EXAME QUALIFICAÇÃO ANÁLISE - PPG-MTM-UFSC
Setembro 2020
QUESTÕES - Parte 1 - Duas horas

Observação: Questão 3 é obrigatória. Das questões 1 e 2 fazer somente uma delas.

1) Sejam X espaço topológico normal e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Mostre que a topologia de X é a topologia inicial dada pela família $\mathcal{F}$.

2) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável. Prove a unicidade do teorema da decomposição de Jordan que afirma que se $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ é uma medida com sinal então existem únicas medidas $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ mutuamente singulares tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

3) Seja $T : D(T) \subseteq X \to Y$ com X, Y espaços normados e $D(T)$ denso em X.

   a) Defina o adjunto: T' de T e os conjuntos $\sigma(T), \sigma_p(T), \sigma_r(T), \sigma_c(T)$.

   b) Seja l_2 o conjunto das sequencias complexas de quadro somável. Seja $T : l_2 \to l_2$ dado por:

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

   Calcule T'.

   c) Justifique que $\sigma(T) = \sigma(T') \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$. A primeira igualdade é de um teorema. Não precisa fazer.

   d) Mostre que se $|\lambda| < 1$ então $\lambda \in \sigma_p(T)$. Mostre que se $|\lambda| = 1$ então não é autovalor de T. Ajuda: $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots)$.

   e) Calcule $\sigma_p(T')$.

   f) Justifique que $\sigma(T) = \sigma(T') = \{|\lambda| \leq 1\}$.

   g) Mostre que $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$.

   Ajuda: Supor que para $|\lambda| = 1$ tem-se que $R(T - \lambda)$ não é densa em $Y = l_2$. Use um Corolário de Hahn-Banach.

   h) Calcule $\sigma_r(T)$.