Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática

Exame de Qualificação de Equações Diferenciais (2020.1)

Boa Prova! Florianópolis, 1º de Junho de 2020.

Questão 1. A equação do calor em $\mathbb{R}$. Nessa questão, resolveremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Defina o **núcleo do calor** por

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0.$$

Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, defina

$$u(x,t) = \Phi(x,t) * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t) g(y) dy$$

(a) Mostre que $\Phi_t(x,t) - \Phi_{xx}(x,t) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.
(b) Mostre que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty), \mathbb{R})$.
(c) Mostre que $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.
(d) Mostre que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ temos $|u(x,t) - g(x_0)| \to 0$ quando $(x,t) \to (x_0, 0)$ com $t > 0$.
Dica: lembre-se que $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,t)dx = 1$ para cada $t > 0$.

Questão 2.
(a) Derive a fórmula de D'Alembert para a equação de ondas.
(b) Usando esta fórmula, resolva o PVI seguinte

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \cos^2(x), \\ u_t(x,0) = x + 1. \end{cases}$$

Questão 3.

(a) Demonstre a seguinte versão da **desigualdade de Grönwall**: sejam ϕ, η funções contínua, não-negativas e integráveis num intervalo (a, b) da reta, e g uma função contínua, não-negativa, não-descrescente e localmente integrável em (a, b), satisfazendo:

$$\phi(t) \leqslant g(t) + \int_a^t \eta(s)\phi(s)ds \qquad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Então

$$\phi(t) \leqslant g(t)e^{\int_a^t \eta(s)ds} \qquad \text{para todo } t \in (a, b).$$

(b) Suponha que $A \in M_n(\mathbb{R})$, $U = (\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ é localmente Hölder contínua em t, localmente Lipschitz em x para $(t, x) \in U$ e também que

$$\|f(t, x)\| \leqslant k(t)(1 + \|x\|) \text{ para todo } (t, x) \in U,$$

onde k é uma função contínua não-negativa em (τ, ∞). Se $t_0 > \tau$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que a única solução $x(\cdot, t_0, x_0)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + f(t, x) & t > t_0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

está definida para todo $t > t_0$, isto é, o intervalo maximal de existência desta solução é (t_0, ∞).

Dica: Use (sem demonstração) a Fórmula da Variação das Constantes, o fato de que (para este problema) se $(t_0, t_{\max})$ é o intervalo maximal da solução de $x(\cdot, t_0, x_0)$ então ou $t_{\max} = \infty$ ou $t_{\max} < \infty$ e $\|x(t, t_0, x_0)\| \to \infty$ quando $t \to t_{\max}^-$, e por fim, use a Desigualdade de Grönwall do item (a).

Questão 4. Considere o problema de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ e $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Usando o método da separação de variáveis, assumindo $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, mostre que existe uma constante λ tal que

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \quad \text{ e } \quad r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

(b) Assumindo que o dado inicial f depende só da variável angular θ, expressar de manera explícita (por meio de uma série) a solução do problema de Dirichlet em termos do dado inicial f.