) \arrow[r, "\alpha_{Y,X}"'] & F(Y\otimes X) \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} G(W)\otimes G(Z) \arrow[r, "\beta_{W,Z}"] \arrow[d, "\tau_{G(W),G(Z)}"'] & G(W\overline{\otimes}Z) \arrow[d, "G(\overline{\sigma}_{W,Z})"] \\ G(Z)\otimes G(W) \arrow[r, "\beta_{Z,W}"'] & G(Z\overline{\otimes}W), \end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e $W, Z \in \mathcal{D}$. Disso, se α e β são isomorfismos naturais identidade, então os diagramas acima são reduzidos às identidades

$$\sigma_{F(X),F(Y)} = F(\overline{\tau}_{X,Y}) \qquad \text{e} \qquad \tau_{G(W),G(Z)} = G(\overline{\sigma}_{W,Z})$$

de modo que, ao compor os funtores G e F, obtém-se

$$\sigma_{FG(W),FG(Z)} = F\left(\overline{\tau}_{G(W),G(Z)}\right) = F\left(\tau^{-1}_{G(Z),G(W)}\right) = FG\left(\overline{\sigma}^{-1}_{Z,W}\right) = FG(\sigma_{W,Z}),$$

bem como,

$$\tau_{GF(X),GF(Y)} = G\left(\overline{\sigma}_{F(X),F(Y)}\right) = G\left(\sigma^{-1}_{F(Y),F(X)}\right) = GF\left(\overline{\tau}^{-1}_{Y,X}\right) = GF(\tau_{X,Y}).$$

Logo, a composição de funtores estritos e trançados mediante tranças reversas é um funtor estrito e trançado mediante a trança usual. Essa nota, devidamente utilizada no quinto capítulo, é interessante por estar associada à definição a seguir.

Definição 3.28. Sejam $(\mathcal{C}, \tau)$ e $(\mathcal{D}, \sigma)$ duas categorias trançadas. Diz-se que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias trançadas isomorfas se existem $(F, \alpha, \phi) : (\mathcal{C}, \tau) \to (\mathcal{D}, \sigma)$ e $(G, \beta, \psi) : (\mathcal{D}, \sigma) \to (\mathcal{C}, \tau)$ dois funtores trançados tais que $GF = Id_{\mathcal{C}}$ e $FG = Id_{\mathcal{D}}$ como funtores trançados.

Ainda que o leitor perceba, nesta seção, a inexistência de exemplos de categorias isomorfas como categorias trançadas esta situação é devidamente resolvida no Exemplo 5.9, responsável por motivar a generalização do conceito de álgebra base para uma categoria monoidal qualquer.

3.3 ESTRUTURAS ALGÉBRICAS EM CATEGORIAS MONOIDAIS

O objetivo desta seção é permitir um auxílio para tratar, em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, de algumas estruturas algébricas e seus respectivos morfismos. Além disso, é imprescindível notar que todas as definições para as estruturas apresentadas nesta seção são, necessariamente, equivalentes às estruturas de mesmo nome nas categorias de espaços vetoriais. Nesse sentido, por exemplo, álgebras em $Vect_{\mathbf{k}}$ são equivalentes às álgebras sobre o corpo $\mathbf{k}$.

No mais, das estruturas a serem introduzidas, a estrutura de álgebra comutativa é mais importante para o trabalho como um todo, justificada pela definição de uma álgebra base. Além disso, apresentam-se álgebras e coálgebras tendo em vista que, no próximo capítulo, toma-se proveito de biálgebras e álgebras de Hopf. Vale ressaltar que as duas últimas estruturas citadas também admitem definições em categorias trançadas quaisquer, não apenas em $Vect_{\mathbf{k}}$. Isso acontece pelo fato de que a trança da categoria garante que o tensor entre álgebras é uma álgebra, bem como, o tensor entre coálgebras é uma coálgebra. Essas versões mais gerais são proveitosas para o leitor que esteja interessado, por exemplo, no conceito de bosonização envolvendo álgebras de Hopf trançadas. Por fim, definem-se módulos sobre álgebras e comódulos sobre coálgebras com a motivação de construir, também no próximo capítulo, novas categorias monoidais.

Definição 3.29. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a terna (A, m, u) é uma álgebra em $\mathcal{C}$ se

(i) A é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbf{1} \to A$ são morfismos em $\mathcal{C}$;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} (A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "m\otimes id_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "id_A\otimes m"] \\ A \otimes A \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{3.16}$$

e

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\ \mathbf{1} \otimes A \arrow[ur, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A \otimes \mathbf{1} \arrow[ul, "id_A\otimes u"'] \arrow[dl, "r_A"] \\ & A. & \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Usualmente, diz-se que A é uma álgebra associativa, diagrama (3.16), e unital, diagrama (3.17). Neste trabalho, porém, A é dita, apenas, uma álgebra.

Definição 3.30. Sejam $(\mathcal{C}, \tau)$ uma categoria trançada e (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Diz-se que A é uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$ se o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\tau_{A,A}"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

é comutativo, isto é, $m \circ \tau_{A,A} = m$.

Exemplo 3.31. A unidade **1** de uma categoria trançada $(\mathcal{C}, \tau)$ é uma álgebra comutativa. De fato, basta definir a multiplicação m como o morfismo $l_{\mathbf{1}}$, equivalentemente $r_{\mathbf{1}}$ graças ao Corolário 3.13, e a unidade u como o morfismo identidade $id_{\mathbf{1}}$; assim, **1** é uma álgebra ao passo que a comutatividade do diagrama (3.18) é trivial, vide a Proposição 3.24.

Exemplo 3.32. Todo monoide comutativo é uma álgebra comutativa em Set. De fato, dado $(M, \cdot, e)$ um monoide comutativo, defina as funções

$$\begin{aligned} m : M \times M &\to M \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} u : \{*\} &\to M \\ * &\mapsto e. \end{aligned}$$

Notemos, para quaisquer $x, y, z \in M$, que

$$\begin{aligned} \left(m \circ (id_M \times m) \circ a_{M,M,M}\right)((x, y), z) &= (m \circ (id_M \times m))(x, (y, z)) \\ &= m(x, y \cdot z) \\ &= x \cdot (y \cdot z) \\ &= (x \cdot y) \cdot z \\ &= m((x \cdot y), z) \\ &= (m \circ (m \times id_M))((x, y), z), \end{aligned}$$

bem como,

$$(m \circ (u \times id_M))(*, x) = m(e, x) = e \cdot x = x = l_M(*, x)$$

e

$$(m \circ (id_M \times u))(x, *) = m(x, e) = x \cdot e = x = r_M(x, *);$$

logo, M é uma álgebra, a qual é comutativa tendo em vista que vale

$$(m \circ \tau_{M,M})(x, y) = m(y, x) = y \cdot x = x \cdot y = m(x, y).$$

Exemplo 3.33. Dado V um $\mathbf{k}$-espaço vetorial, existe a álgebra tensorial de V denotada por $T(V)$ definida como segue. Para $n \geq 0$, consideremos

$$V^{\otimes 0} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad V^{\otimes n+1} \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n} \otimes V;$$

dessa forma, a álgebra tensorial de V, dada por

$$T(V) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

é uma álgebra em $Vect_{\mathbf{k}}$ com unidade $1_{T(V)} \stackrel{\text{def}}{=} 1_{\mathbf{k}}$. Afinal, para a multiplicação, consideremos as funções $\mathbf{k}$-bilineares de concatenação

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} : V^{\otimes i} \times V^{\otimes j} &\to V^{\otimes(i+j)} \\ (x,y) \quad &\mapsto \phi_{i,j}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x \otimes y, \text{ se } i \neq 0 \text{ e } j \neq 0 \\ xy \;\;, \text{ caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

para quaisquer $i, j \geq 0$. Em melhores termos, se $i \neq 0$ e $j \neq 0$, então a concatenação entre $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i \in V^{\otimes i}$ e $y = y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_j \in V^{\otimes j}$ é o produto tensorial da forma

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_j \in V^{\otimes(i+j)}.$$

Enquanto que, se $i = 0$ ou $j = 0$, a concatenação entre x e y é o produto por escalar xy vide definição de $V^{\otimes 0}$. Com isso, mediante extensão por bilinearidade auxiliada pela propriedade universal do produto tensorial, existe a transformação $\mathbf{k}$-linear

$$\begin{aligned} m : T(V) \otimes T(V) &\to T(V) \\ \sum_{i\geq 0} x_i \otimes \sum_{i \geq 0} y_i &\mapsto \sum_{i\geq 0} \sum_{j+k=i} \phi_{j,k}(x_j, y_k), \end{aligned}$$

com $x_i \in V^{\otimes\, i}$ para todo $i \geq 0$, sendo

$$x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + (x_0y_2 + x_1 \otimes y_1 + x_2y_0) + (x_0y_3 + x_1 \otimes y_2 + x_2 \otimes y_1 + x_3y_0) + \cdots$$

a escrita estendida da multiplicação entre x e y. Para a unidade, basta considerar a transformação linear

$$\begin{aligned} u : \mathbf{k} &\to T(V) \\ 1_{\mathbf{k}} &\mapsto \; 1_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

e, assim, resta garantir a comutatividade dos diagramas (3.16) e (3.17). Para o primeiro, notemos, para quaisquer $\sum_{i\geq 0} x_i$, $\sum_{i \geq 0} y_i$, $\sum_{i\geq 0} z_i \in T(V)$, que

$$\begin{aligned} &\Big(m \circ (id_{T(V)} \otimes m) \circ a_{T(V),T(V),T(V)}\Big) \left(\left(\sum_{i\geq 0} x_i \otimes \sum_{i\geq 0} y_i \right) \otimes \sum_{i \geq 0} z_i \right) \\ &= \Big(m \circ \Big(id_{T(V)} \otimes m\Big)\Big) \left(\sum_{i\geq 0} x_i \otimes \left(\sum_{i \geq 0} y_i \otimes \sum_{i\geq 0} z_i \right)\right) \\ &= m\left(\sum_{i\geq 0} x_i \otimes \sum_{i\geq 0} \sum_{j+k=i} \phi_{j,k}(y_j, z_k) \right) \\ &= \sum_{i\geq 0} \sum_{p+q=i} \phi_{p,q} \left(x_p, \sum_{j+k=q} \phi_{j,k}(y_j, z_k) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\geq 0} \sum_{p+j+k=i} \phi_{p,j+k}\left(x_p, \phi_{j,k}(y_j, z_k)\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i\geq 0} \sum_{p+j+k=i} \phi_{p+j,k}\left(\phi_{p,j}(x_p, y_j), z_k\right) \\
&= \sum_{i\geq 0} \sum_{r+k=i} \phi_{r,k}\left(\sum_{p+j=r} \phi_{p,j}(x_p, y_j), z_k\right) \\
&= m\left(\sum_{i\geq 0} \sum_{p+j=i} \phi_{p,j}(x_p, y_j) \otimes \sum_{i\geq 0} z_i\right) \\
&= \left(m \circ \left(m \otimes id_{T(V)}\right)\right)\left(\left(\sum_{i\geq 0} x_i \otimes \sum_{i\geq 0} y_i\right) \otimes \sum_{i\geq 0} z_i\right)
\end{aligned}
$$

com $(*)$ responsável por indicar a propriedade de concatenação advinda da família de funções $\{\phi_{i,j}\}_{i,j\geq 0}$. Para os diagramas triangulares, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\left(m \circ \left(u \otimes id_{T(V)}\right)\right)\left(1_{\mathbf{k}} \otimes \sum_{i\geq 0} x_i\right) &= m\left(1_{\mathbf{k}} \otimes \sum_{i\geq 0} x_i\right) \\
&= 1_{\mathbf{k}} x_0 + 1_{\mathbf{k}} x_1 + 1_{\mathbf{k}} x_2 + \cdots \\
&= 1_{\mathbf{k}} \sum_{i\geq 0} x_i \\
&= l_{T(V)}\left(1_{\mathbf{k}} \otimes \sum_{i\geq 0} x_i\right)
\end{aligned}
$$

e, analogamente, garante-se que $m \circ \left(id_{T(V)} \otimes u\right) = r_{T(V)}$, conforme desejado.

Exemplo 3.34. Dado V um $\mathbf{k}$-espaço vetorial, a álgebra simétrica em V, denotada por $S(V)$ e dada pelo quociente entre a álgebra tensorial $T(V)$ e o ideal bilateral $I = \langle x\otimes y - y\otimes x \mid x, y \in V\rangle$, é uma álgebra comutativa em $Vect_{\mathbf{k}}$. De fato, consideremos a multiplicação e a unidade como as transformações $\mathbf{k}$-lineares dadas por

$$
\begin{aligned}
m : S(V) \otimes S(V) &\to S(V) \\
\overline{x} \otimes \overline{y} \quad &\mapsto \overline{m_{T(V)}(x \otimes y)}
\end{aligned}
$$

e, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
u :\ \mathbf{k} &\to S(V) \\
1_{\mathbf{k}} &\mapsto \overline{1_{\mathbf{k}}}
\end{aligned}
$$

com $\overline{x} = x + I$ a classe de x e $m_{T(V)}$ a multiplicação da álgebra tensorial $T(V)$. Resta garantir a comutatividade dos diagramas de álgebra, (3.16) e (3.17), bem como, de álgebra comutativa, (3.18). Para o primeiro, segue, para quaisquer $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in S(V)$, que

$$\begin{aligned}
&\left(m \circ \left(id_{S(V)} \otimes m\right) \circ a_{S(V),S(V),S(V)}\right) ((\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z}) \\
&= \left(m \circ \left(id_{S(V)} \otimes m\right)\right) (\overline{x} \otimes (\overline{y} \otimes \overline{z})) \\
&= m \left(\overline{x} \otimes \overline{m_{T(V)}(y \otimes z)}\right) \\
&= \overline{m_{T(V)} \left(x \otimes m_{T(V)}(y \otimes z)\right)} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{m_{T(V)} \left(m_{T(V)}(x \otimes y) \otimes z\right)} \\
&= m \left(\overline{m_{T(V)}(x \otimes y)} \otimes \overline{z}\right) \\
&= \left(m \circ \left(m \otimes id_{S(V)}\right)\right) ((\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z})
\end{aligned}$$

com $(*)$ indicando a associatividade da multiplicação de $T(V)$. Para os diagramas da unidade, notemos que

$$\left(m \circ \left(u \otimes id_{S(V)}\right)\right) (1_{\mathbf{k}} \otimes \overline{x}) = m(\overline{1_{\mathbf{k}}} \otimes \overline{x}) = \overline{m_{T(V)}(1_{\mathbf{k}} \otimes x)} \overset{(**)}{=} \overline{x} = l_{S(V)}(1_{\mathbf{k}} \otimes \overline{x})$$

e

$$\left(m \circ \left(id_{S(V)} \otimes u\right)\right) (\overline{x} \otimes 1_{\mathbf{k}}) = m(\overline{x} \otimes \overline{1_{\mathbf{k}}}) = \overline{m_{T(V)}(x \otimes 1_{\mathbf{k}})} \overset{(**)}{=} \overline{x} = r_{S(V)}(\overline{x} \otimes 1_{\mathbf{k}})$$

com $(**)$ indicando que a multiplicação de $T(V)$ é unital. Logo, $S(V)$ é uma álgebra. Por fim, resta observar que

$$\begin{aligned}
\left(m \circ \tau_{S(V),S(V)}\right) (\overline{x} \otimes \overline{y}) &= m(\overline{y} \otimes \overline{x}) \\
&= \overline{m_{T(V)}(y \otimes x)} \\
&= \overline{y_0x_0 + (y_0x_1 + y_1x_0) + (y_0x_2 + y_1 \otimes x_1 + y_2x_0) + \cdots} \\
&= \overline{y_0x_0} + \overline{y_0x_1} + \overline{y_1x_0} + \overline{y_0x_2} + \overline{y_1 \otimes x_1} + \overline{y_2x_0} + \cdots \\
&= \overline{y_0x_0} + \overline{y_0x_1} + \overline{y_1x_0} + \overline{y_0x_2} + \overline{x_1 \otimes y_1} + \overline{y_2x_0} + \cdots \\
&= \overline{x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + (x_0y_2 + x_1 \otimes y_1 + x_2y_0) + \cdots} \\
&= \overline{m_{T(V)}(x \otimes y)} \\
&= m(\overline{x} \otimes \overline{y}),
\end{aligned}$$

como desejado.

Definição 3.35. Sejam A e B duas álgebras em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : A \to B$ é um morfismo de álgebras se for um morfismo em $\mathcal{C}$ de modo que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "\varphi"'] & B
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\
& \mathbf{1} \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.19}$$

são comutativos. Além disso, um morfismo de álgebras comutativas é, simplesmente, um morfismo de álgebras.

Por intermédio das definições anteriores envolvendo álgebras e álgebras comutativas, bem como, os morfismos entre álgebras, é possível construir duas novas categorias. A primeira delas é a categoria cujos objetos e morfismos são, respectivamente, álgebras e morfismos de álgebras em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. A segunda é a subcategoria plena da primeira, cujos objetos são álgebras comutativas em $\mathcal{C}$. Em particular, a verificação do bom comportamento da composição de morfismos é trivial e, portanto, não será descrita neste trabalho.

Ademais, mediante a definição de morfismos de álgebras, é possível enunciar a propriedade universal da álgebra tensorial $T(V)$ na categoria dos espaços vetoriais dada como segue.

Proposição 3.36. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbf{k}$ e A uma álgebra em $Vect_{\mathbf{k}}$. Sob tais considerações, para toda transformação linear $f : V \to A$, existe único morfismo de álgebras $\overline{f} : T(V) \to A$ tal que $\overline{f}(v) = f(v)$, para todo $v \in V$.

Em especial, dispensamos a demonstração deste resultado por estar fora do escopo principal deste trabalho e salientamos que a usura ao mencioná-lo é justificada pela existência de mais um exemplo no que se concerne às coálgebras e biálgebras. Ademais, definida a estrutura de uma álgebra em uma categoria monoidal, é possível construir a noção de um módulo sobre uma álgebra, a qual é dada como segue.

Definição 3.37. Seja (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Diz-se que o par (M, σ) é um A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$ se

(i) M é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $\sigma : A \otimes M \to M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, dito ação à esquerda de A em M;

(iii) os diagramas

$$\begin{tikzcd} & (A \otimes A) \otimes M \arrow[dl, "a_{A,A,M}"'] \arrow[dr, "m \otimes id_M"] & \\ A \otimes (A \otimes M) \arrow[d, "id_A \otimes \sigma"'] & & A \otimes M \arrow[d, "\sigma"] \\ A \otimes M \arrow[rr, "\sigma"'] & & M \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

e

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes M \arrow[rr, "u \otimes id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\sigma"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{3.21}$$

são comutativos.

Analogamente, define-se um A-módulo à direita como o par (M, λ) em que $\lambda : M \otimes A \to M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ responsável pela ação à direita de A em M.

Observação 3.38. Toda álgebra é um módulo à esquerda e à direita sobre si com ação dada pela multiplicação.

Exemplo 3.39. Todo objeto $X \in \mathcal{C}$ é um $\mathbf{1}$-módulo à esquerda com ação dada pelo isomorfismo $l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X$. De fato, tendo em vista que $(\mathbf{1}, r_{\mathbf{1}}, id_{\mathbf{1}})$ é uma álgebra, basta notar que a comutatividade do diagrama (3.20) é dada pelo axioma do triângulo, afinal,

$$l_X \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes l_X) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \overset{(3.1)}{=} l_X \circ (r_{\mathbf{1}} \otimes id_X)$$

ao passo que a comutatividade do diagrama (3.21) é trivial.

Definição 3.40. Sejam (M, σ_M) e (N, σ_N) dois A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : M \to N$ é um morfismo de A-módulos à esquerda se for um morfismo em $\mathcal{C}$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \varphi"] \arrow[d, "\sigma_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\sigma_N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd} \tag{3.22}$$

é comutativo.

Similarmente à construção das categorias de álgebras, obtém-se as categorias de A-módulos à esquerda e à direita em $\mathcal{C}$, denotadas respectivamente por ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$. Vale ressaltar que, no próximo capítulo, trabalha-se com espaços vetoriais e, assim, simplifica-se a notação das categorias acima para ${}_A\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_A$, respectivamente. Além disso, o leitor também encontrará, mediante a estrutura de biálgebra, que as categorias acima são monoidais, ainda que a verificação seja feita apenas para os A-módulos à esquerda.

Diante disso, neste momento, busca-se trabalhar com noções duais às definições de álgebras e módulos sobre álgebras introduzidas nesta seção. A justificativa é dada em função da utilidade de tais definições para a categoria dos espaços vetoriais tendo em vista que as coálgebras são fundamentais para a definição de biálgebras. Essas, por sua vez, permitem que as categorias de comódulos à esquerda e à direita sobre uma coálgebra sejam monoidais.

Definição 3.41. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a terna (C, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathcal{C}$ se

(i) C é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbf{1}$ são morfismos em $\mathcal{C}$, respectivamente denominados comultiplicação e counidade;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id_C"'] & & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{C,C,C}"'] & & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C \otimes \varepsilon"] & \\
\mathbf{1} \otimes C & & C \otimes \mathbf{1} \\
 & C. \arrow[ul, "l_C^{-1}"] \arrow[ur, "r_C^{-1}"'] \arrow[uu, "\Delta"] &
\end{tikzcd} \tag{3.24}$$

Exemplo 3.42. A unidade $\mathbf{1}$ de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é uma coálgebra. De fato, basta definir a comultiplicação como o morfismo $l_{\mathbf{1}}^{-1}$, equivalentemente $r_{\mathbf{1}}^{-1}$, e a counidade como o morfismo identidade $id_{\mathbf{1}}$. Diante disso, basta garantir a comutatividade dos diagramas dados em (3.23) e (3.24). Em particular, o primeiro segue do Teorema 3.12 e da Proposição 3.11, afinal vale

$$a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \circ (l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ l_{\mathbf{1}}^{-1} \overset{(3.3)}{=} l_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}^{-1} \circ l_{\mathbf{1}}^{-1} = (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}^{-1}) \circ l_{\mathbf{1}}^{-1}$$

ao passo que os diagramas da counidade são dados trivialmente.

Exemplo 3.43. Dado V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2\}$, tal admite ao menos duas estruturas de coálgebra em $vect_{\mathbf{k}}$. De fato, para a primeira, definimos a comultiplicação $\Delta : V \to V \otimes V$ por

$$\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 \qquad \text{e} \qquad \Delta(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

ao passo que, para a counidade $\varepsilon : V \to \mathbf{k}$, definimos

$$\varepsilon(e_1) = 1_{\mathbf{k}} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(e_2) = 0.$$

Estendidas linearmente, resta garantir a coassociatividade de Δ e a propriedade da unidade. Para o primeira parte, tem-se

$$
\begin{aligned}
&(a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V) \circ \Delta)(e_1) \\
&= (a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V))(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) \\
&= a_{V,V,V}((e_1 \otimes e_1) \otimes e_1 - (e_2 \otimes e_2) \otimes e_1 - (e_1 \otimes e_2) \otimes e_2 - (e_2 \otimes e_1) \otimes e_2) \\
&= e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1) - e_2 \otimes (e_2 \otimes e_1) - e_1 \otimes (e_2 \otimes e_2) - e_2 \otimes (e_1 \otimes e_2) \\
&= e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1) - e_1 \otimes (e_2 \otimes e_2) - e_2 \otimes (e_1 \otimes e_2) - e_2 \otimes (e_2 \otimes e_1) \\
&= (id_V \otimes \Delta)(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) \\
&= ((id_V \otimes \Delta) \circ \Delta)(e_1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V) \circ \Delta)(e_2) \\
&= (a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V))(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \\
&= a_{V,V,V}((e_1 \otimes e_1) \otimes e_2 - (e_2 \otimes e_2) \otimes e_2 + (e_1 \otimes e_2) \otimes e_1 + (e_2 \otimes e_1) \otimes e_1) \\
&= e_1 \otimes (e_1 \otimes e_2) - e_2 \otimes (e_2 \otimes e_2) + e_1 \otimes (e_2 \otimes e_1) + e_2 \otimes (e_1 \otimes e_1) \\
&= e_1 \otimes (e_1 \otimes e_2) + e_1 \otimes (e_2 \otimes e_1) + e_2 \otimes (e_1 \otimes e_1) - e_2 \otimes (e_2 \otimes e_2) \\
&= (id_V \otimes \Delta)(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \\
&= ((id_V \otimes \Delta) \circ \Delta)(e_2),
\end{aligned}
$$

como desejado. Para a segunda parte, nota-se, para e_1, que

$$((\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta)(e_1) = (\varepsilon \otimes id_V)(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) = 1_{\mathbf{k}} \otimes e_1 = l_V^{-1}(e_1)$$

e

$$((id_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(e_1) = (id_V \otimes \varepsilon)(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) = e_1 \otimes 1_{\mathbf{k}} = r_V^{-1}(e_1),$$

ao passo que, para e_2, valem

$$((\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta)(e_2) = (\varepsilon \otimes id_V)\,(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = 1_{\mathbf{k}} \otimes e_2 = l_V^{-1}(e_2)$$

e

$$((id_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(e_2) = (id_V \otimes \varepsilon)(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = e_2 \otimes 1_{\mathbf{k}} = r_V^{-1}(e_2),$$

conforme necessitado. Já para a segunda estrutura, definimos a comultiplicação $\Delta : V \to V \otimes V$ por

$$\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 \qquad \text{e} \qquad \Delta(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

com a mesma counidade da estrutura anterior, isto é,

$$\varepsilon(e_1) = 1_{\mathbf{k}} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(e_2) = 0.$$

Vejamos a comutatividade dos diagramas de coálgebra, Para o primeiro, obtém-se

$$\begin{aligned}(a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V) \circ \Delta)(e_1) &= (a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V))(e_1 \otimes e_1)\\ &= a_{V,V,V}((e_1 \otimes e_1) \otimes e_1)\\ &= e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1)\\ &= (id_V \otimes \Delta)(e_1 \otimes e_1)\\ &= ((id_V \otimes \Delta) \circ \Delta)(e_1)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V) \circ \Delta)(e_2) &= (a_{V,V,V} \circ (\Delta \otimes id_V))(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)\\ &= a_{V,V,V}((e_1 \otimes e_1) \otimes e_2 + (e_1 \otimes e_2) \otimes e_1 + (e_2 \otimes e_1) \otimes e_1)\\ &= e_1 \otimes (e_1 \otimes e_2) + e_1 \otimes (e_2 \otimes e_1) + e_2 \otimes (e_1 \otimes e_1)\\ &= (id_V \otimes \Delta)(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)\\ &= ((id_V \otimes \Delta) \circ \Delta)(e_2),\end{aligned}$$

como requerido. Já para os diagramas da counidade, segue, para e_1, que

$$((\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta)(e_1) = (\varepsilon \otimes id_V)(e_1 \otimes e_1) = 1_{\mathbf{k}} \otimes e_1 = l_V^{-1}(e_1)$$

e

$$((id_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(e_1) = (id_V \otimes \varepsilon)(e_1 \otimes e_1) = e_1 \otimes 1_{\mathbf{k}} = r_V^{-1}(e_1),$$

enquanto que, para e_2, tem-se

$$((\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta)(e_2) = (\varepsilon \otimes id_V)\,(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = 1_{\mathbf{k}} \otimes e_2 = l_V^{-1}(e_2)$$

e

$$((id_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(e_2) = (id_V \otimes \varepsilon)(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = e_2 \otimes 1_{\mathbf{k}} = r_V^{-1}(e_2),$$

como desejado. No mais, vale ressaltar que esse exemplo é generalizado para um espaço vetorial V com base $\{e_i\}_{i \in I}$ com $I \subseteq N$; neste caso, tem-se duas estruturas de coálgebra em $Vect_{\mathbf{k}}$. A primeira é dada ao definir

$$\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 - \sum_{2 \leq i} e_i \otimes e_i \qquad \text{e} \qquad \Delta(e_k) = \sum_{j \leq k} e_j \otimes e_{k-j+1} \ (k \geq 2)$$

com counidade mediante a expressão $\varepsilon(e_i) = \delta_{i,1}$. Já a segunda estrutura possui a mesma counidade, todavia a comultiplicação é dada por

$$\Delta(e_i) = \sum_{j \leq i} e_j \otimes e_{i-j+1}.$$

A verificação da comutatividade dos diagramas para essas estruturas é omitida.

Exemplo 3.44. Dado um monoide M, é possível, em $Vect_{\mathbf{k}}$, construir uma estrutura de coálgebra para a álgebra de monoide. De fato, consideremos o $\mathbf{k}$-espaço vetorial

$$\mathbf{k}[M] = \Big\{ \sum_{x \in M} \lambda_x x \ / \ \sum_{x \in M} \lambda_x x \text{ é uma soma finita com } \lambda_x \in \mathbf{k} \Big\}$$

com base dada pelos elementos de M e cujas operações são da forma

$$\sum_{x \in M} \alpha_x x + \sum_{x \in M} \beta_x x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in M} (\alpha_x + \beta_x) x \qquad \text{e} \qquad \lambda \sum_{x \in M} \alpha_x x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in M} (\lambda \alpha_x) x.$$

Assim, defina as transformações $\mathbf{k}$-lineares

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbf{k}[M] &\to \mathbf{k}[M] \otimes \mathbf{k}[M] \\ x &\mapsto x \otimes x \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \varepsilon : \mathbf{k}[M] &\to \mathbf{k} \\ x &\mapsto 1_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

e notemos, para todo $x \in X$, que

$$\begin{aligned} \Big(a_{\mathbf{k}[M],\mathbf{k}[M],\mathbf{k}[M]} \circ \Big(\Delta \otimes id_{\mathbf{k}[M]} \Big) \circ \Delta \Big) (x) &= \Big(a_{\mathbf{k}[M],\mathbf{k}[M],\mathbf{k}[M]} \circ \Big((\Delta \otimes id_{\mathbf{k}[M]} \Big) \Big) (x \otimes x) \\ &= a_{\mathbf{k}[M],\mathbf{k}[M],\mathbf{k}[M]}((x \otimes x) \otimes x) \\ &= x \otimes (x \otimes x) \\ &= (id_{\mathbf{k}[M]} \otimes \Delta)(x \otimes x) \\ &= \Big((id_{\mathbf{k}[M]} \otimes \Delta) \circ \Delta \Big) (x), \end{aligned}$$

bem como,

$$\Big(\Big(\varepsilon \otimes id_{\mathbf{k}[M]} \Big) \circ \Delta \Big) (x) = \Big(\varepsilon \otimes id_{\mathbf{k}[M]} \Big) (x \otimes x) = 1_{\mathbf{k}} \otimes x = l^{-1}_{\mathbf{k}[M]}(x)$$

e

$$\Big(\Big(id_{\mathbf{k}[M]} \otimes \varepsilon \Big) \circ \Delta \Big) (x) = \Big(id_{\mathbf{k}[M]} \otimes \varepsilon \Big) (x \otimes x) = x \otimes 1_{\mathbf{k}} = r^{-1}_{\mathbf{k}[M]}(x),$$

isto é, $\mathbf{k}[M]$ é uma $\mathbf{k}$-coálgebra em $Vect_{\mathbf{k}}$, como desejado.

Exemplo 3.45. A álgebra tensorial $T(V)$ admite, em $Vect_{\mathbf{k}}$, uma estrutura de coálgebra. De fato, tendo em vista que $T(V)$ é gerada por V, consoante (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2001), basta admitir a comultiplicação $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ dada em função da propriedade universal da álgebra tensorial com relação à função

$$\begin{aligned} f : V &\to T(V) \otimes T(V) \\ v &\mapsto v \otimes 1_{\mathbf{k}} + 1_{\mathbf{k}} \otimes v. \end{aligned}$$

Similarmente para a counidade, consideremos $\varepsilon : T(V) \to \mathbf{k}$ como uma extensão da transformação linear nula lembrando que $\varepsilon(1_{\mathbf{k}}) = 1_{\mathbf{k}}$. Logo, para os diagramas da coassociatividade da comultiplicação, temos, para todo $v \in V$, que

$$\begin{aligned}
&\left(a_{T(V),T(V),T(V)} \circ \left(\Delta \otimes id_{T(V)}\right) \circ \Delta\right)(v)\\
&= \left(a_{T(V),T(V),T(V)} \circ \left(\Delta \otimes id_{T(V)}\right)\right)(v \otimes 1_{\mathbf{k}} + 1_{\mathbf{k}} \otimes v)\\
&= a_{T(V),T(V),T(V)}((v \otimes 1_{\mathbf{k}}) \otimes 1_{\mathbf{k}} + (1_{\mathbf{k}} \otimes v) \otimes 1_{\mathbf{k}} + (1_{\mathbf{k}} \otimes 1_{\mathbf{k}}) \otimes v)\\
&= v \otimes (1_{\mathbf{k}} \otimes 1_{\mathbf{k}}) + 1_{\mathbf{k}} \otimes (v \otimes 1_{\mathbf{k}}) + 1_{\mathbf{k}} \otimes (1_{\mathbf{k}} \otimes v)\\
&= \left(id_{T(V)} \otimes \Delta\right)(v \otimes 1_{\mathbf{k}} + 1_{\mathbf{k}} \otimes v)\\
&= \left(\left(id_{T(V)} \otimes \Delta\right) \circ \Delta\right)(v),
\end{aligned}$$

bem como,

$$\left(\left(\varepsilon \otimes id_{T(V)}\right) \circ \Delta\right)(v) = \left(\varepsilon \otimes id_{T(V)}\right)(v \otimes 1_{\mathbf{k}} + 1_{\mathbf{k}} \otimes v) = 0 + 1_{\mathbf{k}} \otimes v = 1_{\mathbf{k}} \otimes v = l^{-1}_{T(V)}(v)$$

e, analogamente, segue que $\left(id_{T(V)} \otimes \varepsilon\right) \circ \Delta = r^{-1}_{T(V)}$.

Definição 3.46. Sejam C e D duas coálgebras em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se for um morfismo em $\mathcal{C}$ de modo que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"'] & D \otimes D
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
& \mathbf{1} &
\end{tikzcd}
\tag{3.25}$$

sejam comutativos.

Para encerrar esta seção, resta apresentar comódulos sobre uma coálgebra, uma noção é fundamental para introduzir a definição de álgebra base.

Definição 3.47. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra em $\mathcal{C}$. Diz-se que o par (M, ρ) é um C-comódulo à esquerda se

(i) M é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $\rho : M \to C \otimes M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, dito coação à esquerda de C em M;

(iii) os diagramas

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
C \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes id_M"'] & & C \otimes M \arrow[d, "id_C \otimes \rho"] \\
(C \otimes C) \otimes M \arrow[rr, "a_{C,C,M}"'] & & C \otimes (C \otimes M)
\end{tikzcd}
\tag{3.26}$$

e

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "l_M^{-1}"'] & & C \otimes M \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id_M"] \\ & \mathbf{k} \otimes M & \end{tikzcd} \tag{3.27}$$

são comutativos.

Analogamente, define-se um C-comódulo à direita como o par (M, η) em que $\eta : M \to M \otimes A$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ responsável pela coação à direita de C em M.

Observação 3.48. Toda coálgebra é um comódulo à esquerda e à direita sobre si com coação dada pela comultiplicação.

Exemplo 3.49. Todo objeto $X \in \mathcal{C}$ é um **1**-comódulo à esquerda pelo isomorfismo $l_X^{-1} : X \to \mathbf{1} \otimes X$. De fato, uma vez que $(\mathbf{1}, r_{\mathbf{1}}^{-1}, id_{\mathbf{1}})$ é uma coálgebra, nota-se que a comutatividade do diagrama (3.26) é dada pelo axioma do triângulo, afinal,

$$a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \circ (r_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ l_X^{-1} \overset{(3.1)}{=} (id_{\mathbf{1}} \otimes l_X^{-1}) \circ l_X^{-1}$$

ao passo que a comutatividade do diagrama (3.27) é diretamente verificada.

Definição 3.50. Sejam (M, ρ_M) e (N, ρ_N) dois C-comódulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : M \to N$ é um morfismo de C-comódulos à esquerda se for um morfismo em $\mathcal{C}$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes \varphi"'] & C \otimes N \end{tikzcd} \tag{3.28}$$

seja comutativo.

Diante desta última definição, uma vez comentada a ideia de que os comódulos à esquerda e à direita sobre uma coálgebra C em uma categoria monoidal formam duas novas categorias, pode-se, finalmente, construí-las. Respectivamente denotadas por ${}^C\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^C$ essas categorias ainda não admitem a estrutura de categoria monoidal. Todavia, no próximo capítulo, com notação simplificada por ${}^C\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^C$, respectivamente, na categoria dos espaços vetoriais, essa situação de categoria monoidal é investigada tomando proveito da estrutura de biálgebra.

4 AÇÕES E COAÇÕES EM ESPAÇOS VETORIAIS

A priori, mesmo definidas as estruturas de álgebras e coálgebras em categorias monoidais arbitrárias, em $Vect_{\mathbf{k}}$ todas as ferramentas estão melhor dispostas para obter certos resultados em função da trança canônica τ. Dessa forma, será utilizada a notação de Sweedler, apresentada ao longo do capítulo e com mais detalhes disponibilizados em (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2001), para as comultiplicações e coações. Assim, neste capítulo, apresenta-se, inicialmente, todo o aparato necessário para trabalhar com álgebras comutativas na categoria de módulos esquerda-esquerda de Yetter-Drinfel'd, denotada por ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ em que H é uma biálgebra sobre $\mathbf{k}$. Vale reparar que, mediante a última seção do capítulo anterior, basta construir a categoria citada anteriormente e, para isso, é interessante tomar proveito de noções envolvendo de outras categorias, em especial ${}_{H}\mathcal{M}$ e ${}^{H}\mathcal{M}$, cujas estruturas de categorias monoidais estão presentes na segunda seção deste capítulo.

Em particular, as referências para esta discussão são dadas em (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2001), (FERREIRA; MURAKAMI, 2020), (RADFORD, 2011) e (MAJID, 1995).

4.1 BIÁLGEBRAS E ÁLGEBRAS DE HOPF

Conforme as definições apresentadas na última seção do capítulo anterior, é possível, em $Vect_{\mathbf{k}}$, introduzir as estruturas de biálgebras e álgebras de Hopf. No mais, para tomar proveito de uma observação acerca de uma condição equivalente para as biálgebras, apresentam-se o tensor entre duas álgebras, bem como, entre duas coálgebras. Outrossim, no final desta seção, o leitor encontrará resultados necessários, ainda que básicos, referente às propriedades de uma antípoda.

Para isso, revisitemos a definição de álgebra dada no capítulo anterior a fim de perceber que, em $Vect_{\mathbf{k}}$, uma álgebra A é um espaço vetorial dotado de uma multiplicação $m : A \otimes A \to A$ e uma unidade $u : \mathbf{k} \to A$ em que $m(a \otimes b) \overset{\text{not}}{=} ab$ e $u(1_{\mathbf{k}}) \overset{\text{not}}{=} 1_A$, as quais são transformações $\mathbf{k}$-lineares tais que

$$(ab)c = a(bc) \qquad \text{e} \qquad 1_A a = a = a 1_A, \tag{4.1}$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

Exemplo 4.1. Dada uma álgebra (A, m, u), existe a álgebra oposta de A, denotada por A^{op}, da forma (A, m^{op}, u) em que $m^{op} = m \circ \tau_{A,A}$, isto é, para quaisquer $a, b \in A$, tem-se que

$$m^{op}(a \otimes b) \overset{\text{not}}{=} a \bullet b \overset{\text{def}}{=} ba.$$

De fato, A^{op} satisfaz as identidades em (4.1) tendo em vista que

$$(a \bullet b) \bullet c = ba \bullet c = c(ba) = (cb)a = a \bullet cb = a \bullet (b \bullet c),$$

bem como,

$$1_A \bullet a = a1_A = a = 1_A a = a \bullet 1_A,$$

como desejado, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Para o próximo exemplo, é importante reparar na necessidade da categoria $Vect_{\mathbf{k}}$ ser trançada para definir a estrutura de álgebra no produto tensorial de duas álgebras.

Exemplo 4.2. O tensor entre álgebras é uma álgebra. De fato, dadas (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) duas álgebras em $Vect_{\mathbf{k}}$, definem-se as transformações $\mathbf{k}$-lineares

$$\begin{aligned} m_{A\otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) &\to \ A \otimes B \\ (a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') &\mapsto aa' \otimes bb' \end{aligned}$$

indicada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \arrow[rr, dotted, "m_{A\otimes B}"] \arrow[d, "a_{A,B,A\otimes B}"'] & & A \otimes B \\
A \otimes (B \otimes (A \otimes B)) \arrow[d, "id_A \otimes a^{-1}_{B,A,B}"'] & & (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \arrow[u, "m_A \otimes m_B"'] \\
A \otimes ((B \otimes A) \otimes B) \arrow[dr, "id_A \otimes (\tau_{B,A} \otimes id_B)"'] & & A \otimes (A \otimes (B \otimes B)) \arrow[u, "a^{-1}_{A,A,B\otimes B}"'] \\
& A \otimes ((A \otimes B) \otimes B) \arrow[ur, "id_A \otimes a_{A,B,B}"'] &
\end{tikzcd}$$

e, similarmente,

$$\begin{aligned} u_{A\otimes B} : \mathbf{k} &\to A \otimes B \\ 1_{\mathbf{k}} &\mapsto 1_A \otimes 1_B \end{aligned}$$

dada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \arrow[rr, dotted, "u_{A\otimes B}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes B \\
& \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \arrow[ur, "u_A \otimes u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Para a comutatividade dos diagramas dados em (3.16) e (3.17), tem-se que

$$
\begin{aligned}
&\left(m_{A\otimes B}\circ(id_{A\otimes B}\otimes m_{A\otimes B})\circ a_{A\otimes B,A\otimes B,A\otimes B}\right)(((a\otimes b)\otimes(a'\otimes b'))\otimes(a''\otimes b''))\\
&=(m_{A\otimes B}\circ(id_{A\otimes B}\otimes m_{A\otimes B}))((a\otimes b)\otimes((a'\otimes b')\otimes(a''\otimes b'')))\\
&=m_{A\otimes B}((a\otimes b)\otimes(a'a''\otimes b'b''))\\
&=a(a'a'')\otimes b(b'b'')\\
&\overset{(4.1)}{=}(aa')a''\otimes(bb')b''\\
&=m_{A\otimes B}((aa'\otimes bb')\otimes(a''\otimes b''))\\
&=(m_{A\otimes B}\circ(m_{A\otimes B}\otimes id_{A\otimes B}))(((a\otimes b)\otimes(a'\otimes b'))\otimes(a''\otimes b'')),
\end{aligned}
$$

assim como,

$$
\begin{aligned}
(m_{A\otimes B}\circ(u_{A\otimes B}\otimes id_{A\otimes B}))(1_{\mathbf{k}}\otimes(a\otimes b)) &= m_{A\otimes B}((1_A\otimes 1_B)\otimes(a\otimes b))\\
&=1_Aa\otimes 1_Bb\\
&\overset{(4.1)}{=} a\otimes b\\
&=1_{\mathbf{k}}(a\otimes b)\\
&=l_{\mathbf{k}}(1_{\mathbf{k}}\otimes(a\otimes b))
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(m_{A\otimes B}\circ(id_{A\otimes B}\otimes u_{A\otimes B}))((a\otimes b)\otimes 1_{\mathbf{k}}) &= m_{A\otimes B}((a\otimes b)\otimes(1_A\otimes 1_B))\\
&=a1_A\otimes b1_B\\
&\overset{(4.1)}{=} a\otimes b\\
&=1_{\mathbf{k}}(a\otimes b)\\
&=r_{\mathbf{k}}((a\otimes b)\otimes 1_{\mathbf{k}}),
\end{aligned}
$$

como almejado.

Similarmente às álgebras em $Vect_{\mathbf{k}}$, uma coálgebra C é um espaço vetorial dotado de uma comultiplicação $\Delta : C \to C\otimes C$ em que $\Delta(c) \overset{\text{not}}{=} \sum c_{(1)}\otimes c_{(2)}$ e de uma counidade $\varepsilon : C\to \mathbf{k}$ as quais são transformações $\mathbf{k}$-lineares satisfazendo as identidades

$$\sum \left(c_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(\left(c_{(1)}\right)_{(2)}\otimes c_{(2)}\right)=\sum c_{(1)}\otimes\left(\left(c_{(2)}\right)_{(1)}\otimes\left(c_{(2)}\right)_{(2)}\right) \tag{4.2}$$

e

$$\sum \varepsilon\left(c_{(1)}\right)c_{(2)}=c=\sum\varepsilon\left(c_{(2)}\right)c_{(1)}, \tag{4.3}$$

para todo $c\in C$. Em especial, a notação atribuída à comultiplicação Δ é chamada de notação de Sweedler, responsável por simplificar o uso de somatórios referentes à coassociatividade da comultiplicação. Em melhores termos, notemos que, dado $c\in C$, pela definição dos elementos em $C\otimes C$, existem $c_i, c_i'\in C$ com $1\le i\le n$ tais que

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c'_i$$

e, ao considerar $(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$, segue que

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= (\Delta \otimes id_C) \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\Delta \otimes id_C) \left(c_i \otimes c'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} d_{i,j} \otimes d'_{i,j} \right) \otimes c'_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (d_{i,j} \otimes d'_{i,j}) \otimes c'_i.\end{aligned}$$

Com isso, é evidente o peso na escrita com o somatório duplo e, dessa forma, adota-se

$$\Delta(c) \overset{\text{not}}{=} \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

responsável por omitir o índice i; logo, obtém-se

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= (\Delta \otimes id_C) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum (\Delta \otimes id_C) \left(c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum \left(\left(c_{(1)} \right)_{(1)} \otimes \left(c_{(1)} \right)_{(2)} \right) \otimes c_{(2)} \\ &= \sum \left(c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \otimes c_{(3)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) &= (id_C \otimes \Delta) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum (id_C \otimes \Delta) \left(c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum c_{(1)} \otimes \left(\left(c_{(2)} \right)_{(1)} \otimes \left(c_{(2)} \right)_{(2)} \right) \\ &= \sum c_{(1)} \otimes \left(c_{(2)} \otimes c_{(3)} \right),\end{aligned}$$

de modo a respeitar a coassociatividade de C, como necessitado. Além disso, tal convenção permite a escrita da comutatividade dos diagramas da counidade ε através da expressão

$$\sum \varepsilon \left(c_{(1)} \right) c_{(2)} = c = \sum c_{(1)} \varepsilon \left(c_{(2)} \right),$$

uma vez que, de $id_C = l_C \circ (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta$, valem

$$
\begin{aligned}
c = (l_C \circ (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= (l_C \circ (\varepsilon \otimes id_C)) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}\right) \\
&= l_C \left(\sum \varepsilon \left(c_{(1)}\right) \otimes c_{(2)}\right) \\
&= \sum l_C \left(\varepsilon \left(c_{(1)}\right) \otimes c_{(2)}\right) \\
&= \sum \varepsilon \left(c_{(1)}\right) c_{(2)}
\end{aligned}
$$

e, similarmente de $id_C = r_C \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta$,

$$
\begin{aligned}
c = (r_C \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(c) &= (r_C \circ (id_C \otimes \varepsilon)) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}\right) \\
&= r_C \left(\sum c_{(1)} \otimes \varepsilon \left(c_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum r_C \left(c_{(1)} \otimes \varepsilon \left(c_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum c_{(1)} \varepsilon \left(c_{(2)}\right),
\end{aligned}
$$

como desejado.

Exemplo 4.3. Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então existe a coálgebra cooposta de C, denotada por C^{cop}, a qual é dada por $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ em que $\Delta^{cop} = \tau_{C,C} \circ \Delta$, isto é, vale

$$
\Delta^{cop}(c) \overset{\text{def}}{=} \sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}
$$

para todo $c \in C$. De fato, C^{cop} é uma coálgebra já que

$$
\begin{aligned}
(a_{C,C,C} \circ (\Delta^{cop} \otimes id_C) \circ \Delta^{cop})(c) &= (a_{C,C,C} \circ (\Delta^{cop} \otimes id_C)) \left(\sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}\right) \\
&= a_{C,C,C} \left(\sum \left(\left(c_{(2)}\right)_{(2)} \otimes \left(c_{(2)}\right)_{(1)}\right) \otimes c_{(1)}\right) \\
&= a_{C,C,C} \left(\sum \left(c_{(3)} \otimes c_{(2)}\right) \otimes c_{(1)}\right) \\
&= \sum c_{(3)} \otimes \left(c_{(2)} \otimes c_{(1)}\right) \\
&= \sum c_{(2)} \otimes \left(\left(c_{(1)}\right)_{(2)} \otimes \left(c_{(1)}\right)_{(1)}\right) \\
&= (id_C \otimes \Delta^{cop}) \left(\sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}\right) \\
&= ((id_C \otimes \Delta^{cop}) \circ \Delta^{cop})(c)
\end{aligned}
$$

bem como,

$$
\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta^{cop})(c) \quad &= (\varepsilon \otimes id_C) \left(\sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}\right) \\
&= \sum \varepsilon \left(c_{(2)}\right) \otimes c_{(1)} \\
&= \sum 1_{\mathbf{k}} \otimes \varepsilon \left(c_{(2)}\right) c_{(1)} \\
&\overset{(4.3)}{=} 1_{\mathbf{k}} \otimes c
\end{aligned}
$$

$$= l_C^{-1}(c)$$

e

$$\begin{aligned}
((id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta^{cop})(c) &= (id_C \otimes \varepsilon)\left(\sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}\right) \\
&= \sum c_{(2)} \otimes \varepsilon\left(c_{(1)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(c_{(1)}\right) c_{(2)} \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&\overset{(4.3)}{=} c \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&= r_C^{-1}(c),
\end{aligned}$$

como desejado.

Assim como para álgebras, é novamente utilizada a trança de $Vect_{\mathbf{k}}$ para definir a estrutura de coálgebra para o produto tensorial entre duas coálgebras.

Exemplo 4.4. O tensor entre duas coálgebras é uma coálgebra. Dadas $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras em $Vect_{\mathbf{k}}$, definem-se as transformações $\mathbf{k}$-lineares

$$\begin{aligned}
\Delta_{C\otimes D} : C \otimes D &\to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D) \\
c \otimes d &\mapsto \sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right)
\end{aligned}$$

mediante a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \otimes D \arrow[rr, dotted, "\Delta_{C\otimes D}"] \arrow[d, "\Delta_C\otimes\Delta_D"'] & & (C \otimes D) \otimes (C \otimes D) \\
(C \otimes C) \otimes (D \otimes D) \arrow[d, "a_{C,C,D\otimes D}"'] & & C \otimes (D \otimes (C \otimes D)) \arrow[u, "a^{-1}_{C,D,C\otimes D}"'] \\
C \otimes (C \otimes (D \otimes D)) \arrow[dr, "id_C\otimes a^{-1}_{C,D,D}"'] & & C \otimes ((D \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "id_C\otimes a_{D,C,D}"'] \\
& C \otimes ((C \otimes D) \otimes D) \arrow[ur, "id_C\otimes(\tau_{C,D}\otimes id_D)"'] &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D &\to \mathbf{k} \\
c \otimes d &\mapsto \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d)
\end{aligned}$$

dada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \otimes D \arrow[rr, dotted, "\varepsilon_{C\otimes D}"] \arrow[dr, "\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D"'] & & \mathbf{k} \\
& \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Resta garantir a comutatividade dos diagramas dados em (3.23) e (3.24); para o primeiro, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\left(a_{C\otimes D,C\otimes D,C\otimes D} \circ (\Delta_{C\otimes D} \otimes id_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D}\right)(c \otimes d) \\
&= \left(a_{C\otimes D,C\otimes D,C\otimes D} \circ (\Delta_{C\otimes D} \otimes id_{C\otimes D})\right) \left(\sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right)\right) \\
&= a_{C\otimes D,C\otimes D,C\otimes D} \left(\sum \left(\left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right)\right) \otimes \left(c_{(3)} \otimes d_{(3)}\right)\right) \\
&= \sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(\left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right) \otimes \left(c_{(3)} \otimes d_{(3)}\right)\right) \\
&= (id_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \left(\sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right)\right) \\
&= ((id_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D})(c \otimes d).
\end{aligned}$$

ao passo que, para os demais, obtém-se

$$\begin{aligned}
&((\varepsilon_{C\otimes D} \otimes id_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) \\
&= (\varepsilon_{C\otimes D} \otimes id_{C\otimes D}) \left(\sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum \varepsilon_C\left(c_{(1)}\right) \varepsilon_D\left(d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right) \\
&= \sum 1_{\mathbf{k}} \otimes \varepsilon_C\left(c_{(1)}\right) \varepsilon_D\left(d_{(1)}\right) \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right) \\
&= \sum 1_{\mathbf{k}} \otimes \left(\varepsilon_C\left(c_{(1)}\right) c_{(2)} \otimes \varepsilon_D\left(d_{(1)}\right) d_{(2)}\right) \\
&= l^{-1}_{C\otimes D}\left(\sum \left(\varepsilon_C\left(c_{(1)}\right) c_{(2)} \otimes \varepsilon_D\left(d_{(1)}\right) d_{(2)}\right)\right) \\
&\overset{(4.3)}{=} l^{-1}_{C\otimes D}(c \otimes d)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&((id_{C\otimes D} \otimes \varepsilon_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) \\
&= (id_{C\otimes D} \otimes \varepsilon_{C\otimes D}) \left(\sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes \varepsilon_C\left(c_{(2)}\right) \varepsilon_D\left(d_{(2)}\right) \\
&= \sum \varepsilon_C\left(c_{(2)}\right) \varepsilon_D\left(d_{(2)}\right) \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right) \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&= r^{-1}_{C\otimes D}\left(\sum \varepsilon_C\left(c_{(2)}\right) \varepsilon_D\left(d_{(2)}\right) \left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right)\right) \\
&= r^{-1}_{C\otimes D}\left(\sum \left(\varepsilon_C\left(c_{(1)}\right) c_{(2)} \otimes \varepsilon_D\left(d_{(1)}\right) d_{(2)}\right)\right) \\
&\overset{(4.3)}{=} r^{-1}_{C\otimes D}(c \otimes d),
\end{aligned}$$

como almejado.

Como uma parte rotineira da construção de uma álgebra de Hopf, são introduzidas as biálgebras. Essa estrutura algébrica é responsável por acoplar as estruturas de álgebra e coálgebra de modo que, entrelaçadas por uma compatibilidade, cada estrutura preserve a outra. A definição propriamente explicitada é dada como segue.

Definição 4.5. Seja H um espaço vetorial. Diz-se que a 5-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra se

(i) a terna $H^a \stackrel{\text{def}}{=} (H, m, u)$ é uma álgebra;

(ii) a terna $H^c \stackrel{\text{def}}{=} (H, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra;

(iii) Δ e ε são morfismos de álgebras.

Observação 4.6. Na definição anterior, o item (iii) é equivalente a inferir que m e u são morfismos de coálgebras. De fato, a priori, consideremos os diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "m_{H\otimes H}"] \\ H \arrow[r, "\Delta"'] & H \otimes H \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\Delta"] & (ii) & H \otimes H \\ & \mathbf{k} \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "u_{H\otimes H}"'] & \end{tikzcd}$$

os quais, respectivamente, exprimem as identidades

$$\sum (hh')_{(1)} \otimes (hh')_{(2)} = \sum h_{(1)}h'_{(1)} \otimes h_{(2)}h'_{(2)} \qquad \text{e} \qquad \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$$

quando Δ é um morfismo de álgebras. Similarmente, os diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(iii)"] & \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \arrow[d, "\simeq"] \\ H \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbf{k} \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\varepsilon"] & (iv) & \mathbf{k} \\ & \mathbf{k} \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, equal, "id_{\mathbf{k}}"'] & \end{tikzcd}$$

que, respectivamente, indicam as identidades

$$\varepsilon(hh') = \varepsilon(h)\varepsilon(h') \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(1_H) = 1_{\mathbf{k}}$$

quando ε é um morfismo de álgebras. Por outro lado, admitimos os diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta_{H\otimes H}"'] \arrow[dr, phantom, "(v)"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "m\otimes m"'] & H \otimes H \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\varepsilon_{H\otimes H}"'] & (vi) & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbf{k} & \end{tikzcd}$$

que, respectivamente, expressam as identidades

$$\sum h_{(1)}h'_{(1)} \otimes h_{(2)}h'_{(2)} = \sum (hh')_{(1)} \otimes (hh')_{(2)} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(hh') = \varepsilon(h)\varepsilon(h')$$

quando m é um morfismo de coálgebras. Além dos diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, phantom, "(vii)"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} \arrow[r, "u\otimes u"'] & H\otimes H \end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{k} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, equal, "id_{\mathbf{k}}"'] & (viii) & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbf{k} & \end{tikzcd}$$

que, respectivamente, indicam as identidades

$$1_H \otimes 1_H = \Delta(1_H) \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(1_H) = 1_{\mathbf{k}}$$

quando u é um morfismo de coálgebras. Dessa forma, é direta a verificação de que os diagramas (i) e (v) são iguais, assim como, (ii) e (vii), ***idem*** para (iii) e (vi), bem como, (iv) e $(viii)$.

Exemplo 4.7. Dada uma biálgebra $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$, existem três novas biálgebras de H, denotadas por H^{op}, H^{cop} e $H^{op,\,cop}$, de modo que

$$H^{op} \stackrel{\text{def}}{=} (H, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon), \quad H^{cop} \stackrel{\text{def}}{=} (H, m, u, \Delta^{cop}, \varepsilon) \quad \text{e} \quad H^{op,\,cop} \stackrel{\text{def}}{=} (H, m^{op}, u, \Delta^{cop}, \varepsilon).$$

Em especial, conforme os Exemplos 4.1 e 4.3, basta assegurar as compatibilidades envolvendo os morfismos m^{op} e Δ^{cop}; para m^{op} notemos que

$$\begin{aligned} \sum h_{(1)} \bullet h'_{(1)} \otimes h_{(2)} \bullet h'_{(2)} &= \sum h'_{(1)} h_{(1)} \otimes h'_{(2)} h_{(2)} \\ &= \sum (h'h)_{(1)} \otimes (h'h)_{(2)} \\ &= \sum (h \bullet h')_{(1)} \otimes (h \bullet h')_{(2)}, \end{aligned}$$

bem como,

$$\varepsilon(h \bullet h') = \varepsilon(h'h) = \varepsilon(h')\varepsilon(h) = \varepsilon(h)\varepsilon(h'),$$

isto é, m^{op} é um morfismo de coálgebras e, assim, H^{op} é uma biálgebra. Enquanto que, para Δ^{cop}, vale observar

$$\begin{aligned} \sum h_{(2)} h'_{(2)} \otimes h_{(1)} h'_{(1)} &= \tau_{H,H}\left(\sum h_{(1)} h'_{(1)} \otimes h_{(2)} h'_{(2)}\right) \\ &= \tau_{H,H}\left(\sum (hh')_{(1)} \otimes (hh')_{(2)}\right) \\ &= \sum (hh')_{(2)} \otimes (hh')_{(1)}, \end{aligned}$$

bem como,

$$\Delta^{op}(1_H) = (\tau_{H,H} \circ \Delta)(1_H) = \tau_{H,H}(1_H \otimes 1_H) = 1_H \otimes 1_H;$$

logo, Δ^{cop} é um morfismo de álgebras e, assim, H^{cop} é uma biálgebra. Diante das quatro identidades apresentadas, é possível inferir que $H^{op,\,cop}$ é uma biálgebra.

Exemplo 4.8. O corpo $\mathbf{k}$ é uma biálgebra. De fato, $\mathbf{k}$ é trivialmente uma álgebra sobre si, bem como, conforme o Exemplo 3.42, $\mathbf{k}$ admite estrutura de coálgebra. No mais, basta reparar que a compatibilidade das estruturas pelos morfismos é direta e facilmente verificada.

Exemplo 4.9. Dado um monoide M, a álgebra de monoide $\mathbf{k}[M]$ é uma biálgebra. De fato, tendo em vista a estrutura natural de álgebra dada pela operação e elemento neutro do monoide assim como a estrutura de coálgebra conforme o Exemplo 3.44, resta garantir a condição para os morfismos. Em particular, notemos que

$$\sum_{x,y\in M} \alpha_x\beta_y xy \otimes \sum_{x,y\in M} \alpha_x\beta_y xy = \left(\sum_{x\in M} \alpha_x x\right)\left(\sum_{y\in M} \beta_y y\right) \otimes \left(\sum_{x\in M} \alpha_x x\right)\left(\sum_{y\in M} \beta_y y\right)$$

e

$$\Delta\left(1_{\mathbf{k}[M]}\right) = \Delta(1_M) = 1_M \otimes 1_M = 1_{\mathbf{k}[M]} \otimes 1_{\mathbf{k}[M]};$$

logo, a comultiplicação é um morfismo de álgebras ao passo que

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\sum_{x,y\in M} \alpha_x\beta_y xy\right) &= \sum_{x,y\in M} \alpha_x\beta_y \\ &= \left(\sum_{x\in M} \alpha_x\right)\left(\sum_{y\in M} \beta_y\right) \\ &= \varepsilon\left(\sum_{x\in M} \alpha_x x\right)\varepsilon\left(\sum_{y\in M} \beta_y y\right) \end{aligned}$$

e

$$\varepsilon\left(1_{\mathbf{k}[M]}\right) = \varepsilon(1_M) = 1_{\mathbf{k}},$$

i.e., a counidade é um morfismo de álgebras, como desejado.

Exemplo 4.10. Dado um espaço vetorial V qualquer, a álgebra tensorial $T(V)$ admite estrutura de biálgebra. De fato, $T(V)$ é álgebra vide o Exemplo 3.33 e uma coálgebra pelo Exemplo 3.45 ao passo que satisfaz Δ e ε como morfismos de álgebras vide a propriedade universal dada pela Proposição 3.36.

Neste momento, busca-se desenvolver o preceito primordial para trabalhar com álgebras de Hopf, a antípoda, o qual é obtido por intermédio da álgebra $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$ em que C é uma coálgebra e A é uma álgebra. Em especial, a multiplicação, dita produto de convolução e denotada por $*$, é dada por

$$* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$$

$$f \otimes g \quad \mapsto \quad f * g$$

de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dotted, "f*g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & A \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes g"'] & A \otimes A. \arrow[u, "m_A"'] \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

seja comutativo, isto é,

$$\begin{aligned} f * g : C &\to A \\ c &\mapsto \sum f(c_1)g(c_2). \end{aligned}$$

Em particular, a unidade com relação a operação $*$ é o morfismo $u_A \circ \varepsilon_C$ em que

$$(u_A \circ \varepsilon_C)(c) = u_A(\varepsilon_C(c)) = u_A(\varepsilon_C(c)1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon_C(c)u_A(1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon_C(c)1_A;$$

afinal, tem-se que

$$\begin{aligned} (f * (u_A \circ \varepsilon_C))(c) &= \sum f(c_1)(u_A \circ \varepsilon_C)(c_2) \\ &= \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2)1_A \\ &= \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2) \\ &= f\left(\sum c_1\varepsilon_C(c_2)\right) \\ &\overset{(4.3)}{=} f(c) \\ &\overset{(4.3)}{=} f\left(\sum \varepsilon_C(c_1)c_2\right) \\ &= \sum \varepsilon_C(c_1)f(c_2) \\ &= \sum \varepsilon_C(c_1)1_A f(c_2) \\ &= \sum (u_A \circ \varepsilon_C)(c_1)f(c_2) \\ &= ((u_A \circ \varepsilon_C) * f)(c), \end{aligned}$$

para todo $c \in C$. A partir dessa nova operação, dada uma biálgebra H, pode-se considerar A como H^a e C como H^c; logo, segue a definição de uma álgebra de Hopf.

Definição 4.11. Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Diz-se que H é uma álgebra de Hopf se

(i) existe uma tranformação $\mathbf{k}$-linear $S : H \to H$, dita a antípoda de H;

(ii) o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes id_H"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbf{k} \arrow[rr, "u"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "id_H\otimes S"'] & & H \otimes H. \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.5}
$$

é comutativo, isto é, valem as identidades

$$\sum h_{(1)}S\left(h_{(2)}\right) = \varepsilon(h)1_H = \sum S\left(h_{(1)}\right)h_{(2)} \tag{4.6}$$

para todo $h \in H$.

Observação 4.12. A antípoda, se existir, é única tendo em vista que tal é o elemento inverso do morfismo id_H com relação ao produto de convolução da álgebra $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(H)$.

Exemplo 4.13. O corpo $\mathbf{k}$ é uma álgebra de Hopf ao admitir, diante da natural estrutura de biálgebra, a antípoda $S = id_{\mathbf{k}}$. A verificação é direta e, por conseguinte, omitida.

Mediante os exemplos apresentados de biálgebras não-triviais, espera-se que seja possível obter algumas álgebras de Hopf, todavia isso não acontece para a álgebra de monoide. Nesse sentido, dado um monoide M que não é grupo, a álgebra de monoide $\mathbf{k}[M]$ é uma biálgebra que não é uma álgebra de Hopf tendo em vista que a inversibilidade dos elementos é responsável por garantir a existência da antípoda. O argumento propriamente visto é dado como segue.

Exemplo 4.14. Dado um grupo G, a álgebra de grupo $\mathbf{k}[G]$ admite estrutura de álgebra de Hopf. De fato, consoante o Exemplo 4.9, resta garantir a existência da antípoda; para isso, definimos $S : \mathbf{k}[G] \to \mathbf{k}[G]$ em que $S(g) = g^{-1}$ é estendida linearmente, lembrando que G é uma base para $\mathbf{k}[G]$, a fim de observar que

$$
\begin{aligned}
\left(m \circ \left(S \otimes id_{\mathbf{k}[G]}\right) \circ \Delta\right)(g) &= \left(m \circ \left(S \otimes id_{\mathbf{k}[G]}\right)\right)(g \otimes g) \\
&= m(g^{-1} \otimes g) \\
&= g^{-1}g \\
&= e \\
&= 1_{\mathbf{k}}e \\
&= \varepsilon(g)1_{\mathbf{k}[G]},
\end{aligned}
$$

bem como,

$$
\begin{aligned}
\left(m \circ \left(id_{\mathbf{k}[G]} \otimes S\right) \circ \Delta\right)(g) &= \left(m \circ \left(id_{\mathbf{k}[G]} \otimes S\right)\right)(g \otimes g) \\
&= m(g \otimes g^{-1}) \\
&= gg^{-1} \\
&= e \\
&= 1_{\mathbf{k}} e \\
&= \varepsilon(g) 1_{\mathbf{k}[G]}.
\end{aligned}
$$

A fim de garantir que a álgebra tensorial $T(V)$ de um espaço vetorial V é uma álgebra de Hopf, faz-se necessário garantir os próximos resultados. Em especial, o primeiro exprime quatro identidades essenciais ao longo do trabalho com respeito ao comportamento da antípoda.

Proposição 4.15. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Sob tal consideração,

(i) $S : H \to H^{op}$ é um morfismo de álgebras, isto é, tem-se que

$$S(hh') = S(h')S(h) \qquad \text{e} \qquad S(1_H) = 1_H, \tag{4.7}$$

para quaisquer $h, h' \in H$. Neste caso, diz-se que $S : H \to H$ é um antimorfismo de álgebras.

(ii) $S : H \to H^{cop}$ é um morfismo de coálgebras, isto é, tem-se que

$$\sum S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} = \sum S\left(h_{(2)}\right) \otimes S\left(h_{(1)}\right) \quad \text{e} \quad \varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h), \tag{4.8}$$

para todo $h \in H$. Neste caso, diz-se que $S : H \to H$ é um antimorfismo de coálgebras.

Demonstração. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Defina as transformações $\mathbf{k}$-lineares

$$
\begin{aligned}
F_1 : H \otimes H &\to H \\
h \otimes h' &\mapsto S(h')S(h)
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{aligned}
F_2 : H \otimes H &\to H \\
h \otimes h' &\mapsto S(hh')
\end{aligned}
$$

a fim de notar, na álgebra de convolução $\operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(H \otimes H, H)$, que

$$
\begin{aligned}
(m * F_1)(h \otimes h') &= \sum m\left(\left(h \otimes h'\right)_{(1)}\right) F_1\left(\left(h \otimes h'\right)_{(2)}\right) \\
&= \sum m\left(h_{(1)} \otimes h'_{(1)}\right) F_1\left(h_{(2)} \otimes h'_{(2)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} h'_{(1)} S\left(h'_{(2)}\right) S\left(h_{(2)}\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(1)} \varepsilon(h') 1_H S\left(h_{(2)}\right) \\
&= \sum \varepsilon(h') h_{(1)} S\left(h_{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.6)}{=} \varepsilon(h')\varepsilon(h)1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(h')1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(h')u(1_{\mathbf{k}}) \\
&= u(\varepsilon(h)\varepsilon(h')) \\
&= (u \circ \varepsilon_{H\otimes H})(h \otimes h')
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(F_2 * m)(h \otimes h') &= \sum F_2\left((h \otimes h')_{(1)}\right) m\left((h \otimes h')_{(2)}\right) \\
&= \sum F_2\left(h_{(1)} \otimes h'_{(1)}\right) m\left(h_{(2)} \otimes h'_{(2)}\right) \\
&= \sum S\left(h_{(1)}h'_{(1)}\right) h_{(2)}h'_{(2)} \\
&= \sum S\left((hh')_{(1)}\right) (hh')_{(2)} \\
&\overset{(4.6)}{=} \varepsilon(hh')1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(h')1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(h')u(1_{\mathbf{k}}) \\
&= u(\varepsilon(h)\varepsilon(h')) \\
&= (u \circ \varepsilon_{H\otimes H})(h \otimes h').
\end{aligned}
$$

Isto é, F_1 e F_2 são, respectivamente, inversas à direita e à esquerda de m; logo, $F_1 = F_2$, como desejado. No mais, para $h = 1_H$ na identidade relacionada à antípoda, repare que

$$S(1_H) = S(1_H)1_H \overset{(4.6)}{=} \varepsilon(1_H)1_H = 1_{\mathbf{k}}1_H = 1_H.$$

Em seguida, definem-se as transformações $\mathbf{k}$-lineares

$$
\begin{aligned}
G_1 : H &\to H \otimes H \\
h &\mapsto \Delta(S(h))
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{aligned}
G_2 : H &\to H \otimes H \\
h &\mapsto \sum S\left(h_{(2)}\right) \otimes S\left(h_{(1)}\right)
\end{aligned}
$$

de modo que, na álgebra de convolução $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H, H \otimes H)$, infere-se

$$
\begin{aligned}
(\Delta * G_1)(h) &= \sum \Delta\left(h_{(1)}\right) G_1\left(h_{(2)}\right) \\
&= \sum \Delta\left(h_{(1)}\right) \Delta\left(S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum \Delta\left(h_{(1)}S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)\Delta(1_H) \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(h)u_{H\otimes H}(1_{\mathbf{k}}) \\
&= (u_{H\otimes H} \circ \varepsilon)(h)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(G_2 * \Delta)(h) &= \sum G_2\left(h_{(1)}\right)\Delta\left(h_{(2)}\right) \\
&= \sum \left(S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)}\right)\right)\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right) \\
&= \sum \left(S\left(h_{(2)}\right) \otimes S\left(h_{(1)}\right)\right)\left(h_{(3)} \otimes h_{(4)}\right) \\
&= \sum S\left(h_{(2)}\right)h_{(3)} \otimes S\left(h_{(1)}\right)h_{(4)} \\
&= \sum S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right)\left(h_{(2)}\right)_{(2)} \otimes S\left(h_{(1)}\right)h_{(3)} \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right)1_H \otimes S\left(h_{(1)}\right)h_{(3)} \\
&= \sum 1_H \otimes S\left(h_{(1)}\right)\varepsilon\left(h_{(2)}\right)h_{(3)} \\
&= \sum 1_H \otimes S\left(h_{(1)}\right)\varepsilon\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right)\left(h_{(2)}\right)_{(2)} \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum 1_H \otimes S\left(h_{(1)}\right)h_{(2)} \\
&\overset{(4.6)}{=} 1_H \otimes \varepsilon(h)1_H \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) \\
&= \varepsilon(h)u_{H\otimes H}(1_{\mathbf{k}}) \\
&= (u_{H\otimes H} \circ \varepsilon)(h).
\end{aligned}
$$

Portanto, G_1 e G_2 são, respectivamente, inversas à direita e à esquerda de Δ; logo, $G_1 = G_2$, como desejado. Além disso, ao aplicar ε na identidade relacionada à antípoda, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(S(h)) &\overset{(4.3)}{=} \sum \varepsilon\left(S\left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right)h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right)S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right)\varepsilon\left(S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(1)}S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_{\mathbf{k}} \\
&= \varepsilon(h),
\end{aligned}
$$

como almejado.

■

Enquanto isso, o próximo resultado é responsável por garantir o bom comportamento para os geradores da álgebra tensorial.

Proposição 4.16. Sejam H uma biálgebra e $S : H \to H^{op}$ um morfismo de álgebras. Se para $a, b \in H$ valem $(S * id_H)(a) = (id_H * S)(a) = (u \circ \varepsilon)(a)$ e $(S * id_H)(b) = (id_H * S)(b) = (u \circ \varepsilon)(b)$, então $(S * id_H)(ab) = (id_H * S)(ab) = (u \circ \varepsilon)(ab)$.

Demonstração. Por hipótese, valem

$$\sum S\left(a_{(1)}\right) a_{(2)} = \sum a_{(1)} S\left(a_{(2)}\right) = \varepsilon(a) 1_H \tag{4.9}$$

e

$$\sum S\left(b_{(1)}\right) b_{(2)} = \sum b_{(1)} S\left(b_{(2)}\right) = \varepsilon(b) 1_H. \tag{4.10}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
(S * id_H)(ab) &= \sum S\left((ab)_{(1)}\right)(ab)_{(2)} \\
&= S\left(a_{(1)} b_{(1)}\right) a_{(2)} b_{(2)} \\
&= S\left(b_{(1)}\right) S\left(a_{(1)}\right) a_{(2)} b_{(2)} \\
&\overset{(4.9)}{=} S\left(b_{(1)}\right)(\varepsilon(a) 1_H) b_{(2)} \\
&= \varepsilon(a) S\left(b_{(1)}\right) b_{(2)} \\
&\overset{(4.10)}{=} \varepsilon(a)\varepsilon(b) 1_H \\
&= \varepsilon(ab) 1_H \\
&= \varepsilon(ab) u(1_{\mathbf{k}}) \\
&= (u \circ \varepsilon)(ab),
\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}
(id_H * S)(ab) &= \sum (ab)_{(1)} S\left((ab)_{(2)}\right) \\
&= a_{(1)} b_{(1)} S\left(a_{(2)} b_{(2)}\right) \\
&= a_{(1)} b_{(1)} S\left(b_{(2)}\right) S\left(a_{(2)}\right) \\
&\overset{(4.10)}{=} a_{(1)} (\varepsilon(b) 1_H) S\left(a_{(2)}\right) \\
&= \varepsilon(b) a_{(1)} S\left(a_{(2)}\right) \\
&\overset{(4.9)}{=} \varepsilon(b)\varepsilon(a) 1_H \\
&= \varepsilon(ab) 1_H \\
&= \varepsilon(ab) u(1_{\mathbf{k}})
\end{aligned}$$

$$= (u \circ \varepsilon)(ab),$$

conforme desejado.

■

Exemplo 4.17. Dado um espaço vetorial V, a álgebra tensorial $T(V)$ de V admite estrutura de álgebra de Hopf. De fato, ao considerar a transformação $\mathbf{k}$-linear

$$\begin{aligned} s : V &\to T(V)^{op} \\ v &\mapsto -v \end{aligned}$$

a propriedade universal da álgebra tensorial garante a existência de um único morfismo de álgebras $S : T(V) \to T(V)^{op}$ tal que $S(v) = -v$ para todo $v \in V$. Nesse sentido, sabendo que V gera $T(V)$, temos que

$$S(1_{\mathbf{k}}) = 1_{\mathbf{k}} \quad \text{e} \quad S(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes v_n) = (-1)^n v_n \otimes v_{n-1} \otimes \cdots \otimes v_2 \otimes v_1$$

com $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$. Por fim, resta garantir a comutatividade do diagrama da antípoda e, por intermédio do resultado anterior, basta garantir que a validade da expressão para um elemento $v \in V$ qualquer. Dessa forma, nota-se que $S : H \to H$ é um antimorfismo de álgebras tal que

$$\sum S\left(v_{(1)}\right) v_{(2)} = S(v)1_{\mathbf{k}} + S(1_{\mathbf{k}})v = -v + v = 0 = \varepsilon(v)1_H$$

e

$$\sum v_{(1)} S\left(v_{(2)}\right) = vS(1_{\mathbf{k}}) + 1_{\mathbf{k}}S(v) = v - v = 0 = \varepsilon(v)1_H,$$

como desejado.

Diante da penúltima proposição, é possível traçar uma caracterização para a bijetividade da antípoda S, uma peça importante para definir e generalizar o conceito de uma álgebra base. Em consequência da equação (4.6), é fácil notar que H é uma álgebra de Hopf com antípoda S se, e somente se, a biálgebra $H^{op,\ cop}$ admite estrutura de álgebra de Hopf sendo S sua antípoda. Afinal, tem-se, a partir da simetria e naturalidade da trança canônica τ, que

$$\begin{aligned} S \star id_H &\overset{(4.4)}{=} m^{op} \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta^{cop} \\ &= m \circ \tau_{H,H} \circ (S \otimes id_H) \circ \tau_{H,H} \circ \Delta \\ &= m \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta \\ &\overset{(4.4)}{=} id_H * S \end{aligned}$$

e, similarmente,

$$
\begin{aligned}
id_H \star S &\overset{(4.4)}{=} m^{op} \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta^{cop} \\
&= m \circ \tau_{H,H} \circ (id_H \otimes S) \circ \tau_{H,H} \circ \Delta \\
&= m \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta \\
&\overset{(4.4)}{=} S * id_H
\end{aligned}
$$

em que $*$ e $\star$ indicam o produto de convolução em H e $H^{op,\ cop}$, respectivamente. Com esse fato, o próximo resultado apresenta condições necessárias e suficientes para que as biálgebras H^{op} e H^{cop} sejam álgebras de Hopf tomando proveito da antípoda S de H.

Teorema 4.18. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Sob tal consideração, são equivalentes

(i) S é bijetora;

(ii) H^{op} é uma álgebra de Hopf;

(iii) H^{cop} é uma álgebra de Hopf.

Neste caso, a antípoda de H^{op} e H^{cop} é a transformação $\mathbf{k}$-linear S^{-1}.

Demonstração. A priori, reparemos que $H^{op} = (H^{cop})^{op,\ cop}$ e $H^{cop} = (H^{op})^{op,\ cop}$ e, dessa forma, H^{op} é uma álgebra de Hopf com antípoda T se, e somente se, H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda T. Em seguida, dado que T é antípoda de H^{cop}, observemos que

$$
\begin{aligned}
(T \circ S)(h) &\overset{(4.3)}{=} (T \circ S)\left(\sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) (T \circ S)\left(h_{(1)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) 1_H (T \circ S)\left(h_{(1)}\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \left(h_{(2)}\right)_{(2)} T\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right) (T \circ S)\left(h_{(1)}\right) \\
&= \sum h_{(3)} T\left(h_{(2)}\right) (T \circ S)\left(h_{(1)}\right) \\
&\overset{(4.7)}{=} \sum h_{(3)} T\left(S\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}\right) \\
&= \sum h_{(2)} T\left(S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)}\right)\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(2)} T\left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right) 1_H\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)} T(1_H) \\
&\overset{(4.7)}{=} \varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)} \\
&\overset{(4.3)}{=} h,
\end{aligned}
$$

isto é, $T \circ S = id_H$ ao passo que $S \circ T = id_H$, vide

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(h) &\overset{(4.3)}{=} (S \circ T)\left(\sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) (S \circ T)\left(h_{(2)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) 1_H (S \circ T)\left(h_{(2)}\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) (S \circ T)\left(h_{(2)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} S\left(h_{(2)}\right) (S \circ T)\left(h_{(3)}\right) \\
&\overset{(4.7)}{=} \sum h_{(1)} S\left(T\left(h_{(3)}\right) h_{(2)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} S\left(T\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right)\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(1)} S\left(\varepsilon\left(h_{(2)}\right) 1_H\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)} S(1_H) \\
&\overset{(4.7)}{=} \varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)} \\
&\overset{(4.3)}{=} h.
\end{aligned}$$

Portanto, S é bijetora com $S^{-1} = T$. Reciprocamente, suponha que a antípoda S de H é bijetora cuja inversa é denotada por T. Logo, $T : H \to H$ é um antimorfismo de álgebras tal que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h) 1_H &= \varepsilon(h) T(1_H) \\
&= T\left(\varepsilon(h) 1_H\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum T\left(h_{(1)} S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum (T \circ S)\left(h_{(2)}\right) T\left(h_{(1)}\right) \\
&= \sum h_{(2)} T\left(h_{(1)}\right) \\
&\overset{(4.4)}{=} (T \star id_H)(h),
\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h) 1_H &= \varepsilon(h) T(1_H) \\
&= T\left(\varepsilon(h) 1_H\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum T\left(S\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}\right) \\
&= \sum T\left(h_{(2)}\right) (T \circ S)\left(h_{(1)}\right) \\
&= \sum T\left(h_{(2)}\right) h_{(1)}
\end{aligned}$$

$$\overset{(4.4)}{=} (id_H \star T)(h);$$

portanto, T é a inversa do morfismo identidade id_H com relação ao produto de convolução $\star$ em $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(H^{op})$ e, assim, H^{op} é uma álgebra de Hopf com antípoda T.

■

4.2 CATEGORIAS DE MÓDULOS E COMÓDULOS

Nesta seção, são revisados os conceitos de módulos sobre álgebras e comódulos sobre coálgebras de modo a evidenciar as categorias monoidais ${}_H\mathcal{M}$ e ${}^H\mathcal{M}$ quando H for uma biálgebra. Além disso, vale ressaltar o trabalho com respeito à categoria dos módulos esquerda-esquerda de Yetter-Drinfel'd tendo em vista sua utilidade para a última seção deste capítulo e na caracterização do centro da categoria ${}_H\mathcal{M}$. Ademais, infere-se que todas as definições que possuem lateralidade são dadas à esquerda e, dessa forma, os termos 'módulo à esquerda' e 'comódulo à esquerda' são substituídos por 'módulo' e 'comódulo', respectivamente.

Em especial, sabe-se, conforme definição apresentada no capítulo anterior, que, em $Vect_{\mathbf{k}}$, um módulo M sobre uma álgebra A é um espaço vetorial dotado de uma transformação $\mathbf{k}$-linear $\sigma : A \otimes M \to M$ em que $\sigma(a \otimes m) \overset{\text{not}}{=} a \cdot m$ tal que

$$(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m) \qquad \text{e} \qquad 1_A \cdot m, \tag{4.11}$$

para quaisquer $a, b \in A$ e todo $m \in M$.

Observação 4.19. Sejam A uma álgebra e M um A-módulo com ação σ. Se $m \in M$, então a transformação $\mathbf{k}$-linear

$$\begin{aligned} \overline{m} : A &\to M \\ a &\mapsto a \cdot m \end{aligned}$$

é um morfismo de A-módulos; afinal,

$$\overline{m}(b \cdot a) = \overline{m}(ba) = (ba) \cdot m = b \cdot (a \cdot m) = b \cdot \overline{m}(a),$$

para quaisquer $a, b \in A$.

O resultado acima, ainda que simples, é necessário em uma única etapa presente no próximo capítulo para garantir a boa-definição de um funtor.

Neste momento, finalmente, retoma-se à teoria de categorias com o objetivo de garantir que a categoria ${}_A\mathcal{M}$ dos módulos sobre uma álgebra A é monoidal quando $A = H^a$ para H uma biálgebra e, assim, tem-se o resultado dado como segue.

Lema 4.20. Se H é uma biálgebra, então a categoria ${}_H\mathcal{M}$ admite estrutura de categoria monoidal.

Demonstração. Dada $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra, toma-se proveito do funtor-tensor $\otimes_{\mathbf{k}}$ em $Vect_{\mathbf{k}}$ de modo que, para $(M, \sigma_M), (N, \sigma_N) \in {}_H\mathcal{M}$, define-se a ação

$$\begin{aligned} \sigma_{M\otimes N} : H \otimes (M \otimes N) &\to M \otimes N \\ h \otimes (m \otimes n) &\mapsto \sum h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n \end{aligned}$$

conforme a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} H \otimes (M \otimes N) \arrow[rr, dotted, "\sigma_{M\otimes N}"] \arrow[d, "\Delta\otimes id_{M\otimes N}"'] & & M \otimes N \\ (H \otimes H) \otimes (M \otimes N) \arrow[d, "a_{H,H,M\otimes N}"'] & & (H \otimes M) \otimes (H \otimes N) \arrow[u, "\sigma_M\otimes\sigma_N"'] \\ H \otimes (H \otimes (M \otimes N)) \arrow[d, "id_H\otimes a^{-1}_{H,M,N}"'] & & H \otimes (M \otimes (H \otimes N)) \arrow[u, "a^{-1}_{H,M,H\otimes N}"'] \\ H \otimes ((H \otimes M) \otimes N) \arrow[rr, "id_H\otimes(\tau_{H,M}\otimes id_N)"'] & & H \otimes ((M \otimes H) \otimes N) \arrow[u, "id_H\otimes a_{M,H,N}"'] \end{tikzcd}$$

a fim de notar, para quaisquer $h, h' \in H$, $m \in M$ e $n \in N$, que

$$\begin{aligned} (hh') \cdot (m \otimes n) &= \sum (hh')_{(1)} \cdot m \otimes (hh')_{(2)} \cdot n \\ &= \sum \left(h_{(1)}h'_{(1)}\right) \cdot m \otimes \left(h_{(2)}h'_{(2)}\right) \cdot n \\ &= \sum h_{(1)} \cdot \left(h'_{(1)} \cdot m\right) \otimes h_{(2)} \cdot \left(h'_{(2)} \cdot n\right) \\ &= h \cdot \sum \left(h'_{(1)} \cdot m\right) \otimes \left(h'_{(2)} \cdot n\right) \\ &= h \cdot (h' \cdot (m \otimes n)) \end{aligned}$$

e

$$1_H \cdot (m \otimes n) = 1_H \cdot m \otimes 1_H \cdot n = m \otimes n;$$

logo, $(M \otimes N, \sigma_{M\otimes N}) \in {}_H\mathcal{M}$. No mais, sejam $f : M \to P$ e $g : N \to Q$ dois morfismos de H-módulos, segue que

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(h \cdot (m \otimes n)) &= (f \otimes g) \left(\sum h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n\right) \\ &= \sum f\left(h_{(1)} \cdot m\right) \otimes g\left(h_{(2)} \cdot n\right) \\ &= \sum h_{(1)} \cdot f(m) \otimes h_{(2)} \cdot g(n) \\ &= h \cdot (f(m) \otimes g(n)) \\ &= h \cdot (f \otimes g)(m \otimes n), \end{aligned}$$

para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, assim, $f \otimes g : M \otimes N \to P \otimes Q$ é um morfismo de H-módulos. Desta forma, o funtor-tensor está bem-definido. Além disso, define-se a unidade da categoria como o par $(\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}})$ com

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{k}} : H \otimes \mathbf{k} &\to \mathbf{k}\\ h \otimes 1_{\mathbf{k}} &\mapsto \varepsilon(h)1_{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

visto que

$$(hh') \cdot 1_{\mathbf{k}} = \varepsilon(hh')1_{\mathbf{k}} = \varepsilon(h)\varepsilon(h')1_{\mathbf{k}} = h \cdot (\varepsilon(h')1_{\mathbf{k}}) = h \cdot (h' \cdot 1_{\mathbf{k}}),$$

bem como,

$$1_H \cdot 1_{\mathbf{k}} = \varepsilon(1_H)1_{\mathbf{k}} = 1_{\mathbf{k}}1_{\mathbf{k}} = 1_{\mathbf{k}},$$

para quaisquer $h, h' \in H$. Vale ressaltar que a definição de $\sigma_{\mathbf{k}}$ deveria envolver um elemento da forma $h \otimes \alpha$ para algum $\alpha \in \mathbf{k}$ ao invés de $h \otimes 1_{\mathbf{k}}$; todavia, tendo em vista que toda ação é $\mathbf{k}$-linear, pode-se reduzir à utilização de α em função de $1_{\mathbf{k}}$. Por fim, para os isomorfismos naturais a, l e r, toma-se proveito dos mesmos em $Vect_{\mathbf{k}}$ e, assim, resta garantir que tais são morfismos de H-módulos; logo, em especial, dados $(M, \sigma_M), (N, \sigma_N), (P, \sigma_P) \in {}_H\mathcal{M}$, segue que

$$\begin{aligned}
a_{M,N,P}(h \cdot ((m \otimes n) \otimes p) &= a_{M,N,P}\left(\sum h_{(1)} \cdot (m \otimes n) \otimes h_{(2)} \cdot p\right)\\
&= a_{M,N,P}\left(\sum \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} \cdot m \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} \cdot n\right) \otimes h_{(2)} \cdot p\right)\\
&= a_{M,N,P}\left(\sum \left(h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n\right) \otimes h_{(3)} \cdot p\right)\\
&= \sum h_{(1)} \cdot m \otimes \left(h_{(2)} \cdot n \otimes h_{(3)} \cdot p\right)\\
&= \sum h_{(1)} \cdot m \otimes \left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} \cdot n \otimes \left(h_{(2)}\right)_{(2)} \cdot p\right)\\
&= \sum h_{(1)} \cdot m \otimes \left(h_{(2)} \cdot (n \otimes p)\right)\\
&= h \cdot (m \otimes (n \otimes p))\\
&= h \cdot a_{M,N,P}((m \otimes n) \otimes p),
\end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned}
l_M(h \cdot (1_{\mathbf{k}} \otimes m)) &= l_M\left(\sum h_{(1)} \cdot 1_{\mathbf{k}} \otimes h_{(2)} \cdot m\right)\\
&= l_M\left(\sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) 1_{\mathbf{k}} \otimes h_{(2)} \cdot m\right)\\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) 1_{\mathbf{k}} \left(h_{(2)} \cdot m\right)\\
&= \sum \left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}\right) \cdot m\\
&\overset{(4.3)}{=} h \cdot m
\end{aligned}$$

$$= h \cdot l_M(1_{\mathbf{k}} \otimes m)$$

e

$$\begin{aligned}
r_M(h \cdot (m \otimes 1_{\mathbf{k}})) &= r_M \left(\sum h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot 1_{\mathbf{k}} \right) \\
&= r_M \left(\sum h_{(1)} \cdot m \otimes \varepsilon \left(h_{(2)} \right) 1_{\mathbf{k}} \right) \\
&= \sum \varepsilon \left(h_{(2)} \right) 1_{\mathbf{k}} \left(h_{(1)} \cdot m \right) \\
&= \sum \left(\varepsilon \left(h_{(2)} \right) h_{(1)} \right) \cdot m \\
&\overset{(4.3)}{=} h \cdot m \\
&= h \cdot r_M(m \otimes 1_{\mathbf{k}}),
\end{aligned}$$

para quaisquer $h \in H$, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, como desejado.

■

A partir deste momento, faz-se uma versão análoga às definições e aos resultados apresentados de forma a tratar da estrutura de comódulos. Nesse sentido, em $Vect_{\mathbf{k}}$, um comódulo M sobre uma coálgebra C é um espaço vetorial equipado de uma transformação $\mathbf{k}$-linear $\rho : M \to C \otimes M$ em que $\rho(m) \overset{\text{not}}{=} \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ indica a notação de Sweedler atribuída à coação ρ à esquerda tal que valem as identidades

$$\sum m_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(0)} \right)_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \right)_{(0)} \right) = \sum \left(m_{(-1)} \right)_{(1)} \otimes \left(\left(m_{(-1)} \right)_{(2)} \otimes m_{(0)} \right) \tag{4.12}$$

e

$$\sum \varepsilon \left(m_{(-1)} \right) m_{(0)} = m, \tag{4.13}$$

para todo $m \in M$. Similarmente ao caso para ${}_A\mathcal{M}$, a categoria ${}^C\mathcal{M}$ dos comódulos sobre uma coálgebra também admite estrutura de categoria monoidal, neste caso, quando $C = H^c$ para H uma biálgebra. Destarte, tem-se o resultado dado como segue.

Lema 4.21. Se H é uma biálgebra, então a categoria ${}^H\mathcal{M}$ admite estrutura de categoria monoidal.

Demonstração. Dada $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra, toma-se proveito do funtor-tensor $\otimes_{\mathbf{k}}$ em $Vect_{\mathbf{k}}$ de modo que, para $(M, \rho_M), (N, \rho_N) \in {}^H\mathcal{M}$, define-se a coação

$$\begin{aligned}
\rho_{M \otimes N} : M \otimes N &\to H \otimes (M \otimes N) \\
m \otimes n &\mapsto \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \otimes n_{(0)} \right)
\end{aligned}$$

de acordo com a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[rr, dotted, "\rho_{M\otimes N}"] \arrow[d, "\rho_M\otimes\rho_N"'] & & H\otimes(M\otimes N) \\
(H\otimes M)\otimes(H\otimes N) \arrow[d, "a_{H,M,H\otimes N}"'] & & (H\otimes H)\otimes(M\otimes N) \arrow[u, "m\otimes id_{M\otimes N}"'] \\
H\otimes(M\otimes(H\otimes N)) \arrow[d, "id_H\otimes a^{-1}_{M,H,N}"'] & & H\otimes(H\otimes(M\otimes N)) \arrow[u, "a^{-1}_{H,H,M\otimes N}"'] \\
H\otimes((M\otimes H)\otimes N) \arrow[rr, "id_H\otimes(\tau_{M,H}\otimes id_N)"'] & & H\otimes((H\otimes M)\otimes N). \arrow[u, "id_H\otimes a_{H,M,N}"']
\end{tikzcd}$$

Nesse sentido, tem-se

$$\sum (m\otimes n)_{(-1)} \otimes (m\otimes n)_{(0)} \overset{\text{not}}{=} \rho_{M\otimes N}(m\otimes n) \overset{\text{def}}{=} \sum m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right)$$

de modo que valem

$$\begin{aligned}
&\sum (m\otimes n)_{(-1)} \otimes \left(\left((m\otimes n)_{(0)}\right)_{(-1)} \otimes \left((m\otimes n)_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&= \sum m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right)_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&= \sum m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes \left(\left(\left(m_{(0)}\right)_{(-1)}\left(n_{(0)}\right)_{(-1)}\right) \otimes \left(\left(m_{(0)}\right)_{(0)} \otimes \left(n_{(0)}\right)_{(0)}\right)\right) \\
&\overset{(4.12)}{=} \sum \left(m_{(-1)}\right)_{(1)}\left(n_{(-1)}\right)_{(1)} \otimes \left(\left(\left(m_{(-1)}\right)_{(2)}\left(n_{(-1)}\right)_{(2)}\right) \otimes \left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right)\right) \\
&= \sum \left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right)_{(1)} \otimes \left(\left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right)_{(2)} \otimes (m\otimes n)_{(0)}\right) \\
&= \sum \left((m\otimes n)_{(-1)}\right)_{(1)} \otimes \left(\left((m\otimes n)_{(-1)}\right)_{(2)} \otimes (m\otimes n)_{(0)}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum \varepsilon\left((m\otimes n)_{(-1)}\right)(m\otimes n)_{(0)} &= \sum \varepsilon\left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right)\left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(m_{(-1)}\right)\varepsilon\left(n_{(-1)}\right)\left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(m_{(-1)}\right)m_{(0)} \otimes \varepsilon\left(n_{(-1)}\right)n_{(0)} \\
&\overset{(4.13)}{=} m\otimes n,
\end{aligned}$$

para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$; logo, $(M\otimes N, \rho_{M\otimes N}) \in {}^H\mathcal{M}$. Ademais, sejam $f : M \otimes P$ e $g : N \to Q$ dois morfismos de H-comódulos, segue que

$$(\rho_{P\otimes Q} \circ (f\otimes g))(m\otimes n) = \rho_{M\otimes N}(f(m)\otimes g(n))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum (f(m) \otimes g(n))_{(-1)} \otimes (f(m) \otimes g(n))_{(0)} \\
&= \sum f(m)_{(-1)} g(n)_{(-1)} \otimes \left(f(m)_{(0)} \otimes g(n)_{(0)} \right)
\end{aligned}$$

e, como f e g são morfismos de H-comódulos, valem as identidades

$$\sum f(m)_{(-1)} \otimes f(m)_{(0)} = \sum m_{(-1)} \otimes f \left(m_{(0)} \right)$$

bem como,

$$\sum g(n)_{(-1)} \otimes g(n)_{(0)} = \sum n_{(-1)} \otimes g \left(n_{(0)} \right);$$

logo,

$$\begin{aligned}
(\rho_{P \otimes Q} \circ (f \otimes g))(m \otimes n) &= \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes \left(f \left(m_{(0)} \right) \otimes g \left(n_{(0)} \right) \right) \\
&= (id_H \otimes (f \otimes g)) \left(\sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \otimes n_{(0)} \right) \right) \\
&= (id_H \otimes (f \otimes g)) \left(\sum (m \otimes n)_{(-1)} \otimes (m \otimes n)_{(0)} \right) \\
&= ((id_H \otimes (f \otimes g)) \circ \rho_{M \otimes N})(m \otimes n),
\end{aligned}$$

para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$. Por conseguinte, infere-se que $f \otimes g : M \otimes N \to P \otimes Q$ é um morfismo de H-comódulos, garantindo a boa definição do funtor-tensor. Outrossim, definimos a unidade da categoria como o par $(\mathbf{k}, \rho_{\mathbf{k}})$ com

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} &\to H \otimes \mathbf{k} \\
1_{\mathbf{k}} &\mapsto 1_H \otimes 1_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

de modo que as identidades em (4.12) e (4.13) são trivialmente satisfeitas, afinal,

$$\begin{aligned}
((id_H \otimes \rho_{\mathbf{k}}) \circ \rho_{\mathbf{k}})(1_{\mathbf{k}}) &= (id_H \otimes \rho_{\mathbf{k}})(1_H \otimes 1_{\mathbf{k}}) \\
&= 1_H \otimes (1_H \otimes 1_{\mathbf{k}}) \\
&= a_{H,H,\mathbf{k}}((1_H \otimes 1_H) \otimes 1_{\mathbf{k}}) \\
&= (a_{H,H,\mathbf{k}} \circ (\Delta \otimes id_{\mathbf{k}}))(1_H \otimes 1_{\mathbf{k}}) \\
&= (a_{H,H,\mathbf{k}} \circ (\Delta \otimes id_{\mathbf{k}}) \circ \rho_{\mathbf{k}})(1_{\mathbf{k}})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes id_{\mathbf{k}}) \circ \rho_{\mathbf{k}})(1_{\mathbf{k}}) &= (\varepsilon \otimes id_{\mathbf{k}})(1_H \otimes 1_{\mathbf{k}}) \\
&= \varepsilon(1_H) \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&= 1_{\mathbf{k}} \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&= l_{\mathbf{k}}^{-1}(1_{\mathbf{k}}).
\end{aligned}$$

No mais, para os isomorfismos naturais a, l e r, toma-se proveito dos mesmos em $Vect_{\mathbf{k}}$ e, com isso, basta verificar que tais são morfismos de H-comódulos; assim, dados (M, ρ_M), (N, ρ_N), $(P, \rho_P) \in {}^H\mathcal{M}$, segue que

$$\begin{aligned}
&(\rho_{M\otimes(N\otimes P)} \circ a_{M,N,P})((m\otimes n)\otimes p)\\
&= \rho_{M\otimes(N\otimes P)}(m\otimes(n\otimes p))\\
&= \sum (m\otimes(n\otimes p))_{(-1)} \otimes (m\otimes(n\otimes p))_{(0)}\\
&= \sum m_{(-1)}(n\otimes p)_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \otimes (n\otimes p)_{(0)}\right)\\
&= \sum m_{(-1)}\left(n_{(-1)}p_{(-1)}\right) \otimes \left(m_{(0)} \otimes \left(n_{(0)}\otimes p_{(0)}\right)\right)\\
&= \sum \left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right)p_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \otimes \left(n_{(0)}\otimes p_{(0)}\right)\right)\\
&= (id_H \otimes a_{M,N,P})\left(\sum \left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right)p_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\right)\otimes p_{(0)}\right)\right)\\
&= (id_H \otimes a_{M,N,P})\left(\sum (m\otimes n)_{(-1)}p_{(-1)} \otimes \left((m\otimes n)_{(0)}\otimes p_{(0)}\right)\right)\\
&= ((id_H \otimes a_{M,N,P}) \circ \rho_{(M\otimes N)\otimes P})((m\otimes n)\otimes p)
\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}
(\rho_M \circ l_M)(1_{\mathbf{k}} \otimes m) &= \rho_M(m)\\
&= \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}\\
&= (id_H \otimes l_M)\left(\sum m_{(-1)} \otimes \left(1_{\mathbf{k}} \otimes m_{(0)}\right)\right)\\
&= (id_H \otimes l_M)\left(\sum 1_H m_{(-1)} \otimes \left(1_{\mathbf{k}} \otimes m_{(0)}\right)\right)\\
&= ((id_H \otimes l_M) \circ \rho_{\mathbf{k}\otimes M})(1_{\mathbf{k}} \otimes m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\rho_M \circ r_M)(m \otimes 1_{\mathbf{k}}) &= \rho_M(m)\\
&= \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}\\
&= (id_H \otimes r_M)\left(\sum m_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \otimes 1_{\mathbf{k}}\right)\right)\\
&= (id_H \otimes r_M)\left(\sum m_{(-1)}1_H \otimes \left(m_{(0)} \otimes 1_{\mathbf{k}}\right)\right)\\
&= ((id_H \otimes r_M) \circ \rho_{M\otimes \mathbf{k}})(m \otimes 1_{\mathbf{k}}),
\end{aligned}$$

para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, como almejado.

■

Neste momento, tem-se o interesse em discutir com respeito a uma estrutura a qual, concomitantemente, envolve as estruturas de H-módulo e H-comódulo acrescentada de alguma compatibilidade. No sentido análogo ao tratado nas biálgebras, obtém-se, ao considerar a coação como um morfismo de H-módulos, os módulos de Hopf, entretanto os bons frutos para este trabalho são dados por intermédio dos módulos de Yetter-Drinfel'd.

Definição 4.22. Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Diz-se que a categoria dos módulos esquerda-esquerda de Yetter-Drinfel'd, denotada por ${}^H_H\mathcal{YD}$, é a categoria formada por

(i) objetos (M, σ, ρ) em que o par (M, σ) é um H-módulo à esquerda e o par (M, ρ) é um H-comódulo à esquerda tal que vale a identidade

$$\sum h_{(1)}m_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)} = \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)}, \tag{4.14}$$

para todo $h \in H$ e todo $m \in M$.

(ii) morfismos $f : (M, \sigma_M, \rho_M) \to (N, \sigma_N, \rho_N)$ de modo que $f : (M, \sigma_M) \to (N, \sigma_N)$ é um morfismo de H-módulos à esquerda e $f : (M, \rho_M) \to (N, \rho_N)$ é um morfismo de H-comódulos à esquerda.

Observação 4.23. Todo espaço vetorial é um módulo de Yetter-Drinfel'd ao admitir a ação trivial $\sigma : H \otimes V \to V$ e coação trivial $\rho : V \to H \otimes V$ em que $\sigma(h \otimes v) = \varepsilon(h)v$ e $\rho(v) = 1_H \otimes V$. De fato, os pares (M, σ) e (M, ρ) são, respectivamente, um H-módulo à esquerda e o par (M, ρ) é um H-comódulo à esquerda; logo, resta garantir a compatibilidade e, para isso, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum h_{(1)}v_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot v_{(0)} &= \sum h_{(1)}1_H \otimes h_{(2)} \cdot v \\
&= \sum h_{(1)} \otimes \varepsilon\left(h_{(2)}\right) v \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)} \otimes v \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum \varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)} \otimes v \\
&= \sum h_{(2)} \otimes \varepsilon\left(h_{(1)}\right) v \\
&= \sum 1_H h_{(2)} \otimes h_{(1)} \cdot v \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot v\right)_{(-1)} h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot v\right)_{(0)},
\end{aligned}$$

como desejado.

Lema 4.24. A categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ é monoidal.

Demonstração. Por intermédio da estrutura monoidal de ${}_H\mathcal{M}$ e ${}^H\mathcal{M}$, além do fato de que o corpo $\mathbf{k}$ é um módulo de Yetter-Drinfel'd consoante a Observação 4.23, basta assegurar que o produto tensorial sobre $\mathbf{k}$ entre módulos de Yetter-Drinfel'd satisfaz a relação de compatibilidade dada em (4.14). Nesse sentido, ao considerar (M, σ_M, ρ_M), $(N, \sigma_N, \rho_N) \in {}^H_H\mathcal{YD}$, notamos que

$$\begin{aligned}
&\sum h_{(1)}(m \otimes n)_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot (m \otimes n)_{(0)} \\
&\quad = \sum h_{(1)}m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot \left(m_{(0)} \otimes n_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum h_{(1)}m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes \left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} \cdot m_{(0)} \otimes \left(h_{(2)}\right)_{(2)} \cdot n_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum h_{(1)}m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes \left(h_{(2)} \cdot m_{(0)} \otimes h_{(3)} \cdot n_{(0)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.14)}{=} \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} h_{(2)} n_{(-1)} \otimes \left(\left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \otimes h_{(3)} \cdot n_{(0)}\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \left(h_{(2)}\right)_{(1)} n_{(-1)} \otimes \left(\left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \otimes \left(h_{(2)}\right)_{(2)} \cdot n_{(0)}\right) \\
&\overset{(4.14)}{=} \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} \cdot n\right)_{(-1)} \left(h_{(2)}\right)_{(2)} \otimes \\
&\quad \left(\left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \otimes \left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} \cdot n\right)_{(0)}\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \left(h_{(2)} \cdot n\right)_{(-1)} h_{(3)} \otimes \left(\left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \otimes \left(h_{(2)} \cdot n\right)_{(0)}\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n\right)_{(-1)} h_{(3)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} \cdot m \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} \cdot n\right)_{(-1)} h_{(2)} \otimes \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} \cdot m \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} \cdot n\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot (m \otimes n)\right)_{(-1)} h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot (m \otimes n)\right)_{(0)},
\end{aligned}
$$

para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $h \in H$; portanto, a terna $(M \otimes N, \sigma_{M \otimes N}, \rho_{M \otimes N})$ é um módulo de Yetter-Drinfel'd.

■

Ademais, a partir das relações já dispostas, é natural o questionamento acerca dos possíveis ganhos quando H admite um pouco mais de estrutura. Diante disso, surgem os dois resultados a seguir.

Observação 4.25. Quando H é uma álgebra de Hopf com antípoda S, a compatibilidade dada em (4.14) é equivalente à identidade

$$
\rho(h \cdot m) = \sum h_{(1)} m_{(-1)} S\left(h_{(3)}\right) \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)}, \tag{4.15}
$$

para todo $h \in H$ e todo $m \in M$. De fato, afinal, vale

$$
\begin{aligned}
\rho(h \cdot m) &\overset{(4.3)}{=} \rho\left(\sum \left(h_{(1)} \varepsilon\left(h_{(2)}\right)\right) \cdot m\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) \rho\left(h_{(1)} \cdot m\right) \\
&= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \varepsilon\left(h_{(2)}\right) 1_H \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \left(h_{(2)}\right)_{(1)} S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right) \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} h_{(2)} S\left(h_{(3)}\right) \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \left(h_{(1)}\right)_{(2)} S\left(h_{(2)}\right) \otimes \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} \cdot m\right)_{(0)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.14)}{=} \sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} m_{(-1)} S\left(h_{(2)}\right) \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} \cdot m_{(0)} \\
&= \sum h_{(1)} m_{(-1)} S\left(h_{(3)}\right) \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)}
\end{aligned}
$$

ao passo que vale

$$
\begin{aligned}
\sum h_{(1)} m_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)} &\overset{(4.3)}{=} \sum h_{(1)} m_{(-1)} \otimes \left(\varepsilon\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right)\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right) \cdot m_{(0)} \\
&= \sum h_{(1)} m_{(-1)} \otimes \left(\varepsilon\left(h_{(3)}\right) h_{(2)}\right) \cdot m_{(0)} \\
&= \sum h_{(1)} m_{(-1)} \varepsilon\left(h_{(3)}\right) 1_H \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)} \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(1)} m_{(-1)} S\left(\left(h_{(3)}\right)_{(1)}\right)\left(h_{(3)}\right)_{(2)} \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)} \\
&= \sum h_{(1)} m_{(-1)} S\left(h_{(3)}\right) h_{(4)} \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)} \\
&= \sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} m_{(-1)} S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(3)}\right) h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} \cdot m_{(0)} \\
&\overset{(4.15)}{=} \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)},
\end{aligned}
$$

como desejado. Esse resultado está disponível em (RADFORD, 2011).

Finalmente, alcança-se o resultado mais relevante para esta seção, responsável por garantir, sob uma hipótese para H, que a categoria dos módulos de Yetter-Drinfel'd é trançada.

Teorema 4.26. Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, então ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ é uma categoria trançada.

Demonstração. Seja S a antípoda de H; logo, por hipótese, S^{-1} é a antípoda de H^{op} e H^{cop}. Disso, dados (M, σ_M, ρ_M) e (N, σ_N, ρ_N) dois módulos de Yetter-Drinfel'd, definimos a trança em ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ como o morfismo

$$
\begin{aligned}
\tau_{M,N} : M \otimes N &\to N \otimes M \\
m \otimes n &\mapsto \sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Notemos que $\tau_{M,N}$ é, de fato, um morfismo em ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$; afinal, para todo $h \in H$, bem como, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, vale

$$
\begin{aligned}
\tau_{M,N}(h \cdot (m \otimes n)) &= \tau_{M,N}\left(\sum h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} \cdot \left(h_{(2)} \cdot n\right) \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(\left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(-1)} h_{(2)}\right) \cdot n \otimes \left(h_{(1)} \cdot m\right)_{(0)} \\
&\overset{(4.14)}{=} \sum \left(h_{(1)} m_{(-1)}\right) \cdot n \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum h_{(1)} \cdot \left(m_{(-1)} \cdot n\right) \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)} \\
&= \sum h \cdot \left(m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}\right) \\
&= h \cdot \sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)} \\
&= h \cdot \tau_{M,N}(m \otimes n),
\end{aligned}
$$

i.e., $\tau_{M,N}$ é um morfismo de H-módulos, assim como,

$$
\begin{aligned}
&(\rho_{N\otimes M} \circ \tau_{M,N})(m \otimes n) \\
&\quad = \rho_{N\otimes M} \left(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum \left(m_{(-1)} \cdot n\right)_{(-1)} \left(m_{(0)}\right)_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(-1)} \cdot n\right)_{(0)} \otimes \left(m_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&\quad \overset{(4.15)}{=} \sum \left(m_{(-1)}\right)_{(1)} n_{(-1)} S\left(\left(m_{(-1)}\right)_{(3)}\right) \left(m_{(0)}\right)_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(-1)}\right)_{(2)} \cdot n_{(0)} \otimes \left(m_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum m_{(-4)} n_{(-1)} S\left(m_{(-2)}\right) m_{(-1)} \otimes \left(m_{(-3)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum m_{(-3)} n_{(-1)} S\left(\left(m_{(-1)}\right)_{(1)}\right) \left(m_{(-1)}\right)_{(2)} \otimes \left(m_{(-2)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad \overset{(4.6)}{=} \sum m_{(-3)} n_{(-1)} \varepsilon\left(m_{(-1)}\right) 1_H \otimes \left(m_{(-2)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum m_{(-3)} n_{(-1)} \otimes \left(\left(\varepsilon\left(m_{(-1)}\right) m_{(-2)}\right) \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum m_{(-2)} n_{(-1)} \otimes \left(\left(\varepsilon\left(\left(m_{(-1}\right)_{(2)}\right) \left(m_{(-1)}\right)_{(1)}\right) \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad \overset{(4.3)}{=} \sum m_{(-2)} n_{(-1)} \otimes \left(m_{(-1)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad = \sum \left(m_{(-1)}\right)_{(1)} n_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(-1)}\right)_{(2)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&\quad \overset{(4.12)}{=} \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes \left(\left(m_{(0)}\right)_{(-1)} \cdot n_{(0)} \otimes \left(m_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&\quad = (id_H \otimes \tau_{M,N}) \left(\sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes \left(m_{(0)} \otimes n_{(0)}\right)\right) \\
&\quad = ((id_H \otimes \tau_{M,N}) \circ \rho_{M\otimes N})(m \otimes n)
\end{aligned}
$$

garantindo que é um morfismo de H-comódulos. Repare que $\tau_{M,N}$ é inversível pela função $\omega_{N,M} : N \otimes M \to M \otimes N$ dada por

$$\omega_{N,M}(n \otimes m) = \sum m_{(0)} \otimes S^{-1}\left(m_{(-1)}\right) \cdot n$$

tendo em vista que

$$
\begin{aligned}
(\tau_{M,N} \circ \omega_{N,M})(n \otimes m) &= \tau_{M,N} \left(\sum m_{(0)} \otimes S^{-1}\left(m_{(-1)}\right) \cdot n\right) \\
&= \sum \left(m_{(0)}\right)_{(-1)} \cdot \left(S^{-1}\left(m_{(-1)}\right) \cdot n\right) \otimes \left(m_{(0)}\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(\left(m_{(0)}\right)_{(-1)} S^{-1}\left(m_{(-1)}\right)\right) \cdot n \otimes \left(m_{(0)}\right)_{(0)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \left(m_{(-1)} S^{-1}\left(m_{(-2)}\right)\right) \cdot n \otimes m_{(0)} \\
&= \sum \left(\left(m_{(-1)}\right)_{(2)} S^{-1}\left(\left(m_{(-1)}\right)_{(1)}\right)\right) \cdot n \otimes m_{(0)} \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \left(\varepsilon\left(m_{(-1)}\right) 1_H\right) \cdot n \otimes m_{(0)} \\
&= \sum 1_H \cdot n \otimes \varepsilon\left(m_{(-1)}\right) m_{(0)} \\
&= \sum n \otimes \varepsilon\left(m_{(-1)}\right) m_{(0)} \\
&\overset{(4.13)}{=} n \otimes m,
\end{aligned}
$$

bem como,

$$
\begin{aligned}
(\omega_{N,M} \circ \tau_{M,N})(m \otimes n) &= \omega_{N,M}\left(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}\right) \\
&= \sum \left(m_{(0)}\right)_{(0)} \otimes S^{-1}\left(\left(m_{(0)}\right)_{(-1)}\right) \cdot \left(m_{(-1)} \cdot n\right) \\
&= \sum \left(m_{(0)}\right)_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(\left(m_{(0)}\right)_{(-1)}\right) m_{(-1)}\right) \cdot n \\
&= \sum m_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(m_{(-1)}\right) m_{(-2)}\right) \cdot n \\
&= \sum m_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(\left(m_{(-1)}\right)_{(2)}\right)\left(m_{(-1)}\right)_{(1)}\right) \cdot n \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum m_{(0)} \otimes \left(\varepsilon\left(m_{(-1)}\right) 1_H\right) \cdot n \\
&= \sum \varepsilon\left(m_{(-1)}\right) m_{(0)} \otimes 1_H \cdot n \\
&= \sum \varepsilon\left(m_{(-1)}\right) m_{(0)} \otimes n \\
&\overset{(4.13)}{=} m \otimes n,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$. Para a naturalidade, sejam $f : M \to P$ e $g : N \to Q$ dois morfismos de módulos de Yetter-Drinfel'd; logo,

$$
\begin{aligned}
(\tau_{P,Q} \circ (f \otimes g))(m \otimes n) &= \tau_{P,Q}(f(m) \otimes g(n)) \\
&= \sum f(m)_{(-1)} \cdot g(n) \otimes f(m)_{(0)}
\end{aligned}
$$

e, como f é um morfismo de H-comódulos, vale a identidade

$$\sum f(m)_{(-1)} \otimes f(m)_{(0)} = \sum m_{(-1)} \otimes f\left(m_{(0)}\right)$$

que implica em

$$
\begin{aligned}
(\tau_{P,Q} \circ (f \otimes g))(m \otimes n) &= \sum m_{(-1)} \cdot g(n) \otimes f\left(m_{(0)}\right) \\
&= \sum g\left(m_{(-1)} \cdot n\right) \otimes f\left(m_{(0)}\right) \\
&= (g \otimes f)\left(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}\right)
\end{aligned}
$$

$$= ((g \otimes f) \circ \tau_{M,N})(m \otimes n),$$

isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[r, "\tau_{M,N}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & N \otimes M \arrow[d, "g\otimes f"] \\
P \otimes Q \arrow[r, "\tau_{P,Q}"'] & Q \otimes P
\end{tikzcd}$$

é comutativo, como desejado. Por fim, resta garantir a comutatividade dos diagramas hexagonais de uma trança; para o primeiro, tem-se que

$$\begin{aligned}
&(a^{-1}_{P,M,N} \circ \tau_{M\otimes N,P} \circ a^{-1}_{M,N,P})(m \otimes (n \otimes p)) \\
&= (a^{-1}_{P,M,N} \circ \tau_{M\otimes N,P})((m \otimes n) \otimes p) \\
&= a^{-1}_{P,M,N} \left(\sum (m \otimes n)_{(-1)} \cdot p \otimes (m \otimes n)_{(0)}\right) \\
&= a^{-1}_{P,M,N} \left(\sum \left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right) \cdot p \otimes \left(m_{(0)} \otimes n_{(0)}\right)\right) \\
&= \sum \left(\left(m_{(-1)}n_{(-1)}\right) \cdot p \otimes m_{(0)}\right) \otimes n_{(0)} \\
&= \sum \left(m_{(-1)} \cdot \left(n_{(-1)} \cdot p\right) \otimes m_{(0)}\right) \otimes n_{(0)} \\
&= (\tau_{M,P} \otimes id_N) \left(\sum \left(m \otimes n_{(-1)} \cdot p\right) \otimes n_{(0)}\right) \\
&= ((\tau_{M,P} \otimes id_N) \circ a^{-1}_{M,P,N}) \left(\sum m \otimes \left(n_{(-1)} \cdot p \otimes n_{(0)}\right)\right) \\
&= ((\tau_{M,P} \otimes id_N) \circ a^{-1}_{M,P,N} \circ (id_M \otimes \tau_{N,P}))(m \otimes (n \otimes p))
\end{aligned}$$

ao passo que, para o segundo, segue

$$\begin{aligned}
&(a_{N,P,M} \circ \tau_{M,N\otimes P} \circ a_{M,N,P})((m \otimes n) \otimes p) \\
&= (a_{N,P,M} \circ \tau_{M,N\otimes P})(m \otimes (n \otimes p)) \\
&= a_{N,P,M} \left(\sum m_{(-1)} \cdot (n \otimes p) \otimes m_{(0)}\right) \\
&= a_{N,P,M} \left(\sum \left(\left(m_{(-1)}\right)_{(1)} \cdot n \otimes \left(m_{(-1)}\right)_{(2)} \cdot p\right) \otimes m_{(0)}\right) \\
&= \sum \left(m_{(-1)}\right)_{(1)} \cdot n \otimes \left(\left(m_{(-1)}\right)_{(2)} \cdot p \otimes m_{(0)}\right) \\
&\overset{(4.12)}{=} \sum m_{(1)} \cdot n \otimes \left(\left(m_{(0)}\right)_{(-1)} \cdot p \otimes \left(m_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&= (id_N \otimes \tau_{M,P}) \left(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes \left(m_{(0)} \otimes p\right)\right) \\
&= ((id_N \otimes \tau_{M,P}) \circ a_{N,M,P}) \left(\sum \left(m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}\right) \otimes p\right) \\
&= ((id_N \otimes \tau_{M,P}) \circ a_{N,M,P} \circ (\tau_{M,N} \otimes id_P))((m \otimes n) \otimes p),
\end{aligned}$$

como desejado.

■

Diante do resultado acima, em (PINTER, 2013), garante-se, com detalhes, que a categoria ${}_{H}^{H}\mathcal{YD}$ não é simétrica quando a álgebra de Hopf H não é isomorfa ao corpo $\mathbf{k}$ e, em especial, uma versão prévia desse resultado fora primeiramente mostrado em (PAREIGIS, 2001) para a categoria $\mathcal{YD}_{H}^{H}$. Nesse sentido, como já comentado no capítulo anterior, tem-se, finalmente, um exemplo mais concreto de uma categoria trançada que não é simétrica.

Por fim, vale reparar que, na trança da categoria ${}_{H}^{H}\mathcal{YD}$ para H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, não toma-se proveito da coação do espaço vetorial N, mas apenas de sua ação. Dessa forma, surge mais uma relação entre as categorias ${}_{H}\mathcal{M}$ e ${}_{H}^{H}\mathcal{YD}$. Em especial, tem-se, na verdade, uma etapa para a verificação da boa definição de um funtor, o qual é melhor discutido no Exemplo 5.9.

Observação 4.27. A coação de um módulo de Yetter-Drinfel'd V define um isomorfismo natural $\theta : V \otimes - \to - \otimes V$ em ${}_{H}\mathcal{M}$ em que $\theta_X : V \otimes X \to X \otimes V$ é dado por

$$\theta_X(v \otimes x) = \sum v_{(-1)} \cdot x \otimes v_{(0)}$$

com inversa

$$\Upsilon_X(x \otimes v) = \sum v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x.$$

4.3 ÁLGEBRAS BASE COMO ESPAÇOS VETORIAIS

Para encerrar este capítulo, é apresentada uma sequência de definições e de pequenos resultados até culminar na definição de uma álgebra base como uma estrutura algébrica inserida na categoria ${}_{H}^{H}\mathcal{YD}$ para H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Em especial, para evitar dispor diretamente a estrutura mencionada, toma-se proveito para caracterizar módulos álgebra e comódulos álgebra sobre biálgebras.

Definição 4.28. Sejam A uma álgebra e H uma biálgebra. Diz-se que A é um H-módulo álgebra à esquerda se

(i) A é um H-módulo à esquerda;

(ii) para quaisquer $a, b \in A$ e para todo $h \in H$, vale que

$$h \cdot (ab) = \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(h_{(2)} \cdot b\right); \tag{4.16}$$

(iii) para todo $h \in H$, vale que

$$h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A. \tag{4.17}$$

Observação 4.29. Na definição anterior, os itens (ii) e (iii) são equivalentes a inferir, respectivamente, que a multiplicação m_A e a unidade u_A da álgebra A são morfismos de H-módulos à esquerda. De fato, ao supor que A é um H-módulo álgebra à esquerda, tendo em vista que $A \otimes A$ é um H-módulo à esquerda com ação $\sigma_{A\otimes A}$ dada por

$$\sigma_{A\otimes A}(h \otimes (a \otimes b)) \overset{\text{def}}{=} \sum h_{(1)} \cdot a \otimes h_{(2)} \cdot b,$$

tem-se, para quaisquer $a, b \in A$ e todo $h \in H$, que

$$\begin{aligned} m_A(h \cdot (a \otimes b)) &= m_A\left(\sum h_{(1)} \cdot a \otimes h_{(2)} \cdot b\right) \\ &= \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(h_{(2)} \cdot b\right) \\ &\overset{(4.16)}{=} h \cdot (ab) \\ &= h \cdot m_A(a \otimes b), \end{aligned}$$

isto é, m_A é um morfismo de H-módulos à esquerda. Ademais, sabendo que o corpo $\mathbf{k}$ admite estrutura de H-módulo à esquerda vide ação trivial $h \cdot 1_{\mathbf{k}} \overset{\text{def}}{=} \varepsilon(h)1_{\mathbf{k}}$, segue que

$$u_A(h \cdot 1_{\mathbf{k}}) = u_A(\varepsilon(h)1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(h)1_A \overset{(4.17)}{=} h \cdot 1_A = h \cdot u_A(1_{\mathbf{k}}).$$

Reciprocamente, se m_A é um morfismo de H-módulos à esquerda, então

$$\begin{aligned} h \cdot (ab) &= h \cdot m_A(a \otimes b) \\ &= m_A(h \cdot (a \otimes b)) \\ &= \sum m_A\left(h_{(1)} \cdot a \otimes h_{(2)} \cdot b\right) \\ &= \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(h_{(2)} \cdot b\right), \end{aligned}$$

para quaisquer $a, b \in A$ e todo $h \in H$, ao passo que se u_A é um morfismo de H-módulos à esquerda, vale

$$h \cdot 1_A = h \cdot u_A(1_{\mathbf{k}}) = u_A(h \cdot 1_{\mathbf{k}}) = u_A(\varepsilon(h)1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(h)1_A,$$

como desejado.

Diante disso, um H-módulo álgebra à esquerda também é visto como uma álgebra na categoria ${}_H\mathcal{M}$. Analogamente, define-se um H-módulo álgebra à direita como uma álgebra na categoria $\mathcal{M}_H$. Em noções duais, uma coálgebra nas categorias ${}_H\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_H$ é dita um módulo coálgebra à esquerda e à direita, respectivamente. Em seguida, busca-se reduzir a verificação do item (iii) da Definição 4.28 e, para isso, a proposição a seguir é fundamental.

Proposição 4.30. Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra que admite uma estrutura de H-módulo à esquerda satisfazendo a propriedade (ii) da Definição 4.28. Sob tal consideração, para quaisquer $a, b \in A$ e $h \in H$,

(i) vale que

$$(h \cdot a)b = \sum h_{(1)} \cdot \left(a\left(S\left(h_{(2)}\right) \cdot b\right)\right); \tag{4.18}$$

(ii) se S é bijetora, então

$$a(h \cdot b) = \sum h_{(2)} \cdot \left(\left(S^{-1}\left(h_{(1)}\right) \cdot a\right) b\right). \tag{4.19}$$

Demonstração. Sejam $h \in H$ e $a, b \in A$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum h_{(1)} \cdot \left(a\left(S\left(h_{(2)}\right) \cdot b\right)\right) &\overset{(4.16)}{=} \sum \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} \cdot a\right)\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)} \cdot \left(S\left(h_{(2)}\right) \cdot b\right)\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(h_{(2)} \cdot \left(S\left(h_{(3)}\right) \cdot b\right)\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(\left(h_{(2)} S\left(h_{(3)}\right)\right) \cdot b\right) \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right)\right) \cdot b\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \left(h_{(1)} \cdot a\right)\left(\left(\varepsilon\left(h_{(2)}\right) 1_H\right) \cdot b\right) \\
&= \sum \left(\left(\varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)}\right) \cdot a\right)\left(1_H \cdot b\right) \\
&= \sum \left(\varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)} \cdot a\right) b \\
&\overset{(4.3)}{=} (h \cdot a)b.
\end{aligned}$$

Suponha S bijetora; logo, S^{-1} é a antípoda de H^{op} e H^{cop}, bem como, vale que

$$\begin{aligned}
&\sum h_{(2)} \cdot \left(\left(S^{-1}\left(h_{(1)}\right) \cdot a\right) b\right) \\
&\overset{(4.16)}{=} \sum \left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)} \cdot \left(S^{-1}\left(h_{(1)}\right) \cdot a\right)\right)\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)} \cdot b\right) \\
&= \sum \left(h_{(2)} \cdot \left(S^{-1}\left(h_{(1)}\right) \cdot a\right)\right)\left(h_{(3)} \cdot b\right) \\
&= \sum \left(\left(h_{(2)} S^{-1}\left(h_{(1)}\right)\right) \cdot a\right)\left(h_{(3)} \cdot b\right) \\
&= \sum \left(\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)} S^{-1}\left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)}\right)\right) \cdot a\right)\left(h_{(2)} \cdot b\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum \left(\left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right) 1_H\right) \cdot a\right)\left(h_{(2)} \cdot b\right) \\
&= \sum (1_H \cdot a)\left(\left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}\right) \cdot b\right) \\
&= \sum a\left(\left(\varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}\right) \cdot b\right) \\
&\overset{(4.3)}{=} a(h \cdot b),
\end{aligned}$$

como desejado.

■

Corolário 4.31. Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra com estrutura de H-módulo à esquerda. Sob tais considerações, se a multiplicação m_A da álgebra A é um morfismo de H-módulos à esquerda, então A é um H-módulo álgebra à esquerda.

Demonstração. Em especial, é suficiente tomar proveito do primeiro item da proposição anterior; afinal, para todo $h \in H$, tem-se que

$$\begin{aligned} h \cdot 1_A &= (h \cdot 1_A)1_A \\ &\overset{(4.18)}{=} \sum h_{(1)} \cdot \left(1_A \left(S\left(h_{(2)}\right) \cdot 1_A\right)\right) \\ &= \sum h_{(1)} \cdot \left(S\left(h_{(2)}\right) \cdot 1_A\right) \\ &= \sum \left(h_{(1)} S\left(h_{(2)}\right)\right) \cdot 1_A \\ &\overset{(4.6)}{=} (\varepsilon(h)1_H) \cdot 1_A \\ &= \varepsilon(h)(1_H \cdot 1_A) \\ &= \varepsilon(h)1_A \end{aligned}$$

e, assim, A satisfaz a propriedade (iii) da Definição 4.28.

■

Com o devido prosseguimento, tem-se a definição de um comódulo álgebra à esquerda sobre uma biálgebra H, uma álgebra na categoria ${}^H\mathcal{M}$.

Definição 4.32. Seja A uma álgebra. Diz-se que A é um H-comódulo álgebra à esquerda se

(i) A é um H-comódulo à esquerda;

(ii) para quaisquer $a, b \in A$, vale que

$$\sum (ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} = \sum a_{(-1)} b_{(-1)} \otimes a_{(0)} b_{(0)}; \tag{4.20}$$

(iii) vale que

$$\rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A. \tag{4.21}$$

Observação 4.33. Na definição anterior, os itens (ii) e (iii) são, respectivamente, equivalentes ao fatos da multiplicação m_A e a unidade u_A da álgebra A serem morfismos de H-comódulos à esquerda. De fato, ao supor que A é um H-comódulo álgebra à esquerda, $A \otimes A$ é um H-comódulo à esquerda com coação $\rho_{A\otimes A}$ dada por

$$\rho_{A\otimes A}(a \otimes b) \overset{\text{def}}{=} \sum a_{(-1)} b_{(-1)} \otimes \left(a_{(0)} \otimes b_{(0)}\right).$$

Disso, segue, para quaisquer $a, b \in A$, que

$$\begin{aligned}(\rho\circ m_A)(a\otimes b) &= \rho(ab)\\ &= \sum (ab)_{(-1)}\otimes (ab)_{(0)}\\ &\overset{(4.20)}{=} \sum a_{(-1)}b_{(-1)}\otimes a_{(0)}b_{(0)}\\ &= (id_H\otimes m_A)\left(\sum a_{(-1)}b_{(-1)}\otimes \left(a_{(0)}\otimes b_{(0)}\right)\right)\\ &= ((id_H\otimes m_A)\circ \rho_{A\otimes A})(a\otimes b)\end{aligned}$$

isto é, m_A é um morfismo de H-comódulos à esquerda. Além disso, tendo em vista que o corpo $\mathbf{k}$ é um H-comódulo à esquerda via coação trivial $\rho_{\mathbf{k}}(1_{\mathbf{k}}) \overset{\text{def}}{=} 1_H\otimes 1_{\mathbf{k}}$, vale

$$(\rho\circ u_A)(1_{\mathbf{k}}) = \rho(1_A) \overset{(4.21)}{=} 1_H\otimes 1_A = (id_H\otimes u_A)(1_H\otimes 1_{\mathbf{k}}) = ((id_H\otimes u_A)\circ\rho_{\mathbf{k}})(1_{\mathbf{k}}).$$

Reciprocamente, se m_A é um morfismo de H-comódulos à esquerda, então

$$\begin{aligned}\sum (ab)_{(-1)}\otimes (ab)_{(0)} &= \rho(ab)\\ &= (\rho\circ m_A)(a\otimes b)\\ &= ((id_H\otimes m_A)\circ\rho_{A\otimes A})(a\otimes b)\\ &= (id_H\otimes m_A)\left(\sum a_{(-1)}b_{(-1)}\otimes\left(a_{(0)}\otimes b_{(0)}\right)\right)\\ &= \sum a_{(-1)}b_{(-1)}\otimes a_{(0)}b_{(0)},\end{aligned}$$

para quaisquer $a, b\in A$, como requisitado. No mais, vale reparar que

$$\rho(1_A) = (\rho\circ u_A)(1_{\mathbf{k}}) = ((id_H\otimes u_A)\circ\rho_{\mathbf{k}})(1_{\mathbf{k}}) = (id_H\otimes u_A)(1_H\otimes 1_{\mathbf{k}}) = 1_H\otimes 1_A,$$

como desejado.

Analogamente, define-se um H-comódulo álgebra à direita como uma álgebra na categoria $\mathcal{M}^H$. Novamente, em noções duais, uma coálgebra nas categorias ${}^H\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^H$ é dita um H-comódulo coálgebra à esquerda e à direita, respectivamente.

Proposição 4.34. Seja A uma álgebra que admite estrutura de H-comódulo à esquerda via ρ. Sob tais considerações, são equivalentes:

(i) A é um H-comódulo álgebra à esquerda;

(ii) A coação $\rho : A\to H\otimes A$ é um morfismo de álgebras.

Demonstração. Suponha que A é um H-comódulo álgebra à esquerda, assim, sabendo que $H\otimes A$ admite estrutura de álgebra, segue que

$$\begin{aligned}\left(m_{H\otimes A}\circ(\rho\otimes\rho)\right)(a\otimes b) &= m_{H\otimes A}\left(\sum\left(a_{(-1)}\otimes a_{(0)}\right)\otimes\left(b_{(-1)}\otimes b_{(0)}\right)\right)\\ &= \sum a_{(-1)}b_{(-1)}\otimes a_{(0)}b_{(0)}\\ &\overset{(4.20)}{=} \sum (ab)_{(-1)}\otimes (ab)_{(0)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho(ab) \\
&= (\rho \circ m_A)(a \otimes b),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $a, b \in A$, além disso, tem-se que

$$(\rho \circ u_A)(1_{\mathbf{k}}) = \rho(1_A) \overset{(4.21)}{=} 1_H \otimes 1_A = u_{H\otimes A}(1_{\mathbf{k}});$$

portanto, $\rho : A \to H \otimes A$ é um morfismo de álgebras, como desejado. Reciprocamente, basta notarmos, para quaisquer $a, b \in A$, que valem

$$
\begin{aligned}
\sum (ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} &= \rho(ab) \\
&= (\rho \circ m_A)(a \otimes b) \\
&= (m_{H\otimes A} \circ (\rho \otimes \rho))(a \otimes b) \\
&= m_{H\otimes A}\left(\sum \left(a_{(-1)} \otimes a_{(0)}\right) \otimes \left(b_{(-1)} \otimes b_{(0)}\right)\right) \\
&= \sum a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_{(0)}b_{(0)},
\end{aligned}
$$

para quaisquer $a, b \in A$, e

$$\rho(1_A) = (\rho \circ u_A)(1_{\mathbf{k}}) = u_{H\otimes A}(1_{\mathbf{k}}) = 1_H \otimes 1_A,$$

como desejado.

■

Diante das definições e resultados apresentados anteriormente, pode-se, finalmente, apresentar o conceito de uma álgebra base.

Definição 4.35. (DONIN; MUDROV, 2005) Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e $\mathcal{L}$ uma álgebra. Diz-se que $\mathcal{L}$ é uma H-álgebra base se

(i) $\mathcal{L}$ é um H-módulo álgebra à esquerda;

(ii) $\mathcal{L}$ é um H-comódulo álgebra à esquerda;

(iii) para todo $l \in \mathcal{L}$ e todo $h \in H$, vale a equação (4.14) ou, equivalentemente, a equação (4.15);

(iv) para quaisquer $l, l' \in \mathcal{L}$, vale que

$$ll' = \sum \left(l_{(-1)} \cdot l'\right) l_{(0)}. \tag{4.22}$$

Observação 4.36. A definição de uma H-álgebra base é equivalente à estrutura de uma álgebra comutativa em ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, $\mathcal{L}$ é uma álgebra nas categorias ${}_H\mathcal{M}$ e ${}^H\mathcal{M}$ por ser, respectivamente, um H-módulo álgebra à esquerda e um H-comódulo álgebra à esquerda. No mais, na definição anterior, vale observar que o item (iii) indica a compatibilidade dos módulos de Yetter-Drinfel'd ao passo que o item (iv) representa o diagrama dado em (3.18) para a categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Exemplo 4.37. O corpo $\mathbf{k}$ é uma H-álgebra base vide o Exemplo 3.31.

Exemplo 4.38. A álgebra de Hopf H admite a estrutura de álgebra base sobre si ao considerar a ação adjunta à esquerda dada por

$$\begin{aligned} \sigma : H \otimes H &\to H \\ h \otimes k \ &\mapsto \sum h_{(1)} k S\left(h_{(2)}\right) \end{aligned}$$

e a coação como a comultiplicação Δ. De fato, vale, para quaisquer $h, h', k \in H$, que

$$\begin{aligned} (hh') \cdot k &= \sum (hh')_{(1)} k S\left((hh')_{(2)}\right) \\ &= \sum h_{(1)} h'_{(1)} k S\left(h_{(2)} h'_{(2)}\right) \\ &\overset{(4.7)}{=} \sum h_{(1)} h'_{(1)} k S\left(h'_{(2)}\right) S\left(h_{(2)}\right) \\ &= \sum h_{(1)} (h' \cdot k) S\left(h_{(2)}\right) \\ &= h \cdot (h' \cdot k), \end{aligned}$$

e

$$1_H \cdot h = 1_H h S(1_H) = h S(1_H) \overset{(4.7)}{=} h 1_H = h,$$

isto é, (H, σ) é um módulo à esquerda sobre si. Para que H seja um módulo álgebra sobre si, basta notar, mediante o Corolário 4.31, que

$$\begin{aligned} m(h \cdot (k \otimes k')) &= m\left(\sum h_{(1)} \cdot k \otimes h_{(2)} \cdot k'\right) \\ &= m\left(\sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} k S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes \left(h_{(2)}\right)_{(1)} k' S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right)\right) \\ &= m\left(\sum h_{(1)} k S\left(h_{(2)}\right) \otimes h_{(3)} k' S\left(h_{(4)}\right)\right) \\ &= \sum h_{(1)} k S\left(h_{(2)}\right) h_{(3)} k' S\left(h_{(4)}\right) \\ &= \sum h_{(1)} k S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right) \left(h_{(2)}\right)_{(2)} k' S\left(h_{(3)}\right) \\ &\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(1)} k \varepsilon\left(h_{(2)}\right) 1_H k' S\left(h_{(3)}\right) \\ &= \sum \varepsilon\left(h_{(2)}\right) h_{(1)} k k' S\left(h_{(3)}\right) \\ &= \sum \varepsilon\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) \left(h_{(1)}\right)_{(1)} k k' S\left(h_{(2)}\right) \\ &\overset{(4.3)}{=} \sum h_{(1)} k k' S\left(h_{(2)}\right) \\ &= h \cdot (kk') \\ &= h \cdot m(k \otimes k'). \end{aligned}$$

Lembremos que (H, Δ) é um comódulo à esquerda sobre si via Observação 3.48 e, como Δ é um morfismo de álgebras, segue, consoante a Proposição 4.34, que H

é um comódulo álgebra sobre si. Resta verificar a compatibilidade dos módulos de Yetter-Drinfel'd e a comutatividade da multiplicação. Para o primeiro, segue que

$$\sum h_{(-1)} \otimes h_{(0)} \overset{\text{not}}{=} \rho(h) = \Delta(h) \overset{\text{not}}{=} \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)},$$

para todo $h \in H$; logo,

$$\begin{aligned}
&\sum \left(h_{(1)} \cdot k\right)_{(-1)} h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot k\right)_{(0)} \\
&= \sum \left(h_{(1)} \cdot k\right)_{(1)} h_{(2)} \otimes \left(h_{(1)} \cdot k\right)_{(2)} \\
&= \sum \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} kS\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right)\right)_{(1)} h_{(2)} \otimes \left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)} kS\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right)\right)_{(2)} \\
&= \sum \left(h_{(1)} kS\left(h_{(2)}\right)\right)_{(1)} h_{(3)} \otimes \left(h_{(1)} kS\left(h_{(2)}\right)\right)_{(2)} \\
&= \sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} k_{(1)} \left(S\left(h_{(2)}\right)\right)_{(1)} h_{(3)} \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} k_{(2)} \left(S\left(h_{(2)}\right)\right)_{(2)} \\
&\overset{(4.8)}{=} \sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} k_{(1)} S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right) h_{(3)} \otimes \left(h_{(1)}\right)_{(2)} k_{(2)} S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} S\left(h_{(4)}\right) h_{(5)} \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(h_{(3)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} S\left(\left(h_{(4)}\right)_{(1)}\right) \left(h_{(4)}\right)_{(2)} \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(h_{(3)}\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(1)} k_{(1)} \varepsilon\left(h_{(4)}\right) 1_H \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(h_{(3)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} \varepsilon\left(h_{(4)}\right) \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(h_{(3)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(\varepsilon\left(h_{(4)}\right) h_{(3)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(\varepsilon\left(\left(h_{(3)}\right)_{(2)}\right) \left(h_{(3)}\right)_{(1)}\right) \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum h_{(1)} k_{(1)} \otimes h_{(2)} k_{(2)} S\left(h_{(3)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} \otimes \left(h_{(2)}\right)_{(1)} k_{(2)} S\left(\left(h_{(2)}\right)_{(2)}\right) \\
&= \sum h_{(1)} k_{(1)} \otimes h_{(2)} \cdot k_{(2)} \\
&= \sum h_{(1)} k_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot k_{(0)},
\end{aligned}$$

e, para o segundo, tem-se que

$$\begin{aligned}
\sum \left(h_{(-1)} \cdot k\right) h_{(0)} &= \sum \left(h_{(1)} \cdot k\right) h_{(2)} \\
&= \sum \left(h_{(1)}\right)_{(1)} kS\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) h_{(2)} \\
&= \sum h_{(1)} kS\left(h_{(2)}\right) h_{(3)} \\
&= \sum h_{(1)} kS\left(\left(h_{(2)}\right)_{(1)}\right) \left(h_{(2)}\right)_{(2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.6)}{=} \sum h_{(1)} k \varepsilon \left(h_{(2)}\right) 1_H \\
&= \sum \varepsilon \left(h_{(2)}\right) h_{(1)} k \\
&\overset{(4.3)}{=} hk,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $h, k \in H$, como desejado.

Diante dos resultados apresentados, retorna-se à teoria de categorias.

5 O CENTRO DE UMA CATEGORIA MONOIDAL

Neste capítulo, apresenta-se a definição de uma álgebra base para uma categoria monoidal qualquer. Isso ocorre através da estruturação da categoria ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ como o centro da categoria ${}_{H}\mathcal{M}$ para H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Para isso, faz-se necessário construir o centro de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e descrever sua natural estrutura de categoria trançada. Para tomar melhor proveito da categoria centro, são demonstrados resultados menores que permitam relacionar as possíveis definições envolvendo a lateralidade da categoria em questão além de inferir uma conexão entre uma categoria trançada e seu centro. No mais, ressalta-se que a gama de exemplos é, infelizmente, baixa, uma vez que é determinado apenas o centro da categoria ${}_{H}\mathcal{M}$ tendo em vista o objetivo de generalizar a noção de uma álgebra base.

Em particular, as referências para esta discussão são dadas em (ETINGOF *et al.*, 2015), (MOMBELLI, s.d.), (DONIN; MUDROV, 2005) e (MAJID, 1995).

5.1 PROPRIEDADES GERAIS

Esta seção é responsável por apresentar e realizar um estudo, ainda que sucinto, de algumas características do centro de uma categoria monoidal.

Definição 5.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que o centro da categoria $\mathcal{C}$, denotado por $Z(\mathcal{C})$, é a categoria formada por

(i) objetos da forma $(V, c_{-,V})$ em que $V \in \mathcal{C}$ e $c_{-,V} : - \otimes V \to V \otimes -$ é um isomorfismo natural tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes V \arrow[rr, dotted, "c_{\mathbf{1},V}"] \arrow[dr, "l_V"'] & & V \otimes \mathbf{1} \\ & V \arrow[ur, "r_V^{-1}"'] & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

e

$$\begin{tikzcd} & (X \otimes Y) \otimes V \arrow[r, dotted, "c_{X\otimes Y,V}"] \arrow[dl, "a_{X,Y,V}"'] & V \otimes (X \otimes Y) & \\ X \otimes (Y \otimes V) \arrow[dr, "id_X \otimes c_{Y,V}"'] & & & (V \otimes X) \otimes Y \arrow[ul, "a_{V,X,Y}"'] \\ & X \otimes (V \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,V,Y}"'] & (X \otimes V) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,V} \otimes id_Y"'] & \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

são comutativos. Isto é, valem as identidades

$$c_{\mathbf{1},V} = r_V^{-1} \circ l_V \tag{5.3}$$

e

$$c_{X\otimes Y,V} = a_{V,X,Y} \circ (c_{X,V} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V,Y} \circ (id_X \otimes c_{Y,V}) \circ a_{X,Y,V} \tag{5.4}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$.

(ii) morfismos da forma $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ de modo que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes V \arrow[r, "id_X\otimes f"] \arrow[d, "c_{X,V}"'] & X \otimes W \arrow[d, "c_{X,W}"] \\ V \otimes X \arrow[r, "f\otimes id_X"'] & W \otimes X \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

é comutativo, isto é, vale

$$(f \otimes id_X) \circ c_{X,V} = c_{X,W} \circ (id_X \otimes f), \tag{5.6}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

De fato, $Z(\mathcal{C})$ é uma categoria. Reparemos que, para todo $(V, c_{-,V}) \in Z(\mathcal{C})$, tem-se que

$$(id_V \otimes id_X) \circ c_{X,V} = c_{X,V} = c_{X,V} \circ (id_X \otimes id_V);$$

logo, existe morfismo identidade $id_{(V,c_{-,V})}$ em $Z(\mathcal{C})$ dado por id_V. Ademais, dados $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ e $g : (W, c_{-,W}) \to (U, c_{-,U})$ dois morfismos em $Z(\mathcal{C})$, sabe-se que f e g são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} X \otimes V \arrow[r, "id_X\otimes f"] \arrow[d, "c_{X,V}"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & X \otimes W \arrow[d, "c_{X,W}"] \\ V \otimes X \arrow[r, "f\otimes id_X"'] & W \otimes X \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} X \otimes W \arrow[r, "id_X\otimes g"] \arrow[d, "c_{X,W}"'] \arrow[dr, phantom, "(ii)"] & X \otimes U \arrow[d, "c_{X,U}"] \\ W \otimes X \arrow[r, "g\otimes id_X"'] & U \otimes X \end{tikzcd}$$

são comutativos para todo $X \in \mathcal{C}$. Assim, notemos que

$$\begin{aligned} ((g \circ f) \otimes id_X) \circ c_{X,V} &= (g \otimes id_X) \circ (f \otimes id_X) \circ c_{X,V} \\ &\overset{(i)}{=} (g \otimes id_X) \circ c_{X,W} \circ (id_X \otimes f) \\ &\overset{(ii)}{=} c_{X,U} \circ (id_X \otimes g) \circ (id_X \otimes f) \\ &= c_{X,U} \circ (id_X \otimes (g \circ f)), \end{aligned}$$

isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes V & \xrightarrow{id_X \otimes (g \circ f)} & X \otimes U \\ {\scriptstyle c_{X,V}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle c_{X,U}} \\ V \otimes X & \xrightarrow[(g \circ f) \otimes id_X]{} & U \otimes X \end{array}$$

é comutativo para todo $X \in \mathcal{C}$ e, portanto, a composição de morfismos está bem-definida. Por fim, observemos que as propriedades da composição em $\mathcal{C}$, associatividade e compatibilidade com os morfismos identidade, são levantadas para $Z(\mathcal{C})$.

Além disso, é imprescindível expor que o centro $Z(\mathcal{C})$ de uma categoria $\mathcal{C}$ não ser uma subcategoria de $\mathcal{C}$ tendo em vista que a coleção de objetos na primeira não é uma subcoleção de objetos da segunda.

Proposição 5.2. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ um morfismo em $Z(\mathcal{C})$. Sob tais considerações, $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ é um isomorfismo em $Z(\mathcal{C})$ se, e somente se, $f : V \to W$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}$.

Demonstração. Suponhamos que $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ seja um isomorfismo em $Z(\mathcal{C})$; assim, existe $g : (W, c_{-,W}) \to (V, c_{-,V})$ um morfismo em $Z(\mathcal{C})$ de modo que $g \circ f = id_{(V,c_{-,V})}$ e $f \circ g = id_{(W,c_{-,W})}$. Uma vez que todo morfismo em $Z(\mathcal{C})$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, bem como, valem que $id_{(V,c_{-,V})} = id_V$ e $id_{(W,c_{-,W})} = id_W$, infere-se que g é o morfismo inverso de f em $\mathcal{C}$.

Reciprocamente, suponhamos que $f : V \to W$ seja um isomorfismo em $\mathcal{C}$ e, por conseguinte, existe $g : W \to V$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = id_V$ e $f \circ g = id_W$. Já que $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ é um morfismo em $Z(\mathcal{C})$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes V & \xrightarrow{id_X \otimes f} & X \otimes W \\ {\scriptstyle c_{X,V}} \downarrow & (i) & \downarrow {\scriptstyle c_{X,W}} \\ V \otimes X & \xrightarrow[f \otimes id_X]{} & W \otimes X \end{array}$$

é comutativo para todo $X \in \mathcal{C}$. Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} (g \otimes id_X) \circ c_{X,W} &\overset{(i)}{=} (g \otimes id_X) \circ (f \otimes id_X) \circ c_{X,V} \circ (id_X \otimes f)^{-1} \\ &= ((g \circ f) \otimes id_X) \circ c_{X,V} \circ (id_X \otimes f)^{-1} \\ &= (id_V \otimes id_X) \circ c_{X,V} \circ (id_X \otimes f)^{-1} \\ &= c_{X,V} \circ (id_X \otimes f)^{-1} \\ &= c_{X,V} \circ (id_X \otimes f^{-1}) \\ &= c_{X,V} \circ (id_X \otimes g), \end{aligned}$$

isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes W & \xrightarrow{id_X \otimes g} & X \otimes V \\ {\scriptstyle c_{X,W}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle c_{X,V}} \\ W \otimes X & \xrightarrow[g \otimes id_X]{} & V \otimes X \end{array}$$

é comutativo para todo $X \in \mathcal{C}$ e, assim, $g : (W, c_{-,W}) \to (V, c_{-,V})$ é um morfismo em $Z(\mathcal{C})$. Finalmente, pelo fato de $id_V = id_{(V,c_{-,V})}$ e $id_W = id_{(W,c_{-,W})}$, tem-se que g é o morfismo inverso de f em $Z(\mathcal{C})$.

■

O resultado anterior permite evitar uma sequência de verificações. Em especial, ao necessitar levantar um isomorfismo em $\mathcal{C}$ para uma versão em $Z(\mathcal{C})$, basta garantir que tal morfismo ou seu inverso satisfaça a comutatividade de um diagrama análogo ao diagrama dado em (5.5). Em seguida, apresenta-se o primeiro resultado - modesto, mas trabalhoso - desta seção que permite assegurar, a priori, um interesse em trabalhar com o centro de uma categoria monoidal.

Teorema 5.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, $Z(\mathcal{C})$ é uma categoria monoidal trançada.

Demonstração. Para $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$, definimos o tensor entre esses objetos como o par $(V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \otimes (V \otimes W) \arrow[r, dotted, "c_{X,V\otimes W}"] \arrow[dl, "a^{-1}_{X,V,W}"'] & (V \otimes W) \otimes X & \\ (X \otimes V) \otimes W \arrow[dr, "c_{X,V} \otimes id_W"'] & & & V \otimes (W \otimes X) \arrow[ul, "a^{-1}_{V,W,X}"'] \\ & (V \otimes X) \otimes W \arrow[r, "a_{V,X,W}"'] & V \otimes (X \otimes W) \arrow[ur, "id_V \otimes c_{X,W}"'] & \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

seja comutativo. Isto é, os morfismos em $c_{-,V\otimes W}$ são definidos como

$$c_{X,V\otimes W} = a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W} \tag{5.8}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. A priori, reparemos que $c_{-,V\otimes W}$ é um isomorfismo natural pois dados $X, Y \in \mathcal{C}$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, tem-se que

$$\begin{aligned} &(id_{V\otimes W} \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\ &= ((id_V \otimes id_W) \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\ &\overset{(5.8)}{=} ((id_V \otimes id_W) \otimes f) \circ a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W}. \end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{V,W,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes (W \otimes X) \arrow[r, "a^{-1}_{V,W,X}"] \arrow[d, "id_V \otimes (id_W \otimes f)"'] & (V \otimes W) \otimes X \arrow[d, "(id_V \otimes id_W) \otimes f"] \\
V \otimes (W \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{V,W,Y}"'] & (V \otimes W) \otimes Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo; logo,

$$\begin{aligned}
&(id_{V\otimes W} \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\
&= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes (id_W \otimes f)) \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W} \\
&= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes ((id_W \otimes f) \circ c_{X,W})) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $c_{-,W}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes W \arrow[r, "c_{X,W}"] \arrow[d, "f \otimes id_W"'] & W \otimes X \arrow[d, "id_W \otimes f"] \\
Y \otimes W \arrow[r, "c_{Y,W}"'] & W \otimes Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo; assim,

$$\begin{aligned}
&(id_{V\otimes W} \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\
&= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes (c_{X,W} \circ (f \otimes id_W))) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W} \\
&= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ (id_V \otimes (f \otimes id_W)) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{V,-,W}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes X) \otimes X \arrow[r, "a_{V,X,W}"] \arrow[d, "(id_V \otimes f) \otimes id_W"'] & V \otimes (X \otimes W) \arrow[d, "id_V \otimes (f \otimes id_W)"] \\
(V \otimes Y) \otimes W \arrow[r, "a_{V,Y,W}"'] & V \otimes (Y \otimes W)
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, com isso, tem-se que

$$\begin{aligned}
&(id_{V\otimes W} \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\
&= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,Y,W} \circ ((id_V \otimes f) \otimes id_W) \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W} \\
&= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,Y,W} \circ (((id_V \otimes f) \circ c_{X,V}) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $c_{-,V}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes V & \xrightarrow{c_{X,V}} & V \otimes X \\ {\scriptstyle f\otimes id_V}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle id_V \otimes f} \\ Y \otimes V & \xrightarrow[c_{Y,V}]{} & V \otimes Y \end{array}$$

é comutativo; dessarte,

$$\begin{aligned} &(id_{V\otimes W} \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\ &= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,Y,W} \circ ((c_{Y,V} \circ (f \otimes id_V)) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W} \\ &= a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,Y,W} \circ (c_{Y,V} \otimes id_W) \circ ((f \otimes id_V) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W}. \end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{-,V,W}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{a^{-1}_{X,V,W}} & (X \otimes V) \otimes W \\ {\scriptstyle f\otimes(id_V \otimes id_W)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (f\otimes id_V)\otimes id_W} \\ Y \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow[a^{-1}_{Y,V,W}]{} & (Y \otimes V) \otimes W \end{array}$$

é comutativo e, dessa forma, vale que

$$\begin{aligned} &(id_{V\otimes W} \otimes f) \circ c_{X,V\otimes W} \\ &\quad = a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,Y,W} \circ (c_{Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{Y,V,W} \circ (f \otimes (id_V \otimes id_W)) \\ &\quad = a^{-1}_{V,W,Y} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,Y,W} \circ (c_{Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{Y,V,W} \circ (f \otimes id_{V\otimes W}) \\ &\overset{(5.8)}{=} c_{Y,V\otimes W} \circ (f \otimes id_{V\otimes W}). \end{aligned}$$

Isto é, infere-se a comutatividade do diagrama de naturalidade

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{c_{X,V\otimes W}} & (V \otimes W) \otimes X \\ {\scriptstyle f\otimes id_{V\otimes W}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle id_{V\otimes W} \otimes f} \\ Y \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow[c_{Y,V\otimes W}]{} & (V \otimes W) \otimes Y, \end{array}$$

como desejado. No mais, vejamos que o par $(V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ satisfaz as identidades dadas em (5.3) e (5.4); para o primeiro, reparemos que

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{1},V\otimes W} &\overset{(5.8)}{=} a^{-1}_{V,W,\mathbf{1}} \circ (id_V \otimes c_{\mathbf{1},W}) \circ a_{V,\mathbf{1},W} \circ (c_{\mathbf{1},V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \\ &\overset{(5.3)}{=} a^{-1}_{V,W,\mathbf{1}} \circ (id_V \otimes r^{-1}_W) \circ (id_V \otimes l_W) \circ a_{V,\mathbf{1},W} \circ (c_{\mathbf{1},V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \\ &\overset{(3.3)}{=} r^{-1}_{V\otimes W} \circ (id_V \otimes l_W) \circ a_{V,\mathbf{1},W} \circ (c_{\mathbf{1},V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \\ &\overset{(5.3)}{=} r^{-1}_{V\otimes W} \circ (id_V \otimes l_W) \circ a_{V,\mathbf{1},W} \circ (r^{-1}_V \otimes id_W) \circ (l_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(3.1)}{=} r^{-1}_{V\otimes W} \circ (id_V \otimes id_W) \circ (l_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W}\\
&= r^{-1}_{V\otimes W} \circ (l_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W}\\
&\overset{(3.3)}{=} r^{-1}_{V\otimes W} \circ l_{V\otimes W},
\end{aligned}$$

como desejado. Ao passo que para o segundo, dados $X, Y \in \mathcal{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y, V\otimes W}\\
&\overset{(5.8)}{=} a^{-1}_{V,W,X\otimes Y} \circ (id_V \otimes c_{X\otimes Y,W}) \circ a_{V,X\otimes Y,W} \circ (c_{X\otimes Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(5.4)}{=} a^{-1}_{V,W,X\otimes Y} \circ (id_V \otimes a_{W,X,Y}) \circ (id_V \otimes (c_{X,W} \otimes id_Y)) \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,V,Y})\circ\\
&(id_V \otimes (id_X \otimes c_{Y,W})) \circ (id_V \otimes a_{X,W,V}) \circ a_{V,X\otimes Y,W} \circ (c_{X\otimes Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(3.2)}{=} a_{V\otimes W,X,Y} \circ (a^{-1}_{V,W,X} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{V,W\otimes X,Y} \circ (id_V \otimes (c_{X,W} \otimes id_Y))\circ\\
&(id_V \otimes a^{-1}_{X,W,Y}) \circ (id_V \otimes (id_X \otimes c_{Y,W})) \circ (id_V \otimes a_{X,Y,W}) \circ a_{V,X\otimes Y,W}\circ\\
&(c_{X\otimes Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{V,-,Y}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes ((X \otimes W) \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{V,X\otimes W,Y}"] \arrow[d, "id_V\otimes(c_{X,W}\otimes id_Y)"'] & (V \otimes (X \otimes W)) \otimes Y \arrow[d, "(id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y"] \\
V \otimes ((W \otimes X) \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{V,W\otimes X,Y}"'] & (V \otimes (W \otimes X)) \otimes Y,
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, dessa forma, vale que

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y, V\otimes W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y} \circ (a^{-1}_{V,W,X} \otimes id_Y) \circ ((id_V \otimes c_{X,W}) \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{V,X\otimes W,Y}\circ\\
&(id_V \otimes a^{-1}_{X,W,Y}) \circ (id_V \otimes (id_X \otimes c_{Y,W})) \circ (id_V \otimes a_{X,Y,W}) \circ a_{V,X\otimes Y,W}\circ\\
&(c_{X\otimes Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(3.2)}{=} a_{V\otimes W,X,Y} \circ (a^{-1}_{V,W,X} \otimes id_Y) \circ ((id_V \otimes c_{X,W}) \otimes id_Y) \circ (a_{V,X,W} \otimes id_Y)\circ\\
&a^{-1}_{V\otimes X,W,Y} \circ a^{-1}_{V,X,W\otimes Y} \circ (id_V \otimes (id_X \otimes c_{Y,W})) \circ (id_V \otimes a_{X,Y,W}) \circ a_{V,X\otimes Y,W}\circ\\
&(c_{X\otimes Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}.
\end{aligned}$$

Ademais, pela naturalidade de $a^{-1}_{V,X,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes (X \otimes (Y \otimes W)) \arrow[r, "a^{-1}_{V,X,Y\otimes W}"] \arrow[d, "id_V\otimes(id_X\otimes c_{Y,W})"'] & (V \otimes X) \otimes (Y \otimes W) \arrow[d, "(id_V\otimes id_X)\otimes c_{Y,W}"] \\
V \otimes (X \otimes (W \otimes Y)) \arrow[r, "a^{-1}_{V,X,W\otimes Y}"'] & (V \otimes X) \otimes (W \otimes Y),
\end{tikzcd}$$

é comutativo; logo,

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y,V\otimes W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}\circ\\
&((id_V\otimes id_X)\otimes c_{Y,W})\circ a^{-1}_{V,X,Y\otimes W}\circ(id_V\otimes a_{X,Y,W})\circ a_{V,X\otimes Y,W}\circ(c_{X\otimes Y,V}\otimes id_W)\circ\\
&a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(5.4)}{=} a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ\\
&a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}\circ((id_V\otimes id_X)\otimes c_{Y,W})\circ a^{-1}_{V,X,Y\otimes W}\circ(id_V\otimes a_{X,Y,W})\circ a_{V,X\otimes Y,W}\circ\\
&(a_{V,X,Y}\otimes id_W)\circ((c_{X,V}\otimes id_Y)\otimes id_W)\circ(a^{-1}_{X,V,Y}\otimes id_W)\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ\\
&(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(3.2)}{=} a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ\\
&a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}\circ((id_V\otimes id_X)\otimes c_{Y,W})\circ a_{V\otimes X,Y,W}\circ((c_{X,V}\otimes id_Y)\otimes id_W)\circ\\
&(a^{-1}_{X,V,Y}\otimes id_W)\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{-,Y,W}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes V)\otimes Y)\otimes W \arrow[r, "a_{X\otimes V,Y,W}"] \arrow[d, "(c_{X,V}\otimes id_Y)\otimes id_W"'] & (X\otimes V)\otimes(Y\otimes W) \arrow[d, "c_{X,V}\otimes(id_Y\otimes id_W)"] \\
((V\otimes X)\otimes Y)\otimes W \arrow[r, "a_{V\otimes X,Y,W}"'] & (V\otimes X)\otimes(Y\otimes W),
\end{tikzcd}$$

é comutativo; assim,

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y,V\otimes W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}\circ\\
&((id_V\otimes id_X)\otimes c_{Y,W})\circ(c_{X,V}\otimes(id_Y\otimes id_W))\circ a_{X\otimes V,Y,W}\circ(a^{-1}_{X,V,Y}\otimes id_W)\circ\\
&((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}\circ\\
&(c_{X,V}\otimes c_{Y,W})\circ a_{X\otimes V,Y,W}\circ(a^{-1}_{X,V,Y}\otimes id_W)\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ\\
&(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}\circ\\
&(c_{X,V}\otimes(id_W\otimes id_Y))\circ((id_X\otimes id_V)\otimes c_{Y,W})\circ a_{X\otimes V,Y,W}\circ(a^{-1}_{X,V,Y}\otimes id_W)\circ\\
&((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}.
\end{aligned}$$

Enquanto que, pela naturalidade de $a^{-1}_{-,W,Y}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes V)\otimes(W\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X\otimes V,W,Y}"] \arrow[d, "c_{X,V}\otimes(id_W\otimes id_Y)"'] & ((X\otimes V)\otimes W)\otimes Y \arrow[d, "(c_{X,V}\otimes id_W)\otimes id_Y"] \\
(V\otimes X)\otimes(W\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{V\otimes X,W,Y}"'] & ((V\otimes X)\otimes W)\otimes Y,
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, com isso, infere-se que

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y,V\otimes W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ\\
&((c_{X,V}\otimes id_W)\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{X\otimes V,W,Y}\circ((id_X\otimes id_V)\otimes c_{Y,W})\circ a_{X\otimes V,Y,W}\circ\\
&(a^{-1}_{X,V,Y}\otimes id_W)\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(3.2)}{=} a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ\\
&((c_{X,V}\otimes id_W)\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{X\otimes V,W,Y}\circ((id_X\otimes id_V)\otimes c_{Y,W})\circ a^{-1}_{X,V,Y\otimes W}\circ\\
&(id_X\otimes a_{V,Y,W})\circ a_{X,V\otimes Y,W}\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{X,V,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X\otimes(V\otimes(Y\otimes W)) \arrow[r, "a^{-1}_{X,V,Y\otimes W}"] \arrow[d, "id_X\otimes(id_V\otimes c_{Y,W})"'] & (X\otimes V)\otimes(Y\otimes W) \arrow[d, "(id_X\otimes id_V)\otimes c_{Y,W}"] \\
X\otimes(Y\otimes(W\otimes Y)) \arrow[r, "a^{-1}_{X,V,W\otimes Y}"'] & (X\otimes V)\otimes(W\otimes Y),
\end{tikzcd}$$

é comutativo; logo,

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y,V\otimes W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ\\
&((c_{X,V}\otimes id_W)\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{X\otimes V,W,Y}\circ a^{-1}_{X,V,W\otimes Y}\circ(id_X\otimes(id_V\otimes c_{Y,W}))\circ\\
&(id_X\otimes a_{V,Y,W})\circ a_{X,V\otimes Y,W}\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(3.2)}{=} a_{V\otimes W,X,Y}\circ(a^{-1}_{V,W,X}\otimes id_Y)\circ((id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_Y)\circ(a_{V,X,W}\otimes id_Y)\circ\\
&((c_{X,V}\otimes id_W)\otimes id_Y)\circ(a^{-1}_{X,V,W}\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{X,V\otimes W,Y}\circ(id_X\otimes a^{-1}_{V,W,Y})\circ\\
&(id_X\otimes(id_V\otimes c_{Y,W}))\circ(id_X\otimes a_{V,Y,W})\circ a_{X,V\otimes Y,W}\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ\\
&(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(5.8)}{=} a_{V\otimes W,X,Y}\circ(c_{X,V\otimes W}\otimes id_Y)\circ a^{-1}_{X,V\otimes W,Y}\circ(id_X\otimes a^{-1}_{V,W,Y})\circ\\
&(id_X\otimes(id_V\otimes c_{Y,W}))\circ(id_X\otimes a_{V,Y,W})\circ a_{X,V\otimes Y,W}\circ((id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W)\circ\\
&(a_{X,Y,V}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{X,-,W}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes (Y \otimes V)) \otimes W \arrow[r, "a_{X,Y\otimes V,W}"] \arrow[d, "(id_X\otimes c_{Y,V})\otimes id_W"'] & X \otimes ((Y \otimes V) \otimes W) \arrow[d, "id_X\otimes(c_{Y,V}\otimes id_W)"] \\
(X \otimes (V \otimes Y)) \otimes W \arrow[r, "a_{X,V\otimes Y,W}"'] & X \otimes ((V \otimes Y) \otimes W;
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, por conseguinte, obtém-se

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y,V\otimes W}\\
&= a_{V\otimes W,X,Y} \circ (c_{X,V\otimes W} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,Y} \circ (id_X \otimes a^{-1}_{V,W,Y})\circ\\
&(id_X \otimes (id_V \otimes c_{Y,W})) \circ (id_X \otimes a_{V,Y,W}) \circ (id_X \otimes (c_{Y,V} \otimes id_W)) \circ a_{X,Y\otimes V,W}\circ\\
&(a_{X,Y,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,V,W}\\
&\overset{(3.2)}{=} a_{V\otimes W,X,Y} \circ (c_{X,V\otimes W} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,Y} \circ (id_X \otimes a^{-1}_{V,W,Y})\circ\\
&(id_X \otimes (id_V \otimes c_{Y,W})) \circ (id_X \otimes a_{V,Y,W}) \circ (id_X \otimes (c_{Y,V} \otimes id_W)) \circ (id_X \otimes a^{-1}_{Y,V,W})\circ\\
&a_{X,Y,V\otimes W}\\
&\overset{(5.8)}{=} a_{V\otimes W,X,Y} \circ (c_{X,V\otimes W} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,Y} \circ (id_X \otimes c_{Y,V\otimes W}) \circ a_{X,Y,V\otimes W}.
\end{aligned}$$

Isto é, $c_{-,V\otimes W}$ satisfaz (5.4), como desejado. Ademais, com $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ e $g : (P, c_{-,P}) \to (Q, c_{-,Q})$ dois morfismos em $Z(\mathcal{C})$, definimos o tensor entre tais como o morfismo $f \otimes g$ em $\mathcal{C}$, isto é, o tensor de $\mathcal{C}$ entre morfismos em $Z(\mathcal{C})$ é um morfismo em $Z(\mathcal{C})$. Para garantir que o tensor entre morfismos está bem-definido, basta garantir a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes P) \arrow[r, "id_X\otimes(f\otimes g)"] \arrow[d, "c_{X,V\otimes P}"'] & X \otimes (W \otimes Q) \arrow[d, "c_{X,W\otimes Q}"] \\
(V \otimes P) \otimes X \arrow[r, "(f\otimes g)\otimes id_X"'] & (W \otimes Q) \otimes X,
\end{tikzcd}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Logo, notemos que

$$\begin{aligned}
&((f \otimes g) \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes P}\\
&\overset{(5.8)}{=} ((f \otimes g) \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V,P,X} \circ (id_V \otimes c_{X,P}) \circ a_{V,X,P} \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P}
\end{aligned}$$

e, pela naturalidade de $a^{-1}_{-,-,X}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes (P \otimes X) \arrow[r, "a^{-1}_{V,P,X}"] \arrow[d, "f\otimes(g\otimes id_X)"'] & (V \otimes P) \otimes X \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes id_X"] \\
W \otimes (Q \otimes X) \arrow[r, "a^{-1}_{W,Q,X}"'] & (W \otimes Q) \otimes X
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim,

$$\begin{aligned}
&((f \otimes g) \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (f \otimes (g \otimes id_X)) \circ (id_V \otimes c_{X,P}) \circ a_{V,X,P} \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ ((f \circ id_V) \otimes ((g \otimes id_X) \circ c_{X,P})) \circ a_{V,X,P} \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P}
\end{aligned}$$

de modo que, atrelado ao fato de g satisfazer a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes P \arrow[r, "id_X \otimes g"] \arrow[d, "c_{X,P}"'] & X \otimes Q \arrow[d, "c_{X,Q}"] \\
P \otimes X \arrow[r, "g \otimes id_X"'] & Q \otimes X,
\end{tikzcd}$$

por ser morfismo em $Z(\mathcal{C})$, obtém-se

$$\begin{aligned}
&((f \otimes g) \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ ((f \circ id_V) \otimes (c_{X,Q} \circ (id_X \otimes g))) \circ a_{V,X,P} \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ ((id_W \circ f) \otimes (c_{X,Q} \circ (id_X \otimes g))) \circ a_{V,X,P} \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ (f \otimes (id_X \otimes g)) \circ a_{V,X,P} \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{-,X,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes X) \otimes P \arrow[r, "a_{V,X,P}"] \arrow[d, "(f\otimes id_X)\otimes g"'] & V \otimes (X \otimes P) \arrow[d, "f\otimes(id_X\otimes g)"] \\
(W \otimes X) \otimes Q \arrow[r, "a_{W,X,Q}"'] & W \otimes (X \otimes Q)
\end{tikzcd}$$

é comutativo; logo,

$$\begin{aligned}
&((f \otimes g) \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ a_{W,X,Q} \circ ((f \otimes id_X) \otimes g) \circ (c_{X,V} \otimes id_P) \circ a^{-1}_{X,V,P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ a_{W,X,Q} \circ (((f \otimes id_X) \circ c_{X,V}) \otimes (g \circ id_P)) \circ a^{-1}_{X,V,P}
\end{aligned}$$

que, auxiliado por f que satisfaz a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes V \arrow[r, "id_X \otimes f"] \arrow[d, "c_{X,V}"'] & X \otimes W \arrow[d, "c_{X,W}"] \\
V \otimes X \arrow[r, "f \otimes id_X"'] & W \otimes X
\end{tikzcd}$$

por ser morfismo em $Z(\mathcal{C})$, garante

$$\begin{aligned}
&((f \otimes g) \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ a_{W,X,Q} \circ ((c_{X,W} \circ (id_X \otimes f)) \otimes (g \circ id_P)) \circ a^{-1}_{X,V,P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ a_{W,X,Q} \circ ((c_{X,W} \circ (id_X \otimes f)) \otimes (id_Q \circ g)) \circ a^{-1}_{X,V,P} \\
&= a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ a_{W,X,Q} \circ (c_{X,W} \otimes id_Q) \circ ((id_X \otimes f) \otimes g) \circ a^{-1}_{X,V,P}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{X,-,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes P) \arrow[r, "a^{-1}_{X,V,P}"] \arrow[d, "id_X\otimes(f\otimes g)"'] & (X \otimes V) \otimes P \arrow[d, "(id_X\otimes f)\otimes g"] \\
X \otimes (W \otimes Q) \arrow[r, "a^{-1}_{X,W,Q}"'] & (X \otimes W) \otimes Q
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, assim,

$$\begin{aligned}
&((f \otimes g) \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes P} \\
&\quad = a^{-1}_{W,Q,X} \circ (id_W \otimes c_{X,Q}) \circ a_{W,X,Q} \circ (c_{X,W} \otimes id_Q) \circ a^{-1}_{X,W,Q} \circ (id_X \otimes (f \otimes g)) \\
&\overset{(5.8)}{=} c_{X,W\otimes Q} \circ (id_X \otimes (f \otimes g)),
\end{aligned}$$

como desejado. Dessa forma, o funtor-tensor $\otimes_{Z(\mathcal{C})} : Z(\mathcal{C}) \times Z(\mathcal{C}) \to Z(\mathcal{C})$ dado por

$$\begin{array}{ccc}
((V, c_{-,V}), (W, c_{-,W})) & \mapsto & (V \otimes W, c_{-,V\otimes W}) \\
(f, g) & \mapsto & f \otimes g
\end{array}$$

está bem-definido e sua funtorialidade é levantada pelo funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Além disso, definimos $\mathbf{1}_{Z(\mathcal{C})}$ por $(\mathbf{1}, c_{-,\mathbf{1}})$ que é objeto em $Z(\mathcal{C})$ com

$$c_{-,\mathbf{1}} \overset{\text{def}}{=} l^{-1}_{-} \circ r_{-}, \tag{5.9}$$

visto que $c_{-,\mathbf{1}} : - \otimes \mathbf{1} \to \mathbf{1} \otimes -$ é isomorfismo natural por ser composição de isomorfismos naturais tal que

$$c_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \overset{(5.9)}{=} l^{-1}_{\mathbf{1}} \circ r_{\mathbf{1}} \overset{(3.13)}{=} r^{-1}_{\mathbf{1}} \circ l_{\mathbf{1}}$$

e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vale

$$\begin{aligned}
&c_{X\otimes Y,\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.9)}{=} l^{-1}_{X\otimes Y} \circ r_{X\otimes Y} \\
&\overset{(3.3)}{=} a_{\mathbf{1},X,Y} \circ (l^{-1}_X \otimes id_Y) \circ r_{X\otimes Y} \\
&\overset{(3.3)}{=} a_{\mathbf{1},X,Y} \circ (l^{-1}_X \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes r_Y) \circ a_{X,Y,\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{\mathbf{1},X,Y} \circ (l_X^{-1} \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes r_Y) \circ a_{X,Y,\mathbf{1}} \\
&\overset{(3.1)}{=} a_{\mathbf{1},X,Y} \circ (l_X^{-1} \otimes id_Y) \circ (r_X \otimes id_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y} \circ (id_X \otimes l_Y^{-1}) \circ (id_X \otimes r_Y) \circ a_{X,Y,\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.9)}{=} a_{\mathbf{1},X,Y} \circ (c_{X,\mathbf{1}} \otimes id_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y} \circ (id_X \otimes l_Y^{-1}) \circ (id_X \otimes r_Y) \circ a_{X,Y,\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.9)}{=} a_{\mathbf{1},X,Y} \circ (c_{X,\mathbf{1}} \otimes id_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y} \circ (id_X \otimes c_{Y,\mathbf{1}}) \circ a_{X,Y,\mathbf{1}}.
\end{aligned}
$$

Isto é, $c_{-,\mathbf{1}}$ satisfaz (5.3) e (5.4), como desejado. Para os isomorfismos naturais em $Z(\mathcal{C})$ dados por

$$
a_{Z(\mathcal{C})} : \otimes_{Z(\mathcal{C})} \circ \left(\otimes_{Z(\mathcal{C})} \times Id_{Z(\mathcal{C})}\right) \to \otimes_{Z(\mathcal{C})} \circ \left(Id_{Z(\mathcal{C})} \times \otimes_{Z(\mathcal{C})}\right),
$$

bem como,

$$
l_{Z(\mathcal{C})} : \mathbf{1}_{Z(\mathcal{C})} \otimes_{Z(\mathcal{C})} - \to Id_{Z(\mathcal{C})} \qquad \text{e} \qquad r_{Z(\mathcal{C})} : - \otimes_{Z(\mathcal{C})} \mathbf{1}_{Z(\mathcal{C})} \to Id_{Z(\mathcal{C})},
$$

pode-se tomar proveito dos isomorfismos naturais a, l e r de $\mathcal{C}$. Por conseguinte, é suficiente demonstrar a comutatividade dos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes ((V \otimes W) \otimes U) \arrow[r, "id_X \otimes a_{V,W,U}"] \arrow[d, "c_{X,(V\otimes W)\otimes U}"'] & X \otimes (V \otimes (W \otimes U)) \arrow[d, "c_{X,V\otimes(W\otimes U)}"] \\
((V \otimes W) \otimes U) \otimes X \arrow[r, "a_{V,W,U} \otimes id_X"'] & (V \otimes (W \otimes U)) \otimes X,
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (\mathbf{1} \otimes V) \arrow[r, "id_X \otimes l_V"] \arrow[d, "c_{X,\mathbf{1}\otimes V}"'] & X \otimes V \arrow[d, "c_{X,V}"] \\
(\mathbf{1} \otimes V) \otimes X \arrow[r, "l_V \otimes id_X"'] & V \otimes X
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "id_X \otimes r_V"] \arrow[d, "c_{X,V\otimes\mathbf{1}}"'] & X \otimes V \arrow[d, "c_{X,V}"] \\
(V \otimes \mathbf{1}) \otimes X \arrow[r, "r_V \otimes id_X"'] & V \otimes X,
\end{tikzcd}
$$

para todo $X \in \mathcal{C}$ e para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}), (U, c_{-,U}) \in Z(\mathcal{C})$. Afinal, obteremos

$$
a_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})} = a_{V,W,U},
$$

bem como,

$$
l_{(V,c_{-,V})} = l_V \qquad \text{e} \qquad r_{(V,c_{-,V})} = r_V.
$$

Para o primeiro diagrama, tem-se

$$
\begin{aligned}
&(a_{V,W,U} \otimes id_X) \circ c_{X,(V\otimes W)\otimes U} \\
&\overset{(5.8)}{=} (a_{V,W,U} \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V\otimes W,U,X} \circ (id_{V\otimes W} \otimes c_{X,U}) \circ a_{V\otimes W,X,U} \circ (c_{X,V\otimes W} \otimes id_U) \circ \\
&\quad a^{-1}_{X,V\otimes W,U}
\end{aligned}
$$

$$\overset{(3.2)}{=} a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ a_{V,W,U\otimes X} \circ (id_{V\otimes W} \otimes c_{X,U}) \circ a_{V\otimes W,X,U} \circ (c_{X,V\otimes W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U}.$$

Pela naturalidade de $a_{V,W,-}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes W) \otimes (X \otimes U) & \xrightarrow{a_{V,W,X\otimes U}} & V \otimes (W \otimes (X \otimes U)) \\ {\scriptstyle (id_V\otimes id_W)\otimes c_{X,U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_V\otimes(id_W\otimes c_{X,U})} \\ (V \otimes W) \otimes (U \otimes X) & \xrightarrow[a_{V,W,U\otimes X}]{} & V \otimes (W \otimes (U \otimes X)), \end{array}$$

é comutativo; logo,

$$\begin{aligned} &(a_{V,W,U} \otimes id_X) \circ c_{X,(V\otimes W)\otimes U} \\ &= a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes c_{X,U})) \circ a_{V,W,X\otimes U} \circ a_{V\otimes W,X,U} \circ \\ &(c_{X,V\otimes W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U} \\ &\overset{(5.8)}{=} a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes c_{X,U})) \circ a_{V,W,X\otimes U} \circ a_{V\otimes W,X,U} \circ \\ &((a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{V,W,X}) \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U} \\ &= a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes c_{X,U})) \circ a_{V,W,X\otimes U} \circ a_{V\otimes W,X,U} \circ \\ &(a^{-1}_{V,W,X} \otimes id_U) \circ ((id_V \otimes c_{X,W}) \otimes id_U) \circ (a_{V,X,W} \otimes id_U) \circ ((c_{X,V} \otimes id_W) \otimes id_U) \circ \\ &(a^{-1}_{X,V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U} \\ &\overset{(3.2)}{=} a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes c_{X,U})) \circ (id_V \otimes a_{W,X,U}) \circ \\ &a_{V,W\otimes X,U} \circ ((id_V \otimes c_{X,W}) \otimes id_U) \circ (a_{V,X,W} \otimes id_U) \circ ((c_{X,V} \otimes id_W) \otimes id_U) \circ \\ &(a^{-1}_{X,V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U}. \end{aligned}$$

Ao passo que, pela naturalidade de $a_{V,-,U}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes (X \otimes W)) \otimes U & \xrightarrow{a_{V,X\otimes W,U}} & V \otimes ((X \otimes W) \otimes U) \\ {\scriptstyle (id_V\otimes c_{X,W})\otimes id_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_V\otimes(c_{X,W}\otimes id_U)} \\ (V \otimes (W \otimes X)) \otimes U & \xrightarrow[a_{V,W\otimes X,U}]{} & V \otimes ((W \otimes X) \otimes U) \end{array}$$

é comutativo e, assim,

$$\begin{aligned} &(a_{V,W,U} \otimes id_X) \circ c_{X,(V\otimes W)\otimes U} \\ &= a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes c_{X,U})) \circ (id_V \otimes a_{W,X,U}) \circ \\ &(id_V \otimes (c_{X,W} \otimes id_U)) \circ a_{V,X\otimes W,U} \circ (a_{V,X,W} \otimes id_U) \circ ((c_{X,V} \otimes id_W) \otimes id_U) \circ \\ &(a^{-1}_{X,V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U} \end{aligned}$$

$$\overset{(3.2)}{=} a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,U,X}) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes c_{X,U})) \circ (id_V \otimes a_{W,X,U}) \circ$$
$$(id_V \otimes (c_{X,W} \otimes id_U)) \circ (id_V \otimes a^{-1}_{X,W,U}) \circ a_{V,X,W\otimes U} \circ a_{V\otimes X,W,U} \circ$$
$$((c_{X,V} \otimes id_W) \otimes id_U) \circ (a^{-1}_{X,V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U}$$
$$\overset{(5.8)}{=} a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W\otimes U}) \circ a_{V,X,W\otimes U} \circ a_{V\otimes X,W,U} \circ ((c_{X,V} \otimes id_W) \otimes id_U) \circ$$
$$(a^{-1}_{X,V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U}.$$

Por fim, pela naturalidade de $a_{-,W,U}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes V) \otimes W) \otimes U \arrow[r, "a_{X\otimes V,W,U}"] \arrow[d, "(c_{X,V}\otimes id_W)\otimes id_U"'] & (X \otimes V) \otimes (W \otimes U) \arrow[d, "c_{X,V}\otimes(id_W\otimes id_U)"] \\
((V \otimes X) \otimes W) \otimes U \arrow[r, "a_{V\otimes X,W,U}"'] & (V \otimes X) \otimes (W \otimes U)
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, por conseguinte, vale que

$$(a_{V,W,U} \otimes id_X) \circ c_{X,(V\otimes W)\otimes U}$$
$$= a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W\otimes U}) \circ a_{V,X,W\otimes U} \circ (c_{X,V} \otimes id_{W\otimes U}) \circ a_{X\otimes V,W,U} \circ$$
$$(a^{-1}_{X,V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{X,V\otimes W,U}$$
$$\overset{(3.2)}{=} a^{-1}_{V,W\otimes U,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W\otimes U}) \circ a_{V,X,W\otimes U} \circ (c_{X,V} \otimes id_{W\otimes U}) \circ a_{X,V,W\otimes U} \circ$$
$$(id_X \otimes a_{V,W,U})$$
$$\overset{(5.8)}{=} c_{X,V\otimes(W\otimes U)} \circ (id_X \otimes a_{V,W,U}),$$

como desejado. Portanto, a levanta um isomorfismo natural em $Z(\mathcal{C})$. Prosseguindo para o segundo diagrama, observemos que

$$(l_V \otimes id_X) \circ c_{X,\mathbf{1}\otimes V}$$
$$\overset{(5.8)}{=} (l_V \otimes id_X) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,X} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{X,V}) \circ a_{\mathbf{1},X,V} \circ (c_{X,\mathbf{1}} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V}$$
$$\overset{(3.3)}{=} l_{V\otimes X} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{X,V}) \circ a_{\mathbf{1},X,V} \circ (c_{X,\mathbf{1}} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V}$$
$$\overset{(5.9)}{=} l_{V\otimes X} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{X,V}) \circ a_{\mathbf{1},X,V} \circ ((l^{-1}_X \circ r_X) \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V}$$
$$= l_{V\otimes X} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{X,V}) \circ a_{\mathbf{1},X,V} \circ (l^{-1}_X \otimes id_V) \circ (r_X \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V}$$
$$\overset{(3.3)}{=} l_{V\otimes X} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{X,V}) \circ l^{-1}_{X\otimes V} \circ (r_X \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V}.$$

Pela naturalidade de l, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes (X \otimes V) \arrow[r, "l_{X\otimes V}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes c_{X,V}"'] & X \otimes V \arrow[d, "c_{X,V}"] \\
\mathbf{1} \otimes (V \otimes X) \arrow[r, "l_{V\otimes X}"'] & V \otimes X
\end{tikzcd}$$

é comutativo, assim,

$$(l_V \otimes id_X) \circ c_{X,\mathbf{1}\otimes V} = c_{X,V} \circ (r_X \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V} \overset{(3.1)}{=} c_{X,V} \circ (id_X \otimes l_V).$$

Similarmente, tem-se que

$$\begin{aligned}
&(r_V \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.8)}{=} (r_V \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V,\mathbf{1},X} \circ (id_V \otimes c_{X,\mathbf{1}}) \circ a_{V,X,\mathbf{1}} \circ (c_{X,V} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,V,\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.9)}{=} (r_V \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V,\mathbf{1},X} \circ (id_V \otimes (l^{-1}_X \circ r_X)) \circ a_{V,X,\mathbf{1}} \circ (c_{X,V} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,V,\mathbf{1}} \\
&= (r_V \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V,\mathbf{1},X} \circ (id_V \otimes l^{-1}_X) \circ (id_V \otimes r_X) \circ a_{V,X,\mathbf{1}} \circ (c_{X,V} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,V,\mathbf{1}} \\
&\overset{(3.1)}{=} (id_V \otimes id_X) \circ (id_V \otimes r_X) \circ a_{V,X,\mathbf{1}} \circ (c_{X,V} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,V,\mathbf{1}} \\
&= (id_V \otimes r_X) \circ a_{V,X,\mathbf{1}} \circ (c_{X,V} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,V,\mathbf{1}} \\
&\overset{(3.3)}{=} r_{V\otimes X} \circ (c_{X,V} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ a^{-1}_{X,V,\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

e, da naturalidade de r, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes V) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{X\otimes V}"] \arrow[d, "c_{X,V}\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \otimes V \arrow[d, "c_{X,V}"] \\
(V \otimes X) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{V\otimes X}"'] & V \otimes X
\end{tikzcd}$$

é comutativo o que proporciona

$$(r_V \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes\mathbf{1}} = c_{X,V} \circ r_{X\otimes V} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},V} \overset{(3.3)}{=} c_{X,V} \circ (id_X \otimes r_V).$$

Assim, l e r levantam isomorfismos naturais em $Z(\mathcal{C})$. No mais, já que os axiomas do triângulo e do pentágono em $Z(\mathcal{C})$ são levantados por $\mathcal{C}$, segue que $Z(\mathcal{C})$ admite estrutura de categoria monoidal. Disso, resta garantir que $Z(\mathcal{C})$ possui uma trança e, para isso, definimos o isomorfismo natural $\tau : \otimes_{Z(\mathcal{C})} \to \otimes_{Z(\mathcal{C})} \circ Tw$ por

$$\tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} = c_{V,W}, \tag{5.10}$$

para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$. Observemos que $\tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}$ é morfismo em $Z(\mathcal{C})$, uma vez que

$$\begin{aligned}
&(c_{V,W} \otimes id_X) \circ c_{X,V\otimes W} \\
&\overset{(5.8)}{=} (c_{V,W} \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W} \\
&\overset{(5.4)}{=} a^{-1}_{W,V,X} \circ c_{V\otimes X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $c_{-,W}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{X,V} \otimes id_W"] \arrow[d, "c_{X \otimes V, W}"'] & (V \otimes X) \otimes W \arrow[d, "c_{V \otimes X, W}"] \\
W \otimes (X \otimes V) \arrow[r, "id_W \otimes c_{X,V}"'] & W \otimes (V \otimes X)
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, assim,

$$\begin{aligned}
&(c_{V,W} \otimes id_X) \circ c_{X,V \otimes W} \\
&\quad = a^{-1}_{W,V,X} \circ (id_W \otimes c_{X,V}) \circ c_{X \otimes V, W} \circ a^{-1}_{X,V,W} \\
&\quad \overset{(5.4)}{=} a^{-1}_{W,V,X} \circ (id_W \otimes c_{X,V}) \circ a_{W,X,V} \circ (c_{X,W} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{X,W,V} \circ (id_X \otimes c_{V,W}) \\
&\quad \overset{(5.8)}{=} c_{X,W \otimes V} \circ (id_X \otimes c_{V,W}),
\end{aligned}$$

i.e., o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "id_X \otimes c_{V,W}"] \arrow[d, "c_{X,V \otimes W}"'] & X \otimes (W \otimes V) \arrow[d, "c_{X,W \otimes V}"] \\
(V \otimes W) \otimes X \arrow[r, "c_{V,W} \otimes id_X"'] & (W \otimes V) \otimes X
\end{tikzcd}$$

é comutativo. No mais, para a naturalidade de τ, dados $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ e $g : (P, c_{-,P}) \to (Q, c_{-,Q})$ dois morfismos em $Z(\mathcal{C})$, temos que

$$c_{W,Q} \circ (f \otimes g) = c_{W,Q} \circ (f \otimes id_Q) \circ (id_V \otimes g).$$

Pela naturalidade de $c_{-,Q}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes Q \arrow[r, "f \otimes id_Q"] \arrow[d, "c_{V,Q}"'] & W \otimes Q \arrow[d, "c_{W,Q}"] \\
Q \otimes V \arrow[r, "id_Q \otimes f"'] & Q \otimes W
\end{tikzcd}$$

é comutativo, o que garante

$$c_{W,Q} \circ (f \otimes g) = (id_Q \otimes f) \circ c_{V,Q} \circ (id_V \otimes g).$$

Ao passo que, para g morfismo em $Z(\mathcal{C})$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes P \arrow[r, "id_V \otimes g"] \arrow[d, "c_{V,P}"'] & V \otimes Q \arrow[d, "c_{V,Q}"] \\
P \otimes V \arrow[r, "g \otimes id_V"'] & Q \otimes V
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, com isso,

$$c_{W,Q} \circ (f \otimes g) = (id_Q \otimes f) \circ (g \otimes id_V) \circ c_{V,P} = (g \otimes f) \circ c_{V,P}.$$

Isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes P \arrow[r, "c_{V,P}"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & P \otimes V \arrow[d, "g \otimes f"] \\
W \otimes Q \arrow[r, "c_{W,Q}"'] & Q \otimes W
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, portanto, τ é, de fato, um isomorfismo natural. Por fim, reparemos que os diagramas hexagonais de $Z(\mathcal{C})$ dados em (5.2) e (5.7) são respectivamente equivalentes aos diagramas (3.9) e (3.10) da definição de uma trança para $Z(\mathcal{C})$.

■

Em especial, vale notar uma suposta lateralidade do isomorfismo natural presente nos objetos de $Z(\mathcal{C})$. Dessa forma, pode-se escrever a categoria centro estudada como $Z_r(\mathcal{C})$ de modo a evidenciar o isomorfismo natural $c_{-,V} : - \otimes V \to V \otimes -$ para $V \in \mathcal{C}$. Logo, definimos a outra categoria referente ao centro e, em seguida, mostraremos que tais são isomorfas como categorias trançadas. Assim, garantimos uma boa-definição bibliográfica da categoria centro tendo em vista que em (MOMBELLI, s.d.) e (ETINGOF *et al.*, 2015) é utilizada a versão à direita ao passo que em (DONIN; MUDROV, 2005) toma-se a definição do centro à esquerda. Diante disso, segue a categoria $Z_l(\mathcal{C})$ cujos objetos são pares da forma $(V, d_{V,-})$ em que $V \in \mathcal{C}$ e $d_{V,-} : V \otimes - \to - \otimes V$ é um isomorfismo natural tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
V \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, dotted, "d_{V,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_V"'] & & \mathbf{1} \otimes V \\
& V \arrow[ur, "l_V^{-1}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.11}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& V \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, dotted, "d_{V,X\otimes Y}"] \arrow[dl, "a^{-1}_{V,X,Y}"'] & (X \otimes Y) \otimes V & \\
(V \otimes X) \otimes Y \arrow[dr, "d_{V,X} \otimes id_Y"'] & & & X \otimes (Y \otimes V) \arrow[ul, "a^{-1}_{X,Y,V}"'] \\
& (X \otimes V) \otimes Y \arrow[r, "a_{X,V,Y}"'] & X \otimes (V \otimes Y) \arrow[ur, "id_X \otimes d_{V,Y}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.12}$$

são comutativos. Isto é, valem as identidades

$$d_{V,\mathbf{1}} = l_V^{-1} \circ r_V \tag{5.13}$$

e

$$d_{V,X\otimes Y} = a^{-1}_{X,Y,V} \circ (id_X \otimes d_{V,Y}) \circ a_{X,V,Y} \circ (d_{V,X} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{V,X,Y} \tag{5.14}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Além disso, tem-se os morfismos $f : (V, d_{V,-}) \to (W, d_{W,-})$ de modo que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes X \arrow[r, "f\otimes id_X"] \arrow[d, "d_{V,X}"'] & W \otimes X \arrow[d, "d_{W,X}"] \\ X \otimes V \arrow[r, "id_X\otimes f"'] & X \otimes W \end{tikzcd} \tag{5.15}$$

é comutativo, isto é,

$$(id_X \otimes f) \circ d_{V,X} = d_{W,X} \circ (f \otimes id_X), \tag{5.16}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Essa categoria naturalmente possui a estrutura de categoria trançada, cujas verificações são análogas aos argumentos apresentados no Teorema 5.3, tendo em vista o funtor tensor $\otimes_{Z_l(\mathcal{C})} : Z_l(\mathcal{C}) \times Z_l(\mathcal{C}) \to Z_l(\mathcal{C})$ dado por

$$\begin{array}{ccc} ((V, d_{V,-}), (W, d_{W,-})) & \mapsto & (V \otimes W, d_{V\otimes W,-}) \\ (f, g) & \mapsto & f \otimes g \end{array}$$

de modo que $d_{V\otimes W,X}$ é dado pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (V\otimes W)\otimes X \arrow[r, dotted, "d_{V\otimes W,X}"] \arrow[dl, "a_{V,W,X}"'] & X\otimes(V\otimes W) & \\ V\otimes(W\otimes X) \arrow[dr, "id_V\otimes d_{W,X}"'] & & & (X\otimes V)\otimes W \arrow[ul, "a_{X,V,W}"'] \\ & V\otimes(X\otimes W) \arrow[r, "a^{-1}_{V,X,W}"'] & (V\otimes X)\otimes W. \arrow[ur, "d_{V,X}\otimes id_W"'] & \end{tikzcd} \tag{5.17}$$

Isto é, vale que

$$d_{V\otimes W,X} = a_{X,V,W} \circ (d_{V,X} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{V,X,W} \circ (id_V \otimes d_{W,X}) \circ a_{V,W,X} \tag{5.18}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Além disso, tem-se que a unidade $\mathbf{1}_{Z_l(\mathcal{C})}$ é o par $(\mathbf{1}, d_{\mathbf{1},-})$ com

$$d_{\mathbf{1},-} \overset{\text{def}}{=} r_-^{-1} \circ l_- \tag{5.19}$$

ao passo que os isomorfismos naturais a, l e r de $Z_l(\mathcal{C})$ são os mesmos em relação às categorias $Z_r(\mathcal{C})$ e $\mathcal{C}$. Assim, resta garantir que $Z_l(\mathcal{C})$ possui uma trança e, para isso, definimos o isomorfismo natural $\tau : \otimes_{Z_l(\mathcal{C})} \to \otimes_{Z_l(\mathcal{C})} \circ Tw$ por

$$\tau_{(V,d_{V,-}),(W,d_{W,-})} = d_{V,W}, \tag{5.20}$$

para quaisquer $(V, d_{V,-}), (W, d_{W,-}) \in Z_l(\mathcal{C})$ de modo a notar que os diagramas da trança para $Z_l(\mathcal{C})$ são dados, naturalmente, em (5.12) e (5.17).

Teorema 5.4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, as categorias $Z_l(\mathcal{C})$ e $Z_r(\mathcal{C})$ são isomorfas como categorias trançadas.

Demonstração. Consideramos o funtor $F : Z_r(\mathcal{C}) \to Z_l(\mathcal{C})$ da forma

$$\begin{aligned} (V, c_{-,V}) &\mapsto (V, \widetilde{d}_{V,-}) \\ f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W}) &\mapsto f : (V, \widetilde{d}_{V,-}) \to (W, \widetilde{d}_{W,-}) \end{aligned}$$

em que $\widetilde{d}_{V,-} = c^{-1}_{-,V}$. Notemos que F está bem-definido nos objetos tendo em vista que $c^{-1}_{-,V} : V \otimes - \to - \otimes V$ é um isomorfismo natural tal que

$$\widetilde{d}_{V,\mathbf{1}} = c^{-1}_{\mathbf{1},V} \overset{(5.3)}{=} (r_V^{-1} \circ l_V)^{-1} = l_V^{-1} \circ r_V$$

e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vale que

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_{V,X\otimes Y} &= c^{-1}_{X\otimes Y,V} \\ &\overset{(5.4)}{=} \Big(a_{V,X,Y} \circ (c_{X,V} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V,Y} \circ (id_X \otimes c_{Y,V}) \circ a_{X,Y,V} \Big)^{-1} \\ &= a^{-1}_{X,Y,V} \circ (id_X \otimes c^{-1}_{Y,V}) \circ a_{X,V,Y} \circ (c^{-1}_{X,V} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{V,X,Y} \\ &= a^{-1}_{X,Y,V} \circ (id_X \otimes d_{V,Y}) \circ a_{X,V,Y} \circ (d_{V,X} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{V,X,Y}. \end{aligned}$$

Isto é, $\widetilde{d}_{V,-}$ satisfaz as identidades (5.13) e (5.14). Para que F esteja bem-definido nos morfismos, seja $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ um morfismo em $Z_r(\mathcal{C})$; logo, tem-se que

$$\begin{aligned} (id_X \otimes f) \circ \widetilde{d}_{V,X} &= (id_X \otimes f) \circ c^{-1}_{X,V} \\ &\overset{(5.6)}{=} c^{-1}_{X,W} \circ (f \otimes id_X) \\ &= \widetilde{d}_{W,X} \circ (f \otimes id_X), \end{aligned}$$

isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes X \arrow[r, "f\otimes id_X"] \arrow[d, "\widetilde{d}_{V,X}"'] & W \otimes X \arrow[d, "\widetilde{d}_{W,X}"] \\ X \otimes V \arrow[r, "id_X\otimes f"'] & X \otimes W \end{tikzcd}$$

é comutativo para todo $X \in \mathcal{C}$, como desejado. Dessa forma, é direta a verificação da funtorialidade de F. Em seguida, dados $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}) \in Z_r(\mathcal{C})$, observemos que

$$\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} : (V, \widetilde{d}_{V,-}) \otimes (W, \widetilde{d}_{W,-}) \to (V \otimes W, \widetilde{d}_{V\otimes W,-})$$

é o morfismo identidade, já que, ao denotar $(V \otimes W, d_{V\otimes W,-})$ como o tensor entre $(V, \widetilde{d}_{V,-})$ e $(W, \widetilde{d}_{W,-})$, segue

$$\begin{aligned}
d_{V\otimes W,X} &\overset{(5.18)}{=} a_{X,V,W} \circ (\widetilde{d}_{V,X} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{V,X,W} \circ (id_V \otimes \widetilde{d}_{W,X}) \circ a_{V,W,X} \\
&= a_{X,V,W} \circ (c^{-1}_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{V,X,W} \circ (id_V \otimes c^{-1}_{X,W}) \circ a_{V,W,X} \\
&= (a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes c_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (c_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W})^{-1} \\
&\overset{(5.8)}{=} c^{-1}_{X,V\otimes W} \\
&= \widetilde{d}_{V\otimes W,X},
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Ademais, notemos que $\phi : (\mathbf{1}, r_-^{-1} \circ l_-) \to (\mathbf{1}, \widetilde{d}_{\mathbf{1},-})$ é o morfismo $id_{\mathbf{1}}$ tendo em vista que valem as identidades

$$\widetilde{d}_{\mathbf{1},-} = c^{-1}_{-,\mathbf{1}} \overset{(5.9)}{=} (l_-^{-1} \circ r_-)^{-1} = r_-^{-1} \circ l_-.$$

Dessa forma, para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}), (U, c_{-,U}) \in Z_r(\mathcal{C})$, reparemos que

$$F\left(a_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})}\right) = F(a_{V,W,U}) = a_{V,W,U} = a_{(V,\widetilde{d}_{V,-}),(W,\widetilde{d}_{W,-}),(U,\widetilde{d}_{U,-})},$$

bem como,

$$F\left(l_{(V,c_{-,V})}\right) = F(l_V) = l_V = l_{(V,\widetilde{d}_{V,-})}$$

e

$$F\left(r_{(V,c_{-,V})}\right) = F(r_V) = r_V = r_{(V,\widetilde{d}_{V,-})},$$

garantindo que o funtor F é estrito. Além do mais, para τ a trança de $Z_l(\mathcal{C})$ dada em função do isomorfismo natural $\widetilde{d}$ e $\overline{\sigma}$ a trança reversa de $Z_r(\mathcal{C})$ descrita por c^{-1}, infere-se que

$$\tau_{F((V,c_{-,V})),F((W,c_{-,W}))} = \widetilde{d}_{V,W} = c^{-1}_{W,V} = \overline{\sigma}_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} = F\left(\overline{\sigma}_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right).$$

Logo, F é um funtor trançado pela trança reversa. Para a segunda parte, considera-se o funtor $G : Z_l(\mathcal{C}) \to Z_r(\mathcal{C})$ dado por

$$\begin{aligned}
(V, d_{V,-}) &\mapsto (V, \widetilde{c}_{-,V}) \\
f : (V, d_{V,-}) \to (W, d_{W,-}) &\mapsto f : (V, \widetilde{c}_{-,V}) \to (W, \widetilde{c}_{-,W})
\end{aligned}$$

em que $\widetilde{c}_{-,V} = d_{V,-}^{-1}$. Observemos que G está bem-definido nos objetos tendo em vista que $d_{V,-}^{-1} : - \otimes V \to V \otimes -$ é um isomorfismo natural tal que

$$\widetilde{c}_{\mathbf{1},V} = d_{V,\mathbf{1}}^{-1} \overset{(5.13)}{=} (l_V^{-1} \circ r_V)^{-1} = r_V^{-1} \circ l_V$$

e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vale que

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_{X\otimes Y,V} &= d_{V,X\otimes Y}^{-1} \\
&\overset{(5.14)}{=} \left(a_{X,Y,V}^{-1} \circ (id_X \otimes d_{V,Y}) \circ a_{X,V,Y} \circ (d_{V,X} \otimes id_Y) \circ a_{V,X,Y}^{-1}\right)^{-1} \\
&= a_{V,X,Y} \circ (d_{V,X}^{-1} \otimes id_Y) \circ a_{X,V,Y}^{-1} \circ (id_X \otimes d_{V,Y}^{-1}) \circ a_{X,Y,V} \\
&= a_{V,X,Y} \circ (c_{X,V} \otimes id_Y) \circ a_{X,V,Y}^{-1} \circ (id_X \otimes c_{Y,V}) \circ a_{X,Y,V},
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{c}_{-,V}$ satisfaz as identidades (5.3) e (5.4). Para que G esteja bem-definido nos morfismos, considera-se $f : (V, d_{V,-}) \to (W, d_{W,-})$ um morfismo em $Z_l(\mathcal{C})$; assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
(f \otimes id_X) \circ \widetilde{c}_{X,V} &= (f \otimes id_X) \circ d_{V,X}^{-1} \\
&\overset{(5.16)}{=} d_{W,X}^{-1} \circ (id_X \otimes f) \\
&= \widetilde{c}_{X,W} \circ (id_X \otimes f),
\end{aligned}$$

isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes V \arrow[r, "id_X \otimes f"] \arrow[d, "\widetilde{c}_{X,V}"'] & X \otimes W \arrow[d, "\widetilde{c}_{X,W}"] \\
V \otimes X \arrow[r, "f \otimes id_X"'] & W \otimes X
\end{tikzcd}$$

é comutativo para todo $X \in \mathcal{C}$, como esperado. Com isso, também é trivial a verificação da funtorialidade de G. Além do mais, dados $(V, d_{V,-}), (W, d_{W,-}) \in Z_l(\mathcal{C})$, notemos que

$$\beta_{(V,d_{V,-}),(W,d_{W,-})} : (V, \widetilde{c}_{-,V}) \otimes (W, \widetilde{c}_{-,W}) \to (V \otimes W, \widetilde{c}_{-,V\otimes W})$$

é o morfismo identidade, uma vez que, ao denotar $(V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ como o tensor entre $(V, \widetilde{c}_{-,V})$ e $(W, \widetilde{c}_{-,W})$, obtém-se

$$\begin{aligned}
c_{X,V\otimes W} &\overset{(5.8)}{=} a_{V,W,X}^{-1} \circ (id_V \otimes \widetilde{c}_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_W) \circ a_{X,V,W}^{-1} \\
&= a_{V,W,X}^{-1} \circ (id_V \otimes d_{W,X}^{-1}) \circ a_{V,X,W} \circ (d_{V,X}^{-1} \otimes id_W) \circ a_{X,V,W}^{-1} \\
&= (a_{X,V,W} \circ (d_{V,X} \otimes id_W) \circ a_{V,X,W}^{-1} \circ (id_V \otimes d_{W,X}) \circ a_{V,W,X})^{-1} \\
&\overset{(5.18)}{=} d_{V\otimes W,X}^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \widetilde{c}_{X,V\otimes W},$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Em seguida, notemos que $\psi : (\mathbf{1}, l_-^{-1} \circ r_-) \to (\mathbf{1}, \widetilde{c}_{-,\mathbf{1}})$ é o morfismo $id_{\mathbf{1}}$ tendo em vista que

$$\widetilde{c}_{-,\mathbf{1}} = d_{\mathbf{1},-}^{-1} \overset{(5.19)}{=} (r_-^{-1} \circ l_-)^{-1} = l_-^{-1} \circ r_-.$$

Assim, para quaisquer $(V, d_{V,-}), (W, d_{W,-}), (U, d_{U,-}) \in Z_l(\mathcal{C})$, temos que

$$G\left(a_{(V,d_{V,-}),(W,d_{W,-}),(U,d_{U,-})}\right) = G(a_{V,W,U}) = a_{V,W,U} = a_{(V,\widetilde{c}_{-,V}),(W,\widetilde{c}_{-,W}),(U,\widetilde{c}_{-,U})},$$

bem como,

$$G\left(l_{(V,d_{V,-})}\right) = G(l_V) = l_V = l_{(V,\widetilde{c}_{-,V})}$$

e

$$G\left(r_{(V,d_{V,-})}\right) = G(r_V) = r_V = r_{(V,\widetilde{c}_{-,V})},$$

garantindo que o funtor G é estrito. Ademais, para σ a trança de $Z_r(\mathcal{C})$ dada por $\widetilde{c}$ e $\overline{\tau}$ a trança reversa de $Z_l(\mathcal{C})$ dada em função de d^{-1}, infere-se que

$$\sigma_{G((V,d_{V,-})),G((W,d_{W,-}))} = \widetilde{c}_{V,W} = d_{W,V}^{-1} = \overline{\tau}_{(V,d_{V,-}),(W,d_{W,-})} = G\left(\tau_{(V,d_{V,-}),(W,d_{W,-})}\right).$$

Logo, G é um funtor trançado pela trança reversa. Para a última parte, pelas propriedades já apresentadas de F e G, resta verificar as identidades $GF = Id_{Z_r(\mathcal{C})}$ e $FG = Id_{Z_l(\mathcal{C})}$ em relação aos objetos tendo em vista que os funtores F e G são bijetivos nos morfismos, bem como, são estritos e mapeiam tranças em tranças reversas. Em especial, para $(V, c_{-,V}) \in Z_r(\mathcal{C})$, segue que

$$GF((V, c_{-,V})) = G((V, \widetilde{d}_{V,-})) = (V, \widetilde{\widetilde{c}}_{-,V})$$

em que

$$\widetilde{\widetilde{c}}_{X,V} = \widetilde{d}_{V,X}^{-1} = \left(c_{X,V}^{-1}\right)^{-1} = c_{X,V},$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, como almejado. Ao passo que, para $(V, d_{V,-}) \in Z_l(\mathcal{C})$, tem-se que

$$FG((V, d_{V,-})) = F((V, \widetilde{c}_{-,V})) = (V, \widetilde{\widetilde{d}}_{V,-})$$

de modo que

$$\widetilde{\widetilde{d}}_{V,X} = \widetilde{c}_{X,V}^{-1} = \left(d_{V,X}^{-1}\right)^{-1} = d_{V,X},$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, como desejado.

■

Com isso, o centro de uma categoria está definido de modo que não existe uma versão lateral distinta e, diante disso, continuaremos a utilizar a definição dada no início do capítulo. No mais, vale determinar uma relação entre $Z(\mathcal{C})$ e $Z(\mathcal{C}^{rev})$, tendo em vista a função dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{rev}$, evidenciadas, respectivamente, pelos isomorfismos naturais $c_{-,V} : - \otimes V \to V \otimes -$ e $c^{rev}_{-,V} : - \otimes^{\text{rev}} V \to V \otimes^{\text{rev}} -$ com $V \in \mathcal{C}$. Repara-se que o segundo isomorfismo natural citado é da forma $c^{rev}_{-,V} : V \otimes - \to - \otimes V$ e, por conseguinte, pode-se utilizar uma notação como, por exemplo, $d_{V,-}$ para indicar $c^{rev}_{-,V}$. Todavia, a mudança da posição dos índices torna-se complicada por questões da trança reversa e, portanto, é mantida a notação anterior, ainda que um pouco carregada, para evitar problemas.

Proposição 5.5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, as categorias $Z(\mathcal{C})$ e $Z(\mathcal{C}^{rev})$ são isomorfas como categorias trançadas.

Demonstração. Consideremos o funtor $F : Z(\mathcal{C}) \to Z(\mathcal{C}^{\text{rev}})$ da forma

$$(V, c_{-,V}) \mapsto (V, \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V})$$
$$f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W}) \mapsto f : (V, \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V}) \to (W, \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,W})$$

em que $\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V} = c^{-1}_{-,V}$. Notemos que F está bem-definido nos objetos, tendo em vista que $\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V} : - \otimes^{\text{rev}} V \to V \otimes^{\text{rev}} -$ é um isomorfismo natural satisfazendo

$$\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{\mathbf{1},V} = c^{-1}_{\mathbf{1},V} \overset{(5.3)}{=} (r^{-1}_V \circ l_V)^{-1} = l^{-1}_V \circ r_V = (r^{\text{rev}}_V)^{-1} \circ l^{\text{rev}}_V$$

e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X \otimes^{\text{rev}} Y, V} &= c^{-1}_{X \otimes^{\text{rev}} Y, V} \\
&= c^{-1}_{Y \otimes X, V} \\
&\overset{(5.4)}{=} \Big(a_{V,Y,X} \circ (c_{Y,V} \otimes id_X) \circ a^{-1}_{Y,V,X} \circ (id_Y \otimes c_{X,V}) \circ a_{Y,X,V} \Big)^{-1} \\
&= a^{-1}_{Y,X,V} \circ (id_Y \otimes c^{-1}_{X,V}) \circ a_{Y,V,X} \circ (c^{-1}_{Y,V} \otimes id_X) \circ a^{-1}_{V,Y,X} \\
&= a^{\text{rev}}_{V,X,Y} \circ (id_Y \otimes c^{-1}_{X,V}) \circ (a^{\text{rev}}_{X,V,Y})^{-1} \circ (c^{-1}_{Y,V} \otimes id_X) \circ a^{\text{rev}}_{X,Y,V} \\
&= a^{\text{rev}}_{V,X,Y} \circ (c^{-1}_{X,V} \otimes^{\text{rev}} id_Y) \circ (a^{\text{rev}}_{X,V,Y})^{-1} \circ (id_X \otimes^{\text{rev}} c^{-1}_{Y,V}) \circ a^{\text{rev}}_{X,Y,V}.
\end{aligned}$$

Isto é, $\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V}$ satisfaz as identidades (5.3) e (5.4). Além disso, F está bem-definido nos morfismos tendo em vista que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes^{\text{rev}} V \arrow[r, "id_X \otimes^{\text{rev}} f"] \arrow[d, "\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X,V}"'] & X \otimes^{\text{rev}} W \arrow[d, "\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X,W}"] \\
V \otimes^{\text{rev}} X \arrow[r, "f \otimes^{\text{rev}} id_X"'] & W \otimes^{\text{rev}} X
\end{tikzcd}$$

é comutativo já que f satisfaz a identidade (5.6), afinal, vale

$$\begin{aligned}(f \otimes^{\text{rev}} id_X) \circ \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X,V} &= (id_X \otimes f) \circ \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X,V} \\ &= (id_X \otimes f) \circ c^{-1}_{X,V} \\ &\overset{(5.6)}{=} c^{-1}_{X,W} \circ (f \otimes id_X) \\ &= \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X,W} \circ (f \otimes id_X) \\ &= \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{X,W} \circ (id_X \otimes^{\text{rev}} f),\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Disso, a funtorialidade de F é trivialmente verificada. Em seguida, definimos $\alpha : \otimes_{Z(\mathcal{C}^{\text{rev}})} \circ (F \times F) \to F \circ \otimes_{Z(\mathcal{C})}$ como uma coleção de morfismos em $Z(\mathcal{C}^{\text{rev}})$ em que

$$\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} : (V, \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V}) \otimes^{\text{rev}} (W, \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,W}) \to (V \otimes W, \widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,V\otimes W}),$$

para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$, com

$$\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \overset{\text{def}}{=} c^{-1}_{V,W}.$$

Notemos que α é um isomorfismo natural vide c ser uma trança para $Z(\mathcal{C})$. No mais, definimos $\phi : (\mathbf{1}, r^{-1}_{-} \circ l_{-}) \to (\mathbf{1}, (l^{\text{rev}}_{-})^{-1} \circ r^{\text{rev}}_{-})$ por $id_{\mathbf{1}}$ que é isomorfismo em $\mathcal{C}^{\text{rev}}$ de modo que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes^{\text{rev}} \mathbf{1} & \xrightarrow{id_X \otimes^{\text{rev}} id_{\mathbf{1}}} & X \otimes^{\text{rev}} \mathbf{1} \\ {\scriptstyle r^{-1}_X \circ l_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (l^{\text{rev}}_X)^{-1} \circ r^{\text{rev}}_X} \\ \mathbf{1} \otimes^{\text{rev}} X & \xrightarrow[id_{\mathbf{1}} \otimes^{\text{rev}} id_X]{} & \mathbf{1} \otimes^{\text{rev}} X \end{array}$$

é trivialmente comutativo para todo $X \in \mathcal{C}^{\text{rev}}$. Logo, ϕ é isomorfismo em $Z(\mathcal{C}^{\text{rev}})$. Resta garantir a comutatividade dos diagramas dados em (3.5) e (3.6) para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}), (U, c_{-,U}) \in Z(\mathcal{C})$. Para o primeiro, notemos que

$$\begin{aligned}& F\left(a_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})}\right) \circ \alpha_{(V,c_{-,V})\otimes(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})} \circ \\ & \quad \left(\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \otimes^{\text{rev}} id_{F((U,c_{-,U}))}\right) \\ & = F(a_{V,W,U}) \circ \alpha_{(V\otimes W, c_{-,V\otimes W}),(U,c_{-,U})} \circ \left(id_{(U,\widetilde{c}^{\,\text{rev}}_{-,U})} \otimes \alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right) \\ & = a_{V,W,U} \circ c^{-1}_{V\otimes W,U} \circ (id_U \otimes c^{-1}_{V,W})\end{aligned}$$

e, pela naturalidade de $c^{-1}_{-,U}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \otimes (W \otimes V) & \xrightarrow{c^{-1}_{W\otimes V,U}} & (W \otimes V) \otimes U \\ {\scriptstyle id_U \otimes c^{-1}_{V,W}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c^{-1}_{V,W} \otimes id_U} \\ U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow[c^{-1}_{V\otimes W,U}]{} & (V \otimes W) \otimes U \end{array}$$

é comutativo o que garante que

$$
\begin{aligned}
&F\left(a_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})}\right) \circ \alpha_{(V,c_{-,V})\otimes(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})} \circ \\
&\quad \left(\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \otimes^{\mathrm{rev}} id_{F((U,c_{-,U}))}\right) \\
&\quad = a_{V,W,U} \circ (c^{-1}_{V,W} \otimes id_U) \circ c^{-1}_{W\otimes V,U} \\
&\quad \overset{(5.4)}{=} a_{V,W,U} \circ (c^{-1}_{V,W} \otimes id_U) \circ \\
&\quad \left(a_{U,W,V} \circ (c_{W,U} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{W,U,V} \circ (id_W \otimes c_{V,U}) \circ a_{W,V,U}\right)^{-1} \\
&\quad = a_{V,W,U} \circ (c^{-1}_{V,W} \otimes id_U) \circ a^{-1}_{W,V,U} \circ (id_W \otimes c^{-1}_{V,U}) \circ a_{W,U,V} \circ (c^{-1}_{W,U} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{U,W,V} \\
&\quad = (a^{-1}_{W,U,V} \circ (id_W \otimes c_{V,U}) \circ a_{W,V,U} \circ (c_{V,W} \otimes id_U) \circ a_{V,W,U})^{-1} \circ (c^{-1}_{W,U} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{U,W,V} \\
&\quad \overset{(5.8)}{=} c^{-1}_{V,W\otimes U} \circ (c^{-1}_{W,U} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{U,W,V} \\
&\quad = c^{-1}_{V,W\otimes U} \circ (c^{-1}_{W,U} \otimes id_V) \circ a^{\mathrm{rev}}_{V,W,U} \\
&\quad = \alpha_{(V,c_{-,V}),(W\otimes U,c_{-,W\otimes U})} \circ \left(\alpha_{(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})} \otimes id_{(V\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V})}\right) \circ a^{\mathrm{rev}}_{(V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V}),(W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W}),(U,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,U})} \\
&\quad = \alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})\otimes(U,c_{-,U})} \circ \left(id_{F((V,c_{-,V}))} \otimes^{\mathrm{rev}} \alpha_{(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})}\right) \circ \\
&\quad a^{\mathrm{rev}}_{F((V,c_{-,V})),F((W,c_{-,W})),F((U,c_{-,U}))},
\end{aligned}
$$

como desejado. Já para o segundo, tem-se

$$
\begin{aligned}
F\left(l_{(V,c_{-,V})}\right) \circ \alpha_{(\mathbf{1},l^{-1}_{-}\circ r_{-}),(V,c_{-,V})} \circ \left(\phi \otimes^{\mathrm{rev}} id_{F((V,c_{-,V}))}\right) &= l_V \circ c^{-1}_{\mathbf{1},V} \circ (id_V \otimes id_{\mathbf{1}}) \\
&= l_V \circ c^{-1}_{\mathbf{1},V} \\
&\overset{(5.3)}{=} l_V \circ (r^{-1}_V \circ l_V)^{-1} \\
&= l_V \circ l^{-1}_V \circ r_V \\
&= r_V \\
&= l^{\mathrm{rev}}_V \\
&= l^{\mathrm{rev}}_{(V,c_{-,V})}
\end{aligned}
$$

ao passo que, para o terceiro, segue

$$
\begin{aligned}
F\left(r_{(V,c_{-,V})}\right) \circ \alpha_{(V,c_{-,V}),(\mathbf{1},l^{-1}_{-}\circ r_{-})} \circ \left(id_{F((V,c_{-,V}))} \otimes^{\mathrm{rev}} \phi\right) &= r_V \circ c^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes id_V) \\
&= r_V \circ c^{-1}_{V,\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.9)}{=} r_V \circ (l^{-1}_V \circ r_V)^{-1} \\
&= r_V \circ r^{-1}_V \circ l_V \\
&= l_V \\
&= r^{\mathrm{rev}}_V \\
&= r^{\mathrm{rev}}_{(V,c_{-,V})}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(F, \alpha, \phi) : Z(\mathcal{C}) \to Z(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$ é um funtor monoidal. Para que o funtor em questão seja trançado, consideramos a trança reversa $\overline{\sigma}$ de $Z(\mathcal{C}^{rev})$ dada em função de $(\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}})^{-1}$ e a trança τ de $Z(\mathcal{C})$ descrita por c a fim de notarmos que

$$\begin{aligned}
F\left(\tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right) \circ \alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} &= \tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \circ \alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \\
&= c_{V,W} \circ c^{-1}_{V,W} \\
&= id_{W\otimes V} \\
&= c^{-1}_{W,V} \circ (c^{-1}_{W,V})^{-1} \\
&= \alpha_{(W,c_{-,W}),(V,c_{-,V})} \circ (\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{W,V})^{-1} \\
&= \alpha_{(W,c_{-,W}),(V,c_{-,V})} \circ \overline{\sigma}_{(V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V}),(W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W})},
\end{aligned}$$

isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V}) \otimes^{\mathrm{rev}} (W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W}) \arrow[r, "\alpha_{(V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V}),(W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W})}"] \arrow[d, "\overline{\sigma}_{(V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V}),(W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W})}"'] & (V\otimes W, \widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{V\otimes W}) \arrow[d, "F\left(\tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right)"] \\
(W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W}) \otimes^{\mathrm{rev}} (V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V}) \arrow[r, "\alpha_{(W,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,W}),(V,\widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{-,V})}"'] & (W\otimes V, \widetilde{c}^{\,\mathrm{rev}}_{W\otimes V})
\end{tikzcd}$$

é comutativo para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$, como desejado. Por fim, para garantir o isomorfismo, resta verificar, sob certo abuso de notação, que $(F, \alpha, \phi)^2$ é o funtor $Id_{Z(\mathcal{C})}$ como funtor trançado. Assim, dados $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$, vale reparar que

$$F^2((V, c_{-,V})) = F((V, c^{-1}_{-,V})) = (V, c_{-,V}) = Id_{Z(\mathcal{C})}((V, c_{-,V})),$$

bem como,

$$\begin{aligned}
\gamma_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} &\overset{\mathrm{def}}{=} F\left(\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right) \circ \alpha_{F((V,c_{-,V})),F((W,c_{-,W}))} \\
&= \alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \circ \alpha_{(V,c^{-1}_{-,V}),(W,c^{-1}_{-,W})} \\
&= c^{-1}_{V,W} \circ (c^{-1}_{V,W})^{-1} \\
&= id_{V\otimes W}
\end{aligned}$$

ao passo que trivialmente vale

$$F(\phi) \circ \phi = \phi^2 = id^2_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}.$$

Disso, $(F, \alpha, \phi)^2$ é o funtor monoidal $Id_{Z(\mathcal{C})}$ e, para que tais sejam iguais como funtores trançados, basta utilizar a trança τ de $Z(\mathcal{C})$ dada por c, o fato que F preserva os morfismos e a penúltima verificação a fim de obter

$$F^2\left(\tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right) \circ \gamma_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \circ id_{V\otimes W} \\
&= \tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \\
&= \tau_{F^2((V,c_{-,V})),F^2((W,c_{-,W}))} \\
&= id_{W\otimes V} \circ \tau_{F^2((V,c_{-,V})),F^2((W,c_{-,W}))} \\
&= \gamma_{(W,c_{-,W}),(V,c_{-,V})} \circ \tau_{F^2((V,c_{-,V})),F^2((W,c_{-,W}))}.
\end{aligned}
$$

Isto é, vale a comutatividade do diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F^2((V,c_{-,V})) \otimes F^2((W,c_{-,W})) \arrow[r, equal, "\gamma_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}"] \arrow[d, "\tau_{F^2((V,c_{-,V})),F^2((W,c_{-,W}))}"'] & F^2(V\otimes W, c_{-,V\otimes W}) \arrow[d, "F^2\left(\tau_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}\right)"] \\
F^2((W,c_{-,W})) \otimes F^2((V,c_{-,V})) \arrow[r, equal, "\gamma_{(W,c_{-,W}),(V,c_{-,V})}"'] & F^2(W\otimes V, c_{-,W\otimes V})
\end{tikzcd}
$$

para quaisquer $(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$, como desejado.

■

Neste momento, segue uma sequência de resultados e proposições menores que descrevem, por exemplo, a relação entre uma categoria trançada e seu centro. Infelizmente, podemos apenas garantir que a categoria $\mathcal{C}$ está inserida por um funtor trançado de modo que, ao compor posteriormente com o funtor esquecimento que é apenas monoidal, obtemos o funtor identidade em $\mathcal{C}$.

Observação 5.6. Dada $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, o funtor $U : Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ definido por

$$
\begin{gathered}
(V,c_{-,V}) \mapsto V \\
f : (V,c_{-,V}) \to (W,c_{-,W}) \mapsto f : V \to W
\end{gathered}
$$

é um funtor esquecimento estrito. Claramente, notemos que

$$U\left(id_{(V,c_{-,V})}\right) = U(id_V) = id_V$$

para todo $(V,c_{-,V}) \in Z(\mathcal{C})$. No mais, dados dois morfismos $f : (V,c_{-,V}) \to (W,c_{-,W})$ e $g : (W,c_{-,W}) \to (U,c_{-,U})$ em $Z(\mathcal{C})$, temos que $g\circ f : (V,c_{-,V}) \to (U,c_{-,U})$ e, assim,

$$U(g\circ f) = g\circ f = U(g)\circ U(f).$$

No mais, definimos $\alpha : \otimes \circ (U\times U) \to U \circ \otimes_{Z(\mathcal{C})}$ como uma coleção de morfismos identidades em $\mathcal{C}$, isto é,

$$\alpha_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} \overset{\text{def}}{=} id_{V\otimes W},$$

para quaisquer $(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}) \in Z(\mathcal{C})$. Outrossim, para $f : (V,c_{-,V}) \to (W,c_{-,W})$ e $g : (P,c_{-,P}) \to (Q,c_{-,Q})$ dois morfismos em $Z(\mathcal{C})$, vale

$$U(f \otimes_{Z(\mathcal{C})} g) = U(f \otimes g) = f \otimes g = U(f) \otimes f(g).$$

Assim, α é um isomorfismo natural, pois o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes P \arrow[r, "\alpha_{(V,c_{-,V}),(P,c_{-,P})}"] \arrow[d, "U(f)\otimes U(g)"'] & V \otimes P \arrow[d, "U(f\otimes_{Z(\mathcal{C})} g)"] \\ W \otimes Q \arrow[r, "\alpha_{(W,c_{-,W}),(Q,c_{-,Q})}"'] & W \otimes Q \end{tikzcd}$$

é comutativo. Ademais, definimos $\phi : \mathbf{1} \to U((\mathbf{1}, c_{-,\mathbf{1}}))$ por $id_{\mathbf{1}}$ que é, obviamente, um isomorfismo em $\mathcal{C}$. No mais, percebemos que, pelas definições de α e ϕ, os diagramas em (3.5) e (3.6) são simplificados de modo que é suficiente reparar que

$$U\left(a_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}),(U,c_{-,U})}\right) = U(a_{V,W,U}) = a_{V,W,U},$$

bem como,

$$U\left(l_{(V,c_{-,V})}\right) = U\left(l_V\right) = l_V \qquad \text{e} \qquad U\left(r_{(V,c_{-,V})}\right) = U\left(r_V\right) = r_V,$$

para quaisquer $(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W}), (U, c_{-,U}) \in Z(\mathcal{C})$.

Teorema 5.7. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias monoidais e $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor monoidal. Sob tais considerações, se $\mathcal{C}$ for trançada, bem como, F for pleno e bijetivo com relação aos objetos, então existe um único funtor trançado $Z(F) : \mathcal{C} \to Z(\mathcal{D})$ tal que $U \circ Z(F) = F$ em que $U : Z(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ é o funtor esquecimento.

Demonstração. Seja τ a trança de $\mathcal{C}$. considera-se o funtor $Z(F) : \mathcal{C} \to Z(\mathcal{D})$ por

$$V \mapsto \left(F(V), c_{-,F(V)}\right)$$
$$f : V \to W \mapsto F(f) : \left(F(V), c_{-,F(V)}\right) \to \left(F(W), c_{-,F(W)}\right)$$

tal que, como F é bijetivo com relação aos objetos, $c_{-,F(V)}$ seja dado de forma que, para todo $X \in \mathcal{D}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \overline{\otimes} F(V) \arrow[r, dotted, "c_{X,F(V)}"] \arrow[d, "\alpha_{F^{-1}(X),V}"'] & F(V) \overline{\otimes} X \\ F(F^{-1}(X) \otimes V) \arrow[r, "F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)"'] & F(V \otimes F^{-1}(X)) \arrow[u, "\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)}"'] \end{tikzcd} \tag{5.21}$$

seja comutativo, isto é, vale que

$$c_{X,F(V)} = \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)} \circ F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(X),V} \tag{5.22}$$

para todo $X \in \mathcal{D}$. Notemos que $Z(F)$ está bem-definido, a priori, nos objetos, isto é, $c_{-,F(V)}$ é um isomorfismo natural que satisfaz as identidades (5.3) e (5.4). Em especial, para a naturalidade de $c_{-,F(V)}$, basta utilizar diretamente a plenitude de F, bem como, as naturalidades de $\alpha^{-1}_{V,-}$, $\tau_{-,V}$ e $\alpha_{-,V}$. Provaremos que valem as identidades mencionadas anteriormente e, para a primeira, considera-se

$$c_{\overline{\mathbf{1}},F(V)} \overset{(5.22)}{=} \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(\overline{\mathbf{1}})} \circ F\left(\tau_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}.$$

Já que F é pleno, existe $\varphi : F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}) \to \mathbf{1}$ um isomorfismo em $\mathcal{C}$ tal que $F(\varphi) = \phi$; logo, pela naturalidade de $\alpha^{-1}_{V,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F\left(V \otimes F^{-1}(\overline{\mathbf{1}})\right) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(\overline{\mathbf{1}})}"] \arrow[d, "F(id_V \otimes \varphi)"'] & F(V)\overline{\otimes}\, \overline{\mathbf{1}} \arrow[d, "id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi"] \\
F(V \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}}"'] & F(V)\overline{\otimes}\, F(\mathbf{1})
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, assim,

$$\begin{aligned}
c_{\overline{\mathbf{1}},F(V)} &\overset{(5.22)}{=} \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(\overline{\mathbf{1}})} \circ F\left(\tau_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V} \\
&= (id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ F\left(id_V \otimes \varphi\right) \circ F\left(\tau_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V} \\
&= (id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ F\left((id_V \otimes \varphi) \circ \tau_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}.
\end{aligned}$$

Ademais, pela naturalidade de $\tau_{-,V}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}) \otimes V \arrow[r, "\tau_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}"] \arrow[d, "\varphi\otimes id_V"'] & F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}) \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "id_V\otimes\varphi"] \\
\mathbf{1} \otimes V \arrow[r, "\tau_{\mathbf{1},V}"'] & V \otimes \mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

é comutativo o que garante que

$$\begin{aligned}
c_{\overline{\mathbf{1}},F(V)} &= (id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ F\left(\tau_{\mathbf{1},V} \circ (\varphi \otimes id_V)\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V} \\
&= (id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ F\left(\tau_{\mathbf{1},V}\right) \circ F\left(\varphi \otimes id_V\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V} \\
&\overset{(3.13)}{=} (id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ F\left(r_V^{-1} \circ l_V\right) \circ F\left(\varphi \otimes id_V\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V} \\
&= (id_{F(V)}\overline{\otimes}\phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{V,\mathbf{1}} \circ F\left(r_V^{-1}\right) \circ F\left(l_V\right) \circ F\left(\varphi \otimes id_V\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V} \\
&\overset{(3.6)}{=} \overline{r}^{-1}_{F(V)} \circ F\left(l_V\right) \circ F\left(\varphi \otimes id_V\right) \circ \alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}.
\end{aligned}$$

Da naturalidade de $\alpha_{-,V}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbf{1}}\,\overline{\otimes} F(V) \arrow[r, "\alpha_{F^{-1}(\overline{\mathbf{1}}),V}"] \arrow[d, "\phi\overline{\otimes} id_{F(V)}"'] & F\left(F^{-1}(\overline{\mathbf{1}})\otimes V\right) \arrow[d, "F(\varphi\otimes id_V)"] \\
F(\mathbf{1})\overline{\otimes} F(V) \arrow[r, "\alpha_{\mathbf{1},V}"'] & F(\mathbf{1}\otimes V)
\end{tikzcd}$$

é comutativo; portanto,

$$\begin{aligned}
c_{\overline{\mathbf{1}},F(V)} &= \overline{r}^{-1}_{F(V)} \circ F(l_V) \circ \alpha_{\mathbf{1},V} \circ (\phi\overline{\otimes} id_{F(V)}) \\
&\overset{(3.6)}{=} \overline{r}^{-1}_{F(V)} \circ \overline{l}_{F(V)}
\end{aligned}$$

como desejado. Ao passo que para a segunda identidade, dados $X, Y \in \mathcal{D}$, como F é pleno e bijetivo nos objetos, existe $\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)} : F^{-1}(X\overline{\otimes}Y) \to F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)$ um isomorfismo em $\mathcal{C}$ tal que $F\left(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right) = \alpha_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}$. Assim, vale

$$c_{X\overline{\otimes}Y,V} \overset{(5.22)}{=} \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X\overline{\otimes}Y)} \circ F\left(\tau_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}$$

e, pela naturalidade de $\alpha^{-1}_{V,-}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(V\otimes F^{-1}(X\overline{\otimes}Y)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X\overline{\otimes}Y)}"] \arrow[d, "F\left(id_V\otimes\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)"'] & F(V)\overline{\otimes}(X\overline{\otimes}Y) \arrow[d, "id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}"] \\
F(V\otimes(F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y))) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)}"'] & F(V)\overline{\otimes}F(F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y))
\end{tikzcd}$$

é comutativo; logo,

$$\begin{aligned}
&c_{X\overline{\otimes}Y,V} \\
&= \left(id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right) \circ \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)} \circ F\left(id_V\otimes\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right) \circ \\
&\quad F\left(\tau_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V} \\
&= \left(id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right) \circ \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)} \circ \\
&\quad F\left(\left(id_V\otimes\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right) \circ \tau_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $\tau_{-,V}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(X\overline{\otimes}Y)\otimes V \arrow[r, "\tau_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}"] \arrow[d, "\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V"'] & V\otimes F^{-1}(X\overline{\otimes}Y) \arrow[d, "id_V\otimes\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}"] \\
(F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y))\otimes V \arrow[r, "\tau_{F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y),V}"'] & V\otimes(F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y))
\end{tikzcd}$$

é comutativo; disso, tem-se

$$
\begin{aligned}
&c_{X\overline{\otimes}Y,V}\\
&= \left(id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)\circ\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)}\circ\\
&F\left(\tau_{F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y),V}\circ(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V)\right)\circ\alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}\\
&= \left(id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)\circ\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)}\circ F\left(\tau_{F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y),V}\right)\circ\\
&F\left(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V\right)\circ\alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}\\
&\overset{(3.9)}{=} \left(id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)\circ\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)}\circ F\left(a_{V,F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)\circ\\
&F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\otimes id_{F^{-1}(Y)}\right)\circ F\left(a^{-1}_{F^{-1}(X),V,F^{-1}(Y)}\right)\circ F\left(id_{F^{-1}(X)}\otimes\tau_{F^{-1}(Y),V}\right)\circ\\
&F\left(a_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y),V}\right)\circ F\left(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V\right)\circ\alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}.
\end{aligned}
$$

Pela naturalidade de $\alpha_{-,F^{-1}(Y)}$, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F(F^{-1}(X)\otimes V)\otimes Y \arrow[r, "\alpha_{F^{-1}(X)\otimes V,F^{-1}(Y)}"] \arrow[d, "F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y"'] & F((F^{-1}(X)\otimes V)\otimes F^{-1}(Y)) \arrow[d, "F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\otimes id_{F^{-1}(Y)}\right)"] \\
F(V\otimes F^{-1}(X))\otimes Y \arrow[r, "\alpha_{V\otimes F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}"'] & F((V\otimes F^{-1}(X))\otimes F^{-1}(Y))
\end{tikzcd}
$$

é comutativo; logo, segue que

$$
\begin{aligned}
&c_{X\overline{\otimes}Y,V}\\
&= \left(id_{F(V)}\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)\circ\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y)}\circ F\left(a_{V,F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\right)\circ\\
&\alpha_{V\otimes F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\circ\left(F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right)\circ\alpha^{-1}_{F^{-1}(X)\otimes V,F^{-1}(Y)}\circ\\
&F\left(a^{-1}_{F^{-1}(X),V,F^{-1}(Y)}\right)\circ F\left(id_{F^{-1}(X)}\otimes\tau_{F^{-1}(Y),V}\right)\circ F\left(a_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y),V}\right)\circ\\
&F\left(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V\right)\circ\alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}\\
&\overset{(3.5)}{=} \overline{a}_{F(V),X,Y}\circ\left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)}\overline{\otimes}id_Y\right)\circ\left(F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right)\circ\alpha^{-1}_{F^{-1}(X)\otimes V,F^{-1}(Y)}\circ\\
&F\left(a^{-1}_{F^{-1}(X),V,F^{-1}(Y)}\right)\circ F\left(id_{F^{-1}(X)}\otimes\tau_{F^{-1}(Y),V}\right)\circ F\left(a_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y),V}\right)\circ\\
&F\left(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V\right)\circ\alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}.
\end{aligned}
$$

No mais, pela naturalidade de $\alpha_{-,V}$, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(X\overline{\otimes}Y)\overline{\otimes}F(V) \arrow[r, "\alpha_{F^{-1}(X\overline{\otimes}Y),V}"] \arrow[d, "\alpha_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\overline{\otimes}id_{F(V)}"'] & F(F^{-1}(X\overline{\otimes}Y)\otimes V) \arrow[d, "F\left(\delta_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\otimes id_V\right)"] \\
F(F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y))\overline{\otimes}F(V) \arrow[r, "\alpha_{F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y),V}"'] & F((F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y))\otimes V)
\end{tikzcd}
$$

é comutativo e, com isso, infere-se que

$$
\begin{aligned}
&c_{X\overline{\otimes}Y,V}\\
&= \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \left(F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \alpha^{-1}_{F^{-1}(X)\otimes V,F^{-1}(Y)}\circ\\
&F\left(a^{-1}_{F^{-1}(X),V,F^{-1}(Y)}\right) \circ F\left(id_{F^{-1}(X)}\otimes\tau_{F^{-1}(Y),V}\right) \circ F\left(a_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y),V}\right)\circ\\
&\alpha_{F^{-1}(X)\otimes F^{-1}(Y),V} \circ \left(\alpha_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)}\overline{\otimes}id_{F(V)}\right)\\
&\overset{(3.5)}{=} \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \left(F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \alpha^{-1}_{F^{-1}(X)\otimes V,F^{-1}(Y)}\circ\\
&F\left(a^{-1}_{F^{-1}(X),V,F^{-1}(Y)}\right) \circ F\left(id_{F^{-1}(X)}\otimes\tau_{F^{-1}(Y),V}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)\otimes V}\circ\\
&\left(id_X\overline{\otimes}\alpha_{F^{-1}(Y),V}\right) \circ \overline{a}_{X,Y,F(V)}.
\end{aligned}
$$

Pela naturalidade de $\alpha_{F^{-1}(X),-}$, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X\overline{\otimes}F(F^{-1}(Y)\otimes V) \arrow[r, "\alpha_{F^{-1}(X),F^{-1}(Y)\otimes V}"] \arrow[d, "id_X\overline{\otimes}F\left(\tau_{F^{-1}(Y),V}\right)"'] & F(F^{-1}(X)\otimes(F^{-1}(Y)\otimes V)) \arrow[d, "F\left(id_{F^{-1}(X)}\otimes\tau_{F^{-1}(Y),V}\right)"] \\
X\overline{\otimes}F(V\otimes F^{-1}(Y)) \arrow[r, "\alpha_{F^{-1}(X),V\otimes F^{-1}(Y)}"'] & F(F^{-1}(X)\otimes(V\otimes F^{-1}(Y)))
\end{tikzcd}
$$

é comutativo; portanto, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&c_{X\overline{\otimes}Y,V}\\
&= \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \left(F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \alpha^{-1}_{F^{-1}(X)\otimes V,F^{-1}(Y)}\circ\\
&F\left(a^{-1}_{F^{-1}(X),V,F^{-1}(Y)}\right) \circ \alpha_{F^{-1}(X),V\otimes F^{-1}(Y)} \circ \left(id_X\overline{\otimes}F(\tau_{F^{-1}(Y),V})\right)\circ\\
&\left(id_X\overline{\otimes}\alpha_{F^{-1}(Y),V}\right) \circ \overline{a}_{X,Y,F(V)}\\
&\overset{(3.5)}{=} \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \left(F\left(\tau_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \left(\alpha_{F^{-1}(X),V}\overline{\otimes}id_Y\right)\circ\\
&\overline{a}^{-1}_{X,F(V),Y} \circ \left(id_X\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(Y)}\right) \circ \left(id_X\overline{\otimes}F(\tau_{F^{-1}(Y),V})\right) \circ \left(id_X\overline{\otimes}\alpha_{F^{-1}(Y),V}\right)\circ\\
&\overline{a}_{X,Y,F(V)}\\
&= \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(\left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)} \circ F(\tau_{F^{-1}(X),V}) \circ \alpha_{F^{-1}(X),V}\right)\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \overline{a}^{-1}_{X,F(V),Y}\circ\\
&\left(id_X\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(Y)}\right) \circ \left(id_X\overline{\otimes}F(\tau_{F^{-1}(Y),V})\right) \circ \left(id_X\overline{\otimes}\alpha_{F^{-1}(Y),V}\right) \circ \overline{a}_{X,Y,F(V)}\\
&\overset{(5.22)}{=} \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(c_{X,F(V)}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \overline{a}^{-1}_{X,F(V),Y} \circ \left(id_X\overline{\otimes}\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(Y)}\right)\circ\\
&\left(id_X\overline{\otimes}F(\tau_{F^{-1}(Y),V})\right) \circ \left(id_X\overline{\otimes}\alpha_{F^{-1}(Y),V}\right) \circ \overline{a}_{X,Y,F(V)}\\
&= \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(c_{X,F(V)}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \overline{a}^{-1}_{X,F(V),Y}\circ\\
&\left(id_X\overline{\otimes}\left(\alpha^{-1}_{V,F^{-1}(Y)} \circ F(\tau_{F^{-1}(Y),V}) \circ \alpha_{F^{-1}(Y),V}\right)\right) \circ \overline{a}_{X,Y,F(V)}\\
&\overset{(5.22)}{=} \overline{a}_{F(V),X,Y} \circ \left(c_{F^{-1}(X),V}\overline{\otimes}id_Y\right) \circ \overline{a}^{-1}_{X,F(V),Y} \circ \left(id_X\overline{\otimes}c_{Y,F(V)}\right) \circ \overline{a}_{X,Y,F(V)},
\end{aligned}
$$

como requerido. Para verificar que $Z(F)$ está bem-definido nos morfismos, considera-se $f : V \to W$ um morfismo em $\mathcal{C}$ de modo a garantir a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} X\overline{\otimes}F(V) & \xrightarrow{id_X\overline{\otimes}F(f)} & X\overline{\otimes}F(W) \\ {\scriptstyle c_{X,F(V)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle c_{X,F(W)}} \\ F(V)\overline{\otimes}X & \xrightarrow[F(f)\overline{\otimes}id_X]{} & F(W)\overline{\otimes}X \end{array}$$

a qual é dada pela plenitude de F e pela naturalidade dos componentes de $c_{X,-}$ vide a definição em (5.22) semelhante ao argumento para a naturalidade de $c_{-,F(V)}$. Logo, $Z(F)$ está, de fato, bem-definido e sua funtorialidade é levantada pelo funtor F. Ademais, definimos

$$\beta_{(F(V),c_{-,F(V)}),(F(W),c_{-,F(W)})} : \Big(F(V)\overline{\otimes}F(W), c_{-,F(V)\overline{\otimes}F(W)}\Big) \to \Big(F(V\otimes W), c_{-,F(V\otimes W)}\Big)$$

por $\alpha_{V,W}$, para quaisquer $\Big(F(V), c_{-,F(V)}\Big), \Big(F(W), c_{-,F(W)}\Big) \in Z(\mathcal{D})$, bem como, definimos

$$\psi : (\overline{\mathbf{1}}, \bar{l}^{-1} \circ \bar{r}_-) \to (F(\mathbf{1}), c_{-,F(\mathbf{1})})$$

por ϕ. Dessa forma, faz-se necessário garantir a comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc} X\overline{\otimes}(F(V)\overline{\otimes}F(W)) & \xrightarrow{id_X\overline{\otimes}\alpha_{V,W}} & X\overline{\otimes}F(V\otimes W) \\ {\scriptstyle c_{X,F(V)\overline{\otimes}F(W)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle c_{X,F(V\otimes W)}} \\ (F(V)\overline{\otimes}F(W))\overline{\otimes}X & \xrightarrow[\alpha_{V,W}\overline{\otimes}id_X]{} & F(V\otimes W)\overline{\otimes}X \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} X\overline{\otimes}\,\overline{\mathbf{1}} & \xrightarrow{id_X\overline{\otimes}\phi} & X\overline{\otimes}F(\mathbf{1}) \\ {\scriptstyle \bar{l}_X^{-1}\circ\bar{r}_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle c_{X,F(\mathbf{1})}} \\ \overline{\mathbf{1}}\,\overline{\otimes}X & \xrightarrow[\phi\overline{\otimes}id_X]{} & F(\mathbf{1})\overline{\otimes}X \end{array}$$

as quais são diretas, novamente, pela plenitude de F e pela naturalidade de $c_{X,-}$. No mais, reparemos que $Z(F)$ satisfaz os diagramas em (3.5) e (3.6), pois F é monoidal, bem como, notemos que $Z(F)$ é trançado pela definição de $c_{-,F(V)}$ conforme o diagrama (5.21). Com o prosseguimento do feito, ao admitir $U : Z(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ o funtor esquecimento em $\mathcal{D}$, é direta a verificação de que $U \circ Z(F) = F$ como funtores monoidais; portanto, resta confirmar a unicidade de $Z(F)$. Suponhamos (G, γ, χ) seja um funtor trançado tal que $U \circ G = F$ como funtores monoidais; logo, para quaisquer $V, W \in \mathcal{C}$ e todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$, tem-se que

$$F(V) = (U \circ G)(V) = U\left(\left(G(V), \widetilde{c}_{-,G(V)}\right)\right) = G(V) \quad \text{e} \quad F(f) = (U \circ G)(f) = G(f),$$

bem como,

$$\alpha_{V,W} = U(\gamma_{V,W}) \circ id_{V \otimes W} = \gamma_{V,W} \qquad \text{e} \qquad \phi = U(\chi) \circ id_{\mathbf{1}} = \chi.$$

Assim, como F é bijetivo nos objetos, segue, da comutatividade do diagrama em (3.15) vide G trançado, que

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_{X,F(V)} &= \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)} \circ G(\tau_{F^{-1}(X),V}) \circ \alpha_{F^{-1}(X),V} \\ &= \alpha^{-1}_{V,F^{-1}(X)} \circ F(\tau_{F^{-1}(X),V}) \circ \alpha_{F^{-1}(X),V} \\ &= c_{X,F(V)}\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathcal{D}$, isto é, $\widetilde{c}_{-,F(V)} = c_{-,F(V)}$ e, portanto, $G = Z(F)$.

■

Com o resultado acima, considera-se uma situação mais pacata ao admitir F como o funtor identidade em $\mathcal{C}$, o que garante o imediato corolário disposto como segue conforme os moldes de um comentário anterior.

Corolário 5.8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria trançada. Sob tal consideração, existe um único funtor trançado $Z : \mathcal{C} \to Z(\mathcal{C})$ tal que $U \circ Z = Id_{\mathcal{C}}$ em que $U : Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ é o funtor esquecimento.

Neste momento, vale ressaltar a baixa existência de exemplos envolvendo categorias já conhecidas. Essa questão é, realmente, trabalhosa e difícil tendo em vista o comportamento de cada categoria. O obstáculo mencionado é melhor apresentado conforme o corolário anterior no sentido de que $\mathcal{C}$ e $Z(\mathcal{C})$ são isomorfas como categorias trançadas quando $Z \circ U = Id_{Z(\mathcal{C})}$. Isto é, faz-se necessário garantir que $c_{X,V} = \tau_{X,V}$ para todo $X \in \mathcal{C}$, lembrando que $c_{-,V} : - \otimes V \to V \otimes -$ é dado arbitrariamente e τ é a trança da categoria $\mathcal{C}$.

Todavia, ainda é possível determinar o centro de uma categoria, em particular, a categoria ${}_H\mathcal{M}$ quando H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Em (KASSEL, 1995), para H uma álgebra de Hopf finito-dimensional, tem-se o resultado semelhante envolvendo o duplo de Drinfel'd, também chamado de duplo quântico, $D(H)$ de modo que $Z({}_H\mathcal{M})$ é isomorfa à categoria ${}_{D(H)}\mathcal{M}$ como categoria trançada. Além disso, o duplo de Drinfel'd também possui utilidade em (RADFORD, 2011), vide o isomorfismo categórico entre ${}_{D(H)}\mathcal{M}$ e ${}_H\mathcal{YD}^H$, mas esse isomorfismo não envolve as tranças de cada categoria. Ainda assim, consoante (RADFORD; TOWBER, 1993), as categorias ${}_H^H\mathcal{YD}$ e ${}_H\mathcal{YD}^H$ são isomorfas quando H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Neste sentido, une-se todo o aparato comentado de modo a evitar tanto o duplo de Drinfel'd quanto módulos esquerda-direita de Yetter-Drinfel'd com o objetivo de garantir o resultado dado como segue.

Exemplo 5.9. Dada H uma álgebra de Hopf com antípoda S bijetora, as categorias $Z({}_H\mathcal{M})$ e ${}^H_H\mathcal{YD}$ são isomorfas como categorias trançadas. De fato, consideremos o funtor $F : Z({}_H\mathcal{M}) \to {}^H_H\mathcal{YD}$ por

$$\begin{aligned} \big((V, \sigma_V), c_{-,V}\big) &\mapsto (V, \sigma_V, \widetilde{\rho}_V) \\ f : \big((V, \sigma_V), c_{-,V}\big) \to \big((W, \sigma_W), c_{-,W}\big) &\mapsto f : (V, \sigma_V, \widetilde{\rho}_V) \to (W, \sigma_W, \widetilde{\rho}_W) \end{aligned}$$

em que $\widetilde{\rho}_V : V \to H \otimes V$ é uma coação à esquerda definida por

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}_V : V &\to H \otimes V \\ v &\mapsto c^{-1}_{H,V}(v \otimes 1_H). \end{aligned}$$

Em particular, vale perceber que a notação com relação ao isomorfismo natural $c_{-,V}$ em $Z({}_H\mathcal{M})$ está simplificada de modo a ignorar a ação do espaço vetorial V. Notemos que F está bem-definido nos objetos quando $(V, \widetilde{\rho}_V)$ um H-comódulo à esquerda e é satisfeita compatibilidade em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Assim, com $X \in {}_H\mathcal{M}$ e $x \in X$, tem-se a função

$$\begin{aligned} \overline{x} : H &\to X \\ h &\mapsto h \cdot x \end{aligned}$$

que é um morfismo de H-módulos à esquerda vide a Observação 4.19. Com isso, segue, da naturalidade de $c^{-1}_{-,V}$, que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes H \arrow[r, "c^{-1}_{H,V}"] \arrow[d, "id_V \otimes \overline{x}"'] & H \otimes V \arrow[d, "\overline{x} \otimes id_V"] \\ V \otimes X \arrow[r, "c^{-1}_{X,V}"'] & X \otimes V \end{tikzcd}$$

é comutativo e, assim,

$$\begin{aligned} c^{-1}_{X,V}(v \otimes x) &= \Big(c^{-1}_{X,V} \circ (id_V \otimes \overline{x})\Big)(v \otimes 1_H) \\ &= \Big((\overline{x} \otimes id_V) \circ c^{-1}_{H,V}\Big)(v \otimes 1_H) \\ &= (\overline{x} \otimes id_V)\Big(\sum v_{(-1)} \otimes v_{(0)}\Big) \\ &= \sum v_{(-1)} \cdot x \otimes v_{(0)}, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e todo $v \in V$. Logo, para quaisquer $X, Y \in {}_H\mathcal{M}$, vale

$$\begin{aligned} &c^{-1}_{X \otimes Y, V}(v \otimes (x \otimes y)) \\ &\overset{(5.4)}{=} \Big(a_{V,X,Y} \circ \big(c_{X,V} \otimes id_Y\big) \circ a^{-1}_{X,V,Y} \circ \big(id_X \otimes c_{Y,V}\big) \circ a_{X,Y,V}\Big)^{-1} (v \otimes (x \otimes y)) \\ &= \Big(a^{-1}_{X,Y,V} \circ \Big(id_X \otimes c^{-1}_{Y,V}\Big) \circ a_{X,V,Y} \circ \Big(c^{-1}_{X,V} \otimes id_Y\Big) \circ a^{-1}_{V,X,Y}\Big) (v \otimes (x \otimes y)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a^{-1}_{X,Y,V} \circ \left(id_X \otimes c^{-1}_{Y,V}\right) \circ a_{X,V,Y} \circ \left(c^{-1}_{X,V} \otimes id_Y\right)\right)((v \otimes x) \otimes y) \\
&= \left(a^{-1}_{X,Y,V} \circ \left(id_X \otimes c^{-1}_{Y,V}\right) \circ a_{X,V,Y}\right)\left(\sum \left(v_{(-1)} \cdot x \otimes v_{(0)}\right) \otimes y\right) \\
&= \left(a^{-1}_{X,Y,V} \circ \left(id_X \otimes c^{-1}_{Y,V}\right)\right)\left(\sum v_{(-1)} \cdot x \otimes \left(v_{(0)} \otimes y\right)\right) \\
&= a^{-1}_{X,Y,V}\left(\sum v_{(-1)} \cdot x \otimes \left(\left(v_{(0)}\right)_{(-1)} \cdot y \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(0)}\right)\right) \\
&= \sum \left(v_{(-1)} \cdot x \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(-1)} \cdot y\right) \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Tendo em vista que $\Delta : H \to H \otimes H$ é um morfismo de H-módulos à esquerda, da naturalidade de $c^{-1}_{-,V}$ o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes H \arrow[r, "c^{-1}_{H,V}"] \arrow[d, "id_V \otimes \Delta"'] & H \otimes V \arrow[d, "\Delta \otimes id_V"] \\
V \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "c^{-1}_{H \otimes H,V}"'] & (H \otimes H) \otimes V
\end{tikzcd}
$$

é comutativo e, assim, obtém-se que

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{H,H,V} \circ (\Delta \otimes id_V) \circ \widetilde{\rho}_V\right)(v) \\
&= \left(a_{H,H,V} \circ (\Delta \otimes id_V) \circ c^{-1}_{H,V}\right)(v \otimes 1_H) \\
&= \left(a_{H,H,V} \circ c^{-1}_{H \otimes H,V} \circ (id_V \otimes \Delta)\right)(v \otimes 1_H) \\
&= \left(a_{H,H,V} \circ c^{-1}_{H \otimes H,V} \circ (id_V \otimes \Delta)\right)(v \otimes 1_H) \\
&= \left(a_{H,H,V} \circ c^{-1}_{H \otimes H,V}\right)(v \otimes (1_H \otimes 1_H)) \\
&= a_{H,H,V}\left(\sum \left(v_{(-1)} \cdot 1_H \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(-1)} \cdot 1_H\right) \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&= a_{H,H,V}\left(\sum \left(v_{(-1)} \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(-1)}\right) \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&= \sum v_{(-1)} \otimes \left(\left(v_{(0)}\right)_{(-1)} \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(0)}\right) \\
&= (id_H \otimes \widetilde{\rho}_V)\left(\sum v_{(-1)} \otimes v_{(0)}\right) \\
&= ((id_H \otimes \widetilde{\rho}_V) \circ \widetilde{\rho}_V)(v),
\end{aligned}
$$

para todo $v \in V$, como desejado. Similarmente, $\varepsilon : H \to \mathbf{k}$ é um morfismo de H-módulos à esquerda e, da naturalidade de $c^{-1}_{-,V}$, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes H \arrow[r, "c^{-1}_{H,V}"] \arrow[d, "id_V \otimes \varepsilon"'] & H \otimes V \arrow[d, "\varepsilon \otimes id_V"] \\
V \otimes \mathbf{k} \arrow[r, "c^{-1}_{\mathbf{k},V}"'] & \mathbf{k} \otimes V
\end{tikzcd}
$$

é comutativo o que garante que

$$\begin{aligned}
((\varepsilon\otimes id_V)\circ\widetilde{\rho}_V)(v) &= \left((\varepsilon\otimes id_V)\circ c_{H,V}^{-1}\right)(v\otimes 1_H)\\
&= \left(c_{\mathbf{k},V}^{-1}\circ(id_V\otimes\varepsilon)\right)(v\otimes 1_H)\\
&= c_{\mathbf{k},V}^{-1}(v\otimes 1_{\mathbf{k}})\\
&\overset{(5.3)}{=} \left(l_V^{-1}\circ r_V\right)(v\otimes 1_{\mathbf{k}})\\
&= l_V^{-1}(v).
\end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{\rho}_V$ é counital e, por conseguinte, $(V,\widetilde{\rho}_V)$ é um H-comódulo à esquerda. Para a compatibilidade, utiliza-se o fato de $c_{H,V}^{-1}$ ser um morfismo de H-módulos à esquerda; assim, vale que

$$\begin{aligned}
\sum h_{(1)}v_{(-1)}\otimes h_{(2)}\cdot v_{(0)} &= \sum h\cdot\left(v_{(-1)}\otimes v_{(0)}\right)\\
&= h\cdot c_{H,V}^{-1}(v\otimes 1_H)\\
&= c_{H,V}^{-1}\left(h\cdot(v\otimes 1_H)\right)\\
&= c_{H,V}^{-1}\left(\sum h_{(1)}\cdot v\otimes h_{(2)}1_H\right)\\
&= c_{H,V}^{-1}\left(\sum h_{(1)}\cdot v\otimes h_{(2)}\right)\\
&= \sum\left(h_{(1)}\cdot v\right)_{(-1)}\cdot h_{(2)}\otimes\left(h_{(1)}\cdot v\right)_{(0)}\\
&= \sum\left(h_{(1)}\cdot v\right)_{(-1)}h_{(2)}\otimes\left(h_{(1)}\cdot v\right)_{(0)},
\end{aligned}$$

para quaisquer $v\in V$ e $h\in H$, como desejado. No mais, F está bem-definido nos morfismos quando, dado um morfismo $f:\left((V,\sigma_V),c_{-,V}\right)\to\left((W,\sigma_W),c_{-,W}\right)$ em $Z({}_H\mathcal{M})$, tal f for um morfismo de H-comódulos à esquerda, isto é, quando o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\widetilde{\rho}_V"'] & W \arrow[d, "\widetilde{\rho}_W"]\\
H\otimes V \arrow[r, "id_H\otimes f"'] & H\otimes W
\end{tikzcd}$$

for comutativo. Em particular, como f é morfismo em $Z({}_H\mathcal{M})$, segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H\otimes V \arrow[r, "id_H\otimes f"] \arrow[d, "c_{H,V}"'] & H\otimes W \arrow[d, "c_{H,W}"]\\
V\otimes H \arrow[r, "f\otimes id_H"'] & W\otimes H
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, assim,

$$\begin{aligned}
((id_H \otimes f) \circ \widetilde{\rho}_V)(v) &= \left((id_H \otimes f) \circ c_{H,V}^{-1}\right)(v \otimes 1_H)\\
&= \left(c_{H,W}^{-1} \circ (f \otimes id_H)\right)(v \otimes 1_H)\\
&= c_{H,W}^{-1}(f(v) \otimes 1_H)\\
&= \widetilde{\rho}_W(f(v))\\
&= (\widetilde{\rho}_W \circ f)(v),
\end{aligned}$$

para todo $v \in V$. Portanto, F está bem-definido e sua funtorialidade é trivialmente verificada. Prosseguindo a argumentação, notemos que

$$\alpha_{((V,\sigma_V),c_{-,V}),((W,\sigma_W),c_{-,W})} : (V, \sigma_V, \widetilde{\rho}_V) \otimes (W, \sigma_W, \widetilde{\rho}_W) \to (V \otimes W, \sigma_{V\otimes W}, \widetilde{\rho}_{V\otimes W})$$

é o morfismo $id_{V\otimes W}$ para quaisquer $\left((V,\sigma_V), c_{-,V}\right), \left((W,\sigma_W), c_{-,W}\right) \in Z({}_H\mathcal{M})$. Afinal, ao definir $\rho_{V\otimes W}$ como a coação do tensor entre $(V, \sigma_V, \widetilde{\rho}_V)$ e $(W, \sigma_W, \widetilde{\rho}_W)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\rho_{V\otimes W}(v \otimes w)\\
&= \sum v_{(-1)}w_{(-1)} \otimes \left(v_{(0)} \otimes w_{(0)}\right)\\
&= a_{H,V,W}\left(\sum \left(v_{(-1)}w_{(-1)} \otimes v_{(0)}\right) \otimes w_{(0)}\right)\\
&= (a_{H,V,W} \circ (c_{H,V}^{-1} \otimes id_W))\left(\sum \left(v \otimes w_{(-1)}\right) \otimes w_{(0)}\right)\\
&= (a_{H,V,W} \circ (c_{H,V}^{-1} \otimes id_W) \circ a_{V,H,W}^{-1})\left(\sum v \otimes \left(w_{(-1)} \otimes w_{(0)}\right)\right)\\
&= (a_{H,V,W} \circ (c_{H,V}^{-1} \otimes id_W) \circ a_{V,H,W}^{-1} \circ (id_V \otimes c_{H,W}^{-1}))(v \otimes (w \otimes 1_H))\\
&= (a_{H,V,W} \circ (c_{H,V}^{-1} \otimes id_W) \circ a_{V,H,W}^{-1} \circ (id_V \otimes c_{H,W}^{-1}) \circ a_{V,W,H})((v \otimes w) \otimes 1_H)\\
&= (a_{V,W,H}^{-1} \circ (id_V \otimes c_{H,W}) \circ a_{V,H,W} \circ (c_{H,V} \otimes id_W) \circ a_{H,V,W}^{-1})^{-1}((v \otimes w) \otimes 1_H)\\
&\overset{(5.8)}{=} c_{H,V\otimes W}^{-1}((v \otimes w) \otimes 1_H)\\
&= \widetilde{\rho}_{V\otimes W}(v \otimes w),
\end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$, como desejado. Além disso, reparemos que

$$\phi : (\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}, \rho_{\mathbf{k}}) \to (\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}, \widetilde{\rho}_{\mathbf{k}})$$

também é um morfismo identidade já que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}}(1_{\mathbf{k}}) &= c_{H,\mathbf{k}}^{-1}(1_{\mathbf{k}} \otimes 1_H)\\
&\overset{(5.9)}{=} (l_H^{-1} \circ r_H)^{-1}(1_{\mathbf{k}} \otimes 1_H)\\
&= (r_H^{-1} \circ l_H)(1_{\mathbf{k}} \otimes 1_H)\\
&= r_H^{-1}(1_H)\\
&= 1_H \otimes 1_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$= \rho_{\mathbf{k}}(1_{\mathbf{k}}).$$

Para a comutatividade dos diagramas em (3.5) e (3.6), basta notar que

$$\begin{aligned} F\left(a_{((V,\sigma_V),c_{-,V}),((W,\sigma_W),c_{-,W}),((U,\sigma_U),c_{-,U})}\right) &= F(a_{V,W,U}) \\ &= a_{V,W,U} \\ &= a_{(V,\sigma_V,\widetilde{\rho}_V),(W,\sigma_W,\widetilde{\rho}_W),(U,\sigma_U,\widetilde{\rho}_U)}, \end{aligned}$$

bem como,

$$F\left(l_{((V,\sigma_V),c_{-,V})}\right) = F(l_V) = l_V = l_{(V,\sigma_V,\widetilde{\rho}_V)}$$

e

$$F\left(r_{((V,\sigma_V),c_{-,V})}\right) = F(r_V) = r_V = r_{(V,\sigma_V,\widetilde{\rho}_V)},$$

para quaisquer $\left((V,\sigma_V),c_{-,V}\right), \left((W,\sigma_W),c_{-,W}\right), \left((U,\sigma_U),c_{-,U}\right) \in Z({}_H\mathcal{M})$. Assim, temos que (F,α,ϕ) é um funtor estrito. Além disso, ao considerar $\overline{\omega}$ como a trança reversa de $Z({}_H\mathcal{M})$ dada em função de c^{-1} e para τ a trança de ${}_H^H\mathcal{YD}$, vale

$$\begin{aligned} \tau_{F(((V,\sigma_V),c_{-,V})),F(((W,\sigma_W),c_{-,W}))}(v\otimes w) &= \sum v_{(-1)}\cdot w\otimes v_{(0)} \\ &= c^{-1}_{W,V}(v\otimes w) \\ &= \overline{\omega}_{((V,\sigma_V),c_{-,V}),((W,\sigma_W),c_{-,W})}(v\otimes w) \\ &= F\left(\overline{\omega}_{((V,\sigma_V),c_{-,V}),((W,\sigma_W),c_{-,W})}\right)(v\otimes w) \end{aligned}$$

para quaisquer $\left((V,\sigma_V),c_{-,V}\right), \left((W,\sigma_W),c_{-,W}\right) \in Z({}_H\mathcal{M})$ com $v\in V$ e $w\in W$, isto é, temos que F é um funtor trançado mediante trança reversa. Para a segunda parte, definimos o funtor $G : {}_H^H\mathcal{YD} \to Z({}_H\mathcal{M})$ dado por

$$\begin{aligned} (V,\sigma_V,\rho_V) &\mapsto ((V,\sigma_V),\widetilde{c}_{-,V}) \\ f:(V,\sigma_V,\rho_V)\to(W,\sigma_W,\rho_W) &\mapsto f:((V,\sigma_V),\widetilde{c}_{-,V})\to((W,\sigma_W),\widetilde{c}_{-,W}) \end{aligned}$$

em que $\widetilde{c}_{-,V} : -\otimes V \to V\otimes -$ é um isomorfismo natural de modo que, para todo $X\in {}_H\mathcal{M}$, vale

$$\widetilde{c}_{X,V}(x\otimes v) = \sum v_{(0)}\otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right)\cdot x.$$

Em especial, conforme a Observação 4.27, sabe-se que $\widetilde{c}_{-,V}$ é um isomorfismo natural em que $\widetilde{c}_{-,V} = \Upsilon_{-}$. Em seguida, vejamos que $\widetilde{c}_{-,V}$ satisfaz as identidades (5.3) e (5.4); para a primeira, notemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{\mathbf{k},V}(1_{\mathbf{k}}\otimes v) &= \sum v_{(0)}\otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right)\cdot 1_{\mathbf{k}} \\ &= \sum v_{(0)}\otimes \varepsilon\left(S^{-1}\left(v_{(-1)}\right)\right)1_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.8)}{=} \sum v_{(0)} \otimes \varepsilon\left(v_{(-1)}\right) 1_{\mathbf{k}} \\
&= \sum \varepsilon\left(v_{(-1)}\right) v_{(0)} \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&\overset{(4.13)}{=} v \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
&= r_V^{-1}(v) \\
&= \left(r_V^{-1} \circ l_V\right)(1_{\mathbf{k}} \otimes v),
\end{aligned}
$$

ao passo que, para a segunda, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{c}_{X\otimes Y,V}((x \otimes y) \otimes v) \\
&\quad = \sum v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot (x \otimes y) \\
&\quad = \sum v_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(\left(v_{(-1)}\right)\right)_{(1)} \cdot x \otimes S^{-1}\left(\left(v_{(-1)}\right)\right)_{(2)} \cdot y\right) \\
&\quad \overset{(4.8)}{=} \sum v_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(\left(v_{(-1)}\right)_{(2)}\right) \cdot x \otimes S^{-1}\left(\left(v_{(-1)}\right)_{(1)}\right) \cdot y\right) \\
&\quad \overset{(4.12)}{=} \sum v_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x \otimes S^{-1}\left(v_{(-2)}\right) \cdot y\right) \\
&\quad = a_{V,X,Y}\left(\sum \left(v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x\right) \otimes S^{-1}\left(v_{(-2)}\right) \cdot y\right) \\
&\quad \overset{(4.12)}{=} a_{V,X,Y}\left(\sum \left(\left(v_{(0)}\right)_{(0)} \otimes S^{-1}\left(\left(v_{(0)}\right)_{(-1)}\right) \cdot x\right) \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot y\right) \\
&\quad = \left(a_{V,X,Y} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_Y)\right)\left(\sum \left(x \otimes v_{(0)}\right) \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot y\right) \\
&\quad = \left(a_{V,X,Y} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V,Y}\right)\left(\sum x \otimes \left(v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot y\right)\right) \\
&\quad = \left(a_{V,X,Y} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V,Y} \circ (id_X \otimes \widetilde{c}_{Y,V})\right)(x \otimes (y \otimes v)) \\
&\quad = \left(a_{V,X,Y} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,V,Y} \circ (id_X \otimes \widetilde{c}_{Y,V}) \circ a_{X,Y,V}\right)((x \otimes y) \otimes v)
\end{aligned}
$$

para quaisquer $X, Y \in {}_H\mathcal{M}$ com $x \in X$, $y \in Y$ e $v \in V$. Dessa forma, diante das verificações obtidas, infere-se que G está bem-definido nos objetos, Ademais, para que G esteja bem-definido nos morfismos, dado $f : V \to W$ um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$, basta garantir a comutatividade do diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
X \otimes V & \xrightarrow{id_X \otimes f} & X \otimes W \\
{\scriptstyle \widetilde{c}_{X,V}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \widetilde{c}_{X,W}} \\
V \otimes X & \xrightarrow[f \otimes id_X]{} & W \otimes X
\end{array}
$$

para todo $X \in {}_H\mathcal{M}$. Em particular, vale que

$$
\begin{aligned}
\left((f \otimes id_X) \circ \widetilde{c}_{X,V}\right)(x \otimes v) &= (f \otimes id_X)\left(\sum v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x\right) \\
&= \sum f\left(v_{(0)}\right) \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x
\end{aligned}
$$

e uma vez que $f : V \to W$ é um morfismo de H-comódulos à esquerda, segue a identidade

$$\sum v_{(-1)} \otimes f\left(v_{(0)}\right) = \sum f(v)_{(-1)} \otimes f(v)_{(0)};$$

logo,

$$\begin{aligned}\left((f \otimes id_X) \circ \widetilde{c}_{X,V}\right)(x \otimes v) &= \sum f(v)_{(0)} \otimes S^{-1}\left(f(v)_{(-1)}\right) \cdot x \\ &= \widetilde{c}_{X,W}(x \otimes f(v)) \\ &= \left(\widetilde{c}_{X,W} \circ (id_X \otimes f)\right)(x \otimes v),\end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e todo $x \in X$, como desejado. Ante o exposto, a funtorialidade de G é óbvia e, em seguida, vejamos que G é estrito. Para isso, notemos que

$$\beta_{(V,\sigma_V,\rho_V),(W,\sigma_W,\rho_W)} : ((V, \sigma_V), \widetilde{c}_{-,V}) \otimes ((W, \sigma_W), \widetilde{c}_{-,W}) \to ((V \otimes W, \sigma_{V\otimes W}), \widetilde{c}_{-,V\otimes W}),$$

é o morfismo $id_{V\otimes W}$ para quaisquer $(V, \sigma_V, \rho_V), (W, \sigma_W, \rho_W) \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Afinal, ao definir $c_{-,V\otimes W}$ como o isomorfismo natural do tensor entre (V, σ_V, ρ_V) e (W, σ_W, ρ_W), obtém-se, para todo $X \in {}_H\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}& c_{X,V\otimes W}(x \otimes (v \otimes w)) \\ &\overset{(5.8)}{=} (a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes \widetilde{c}_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X,V,W})(x \otimes (v \otimes w)) \\ &= (a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes \widetilde{c}_{X,W}) \circ a_{V,X,W} \circ (\widetilde{c}_{X,V} \otimes id_W))((x \otimes v) \otimes w) \\ &= (a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes \widetilde{c}_{X,W}) \circ a_{V,X,W}) \left(\sum \left(v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x\right) \otimes w\right) \\ &= (a^{-1}_{V,W,X} \circ (id_V \otimes \widetilde{c}_{X,W})) \left(\sum v_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x \otimes w\right)\right) \\ &= a^{-1}_{V,W,X}\left(\sum v_{(0)} \otimes \left(w_{(0)} \otimes S^{-1}\left(w_{(-1)}\right) \cdot \left(S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x\right)\right)\right) \\ &= a^{-1}_{V,W,X}\left(\sum v_{(0)} \otimes \left(w_{(0)} \otimes \left(S^{-1}\left(w_{(-1)}\right) S^{-1}\left(v_{(-1)}\right)\right) \cdot x\right)\right) \\ &\overset{(4.7)}{=} a^{-1}_{V,W,X}\left(\sum v_{(0)} \otimes \left(w_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}w_{(-1)}\right) \cdot x\right)\right) \\ &= \sum \left(v_{(0)} \otimes w_{(0)}\right) \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}w_{(-1)}\right) \cdot x \\ &= \sum (v \otimes w)_{(0)} \otimes S^{-1}\left((v \otimes w)_{(-1)}\right) \cdot x \\ &= \widetilde{c}_{X,V\otimes W}(x \otimes (v \otimes w)),\end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $x \in X$. Além disso, notemos que

$$\psi : ((\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}), l^{-1}_{-} \circ r_{-}) \to ((\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}), \widetilde{c}_{-,\mathbf{k}})$$

é o morfismo identidade em $\mathbf{k}$ tendo em vista, para qualquer $X \in {}_H\mathcal{M}$, que

$$(l^{-1}_X \circ r_X)(x \otimes 1_{\mathbf{k}}) \quad = l^{-1}_X(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1_{\mathbf{k}} \otimes x \\
&\overset{(4.11)}{=} 1_{\mathbf{k}} \otimes 1_H \cdot x \\
&\overset{(4.7)}{=} 1_{\mathbf{k}} \otimes S^{-1}(1_H) \cdot x \\
&= (1_{\mathbf{k}})_{(0)} \otimes S^{-1}\left((1_{\mathbf{k}})_{(-1)}\right) \cdot x \\
&= \widetilde{c}_{X,\mathbf{k}}(x \otimes 1_{\mathbf{k}}),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in X$, como desejado. Ademais, reparemos que a verificação dos diagramas em (3.5) e (3.6) é reduzida às igualdades

$$
\begin{aligned}
G\left(a_{(V,\sigma_V,\rho_V),(W,\sigma_W,\rho_W),(U,\sigma_U,\rho_U)}\right) &= G(a_{V,W,U}) \\
&= a_{V,W,U} \\
&= a_{((V,\sigma_V),\widetilde{c}_{-,V}),((W,\sigma_W),\widetilde{c}_{-,W}),((U,\sigma_U),\widetilde{c}_{-,U})},
\end{aligned}
$$

assim como,

$$
G\left(l_{(V,\sigma_V,\rho_V)}\right) = G(l_V) = l_V = l_{((V,\sigma_V),\widetilde{c}_{-,V})}
$$

e

$$
G\left(r_{(V,\sigma_V,\rho_V)}\right) = G(r_V) = r_V = r_{((V,\sigma_V),\widetilde{c}_{-,V})},
$$

para quaisquer $(V,\sigma_V,\rho_V),(W,\sigma_W,\rho_W),(U,\sigma_U,\rho_U) \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Portanto, o funtor (G,β,ψ) é, como desejado, estrito. No mais, verifica-se que G é trançado pela trança reversa de modo direto, pois ao considerar $\overline{\tau}$ a trança reversa de ${}^H_H\mathcal{YD}$ e ω a trança de $Z({}_H\mathcal{M})$ dada em função de $\widetilde{c}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\omega_{G((V,\sigma_V,\rho_V)),G((W,\sigma_W,\rho_W))}(v \otimes w) &= \widetilde{c}_{V,W}(v \otimes w) \\
&= \sum w_{(0)} \otimes S^{-1}\left(w_{(-1)}\right) \cdot v \\
&= \tau^{-1}_{(W,\sigma_W,\rho_W),(V,\sigma_V,\rho_V)}(v \otimes w) \\
&= \overline{\tau}_{(V,\sigma_V,\rho_V),(W,\sigma_W,\rho_W)}(v \otimes w) \\
&= G\left(\overline{\tau}_{(V,\sigma_V,\rho_V),(W,\sigma_W,\rho_W)}\right)(v \otimes w)
\end{aligned}
$$

para quaisquer $(V,\sigma_V,\rho_V),(W,\sigma_W,\rho_W) \in {}^H_H\mathcal{YD}$ com $v \in V$ e $w \in W$. Para a etapa final, pelas propriedades de F e G, resta verificar as identidades $GF = Id_{Z({}_H\mathcal{M})}$ e $FG = Id_{{}^H_H\mathcal{YD}}$ em relação aos objetos tendo em vista que os funtores F e G são bijetivos nos morfismos, bem como, são estritos e mapeiam tranças em tranças reversas. Em especial, para $((V,\sigma_V),c_{-,V}) \in Z({}_H\mathcal{M})$, segue que

$$
GF(((V,\sigma_V),c_{-,V})) = G((V,\sigma_V,\widetilde{\rho}_V) = ((V,\sigma_V),\widetilde{\widetilde{c}}_{-,V})
$$

de modo que, mediante construção da coação $\widetilde{\rho}_V$ dada pelo funtor F e sabendo que $c_{X,V}$ é unicamente determinado conforme argumento já apresentado, obtém-se

$$\widetilde{\widetilde{c}}_{X,V}(x \otimes v) = \sum v_{(0)} \otimes S^{-1}\left(v_{(-1)}\right) \cdot x = c_{X,V}(x \otimes v),$$

para todo $X \in {}_H\mathcal{M}$ com $x \in X$ e $v \in V$; logo, $\widetilde{\widetilde{c}}_{-,V} = c_{-,V}$, como desejado. Enquanto que, para $(V, \sigma_V, \rho_V) \in {}_H^H\mathcal{YD}$, infere-se

$$FG((V, \sigma_V, \rho_V)) = F((V, \sigma_V), \widetilde{c}_{-,V}) = (V, \sigma_V, \widetilde{\widetilde{\rho}}_V)$$

com

$$\widetilde{\widetilde{\rho}}_V(v) = \widetilde{c}_{H,V}^{-1}(v \otimes 1_H) = \sum v_{(-1)} \cdot 1_H \otimes v_{(0)} = \sum v_{(-1)} \otimes v_{(0)} = \rho_V(v),$$

para todo $v \in V$, isto é, $\widetilde{\widetilde{\rho}}_V = \rho_V$, como desejado.

Antes de encerrar esta seção, alguns comentários mais gerais envolvendo o centro de categorias monoidais são expostos de modo a evitar certas contas. Em (ETINGOF *et al.*, 2015), o leitor encontrará uma descrição para o centro da categoria de espaços vetoriais G-graduados de dimensão finita em que G é um grupo. Em particular, a referência disposta exprime o fato de que se G é um grupo infinito, simples e finitamente gerado, então o centro da categoria dos espaços vetoriais G-graduados de dimensão finita é isomorfa a categoria de espaços vetoriais. Além disso, os autores também afirmam que a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ dos módulos de Yetter-Drinfel'd finito-dimensionais sobre H é naturalmente equivalente à categoria $Z(\mathcal{M}^H)$ como categorias tensoriais, uma estrutura mais específica que a de categoria monoidal.

5.2 ÁLGEBRAS BASE EM CATEGORIAS MONOIDAIS

Nesta seção, generaliza-se a definição de uma álgebra base para uma categoria monoidal qualquer com motivação advinda, naturalmente, do Exemplo 5.9 apresentado anteriormente. Em essência, a ideia da construção da definição geral de uma álgebra base segue os mesmos moldes com relação à definição de uma álgebra em uma categoria monoidal qualquer. Isto é, toma-se proveito da definição usual já apresentada e, diante disso, estende-se esse conceito de modo a evidenciar, no caso de álgebras base, a estrutura de categoria trançada de $Z({}_H\mathcal{M})$.

Definição 5.10. (DONIN; MUDROV, 2005) Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$. Diz-se que $\mathcal{L}$ é uma álgebra base em $\mathcal{C}$ quando admitir estrutura de álgebra comutativa em $Z(\mathcal{C})$.

Observação 5.11. A definição de uma álgebra base $\mathcal{L}$ dada acima é equivalente ao fato de $\mathcal{L}$ ser uma álgebra em $\mathcal{C}$ e existir uma coleção $\{\gamma_X : X \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes X\}_{X \in \mathcal{C}}$ de isomorfismos em $\mathcal{C}$ tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[rr, "\gamma_{\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "m_{\mathcal{L}}"'] & & \mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[dl, "m_{\mathcal{L}}"] \\
& \mathcal{L}, &
\end{tikzcd} \tag{5.23}$$

$$\begin{tikzcd}
X\otimes\mathcal{L} \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "f\otimes id_{\mathcal{L}}"'] & \mathcal{L}\otimes X \arrow[d, "id_{\mathcal{L}}\otimes f"] \\
Y\otimes\mathcal{L} \arrow[r, "\gamma_Y"'] & \mathcal{L}\otimes Y,
\end{tikzcd} \tag{5.24}$$

$$\begin{tikzcd}
& X\otimes\mathbf{1} \arrow[dl, "r_X"'] \arrow[dr, "id_X\otimes u_{\mathcal{L}}"] & \\
X \arrow[d, "l_X^{-1}"'] & & X\otimes\mathcal{L} \arrow[d, "\gamma_X"] \\
\mathbf{1}\otimes X \arrow[rr, "u_{\mathcal{L}}\otimes id_X"'] & & \mathcal{L}\otimes X,
\end{tikzcd} \tag{5.25}$$

$$\begin{tikzcd}
& (X\otimes Y)\otimes\mathcal{L} \arrow[r, "\gamma_{X\otimes Y}"] \arrow[dl, "a_{X,Y,\mathcal{L}}"'] & \mathcal{L}\otimes(X\otimes Y) & \\
X\otimes(Y\otimes\mathcal{L}) \arrow[dr, "id_X\otimes\gamma_Y"'] & & & (\mathcal{L}\otimes X)\otimes Y \arrow[ul, "a_{\mathcal{L},X,Y}"'] \\
& X\otimes(\mathcal{L}\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\mathcal{L},Y}"'] & (X\otimes\mathcal{L})\otimes Y \arrow[ur, "\gamma_X\otimes id_Y"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.26}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& (X\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L} \arrow[r, "a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}"] \arrow[dl, "\gamma_X\otimes id_{\mathcal{L}}"'] & X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}) \arrow[dr, "id_X\otimes m_{\mathcal{L}}"] & \\
(\mathcal{L}\otimes X)\otimes\mathcal{L} \arrow[d, "a_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}"'] & & & X\otimes\mathcal{L} \arrow[d, "\gamma_X"] \\
\mathcal{L}\otimes(X\otimes\mathcal{L}) \arrow[dr, "id_{\mathcal{L}}\otimes\gamma_X"'] & & & \mathcal{L}\otimes X \\
& \mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes X) \arrow[r, "a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}"'] & (\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X \arrow[ur, "m_{\mathcal{L}}\otimes id_X"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.27}$$

são comutativos para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. De fato, suponhamos que $\mathcal{L}$ admite estrutura de álgebra comutativa em $Z(\mathcal{C})$; logo, pela Definição 5.1, existe $c_{-,\mathcal{L}} : - \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes -$ um isomorfismo natural tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathcal{L} \arrow[rr, "c_{\mathbf{1},\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "l_{\mathcal{L}}"'] & & \mathcal{L} \otimes \mathbf{1} \\
& \mathcal{L} \arrow[ur, "r_{\mathcal{L}}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& (X \otimes Y) \otimes \mathcal{L} \arrow[r, "c_{X\otimes Y,\mathcal{L}}"] \arrow[dl, "a_{X,Y,\mathcal{L}}"'] & \mathcal{L} \otimes (X \otimes Y) & \\
X \otimes (Y \otimes \mathcal{L}) \arrow[dr, "id_X \otimes c_{Y,\mathcal{L}}"'] & & & (\mathcal{L} \otimes X) \otimes Y \arrow[ul, "a_{\mathcal{L},X,Y}"'] \\
& X \otimes (\mathcal{L} \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\mathcal{L},Y}"'] & (X \otimes \mathcal{L}) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,\mathcal{L}} \otimes id_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$; isto é, $(\mathcal{L}, c_{-,\mathcal{L}})$ é objeto em $\mathcal{L}$. Além disso, a Definição 3.29 garante a existência de $u_{\mathcal{L}} : \mathbf{1} \to \mathcal{L}$ e $m_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ dois morfismos em $Z(\mathcal{C})$, ou seja, morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "id_X \otimes u_{\mathcal{L}}"] \arrow[d, "c_{X,\mathbf{1}}"'] & X \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "c_{X,\mathcal{L}}"] \\
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "u_{\mathcal{L}} \otimes id_X"'] & \mathcal{L} \otimes X
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
X \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}) \arrow[r, "id_X \otimes m_{\mathcal{L}}"] \arrow[d, "c_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}"'] & X \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "c_{X,\mathcal{L}}"] \\
(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}) \otimes X \arrow[r, "m_{\mathcal{L}} \otimes id_X"'] & \mathcal{L} \otimes X
\end{tikzcd}$$

são comutativos para qualquer $X \in \mathcal{C}$, tendo em vista que valem

$$c_{X,\mathbf{1}} \overset{(5.9)}{=} l_X^{-1} \circ r_X$$

e

$$c_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \overset{(5.8)}{=} a^{-1}_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \circ (c_{X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) \circ a_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \circ (id_{\mathcal{L}} \otimes c_{X,\mathcal{L}}) \circ a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}.$$

Dessa forma, $\mathcal{L}$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$, já que $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$, bem como, $u_{\mathcal{L}}$ e $m_{\mathcal{L}}$ são morfismos em $\mathcal{C}$ de modo que a comutatividade dos diagramas (3.16) e (3.17) é levantada pelo fato de $\mathcal{L}$ ser uma álgebra em $Z(\mathcal{C})$. Por fim, definimos, $\gamma_X \overset{\text{def}}{=} c_{X,\mathcal{L}}$ para todo $X \in \mathcal{C}$ e percebemos que o diagrama da naturalidade de $c_{-,\mathcal{L}}$ equivale ao diagrama dado em (5.24) de modo que o diagrama hexagonal, dado pela Definição 5.1, é equivalente ao diagrama dado em (5.26). Além disso, $u_{\mathcal{L}}$ ser um morfismo em $Z(\mathcal{C})$ equivale ao diagrama dado em (5.25) e o diagrama dado pelo fato de $m_{\mathcal{L}}$ ser um morfismo em $Z(\mathcal{C})$

equivale ao diagrama dado em (5.27). No mais, a multiplicação de $\mathcal{L}$ ser comutativa equivale ao diagrama dado em (5.23).

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{L}$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$ e existe uma coleção de isomorfismos $\{\gamma_X : X \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes X\}_{X \in \mathcal{C}}$ tal que os diagramas (5.23) a (5.27) são comutativos para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Reparemos que, ao acoplar os diagramas (5.23) e (5.24), obtém-se o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathcal{L} \arrow[rr, "\gamma_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "u_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}"'] & & \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "id_{\mathcal{L}} \otimes u_{\mathcal{L}}"] \\
\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \arrow[rr, "\gamma_{\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "m_{\mathcal{L}}"'] & & \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \arrow[dl, "m_{\mathcal{L}}"] \\
& \mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

com $X = \mathbf{1}$, $Y = \mathcal{L}$ e $f = u_{\mathcal{L}}$. Como $\mathcal{L}$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$, segue, de (3.17), que

$$m_{\mathcal{L}} \circ (u_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) = l_{\mathcal{L}} \qquad \text{e} \qquad m_{\mathcal{L}} \circ (id_{\mathcal{L}} \otimes u_{\mathcal{L}}) = r_{\mathcal{L}};$$

logo, vale que

$$\begin{aligned}
r_{\mathcal{L}} \circ \gamma_{\mathbf{1}} &\overset{(3.17)}{=} m_{\mathcal{L}} \circ (id_{\mathcal{L}} \otimes u_{\mathcal{L}}) \circ \gamma_{\mathbf{1}} \\
&\overset{(5.24)}{=} m_{\mathcal{L}} \circ \gamma_{\mathcal{L}} \circ (u_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\overset{(5.23)}{=} m_{\mathcal{L}} \circ (u_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\overset{(3.17)}{=} l_{\mathcal{L}}.
\end{aligned}$$

Assim, notemos que o diagrama (5.24) garante que γ_{-} é um isomorfismo natural; portanto, como $\gamma_{\mathbf{1}} = r_{\mathcal{L}}^{-1} \circ l_{\mathcal{L}}$, segue, atrelado ao diagrama (5.26), que $(\mathcal{L}, \gamma_{-})$ é um objeto em $Z(\mathcal{C})$. Com isso, como $\mathcal{L}$ é álgebra em $\mathcal{C}$ e os diagramas (5.25) e (5.27) são comutativos, tem-se que $(\mathcal{L}, \gamma_{-})$ admite a estrutura de álgebra em $Z(\mathcal{C})$, já que o primeiro diagrama garante que a $u_{\mathcal{L}}$ é um morfismo no centro ao passo que o segundo infere que $m_{\mathcal{L}}$ é um morfismo no centro. Por fim, o diagrama (5.23) garante que $(\mathcal{L}, \gamma_{-})$ é uma álgebra comutativa em $Z(\mathcal{C})$.

Exemplo 5.12. A unidade de uma categoria monoidal é uma álgebra base, conforme o Exemplo 3.31.

Exemplo 5.13. Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, então H é uma álgebra base sobre si na categoria ${}_H\mathcal{M}$ mediante o Exemplo 4.38.

Exemplo 5.14. Em $(\mathcal{C}, \tau)$ uma categoria trançada, toda álgebra comutativa admite ao menos duas estruturas de álgebra base. De fato, dada $(\mathcal{L}, m, u)$ uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$, pelo Corolário 5.8, sabe-se que $(\mathcal{L}, \tau_{-,\mathcal{L}}) \in Z(\mathcal{C})$; logo, resta garantir que u e m sejam morfismos em $Z(\mathcal{C})$. Isto é, busca-se a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "id_X \otimes u"] \arrow[d, "\tau_{X,\mathbf{1}}"'] & X \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "\tau_{X,\mathcal{L}}"] \\ \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "u \otimes id_X"'] & \mathcal{L} \otimes X \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} X \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}) \arrow[r, "id_X \otimes m"] \arrow[d, "\tau_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}"'] & X \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "\tau_{X,\mathcal{L}}"] \\ (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}) \otimes X \arrow[r, "m \otimes id_X"'] & \mathcal{L} \otimes X, \end{tikzcd}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$; o que é trivial vide a naturalidade de τ. A segunda estrutura de álgebra base é dada analogamente ao utilizar a trança reversa $\overline{\tau}$.

Em (DONIN; MUDROV, 2005), através de uma álgebra base $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$, é possível construir uma nova categoria monoidal denominada a extensão dinâmica de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{L}$. Esse assunto não é de interesse deste trabalho, contudo vale ressaltar a importância de uma álgebra base para a estruturação desta categoria. Em particular, a estrutura de álgebra de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{C}$ permite que a extensão dinâmica seja, de fato, uma categoria ao passo que a estrutura de álgebra comutativa de $\mathcal{L}$ em $Z(\mathcal{C})$ promove a noção de categoria monoidal para a categoria em questão.

REFERÊNCIAS

BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. v. 1.

DASCALESCU, S; NASTASESCU, C; RAIANU, S. **Hopf Algebras: An Introduction**. 1. ed. Nova York: Marcel Dekker, 2001.

DONIN, J; MUDROV, A. **Dynamical Yang-Baxter equation and quantum vector bundles**. v. 254. [*S.l.*]: Communications in Mathematical Physics, 2005. Acesso em 02 de setembro de 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00220-004-1247-8>.

ETINGOF, P. I; GELAKI, S; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor Categories**. Providence: American Mathematical Society, 2015. v. 205.

FERREIRA, V. de O; MURAKAMI, L. S. I. **Uma Introdução às Álgebras de Hopf**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

KASSEL, C. **Quantum Groups**. 1. ed. Nova York: Springer Science & Business Media, 1995. v. 155.

MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. 2. ed. Londres: Springer - Verlag, 1970. v. 39.

MAJID, S. **Foundations of Quantum Group Theory**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

MOMBELLI, J. M. **Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones**. [*S.l.*: *s.n.*]. Notas de aula. Acesso em 08 de setembro de 2024. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>.

PAREIGIS, B. **Categories and Functors**. 1. ed. Nova York: Academic Press, 1970. v. 39.

PAREIGIS, B. **Symmetric Yetter-Drinfeld Categories are trivial**. v. 155. Nova York: Journal of Pure e Applied Algebra, 2001. Acesso em 11 de dezembro de 2024.

Disponível em:
<https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~pareigis/Papers/Yetter_d.pdf>.

PINTER, S. R. da R. **Álgebras de Hopf trançadas**. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: [*s.n.*], 2013. Acesso em 11 de dezembro de 2024. Disponível em:
<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/103547/317399.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

RADFORD, D. E. **Hopf Algebras**. Chicago: World Scientific Publishing, 2011. v. 49.

RADFORD, D. E.; TOWBER, J. **Yetter-Drinfel'd categories associated to an arbitrary bialgebra**. v. 87. Holanda do Norte: Journal of Pure e Applied Algebra, 1993. Acesso em 05 de setembro de 2024. Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404993901149>.