**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Eduardo Paiva Scarparo

# ÁLGEBRAS DE TOEPLITZ GENERALIZADAS

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Scarparo, Eduardo
Álgebras de Toeplitz generalizadas / Eduardo Scarparo ; orientador, Ruy Exel - Florianópolis, SC, 2014.
55 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. C*-Álgebra. 3. Semigrupo. 4. Isometria. I. Exel, Ruy. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Eduardo Paiva Scarparo

**ÁLGEBRAS DE TOEPLITZ GENERALIZADAS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 21 de fevereiro 2014.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Ruy Exel
Orientador

Prof. Dr. Giuliano Boava - UFSC

Prof. Dr. Alcides Buss - UFSC

Prof. Dr. Bernhard Burgstaller - UFSC

Prof. Dr. Paolo Piccione - USP

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e à minha namorada Vanessa por todo o apoio que me deram nesses dois anos de mestrado.

Ao Prof. Ruy Exel por ter aceitado orientar-me e aos membros da banca por terem aceito o convite e pelas correções e sugestões. Aos professores do departamento de matemática pelo ótimo ambiente que encontrei aqui.

Agradeço pelo apoio e convivência inesquecível a Taís, Bruno, Paulo, Lila, Jonathan, Rubén, Raúl, Jaqueline, Camila, Gustavo Valente, Gustavo Carli, Sara, Maíra, Asteroide, Dênis, Gabriela, Giovani, Allysson, Fit, Mário e a todos os demais colegas da Pós-graduação.

Eduardo Paiva Scarparo

# ÁLGEBRAS DE TOEPLITZ GENERALIZADAS

Dissertação entregue ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel

Florianópolis

2014

## RESUMO

Um grupo quase-reticulado é um tipo especial de grupo parcialmente ordenado. Podemos associar $C^*$-álgebras a grupos quase-reticulados e definir amenabilidade de forma natural. Nosso objetivo neste trabalho é provar um resultado devido a Laca e Raeburn que dá uma caracterização simples para as representações fiéis da $C^*$-álgebra de um grupo quase-reticulado amenable. Apresentaremos também uma aplicação desse teorema.
**Palavras-chave:** $C^*$-Álgebra. Semigrupo. Isometria. Grupo quase-reticulado.

**ABSTRACT**

A quasi-lattice group is a special type of partially ordered group. We can associate $C^*$-algebras to quasi-lattice groups and define amenability in a natural way. Our goal in this work is to prove a result due to Laca and Raeburn which gives a simple characterization for the faithful representations of an amenable quasi-lattice group $C^*$-algebra. We also present an application of this theorem.
**Keywords:** $C^*$-Algebra. Semigroup. Isometry. Quasi-lattice group.

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

A álgebra de Toeplitz é a $C^*$-álgebra gerada pelo shift unilateral em $\ell^2(\mathbb{N})$. Pelo Teorema de Coburn, dado um espaço de Hilbert $H$, uma isometria não-unitária em $\mathcal{B}(H)$ gera uma $C^*$-álgebra canonicamente isomorfa à de Toeplitz.

Uma possível generalização da álgebra de Toeplitz seria, dado um semigrupo cancelativo à esquerda $P$, considerar a $C^*$-álgebra gerada pelos operadores $\lambda_p$ definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_p : \ell^2(P) &\to \ell^2(P) \\ \delta_s &\mapsto \delta_{ps} \quad s \in P, \end{aligned}$$

com $\{\delta_s \in \ell^2(P)/s \in P\}$ denotando a base ortonormal canônica de $\ell^2(P)$. Como $P$ é cancelativo à esquerda, os operadores $\lambda_p$ estão bem definidos e são isometrias. Caso $P = \mathbb{N}$, reobtemos a álgebra de Toeplitz.

Note que os operadores $\lambda_p$ satisfazem certas relações como, por exemplo,

$$\lambda_{ps} = \lambda_p \lambda_s, \quad p, s \in P. \tag{1}$$

Assim, faz sentido definir $C^*$-álgebras universais como isometrias indexadas por $P$ e sujeitas a essas relações.

Restringindo-se ao semigrupo de elementos positivos de uma certa classe de grupos ordenados, os chamados grupos quase-reticulados, [Nica 1992] obteve outras relações além de (1) e apresentou exemplos interessantes em que a $C^*$-álgebra universal coincide com a representação concreta. Quando isso acontece, o grupo quase-reticulado é dito ser amenable.

Posteriormente, [Laca e Raeburn 1996] ampliaram esse leque de exemplos, e provaram um teorema que caracteriza precisamente quais são as representações fiéis da $C^*$-álgebra universal de um grupo quase-reticulado amenable.

Nosso objetivo nesta dissertação foi apresentar uma demonstração detalhada do teorema de Laca e Raeburn e dar uma aplicação desse resultado.

Além do seu interesse intrínseco, a $C^*$-álgebra de um grupo quase-reticulado motivou o desenvolvimento de estruturas mais gerais em $C^*$-álgebra, como, por exemplo, de produto cruzado de uma $C^*$-

álgebra por um semigrupo de endomorfismos em [Laca e Raeburn 1996] e de $C^*$-álgebra de um semigrupo em [Li 2012].

Com exceção do exemplo 7, todos os resultados aqui presentes foram tirados de [Laca e Raeburn 1996] e [Nica 1992].

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

No capítulo 1, definimos grupo quase-reticulado e apresentamos exemplos.

No capítulo 2, fazendo uso do produto e da ordem de um grupo quase-reticulado, associamos uma $C^*$-álgebra a essa estrutura e definimos amenabilidade.

No terceiro capítulo, mostramos que o coproduto de uma familia de grupos quase-reticulados abelianos é amenable.

No quarto, apresentamos o já referido teorema de Laca e Raeburn e damos uma aplicação desse resultado.

Por fim, no apêndice, definimos o que entendemos por $C^*$-álgebra universal, e provamos sua existência sob certas condições. Para uma abordagem um pouco diferente e mais completa de $C^*$-álgebras universais, veja [Boava 2007, Apêndice A].

# 1 GRUPOS QUASE-RETICULADOS

Neste capítulo, definiremos e daremos exemplos de grupos quase-reticulados. Trata-se de um grupo munido de uma ordem parcial invariante por translação à esquerda e com uma condição que lembra a de reticulado, porém bem mais fraca. Às definições então:

**Definição 1.** Um grupo ordenado consiste em um par $(G, P)$, com $G$ grupo discreto e $P$ um subsemigrupo de $G$, satisfazendo $P \cap P^{-1} = \{e\}$, em que $e$ é a unidade de $G$. Observe que $P$ induz uma ordem parcial invariante por translação à esquerda em $G$ dada por $x \leq y \overset{def}{\iff} x^{-1}y \in P$.

Na definição acima, podemos imaginar $P$ como sendo os elementos "positivos" de $G$. De fato, vale $P = \{x \in G / x \geq e\}$.

**Definição 2.** Um grupo ordenado $(G, P)$ é dito ser quase-reticulado se satisfizer a seguinte condição:

(QR) Se $s, t \in P$ possuem cota superior em comum (c.s.c. daqui para frente), então possuem uma c.s.c. mínima.

**Exemplo 3.** Seja $(G, P)$ um grupo ordenado cuja ordem induzida por $P$ é total. Então, $(G, P)$ é quase-reticulado. De fato, dados $s, t \in P$, suponha, sem perda de generalidade, $s \leq t$. Então, $t$ é a c.s.c. mínima de $s$ e $t$.

Em particular, $(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ é quase-reticulado. Aqui, estamos considerando os naturais contendo o zero.

**Exemplo 4.** Seja $\{(G_i, P_i) / i \in I\}$ uma família de grupos quase-reticulados. Provemos que o produto cartesiano $(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} P_i)$ com a multiplicação e inversão coordenada a coordenada é grupo quase-reticulado. Denotaremos por $e_i$ o elemento neutro de $G_i$.

Suponha $(p_i) \in \left(\prod_{i \in I} P_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} P_i\right)^{-1}$. Então, $p_i \in P_i \cap P_i^{-1}$ para todo $i \in I$. Logo, $p_i = e_i$ para todo $i \in I$. Portanto, $(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} P_i)$ é ordenado como na definição 1.

Provemos agora que $(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} P_i)$ satisfaz (QR). Dados $(p_i), (q_i) \in \prod_{i \in I} P_i$ com c.s.c. $(t_i)$, temos $(p_i)^{-1}(t_i) \in \prod_{i \in I} P_i$, e isto implica que $p_i \leq t_i$ para todo $i \in I$. Analogamente, $q_i \leq t_i$ para todo $i \in I$. Para cada $i \in I$, seja $s_i$ a c.s.c. mínima de $p_i, q_i$. Então, $s_i \leq t_i$ para todo $i \in I$ e isto implica que $(s_i) \leq (t_i)$. Analogamente, $(p_i), (q_i)$ são menores ou iguais que $(s_i)$. Como $(t_i)$ é uma c.s.c. arbitrária de $(p_i)$ e $(q_i)$, concluímos que $(s_i)$ é a c.s.c. mínima procurada.

**Exemplo 5.** Seja $F_n$ o grupo livre gerado por $a_1, ..., a_n$. Seja $SF_n$ o subsemigrupo unital de $F_n$ gerado pelos $a_i, 1 \leq i \leq n$. Provemos que $(F_n, SF_n)$ é grupo quase-reticulado.

Note que cada elemento de $SF_n$ distinto da identidade escreve-se de forma única como $a_{i_1}...a_{i_k}$ com $k \geq 1$. Além disso, cada elemento de $F_n$ distinto da identidade escreve-se de forma única como $a_{i_1}^{\epsilon_1}...a_{i_k}^{\epsilon_k}$ com $k \geq 1$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ e, caso $i_j = i_{j+1}$, necessariamente $\epsilon_j = \epsilon_{j+1}$. Destas observações, segue que $SF_n \cap SF_n^{-1} = \{e\}$.

Dado $a_{i_1}...a_{i_k} \in SF_n$, afirmamos que $\{s \in SF_n / s \leq a_{i_1}...a_{i_k}\} = \{e < a_{i_1} < a_{i_1}a_{i_2} < ... < a_{i_1}...a_{i_k}\}$. Claramente, vale "$\supset$". Reciprocamente, suponha $a_{j_1}...a_{j_l} \leq a_{i_1}...a_{i_k}$. Suponha que exista $m_0$ tal que $1 \leq m_0 \leq k$, $j_{m_0} \neq i_{m_0}$ e $j_m = i_m$ para $m < m_0$. Então, $(a_{j_1}...a_{j_l})^{-1}a_{i_1}...a_{i_k} = a_{j_l}^{-1}...a_{j_{m_0}}^{-1}a_{i_{m_0}}...a_{i_k} \notin SF_n$. Absurdo.

Caso não exista tal $m_0$, e seja $l > k$, teremos

$$(a_{j_1}...a_{j_l})^{-1}a_{i_1}...a_{i_k} = a_{j_l}^{-1}...a_{j_{k+1}}^{-1} \notin SF_n.$$

Absurdo também.

Dessas considerações, segue que $a_{j_1}...a_{j_l} \leq a_{i_1}...a_{i_k}$ se e somente se $a_{j_1}...a_{j_l}$ é uma "subpalavra" inicial de $a_{i_1}...a_{i_k}$.

Provamos assim que, dado $t \in SF_n$, $\{s \in SF_n / s \leq t\}$ é um conjunto totalmente ordenado. Daí, segue que $(F_n, SF_n)$ satisfaz (QR), pois se $t$ é uma *c.s.c.* de $s, p \in SF_n$, necessariamente $s \leq p$ ou $p \leq s$. Portanto, existe a c.s.c. mínima de $s$ e $p$.

**Exemplo 6.** Dada $\{(G_i, P_i)/i \in I\}$ uma família de grupos quase-reticulados, denote por $\coprod_{i \in I} G_i$ o coproduto na categoria de grupos dos $G_i$, também conhecido por produto livre. Denote como $\coprod_{i \in I} P_i$ o subsemigrupo gerado pelas cópias dos $P_i$ em $\coprod_{i \in I} G_i$. Afirmamos que $\left(\coprod_{i \in I} G_i, \coprod_{i \in I} P_i\right)$ é quase-reticulado.

Denotaremos por $e_i$ o elemento neutro de $G_i$ e por $\beta_i : G_i \to \coprod_{j \in I} G_j$ os homomorfismos canônicos do coproduto . Note que cada elemento de $\coprod_{i \in I} G_i$ diferente da identidade escreve-se de forma única como $\beta_{i_1}(g_{i_1})...\beta_{i_n}(g_{i_n})$, com $n \geq 1$, $g_{i_j} \in G_{i_j}$, $g_{i_j} \neq e_{i_j}$ para $1 \leq j \leq n$ e $i_j \neq i_{j+1}$ para $1 \leq j < n$. Por simplicidade, um elemento deste tipo será denotado por $g_{i_1}...g_{i_n}$. Assim, observe também que cada elemento de $\coprod_{i \in I} P_i$ diferente da identidade escreve-se de forma única como $p_{i_1}...p_{i_n}$, com $n \geq 1$, $p_{i_j} \in P_{i_j}$, $p_{i_j} \neq e_{i_j}$ para $1 \leq j \leq n$ e $i_j \neq i_{j+1}$ para $1 \leq j < n$. Desses fatos, segue que $\left(\coprod_{i \in I} P_i\right) \cap \left(\coprod_{i \in I} P_i\right)^{-1} = \{e\}$.

Provemos agora que $\left(\coprod_{i \in I} G_i, \coprod_{i \in I} P_i\right)$ satisfaz a condição (QR). Tome $s, t, r \in \coprod_{i \in I} P_i$ diferentes da identidade e tais que $r$ é c.s.c. de

$s$ e $t$. Mostraremos que existe a c.s.c. mínima de $s$ e $t$. Para isso, suponha $s, r, t$ escritos na forma canônica como

$$s = p_{s_1}...p_{s_n}, \quad t = q_{t_1}...q_{t_m}, \quad r = v_{r_1}...v_{r_l}.$$

Como $s \leq t$, temos $p_{s_n}^{-1}...p_{s_1}^{-1}v_{r_1}...v_{r_l} \in \coprod_{i \in I} P_i$. Logo, $n \leq l$, $s_1 = r_1, ..., s_n = r_n$, $p_{s_1} = v_{r_1}, ..., p_{s_{n-1}} = v_{r_{n-1}}$ e $p_{s_n} \leq v_{r_n}$. Logo, $s = v_{r_1}...v_{r_{n-1}}p_{r_n}$, com $p_{r_n} \leq v_{r_n}$. Analogamente, $m \leq l$ e $t = v_{r_1}...v_{r_{m-1}}q_{r_m}$, com $q_{r_m} \leq v_{r_m}$.

Então, caso $n > m$, vale $s > t$. Caso $n < m$, temos $s < t$. Suponha $n = m$ e note que $v_{r_n}$ é c.s.c. para $s_{r_n}$ e $q_{t_n}$. Seja $x_{r_n}$ a c.s.c. mínima desses dois elementos, a qual existe pois $(G_{r_n}, P_{r_n})$ é quase-reticulado. Note que $v_{r_1}...v_{r_{n-1}}x_{r_n}$ é c.s.c. para $s$ e $t$ e é menor ou igual que $r$. Como $r$ era uma c.s.c. de $s$ e $t$ arbitrária, segue que $v_{r_1}...v_{r_{n-1}}x_{r_n}$ é a c.s.c. mínima para $s$ e $t$ procurada.

Note que este exemplo generaliza o anterior, pois o grupo livre $F_n$ é isomorfo a $\coprod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$ com $SF_n$ correspondendo a $\coprod_{i=1}^{n} \mathbb{N}$.

Nossa definição de grupo quase-reticulado é um pouco mais geral do que a definição dada nos artigos [Nica 1992] e [Laca e Raeburn 1996], sobre os quais baseamos este texto. Nesses artigos, um grupo ordenado $(G, P)$ é dito ser *quasi-lattice* se satisfizer, além da condição (QR), a seguinte hipótese:

(QL1) Se $s \in G$ possui cota superior em $P$, então possui uma cota superior mínima em $P$.

Em [Crisp e Laca 2002], é provado que (QL1) implica (QR), mas nada é dito sobre a recíproca ser verdadeira ou não. Ocorre que se assumimos apenas (QR) o teorema de Laca e Raeburn que propusemo-nos a apresentar nesta dissertação continua valendo com a mesma demonstração.

Os exemplos concretos de grupos quase-reticulados que vimos até o momento estão no artigo de Nica e satisfazem (QL1) também. Para justificar nossa definição mais geral, daremos a seguir um exemplo de grupo quase-reticulado que não satisfaz (QL1).

**Exemplo 7.** Considere o grupo livre $F_2$ gerado por dois elementos $a$ e $b$ e $SF_2$ o subsemigrupo unital gerado por $a$ e $b$, como no exemplo 5. Seja $P := (bSF_2) \cup \{e\}$. Naturalmente, $P$ é semigrupo e, como $P \subset SF_2$, temos $P \cap P^{-1} = \{e\}$. Provemos que $(F_2, P)$ satisfaz (QR).

Seja $F_\infty$ o grupo livre gerado por $\{c_0, c_1, c_2, ...\}$ e $SF_\infty$ o subsemigrupo unital gerado pelos $c_i$'s. Provaremos que $P$ é isomorfo a $SF_\infty$ como semigrupo.

Como $SF_\infty$ é também o semigrupo unital livre gerado por

$$\{c_0, c_1, c_2, ...\},$$

segue que existe um homomorfismo unital de semigrupos

$$\begin{aligned} \varphi : SF_\infty &\to P \\ c_i &\mapsto ba^i. \end{aligned}$$

Provemos que $\varphi$ é isomorfismo. Primeiro, a sobrejetividade. Um elemento de $P$ que não seja o neutro escreve-se de forma única como uma palavra nas letras $a$ e $b$ que começa com $b$. Vamos provar por indução que para todo $n$ inteiro positivo as palavras de $P$ de comprimento $n$ estão na imagem de $\varphi$. Suponha que essa afirmação seja veradeira para um certo $n \geq 1$. Dada uma palavra $y$ de $P$ com tamanho $n+1$, seja $y'$ formada pelas $n$ primeiras letras de $y$. Como $y'$ começa com $b$, temos $y' \in P$. Tome $x \in SF_\infty$ tal que $\varphi(x) = y'$.

Caso a $(n+1)$-ésima letra de $y$ for $b$, teremos $\varphi(xc_0) = y'b = y$. Caso a última letra de $y$ seja um $a$, defina a palavra $x'$ como sendo igual a $x$, a menos da última letra $c_i$ de $x$, a qual trocamos por $c_{i+1}$. Então, $\varphi(x') = y'a = y$.

Façamos agora a injetividade de $\varphi$. Tome $x, y \in SF_\infty$ distintos. Caso um dos dois seja o elemento neutro, evidentemente teremos $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Suponha então que nem $x$ nem $y$ são o elemento neutro.

Podemos escrever $x$ e $y$ como $x = sc_iw$ e $y = sc_jv$, com $s, w, v \in SF_\infty$ e $j \neq i$. Então, $\varphi(x) = \varphi(y)$ implica $\varphi(c_iw) = \varphi(c_jv)$. Sem perda de generalidade, suponha $i < j$ e note qua a $(i+2)$-ésima letra de $\varphi(c_jv)$ é um $a$. Caso $w = e$, $\varphi(c_iw)$ não possui $(i+2)$-ésima letra. Caso $w \neq e$, a $(i+2)$-ésima de $\varphi(c_iw)$ é um $b$. De qualquer forma, $\varphi(c_iw) \neq \varphi(c_jv)$. Absurdo. Concluímos assim que $\varphi$ é isomorfismo.

Dado um grupo ordenado $(G, Q)$, note que, para $q, p \in Q$, temos que $p \leq q \iff p^{-1}q \in Q \iff q \in pQ$. Assim, a ordem de $G$ induzida em $Q$ está implícita no produto de $Q$.

Da observação acima e dos fatos de que $(F_\infty, SF_\infty)$ satisfaz (QR) pelo exemplo 6 e $P$ é isomorfo a $SF_\infty$, segue que $(F_2, P)$ também satisfaz (QR).

Finalmente, provemos que $(F_2, P)$ não satisfaz (QL1). Note que $ba^{-1}b^{-1}$ é menor do que $b$ e do que $ba$. A única cota inferior em comum de $b$ e $ba$ que pertence a $P$ é o elemento neutro $e$. Porém, $ba^{-1}b^{-1}$ não é menor do que $e$. Concluímos assim que $ba^{-1}b^{-1}$ não possui cota superior mínima em $P$.

No entanto, quando $G$ é abeliano vale que (QR) implica (QL1). Esse é o conteúdo da proposição abaixo.

**Proposição 8.** *Seja $(G, P)$ um grupo quase-reticulado que satisfaz (QR) e tal que $G$ é abeliano. Então, $(G, P)$ satisfaz (QL1).*

*Demonstração.* Dado $x \in G$, suponha $x \leq p$ para um certo $p \in P$. Então, $x^{-1}p \in P$. Da comutatividade de $P$, segue que $p(x^{-1}p)$ é c.s.c. para $p$ e $x^{-1}p$. Então, por (QR), temos que existe $q \in P$ c.s.c. mínima para $p$ e $x^{-1}p$. Afirmamos que $p^{-1}xq$ é a c.s.c. mínima em P de $x$.

Primeiramente, observe que, de fato, $p^{-1}xq = (x^{-1}p)^{-1}q$ pertence a $P$, pois $x^{-1}p \leq q$. Também, $x \leq p^{-1}xq$, visto que $p \leq q$.

Dado $r \in P$ satisfazendo $r \geq x$, devemos mostrar que $r \leq p^{-1}xq$. Ora, $r \geq x$ implica $x^{-1}pr \geq p$. Além disso, obviamente $x^{-1}pr \geq x^{-1}p$. Portanto, como $x^{-1}pr \in P$ e $q$ é a c.s.c. mínima de $p$ e $x^{-1}p$, segue que $x^{-1}pr \geq q$. Concluímos assim que $r \geq p^{-1}xq$. $\square$

# 2 $C^*$-ÁLGEBRA DE GRUPO QUASE-RETICULADO

Neste capítulo, fazendo uso do produto e da ordem de um grupo quase-reticulado, associaremos uma $C^*$-álgebra a essa estrutura.

Dado $(G, P)$ grupo quase-reticulado, defina, para cada $p \in P$, o operador linear

$$\begin{aligned} \lambda_p : \ell^2(P) &\to \ell^2(P) \\ \delta_s &\mapsto \delta_{ps} \quad \forall s \in P. \end{aligned}$$

Acima, $\{\delta_s \in \ell^2(P)/s \in P\}$ denota a base ortonormal canônica de $\ell^2(P)$. Note que $\lambda_p$ está bem definido e é isometria, pois leva uma base ortonormal injetivamente em um conjunto ortonormal.

Dados $p, r, s \in P$, vale que $\lambda_p\lambda_r(\delta_s) = \delta_{prs} = \lambda_{pr}(\delta_s)$. Portanto,

$$\lambda_p\lambda_r = \lambda_{pr}, \quad p, r \in P. \tag{2.1}$$

Afirmamos que $\mathrm{Im}\lambda_p = \overline{\mathrm{span}}\{\delta_s/s \geq p\}$. De fato, dado $s \in P$, $\lambda_p(\delta_s) = \delta_{ps}$. Como $ps \geq p$, temos que $\mathrm{Im}\lambda_p \subset \overline{\mathrm{span}}\{\delta_s/s \geq p\}$. Reciprocamente, se $s \geq p$, então $p^{-1}s \in P$. Como $\lambda_p(\delta_{p^{-1}s}) = \delta_s$, temos que $\delta_s \in \mathrm{Im}\lambda_p$. Logo, $\mathrm{Im}\lambda_p \supset \overline{\mathrm{span}}\{\delta_s/s \geq p\}$.

Como, para $s \in P$, $\lambda_s$ é isometria, temos que $\lambda_s^*\lambda_s = I$. Portanto, das contas acima segue que, para $s, t \in P$,

$$\lambda_s^*(\delta_t) = \begin{cases} \delta_{s^{-1}t}, & \text{caso } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Dados $s, t \in P$, caso $s$ e $t$ possuam c.s.c., vamos denotar por $s \vee t$ a c.s.c. mínima de $s$ e $t$. Caso $s$ e $t$ não possuam c.s.c., diremos que $s \vee t = \infty$. Além disso, por convenção, definimos que $s \vee \infty = \infty \vee s = \infty$ para todo $s \in P \sqcup \{\infty\}$. Observe então que $P \sqcup \{\infty\}$ com a operação $\vee$ é um semigrupo abeliano, idempotente e com o mesmo elemento neutro da multiplicação usual de $P$.

Como $\lambda_p\lambda_p^*$ é a projeção em $\mathrm{Im}\lambda_p$, adotando a convenção de que $\lambda_\infty = 0$, temos a seguinte relação:

$$\lambda_p\lambda_p^*\lambda_r\lambda_r^* = \lambda_{p\vee r}\lambda_{p\vee r}^*, \quad p, r \in P. \tag{2.3}$$

Motivados por (2.1) e (2.3), definimos $C^*(G, P)$ como sendo a $C^*$-álgebra universal (para definição de $C^*$-álgebra universal, leia o apêndice) gerada por isometrias $\{v_p/p \in P\}$ sujeitas às relações:

$$v_{ps} = v_p v_s \tag{2.4}$$

$$v_p v_p^* v_s v_s^* = \begin{cases} v_{s\vee t} v_{s\vee t}^*, & \text{caso } s \text{ e } t \text{ possuam c.s.c.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.5}$$

No jargão da definição 32 do apêndice, $C^*(G,P)$ é a $C^*$-álgebra universal sobre o par $(\{v_p/p \in P\}, \mathcal{R})$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{R} :=& \{1 - v_p^* v_p/p \in P\} \cup \{v_{ps} - v_p v_s/p, s \in P\} \\ & \cup \{v_p v_p^* v_s v_s^* - v_{p\vee s} v_{p\vee s}^*/p, s \in P \text{ e } p \vee s \neq \infty\} \\ & \cup \{v_p v_p^* v_s v_s^*/p, s \in P \text{ e } p \vee s = \infty\}. \end{aligned}$$

Dada uma função $W : P \to \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ $C^*$-álgebra unital, defina $W_\infty = 0 \in \mathcal{A}$. W é dita ser uma representação covariante de $P$ se $W_p$ for isometria para todo $p \in P$ e $W$ satisfizer

$$W_{ps} = W_p W_s \tag{2.6}$$

$$W_p W_p^* W_s W_s^* = W_{s\vee t} W_{s\vee t}^*. \tag{2.7}$$

para quaisquer $p, s \in P$. Pela propriedade universal de $C^*(G,P)$, para cada $W$ desse tipo existe um único $*$-homomorfismo unital $\tilde{W} : C^*(G,P) \to C^*(\{W_p \in \mathcal{A}/p \in P\})$ comutando o diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "W"'] & C^*(G,P) \arrow[dl, dashed, "\tilde{W}"] \\ C^*(\{W_p/p \in P\}) & \end{tikzcd}$$

Seja

$$\begin{aligned} \lambda : P &\to \mathcal{B}(\ell^2(P)) \\ p &\mapsto \lambda_p. \end{aligned}$$

Por (2.1) e (2.3), temos que $\lambda$ é representação covariante.

**Definição 9.** Um grupo quase-reticulado $(G,P)$ é dito ser *amenable* se $\tilde{\lambda} : C^*(G,P) \to C^*(\{\lambda_p/p \in P\})$ for isomorfismo.

A seguir, provamos um resultado técnico que será utilizado em diversos momentos nesta dissertação.

**Proposição 10.** *Seja $W : P \to \mathcal{A}$ representação covariante de $P$. Dados $u, v, x, y \in P$,*

$$W_u W_v^* W_x W_y^* = W_{uv^{-1}(v \vee x)} W_{yx^{-1}(v \vee x)}^*. \tag{2.8}$$

*Caso, $v \vee x = \infty$, estamos interpretando o lado direito da igualdade acima como sendo $W_\infty W_\infty^* = 0$.*

*Demonstração.* Por definição de representação covariante, vale que

$$W_v W_v^* W_x W_x^* = W_{v \vee x} W_{v \vee x}^* = W_v W_{v^{-1}(v \vee x)} W_{x^{-1}(v \vee x)}^* W_x^*. \tag{2.9}$$

Observe que, como $v \leq v \vee x$ e $x \leq v \vee x$, temos que $v^{-1}(v \vee x)$ e $x^{-1}(v \vee x)$ pertencem a $P$.

Multiplicando (2.9) à esquerda por $W_v^*$, à direita por $W_x$, obtemos que

$$W_v^* W_x = W_{v^{-1}(v \vee x)} W_{x^{-1}(v \vee x)}^*.$$

Multiplicando agora à esquerda por $W_u$ e à direita por $W_y^*$, obtemos (2.8).

□

**Corolário 11.** *Seja $W : P \to \mathcal{A}$ representação covariante. Então, $C^*(\{W_p / p \in P\}) = \overline{\text{span}}\{W_x W_y^* / x, y \in P\}$. Em particular,*

$$C^*(G, P) = \overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P\}.$$

*Demonstração.* Pela proposição 10, o conjunto $\overline{\text{span}}\{W_x W_y^* / x, y \in P\}$ é fechado quanto ao produto. Como é obviamente fechado quanto às demais operações de uma $C^*$-álgebra, segue que $C^*(\{W_p / p \in P\}) = \overline{\text{span}}\{W_x W_y^* / x, y \in P\}$.

A afirmação a respeito de $C^*(G, P)$ segue do fato de

$$\begin{aligned} v : P &\to C^*(G, P) \\ p &\mapsto v_p \end{aligned}$$

ser representação covariante. □

O leitor pode perguntar-se por que escolhemos as relações (2.4) e (2.5) e não outras para definir $C^*(G, P)$. Claro, (2.4) é bastante natural para uma $C^*$-álgebra universal associada a um semigrupo. Quanto a (2.5), ocorre que [Nica 1992] percebeu que $C^*(\{\lambda_p / p \in P\})$ possuía uma estrutura que em vários aspectos lembra a de um produto cruzado, e isso tornava natural a inclusão de (2.5) na definição de $C^*(G, P)$.

Além disso, com essa definição de $C^*(G, P)$, Nica obteve exemplos interessantes de grupos quase-reticulados amenable.

Posteriormente, [Laca e Raeburn 1996] tornaram precisas as ideias de Nica, realizando $C^*(G, P)$ como um produto cruzado de uma certa $C^*$-álgebra por um semigrupo de endomorfismos. Para tornar nossa exposição mais direta, omitiremos a interpretação de $C^*(G, P)$ como um produto cruzado.

Obervamos que as definições de $C^*(G, P)$ e de amenabilidade são independentes do grupo $G$ que envolve o semigrupo $P$. Por conta disso, um dos objetivos de [Li 2012] ao construir a $C^*$-álgebra associada a um semigrupo unital cancelativo à esquerda $P$ foi reobter $C^*(G, P)$ quando $(G, P)$ fosse grupo *quasi-lattice*, isto é, grupo ordenado que satisfaz (QL1).

Não conseguimos determinar se quando $(G, P)$ é quase-reticulado mas não satisfaz (QL1), a $C^*$-álgebra do semigrupo $P$ como em [Li 2012] é isomorfa a $C^*(G, P)$.

# 3 AMENABILIDADE

Neste capítulo, provamos que o coproduto de uma família de grupos quase-reticulados abelianos é amenable. Para isso, começamos provando um teorema devido a Nica que dá uma condição necessária e suficiente para um grupo quase-reticulado ser amenable.

**Definição 12.** Uma aplicação $\psi : A \to B$ entre $C^*$-álgebras $A$ e $B$ será dita *fiel* se, para todo $a \in A$, $\psi(a^*a) = 0 \implies a = 0$. Note que, caso $\psi$ seja $*$-homomorfismo, a condição de $\psi$ ser fiel é equivalente a $\psi$ ser injetiva.

**Teorema 13.** *Dado um grupo quase-reticulado $(G, P)$, existe uma única aplicação linear e contrativa $\phi : C^*(G, P) \to C^*(G, P)$ satisfazendo*

$$\phi(v_x v_y^*) = \begin{cases} v_x v_y^*, & \text{caso } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.1}$$

*Além disso, $(G, P)$ é amenable se e somente se $\phi$ é fiel.*

*Demonstração.* Pelo corolário 11, $C^*(G, P) = \overline{\operatorname{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P\}$. Desse fato, segue que se $\phi$ existir, será única.

Construamos então $\phi$ como no enunciado.

Primeiramente, provemos que existe uma aplicação linear, positiva, contrativa e fiel $E : \mathcal{B}(\ell^2(P)) \to \mathcal{B}(\ell^2(P))$, a qual, em linguagem informal, toma um operador $T \in \mathcal{B}(\ell^2(P))$, olha para sua matriz na base $\{\delta_s / s \in P\}$, mantém a diagonal e zera o que não está na diagonal. Mais precisamente, $E(T)$ satisfaz o seguinte:

$$\langle E(T)\delta_x, \delta_y \rangle = \begin{cases} \langle T\delta_x, \delta_y \rangle, & \text{caso } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Para construir essa aplicação $E$, dado $T \in \mathcal{B}(\ell^2(P))$, defina

$$\begin{aligned} E(T) : \ell^2(P) &\to \ell^2(P) \\ \delta_x &\mapsto \langle T\delta_x, \delta_x \rangle \delta_x. \end{aligned}$$

Provemos que $E(T)$ esta bem definida. Dados $\alpha_i \in \mathbb{C}, x_i \in P$

para $1 \leq i \leq n$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| E(T)\left(\sum \alpha_i \delta_{x_i}\right)\right\|^2 &= \left\| \sum \alpha_i \langle T\delta_{x_i}, \delta_{x_i}\rangle \delta_{x_i}\right\|^2 \\ &= \sum |\alpha_i \langle T\delta_{x_i}, \delta_{x_i}\rangle|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \sum |\alpha_i|^2 = \|T\|^2 \left\| \sum \alpha_i \delta_{x_i}\right\|^2. \end{aligned}$$

Logo, $E(T)$ está bem definida e $E$ é contrativa. Claramente, $E$ satisfaz (3.2) e disso segue que $E$ é linear. Afirmamos que $E$ é fiel. De fato, suponha $E(T^*T) = 0$. Então, para todo $x \in P$, temos que $\langle E(T^*T)\delta_x, \delta_x\rangle = \langle T^*T\delta_x, \delta_x\rangle = \|T\delta_x\|^2 = 0$. Consequentemente, $T = 0$.

Afirmamos que

$$E(\lambda_x \lambda_y^*) = \begin{cases} \lambda_x\lambda_y^*, & \text{caso } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha primeiro $x = y$. Para provar que $E(\lambda_x\lambda_x^*) = \lambda_x\lambda_x^*$, basta provar que $\lambda_x\lambda_x^*$ é diagonal com relação à base canônica, isto é, que para $p, q \in P$ distintos, $\langle \lambda_x\lambda_x^*\delta_p, \delta_q\rangle = 0$. Mas isso segue do fato de que $\langle \lambda_x\lambda_x^*\delta_p, \delta_q\rangle = \langle \lambda_x^*\delta_p, \lambda_x^*\delta_q\rangle$ e de (2.2).

Caso $x \neq y$, para provar que $E(\lambda_x\lambda_y^*) = 0$, basta mostrar que as entradas na diagonal da matriz de $\lambda_x\lambda_y^*$ são nulas. Ou seja, que para $p \in P$, $\langle \lambda_x\lambda_y^*\delta_p, \delta_p\rangle = 0$. Observe que $\langle \lambda_x\lambda_y^*\delta_p, \delta_p\rangle = \langle \lambda_y^*\delta_p, \lambda_x^*\delta_p\rangle$. Utilizando novamente (2.2), conclui-se que $\langle \lambda_x\lambda_y^*\delta_p, \delta_p\rangle = 0$.

Defina

$$\mathcal{D} := C^*(\{v_p v_p^*/p \in P\}) = \overline{\text{span}}\{v_p v_p^*/p \in P\} \tag{3.3}$$

e mostremos que $\tilde{\lambda}$ restrita a $\mathcal{D}$ é isométrica. Para isso, basta provar que para quaisquer $\alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{C}$, $x_1, ..., x_n \in P$ vale que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^* \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{x_i} v_{x_i}^* \right\|. \tag{3.4}$$

Como $\sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^* = \tilde{\lambda}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_{x_i} v_{x_i}^*\right)$, segue que vale "$\leq$" em (3.4).

Para provar que vale "$\geq$", começamos estimando o lado esquerdo de (3.4). Como $T := \sum \alpha_i\lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^*$ é invariante por $E$, temos que $T$ é diagonal com relação à base canônica. Logo, $\|T\| = \sup_{p\in P} |\langle T\delta_p, \delta_p\rangle|$.

Como

$$\langle \lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^*\delta_p, \delta_p\rangle = \begin{cases} 1, & \text{caso } x_i \leq p \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que

$$\|T\| = \sup_{p\in P}\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^*\delta_p, \delta_p \right\rangle\right| = \sup_{p\in P}\left|\sum_{x_i\leq p}^{n} \alpha_i\right|. \tag{3.5}$$

Quanto ao lado direito de (3.4), note primeiramente que os $v_{x_i}v_{x_i}^*$ são projeções comutativas. Então, via transformada de Gelfand, podemos ver os $v_{x_i}v_{x_i}^*$ como funções características $1_{X_i}$ com $X_i$ contido em um espaço topológico compacto $X$. Então,

$$\left\|\sum \alpha_i v_{x_i}v_{x_i}^*\right\| = \left\|\sum \alpha_i 1_{X_i}\right\|.$$

Como $\sum \alpha_i 1_{X_i}$ assume um número finito de valores, deve haver $x \in X$ tal que, definindo $A := \{i \in \{1, ..., n\}/x \in X_i\}$, vale que $A$ é não-vazio e

$$\left\|\sum \alpha_i 1_{X_i}\right\| = \left|\sum_{i\in A} \alpha_i\right|.$$

Queremos mostrar que existe $p \in P$ tal que

$$A = \{i \in \{1, ..., n\}/x_i \leq p\}.$$

Seja $\{i_1, ..., i_k\}$ uma enumeração para $A$, e defina $p := x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_n}$. Como $x \in X_i$ para cada $i \in A$, o produto $\prod_{i\in A} 1_{X_i}$ é diferente de zero. Mas esse produto está identificado, via transformada de Gelfand, com $\prod_{i\in A} v_{x_i}v_{x_i}^* = v_p v_p^*$. Concluímos que deve ser $p \neq \infty$. Obviamente, $x_i \leq p$ para $i \in A$.

Suponha que exista $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $j \notin A$ e $x_j \leq p$. Então, $v_{x_j}v_{x_j}^* v_p v_p^* = v_p v_p^*$. Utilizando a transformada de Gelfand, obtemos

$$1_{X_j}\prod_{i\in A} 1_{X_i} = \prod_{i\in A} 1_{X_i}.$$

Em particular, $x \in X_j$, contrariando que $j \notin A$. Logo,

$$\left\| \sum \alpha_i v_{x_i} v_{x_i}^* \right\| = \left| \sum_{x_i \leq p} \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{x_i} \lambda_{x_i}^* \right\|.$$

A última desigualdade acima sai de (3.5).

Portanto, $\tilde{\lambda}|_{\mathcal{D}}$ é isométrica.

Defina então $\phi := (\tilde{\lambda}|_{\mathcal{D}})^{-1} \circ E \circ \tilde{\lambda}$ e note que $\phi$ é linear, contrativa e satisfaz (3.1). Observe também que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} C^*(G,P) \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] \arrow[d, "\phi"'] & C^*(\{\lambda_p / p \in P\}) \arrow[d, "E"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\tilde{\lambda}|_{\mathcal{D}}"'] & C^*(\{\lambda_p \lambda_p^* / p \in P\}) \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Caso $(G,P)$ seja amenable, provemos que $\phi$ é fiel. Dado $a \in C^*(G,P)$, $\phi(a^*a) = 0$ implica $E \circ \tilde{\lambda}(a^*a) = 0$. Como $E$ é fiel e $\tilde{\lambda}$ é $*$-homomorfismo, temos que $\tilde{\lambda}(a^*a) = 0$. Mas do fato de $(G,P)$ ser amenable, segue $\tilde{\lambda}$ isomoforfismo e $a = 0$.

Reciprocamente, se $\phi$ for fiel e houver $a \in C^*(G,P)$ tal que $\tilde{\lambda}(a^*a) = 0$, teremos $\tilde{\lambda}|_{\mathcal{D}} \circ \phi(a^*a) = 0$. Como $\phi$ e $\tilde{\lambda}|_{\mathcal{D}}$ são fiéis, seguirá $a = 0$.

$\square$

No curso da demonstração acima, provamos um resultado o qual destacamos agora para uso posterior:

**Proposição 14.** *Existe $E : \mathcal{B}(\ell^2(P)) \to \mathcal{B}(\ell^2(P))$ linear, contrativa, fiel e satisfazendo:*

$$E(\lambda_x \lambda_y^*) = \begin{cases} \lambda_x \lambda_y^*, & \textit{caso } x = y \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir, provaremos que, dado um grupo quase-reticulado $(G,P)$, se $G$ é abeliano, então $(G,P)$ é amenable. Para isso, precisaremos de algumas definições e resultados de análise harmônica. Abaixo, $\mathbb{T}$ denota os números complexos de módulo 1.

**Definição 15.** Dado um grupo abeliano discreto $G$, o grupo dual $\hat{G}$ de $G$ é o conjunto de homomorfismos $\gamma : G \to \mathbb{T}$, munido da multiplicação e inversão ponto a ponto. Note que $\hat{G}$ é um subconjunto do conjunto de todas as funções de $G$ em $\mathbb{T}$, o qual denotamos por $\mathbb{T}^G$. Pelo teorema de Tychonoff, $\mathbb{T}^G$ munido da topologia produto é compacto. A topologia de $\hat{G}$ será a de subespaço de $\mathbb{T}^G$. Então, um net $(\gamma_i) \subset \hat{G}$ converge a $\gamma \in \hat{G}$ se e somente se $\gamma_i(g)$ converge a $\gamma(g)$ para todo $g \in G$. Disso segue que $\hat{G}$ é grupo topológico e é fechado em $\mathbb{T}^G$. Consequentemente, $\hat{G}$ é compacto.

**Proposição 16.** *Seja $(G, P)$ um grupo quase-reticulado com $G$ abeliano. Então, $(G, P)$ é amenable.*

*Demonstração.* Dado $\gamma \in \hat{G}$, defina

$$\begin{aligned} w^\gamma : P &\to C^*(G, P) \\ p &\mapsto \gamma(p)v_p. \end{aligned}$$

Então, $w^\gamma$ é uma representação covariante de $P$. Pela propriedade universal de $C^*(G, P)$, existe $\theta_\gamma : C^*(G, P) \to C^*(G, P)$ satisfazendo $\theta_\gamma(v_p) = \gamma(p)v_p$, para todo $p \in P$.

Note que, dados $\gamma, \alpha \in \hat{G}$, $\theta_{\gamma\alpha}(v_p) = (\gamma\alpha)(p)v_p = \gamma(p)\alpha(p)v_p = \theta_\gamma\theta_\alpha(v_p)$. Portanto, $\theta_{\gamma\alpha} = \theta_\gamma\theta_\alpha$. Além disso, denotando 1 como sendo a identidade de $\hat{G}$, $\theta_1$ é a aplicação identidade. Segue desses fatos que

$$\begin{aligned} \theta : \hat{G} &\to \operatorname{Aut}(C^*(G, P)) \\ \gamma &\mapsto \theta_\gamma \end{aligned}$$

é um homomorfismo de $\hat{G}$ nos automorfismos de $C^*(G, P)$, i.e., uma ação de $\hat{G}$ em $C^*(G, P)$. Afirmamos que $\theta$ é fortemente contínua. Dado um net $(\gamma_i)_{i\in I} \subset \hat{G}$ convergindo a $\gamma \in \hat{G}$, queremos provar que $\theta_{\gamma_i}(a) \to \theta_\gamma(a)$ para todo $a \in C^*(G, P)$.

Para provar isso, note que, dados $x, y \in P$, vale que

$$\theta_{\gamma_i}(v_x v_y^*) = \gamma_i(x)\overline{\gamma_i(y)}v_x v_y^* \to \gamma(x)\overline{\gamma(y)}v_x v_y^* = \theta_\gamma(v_x v_y^*).$$

Consequentemente, dado $b \in \operatorname{span}\{v_x v_y^*/x, y \in P\}$, temos que $\theta_{\gamma_i}(b) \to \theta_\gamma(b)$. Tome agora $a \in C^*(G, P)$ qualquer e note que

$$\operatorname{span}\{v_x v_y^*/x, y \in P\}$$

é denso em $C^*(G, P)$. Dado $\epsilon > 0$, tome $b \in \operatorname{span}\{v_x v_y^*/x, y \in P\}$ e $i_0 \in I$ tais que $\|a - b\| < \frac{\epsilon}{3}$ e $i \geq i_0 \implies \|\theta_{\gamma_i}(b) - \theta_\gamma(b)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Usando o fato de que automorfismos de $C^*$-álgebras são isométricos, segue que, para $i \geq i_0$,

$$\begin{aligned}\|\theta_{\gamma_i}(a) - \theta_\gamma(a)\| &\leq \|\theta_{\gamma_i}(a) - \theta_{\gamma_i}(b)\| + \|\theta_{\gamma_i}(b) - \theta_\gamma(b)\| \\ &+ \|\theta_\gamma(b) - \theta_\gamma(a)\| \\ &< \|a - b\| + \frac{\epsilon}{3} + \|b - a\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Provamos assim que $\theta$ é fortemente contínua.

Vamos agora mostrar que existe $\phi$ fiel como no teorema 13.

Seja $\mu$ a medida de de Haar normalizada em $\hat{G}$ e defina

$$\begin{aligned}\phi : C^*(G, P) &\to C^*(G, P) \\ a &\mapsto \int_{\hat{G}} \theta_\gamma(a) d\gamma.\end{aligned}$$

Acima, estamos utilizando a integral de Bochner, definida para funções tomando valores em um espaço de Banach. A definição desse tipo de integral e propriedades elementares podem ser encontradas em [Cohn 1994].

Temos que $\phi$ é linear, contrativa e provemos que é fiel. Dado $a \in C^*(G, P)$ não-nulo, devemos mostrar que $\phi(a^* a) \neq 0$.

Como os $\theta_\gamma$ são isometrias, temos $\|\theta_\gamma(a^* a)\| = \|a^* a\| = \|a\|^2$ para todo $\gamma \in \hat{G}$.

Para cada $\gamma \in \hat{G}$, como $\theta_\gamma(a^* a)$ é positivo, podemos escolher um estado $\tau_\gamma : C^*(G, P) \to \mathbb{C}$ tal que $\tau_\gamma(\theta_\gamma(a^* a)) = \|a\|^2$. Defina então, para cada $\gamma \in \hat{G}$, o aberto $A_\gamma := \left\{\alpha \in \hat{G} / \tau_\gamma(\theta_\alpha(a^* a)) > \frac{\|a\|^2}{2}\right\}$. Como, para cada $\gamma \in \hat{G}$, vale que $\gamma \in A_\gamma$, resulta que $G = \cup_{\gamma \in \hat{G}} A_\gamma$.

Como $\hat{G}$ é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{A_{\gamma_1}, ..., A_{\gamma_n}\}$. Logo, deve haver $\gamma_i$ tal que $\mu(A_{\gamma_i}) > 0$. Então,

$$\tau_{\gamma_i}\left(\int_{\hat{G}} \theta_\gamma(a^* a) d\gamma\right) = \int_{\hat{G}} \tau_{\gamma_i}(\theta_\gamma(a^* a)) d\gamma \geq \frac{\|a\|^2}{2} \mu(A_{\gamma_i}) > 0.$$

Disso concluímos que $\phi(a^* a) \neq 0$. Portanto, $\phi$ é fiel.

Finalmente, provemos que $\phi$ satisfaz (3.1). Dado $x \in P$, note que

$$\begin{aligned}\phi(v_x v_x^*) = \int_{\hat{G}} \theta_\gamma(v_x v_x^*) d\gamma &= \int_{\hat{G}} \gamma(x) v_x (\gamma(x) v_x)^* d\gamma \\ &= \int_{\hat{G}} v_x v_x^* d\gamma = v_x v_x^*.\end{aligned}$$

Dados $x, y \in P$ distintos, temos que

$$\begin{aligned}\phi(v_x v_y^*) = \int_{\hat{G}} \theta_\gamma(v_x v_y^*) d\gamma = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\overline{\gamma(y)} v_x v_y^* d\gamma \\ = v_x v_y^* \int_{\hat{G}} \gamma(xy^{-1}) d\gamma \overset{(*)}{=} 0.\end{aligned}$$

A igualdade (*) segue de [Hewitt e Ross 1979, Teorema 22.17 e Lema 23.19].

Utilizando o teorema 13, concluímos que $(G, P)$ é amenable. □

Note que, dado um grupo quase-reticulado $(G, P)$, se $P$ for abeliano, o grupo gerado por $P$ em $G$ será abeliano também. Como nas definições de $C^*(G, P)$ e de amenabilidade o que interessa é o semigrupo em questão, segue da proposição 16 que se $P$ for abeliano, então $(G, P)$ é amenable.

A seguir, provaremos que o coproduto de uma família de grupos quase-reticulados abelianos é amenable. Esse resultado é devido a Laca e Raeburn. A demonstração dele é similar à da proposição 16, porém com mais tecnicalidades. Começamos com um lema auxiliar.

**Lema 17.** *Sejam $(G, P)$ e $(H, Q)$ grupos quase-reticulados e suponha que exista um homomorfismo $\psi : G \to H$ tal que para quaisquer $x, y \in P$ com $x \vee y \neq \infty$, vale que*

$$\psi(x) = \psi(y) \implies x = y \quad e \tag{3.7}$$

$$\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y). \tag{3.8}$$

*Então $\overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P \text{ e } \psi(x) = \psi(y)\}$ é uma sub-$C^*$-álgebra de $C^*(G, P)$ sobre a qual $\tilde{\lambda}$ é injetiva.*

*Demonstração.* Observamos primeiro que, como consequência de (3.8), $\psi$ preserva a ordem em $P$. De fato, dados $x, y \in P$,

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies x \vee y = y \\ &\implies \psi(x) \vee \psi(y) = \psi(x \vee y) = \psi(y) \\ &\implies \psi(x) \leq \psi(y). \end{aligned}$$

Em particular, $\psi(P) \subset Q$.

Seja $\mathcal{F}$ a coleção de subconjuntos finitos não-vazios $F \subset Q \cup \{\infty\}$ tais que $s \vee t \in F$ para quaisquer $s, t \in F$. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $\mathcal{K}_F := \overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P \text{ e } \psi(x) = \psi(y) \in F\}$. Dado $F \in \mathcal{F}$, caso não exista $x \in P$ tal que $\psi(x) \in F$, convencionamos que $\mathcal{K}_F = \{0\}$. Para $s \in Q \cup \{\infty\}$, escreveremos $\mathcal{K}_s$ ao invés de $\mathcal{K}_{\{s\}}$.

Provemos que, para $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{K}_F$ é sub-$C^*$-álgebra de $C^*(G, P)$. Naturalmente, $\mathcal{K}_F$ é subespaço fechado quanto à norma e quanto à involução. Provemos que é também fechado quanto ao produto.

Para isso, dados $s, t \in F$, suponha que existam $u, w, x, y \in P$ tais que $\psi(u) = \psi(w) = s$ e $\psi(x) = \psi(y) = t$. Por (2.8),

$$v_u v_w^* v_x v_y^* = v_{uw^{-1}(w \vee x)} v_{yx^{-1}(w \vee x)}^*.$$

Caso $w \vee x = \infty$, o produto acima se anula e, portanto, está em $\mathcal{K}_F$. Caso $w \vee x \neq \infty$, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(uw^{-1}(w \vee x)) &= \psi(u)\psi(w)^{-1}\psi(w \vee x) \\
&= \psi(w \vee x) \\
&= \psi(y)\psi(x)^{-1}\psi(w \vee x) \\
&= \psi(yx^{-1}(w \vee x)).
\end{aligned}$$

Como $uw^{-1}(w \vee x)$ e $yx^{-1}(w \vee x)$ pertencem a $P$ e $\psi(w \vee x) = \psi(w) \vee \psi(x) = s \vee t \in F$, concluímos que $\mathcal{K}_F$ é fechado quanto ao produto. Portanto, $\mathcal{K}_F$ é sub-$C^*$-álgebra de $C^*(G, P)$.

Também é consequência das contas acima que

$$\overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P \text{ e } \psi(x) = \psi(y)\}$$

é fechado quanto ao produto, sendo sub-$C^*$-álgebra de $C^*(G, P)$, portanto.

Provemos que $\overline{\cup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_F} = \overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P \text{ e } \psi(x) = \psi(y)\}$. Claramente, vale "$\subset$". Para provar o outro lado, note que, dados $x, y \in P$ tais que $\psi(x) = \psi(y)$, vale que $v_x v_y^* \in \mathcal{K}_{\psi(x)}$. Portanto, para provar "$\supset$", é suficiente mostrar que $\cup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_F$ é subespaço.

Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, seja $F_{1,2} := \{x_1 \vee x_2 / x_1, x_2 \in F_1 \cup F_2\}$. Note que $F_{1,2}$ é finito, fechado com relação a $\vee$ e contém $F_1 \cup F_2$. Em particular, $F_{1,2} \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{K}_{F_1} \cup \mathcal{K}_{F_2} \subset \mathcal{K}_{F_{1,2}}$. Provamos assim que $\{\mathcal{K}_F / F \in \mathcal{F}\}$ é uma família dirigida de subespaços e, consequentemente, sua união também é subespaço.

Afirmamos que para provar que $\tilde{\lambda}$ é fiel em $\overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / x, y \in P \text{ e } \psi(x) = \psi(y)\} = \overline{\cup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_F}$ basta provar que $\tilde{\lambda}$ é fiel em $\mathcal{K}_F$ para cada $F \in \mathcal{F}$. De fato, suponha que isso seja verdade. Dado $a \in$

$\overline{\cup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{K}_F}$, temos que $a = \lim a_n$, com $a_n \in \mathcal{K}_{F_n}$. Então,

$$\|\tilde{\lambda}(a)\| = \lim \|\tilde{\lambda}(a_n)\| = \lim \|a_n\| = \|a\|.$$

Mostremos então que $\tilde{\lambda}$ é fiel em $\mathcal{K}_F$, para cada $F \in \mathcal{F}$. Primeiramente, vamos provar que, para qualquer $s \in Q$, $\tilde{\lambda}$ é fiel quando restrita a $\mathcal{K}_s$. Para tanto, defina $M_s := \overline{\text{span}}\{\delta_z \in \ell^2(P)/z \in P \;\text{ e }\; \psi(z) = s\}$ e

$$\begin{aligned} J_s : M_s &\to \ell^2(P) \\ \delta_z &\mapsto \delta_z. \end{aligned}$$

Note que $J_s^* : \ell^2(P) \to M_s$ satisfaz

$$J_s^*(\delta_z) = \begin{cases} \delta_z, & \text{caso } \delta_z \in M_s \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina $\Lambda_s : \mathcal{K}_s \to \mathcal{B}(M_s)$ por $\Lambda_s(T) = J_s^*\tilde{\lambda}(T)J_s$, $T \in \mathcal{K}_s$. Provemos que $\Lambda_s$ é $*$-homomorfismo. Para isso, basta mostrar que, para $T \in \mathcal{K}_s$, $\tilde{\lambda}(T)(M_s) \subset M_s$.

Observe primeiro que, dados $x, y \in P$ tais que $\psi(x) = \psi(y) = s$, temos que $\tilde{\lambda}(v_x v_y^*)(\delta_y) = \lambda_x\lambda_y^*(\delta_y) = \delta_x$. Caso $z \in P$, $\psi(z) = s$ e $z \neq y$, temos por (3.7) que $z \vee y = \infty$. Consequentemente, $\tilde{\lambda}(v_x v_y^*)(\delta_z) = 0$. A partir dessas observações, segue que $\tilde{\lambda}(v_x v_y^*)(M_s) \subset M_s$. Finalmente, como $\mathcal{K}_s = \overline{\text{span}}\{v_x v_y^*/x, y \in P \text{ e } \psi(x) = \psi(y) = s\}$, concluímos que, para qualquer $T \in \mathcal{K}_s$, $\tilde{\lambda}(T)(M_s) \subset M_s$.

Assim, $\Lambda_s$ é $*$-homomorfismo. Acabamos provando também que, dados $x, y \in P$ tais que $\psi(x) = \psi(y) = s$, vale que $\Lambda_s(v_x v_y^*) = \langle\cdot, \delta_y\rangle\delta_x$.

Denote a coleção de subconjuntos finitos de $\psi^{-1}(\{s\})\cap P$ por $\mathcal{F}_s$. Dado $F \in \mathcal{F}_s$, $\text{span}\{v_x v_y^*/x, y \in F\}$ é fechado quanto à involução. Provemos que é fechado quanto ao produto. Dados $x, y, z, u \in F$, devemos mostrar que $v_x v_y^* v_z v_u^* \in \text{span}\{v_x v_y^*/x, y \in F\}$. De fato, por (3.7), deve ser $y = z$ ou $y \vee z = \infty$. No primeiro caso, temos $v_x v_y^* v_z v_u^* = v_x v_u^*$. No segundo, temos $v_x v_y^* v_z v_u^* = 0$. De qualquer forma, $v_x v_y^* v_z v_u^* \in \text{span}\{v_x v_y^*/x, y \in F\}$. Portanto, $\text{span}\{v_x v_y^*/x, y \in F\}$ é uma sub-$C^*$-álgebra de $\mathcal{K}_s$ e tem dimensão finita.

Como

$$\mathcal{K}_s = \overline{\cup_{F\in\mathcal{F}_s}\text{span}\{v_x v_y^*/x, y \in F\}},$$

temos que, para provar que $\Lambda_s$ é fiel, basta mostrar que é fiel quando restrita a $\text{span}\{v_x v_y^*/x, y \in F\}$, para cada $F \in \mathcal{F}_s$. Tome então um $F$ desse tipo. Dados $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, $x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n \in F$, tais que

$i \neq j \implies (x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ e $\alpha_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, temos que

$$\Lambda_s(\sum \alpha_i v_{x_i} v_{y_i}^*)(\delta_{y_1}) = \sum \alpha_i \langle \delta_{y_1}, \delta_{y_i} \rangle \delta_{x_i} = \sum_{y_i = y_1} \alpha_i \delta_{x_i} \neq 0.$$

Logo, $\Lambda_s(\sum \alpha_i v_{x_i} v_{y_i}^*) \neq 0$. Provamos assim que $\Lambda_s$ é fiel quando restrita a $\text{span}\{v_x v_y^* / x, y \in F\}$. Pelo que já observamos, segue $\Lambda_s$ fiel. Pela definição de $\Lambda_s$, conclui-se que $\tilde{\lambda}$ é fiel quando restrita a $\mathcal{K}_s$.

Por fim, provemos que, dado $F \in \mathcal{F}$, $\tilde{\lambda}$ é fiel em $\mathcal{K}_F$. Tome $T \in \mathcal{K}_F$. Então,

$$T = \lim_n \sum_{s \in F} T_{n,s}, \quad \text{com } T_{n,s} \in \mathcal{K}_s \text{ para } s \in F.$$

Por $F$ ser finito, conclui-se que possui elemento minimal, i.e., existe $s_0 \in F$ tal que se $s \in F$ e $s \leq s_0$, então $s = s_0$. Afirmamos que $J_{s_0}^* \tilde{\lambda}(T_{n,s}) J_{s_0} = 0$, para $s \in F$ distinto de $s_0$. De fato, dados $x, y \in P$ tais que $\psi(x) = \psi(y) = s$ e $\delta_z \in M_{s_0}$, temos que

$$\tilde{\lambda}(v_x v_y^*)(\delta_z) \neq 0 \implies y \leq z \implies s = \psi(y) \leq \psi(z) = s_0,$$

contrariando a minimalidade de $s_0$. Pela definição de $\mathcal{K}_s$, concluímos que $\tilde{\lambda}(T_{n,s})(M_{s_0}) = \{0\}$. Consequentemente, $J_{s_0}^* \tilde{\lambda}(T_{n,s}) J_{s_0} = 0$.

Além disso, pelo que já provamos, $\|T_{n,s_0}\| = \|J_{s_0}^* \tilde{\lambda}(T_{n,s_0}) J_{s_0}\|$.

Suponha $\tilde{\lambda}(T) = 0$. Então,

$$J_{s_0}^* \tilde{\lambda} \left( \sum_{s \in F} T_{n,s} \right) J_{s_0} = J_{s_0}^* \tilde{\lambda}(T_{n,s_0}) J_{s_0} = \Lambda_{s_0}(T_{n,s_0}) \to 0.$$

Portanto, $T_{n,s_0} \to 0$ e

$$T = \lim_n \sum_{s \in F \setminus \{s_0\}} T_{n,s}.$$

Repetindo esse argumento $\#F - 1$ vezes, obtemos $T \in \mathcal{K}_s$ para algum $s \in F$. Como $\tilde{\lambda}$ é fiel quando restrita a $\mathcal{K}_s$, segue que $T = 0$. $\square$

**Proposição 18.** *Sejam $(G, P)$, $(H, Q)$ grupos quase-reticulados e suponha que exista um homomorfismo $\psi : G \to H$ como no lema 17. Se $H$ é abeliano, então $(G, P)$ é amenable.*

*Demonstração.* Argumentando como na proposição 16, temos que existe uma ação fortemente contínua $\theta$ de $\hat{H}$ em $C^*(G, P)$ dada por

$\theta_\gamma(v_x) = \gamma(\psi(x))v_x$, para $x \in P$ e $\gamma \in \hat{H}$. Defina

$$\begin{aligned} \Phi : C^*(G,P) &\to C^*(G,P) \\ a &\mapsto \int_{\hat{H}} \theta_\gamma(a) d\gamma. \end{aligned}$$

Como na proposição 16, $\Phi$ é linear, contrativa e fiel. Provemos que $\Phi$ é positiva. Dado $a \in C^*(G,P)$ e um funcional positivo $\tau : C^*(G,P) \to \mathbb{C}$, temos que

$$\tau\left(\int_{\hat{H}} \theta_\gamma(a^*a)d\gamma\right) = \int_{\hat{H}} \tau(\theta_\gamma(a^*a))d\gamma \geq 0.$$

Dessa conta, segue que $\Phi$ é positiva.

Além disso, dados $x, y \in P$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(v_x v_y^*) = \int_{\hat{H}} \theta_\gamma(v_x v_y^*)d\gamma &= \int_{\hat{H}} \gamma(\psi(x))\gamma(\psi(y)^{-1})v_x v_y^* d\gamma \\ &= \begin{cases} v_x v_y^*, & \text{caso } \psi(x) = \psi(y) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $\phi$ como no teorema 13. Note que

$$\phi \circ \Phi(v_x v_y^*) = \begin{cases} v_x v_y^*, & \text{caso } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\phi \circ \Phi = \phi$. Suponha provado que $\phi$ é fiel quando restrita à imagem de $\Phi$. Então, dado $a \in C^*(G,P)$, caso $\phi(a^*a) = 0$, teremos que $\phi \circ \Phi(a^*a) = 0$. Então, como $\Phi$ é positiva, teremos que $\Phi(a^*a) = 0$. Como $\Phi$ é fiel, seguirá $a = 0$.

Assim, tudo que temos que fazer para concluir a demonstração é provar que $\phi$ é fiel quando restrita à imagem de $\Phi$, que por sua vez é igual a $\overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / \psi(x) = \psi(y)\}$.

Seja $E$ como na proposição 14. Temos que $E \circ \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \circ \phi$. Suponha $\phi(a^*a) = 0$ para um certo $a \in \overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / \psi(x) = \psi(y)\}$. Como $E$ é fiel e $\tilde{\lambda}$ é injetiva quando restrita a $\overline{\text{span}}\{v_x v_y^* / \psi(x) = \psi(y)\}$, segue $a = 0$. $\square$

Finalmente, provemos o teorema que era o principal objetivo deste capítulo. O resultado e demonstração são devidos a Laca e Raeburn.

**Teorema 19.** *O coproduto* $(\coprod_{i\in I} G_i, \coprod_{i\in I} P_i)$ *de uma família* $\{(G_i, P_i)\}$ *de grupos quase-reticulados abelianos é amenable.*

*Demonstração.* Como no exemplo 6, um elemento genérico de $\coprod_{i\in I} G_i$ distinto da identidade escreve-se de forma única como $g_{i_1}...g_{i_n}$ com $n \geq 1$, $g_{i_j} \in G_{i_j}$, $g_{i_j} \neq e_{i_j}$ para $1 \leq j \leq n$, $i_j \neq i_{j+1}$ para $1 \leq j < n$. Pela propriedade universal do coproduto, existe um homomorfismo $\psi : \coprod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} G_i$ que manda cada $g_{i_0} \in G_{i_0}$ em $(g_i)_{\in I}$ com $g_i = e_i$ para $i \neq i_0$.

Como $\prod_{i\in I} G_i$ é abeliano, para usar a proposição 18 e concluir que $(\coprod_{i\in I} G_i, \coprod_{i\in I} P_i)$ é amenable, precisamos apenas mostrar que $\psi$ satisfaz (3.7) e (3.8) para quaisquer $x, y \in \coprod_{i\in I} P_i$ tais que $x \vee y \neq \infty$. Observe que $\psi(\coprod_{i\in I} P_i) \subset \prod_{i\in I} P_i$. Em partcular, $\psi$ preserva a ordem.

Como o caso em que $x = y$ é trivial, vamos supor $x \neq y$.

Denote o elemento neutro de $\coprod_{i\in I} G_i$ por $e$. Caso $y = e$, provemos que $\psi(x) \neq (e_i)_{i\in I} = \psi(e)$. Suponha $x = x_{i_1}...x_{i_n}$. Seja $F := \{j \in \{1, ..., n\}/i_j = i_1\}$. Note que

$$\psi(x)_{i_1} = \prod_{j\in F} x_{i_j} \geq x_{i_1} > e_{i_1}.$$

Consequentemente, $\psi(x) \neq (e_i)$. Obviamente, $\psi(x) \vee \psi(e) = \psi(x \vee e)$.

Finalmente, suponha $x, y \in \coprod_{i\in I} P_i$ distintos entre si e diferentes de $e$. Seja $z = x \vee y$. Suponha $z = z_{i_i}...z_{i_n}$. Então, raciocinando como no exemplo 6, devemos ter $x = z_{i_1}...z_{i_{j-1}}a$, com $a \in P_{i_j}$, $e_{i_j} < a \leq z_{i_j}$ e $y = z_{i_1}...z_{i_{l-1}}b$, com $b \in P_{i_l}$, $e_{i_l} < b \leq z_{i_l}$. Como $z_{i_1}...z_{i_{\max\{k,l\}}}$ é cota superior para $x$ e $y$, deve ser $n = \max\{k, l\}$.

Caso $k < l$, temos que $x < y$. Nesse caso, $x \vee y = y$. Como $x^{-1}y \neq e$, temos, pelo que já foi observado, que $\psi(x) < \psi(y)$. Daí segue (3.7) e (3.8). Analogamente caso $l < k$.

Finalmente, suponha $l = k = n$. Então $x = z_{i_1}...z_{i_{n-1}}a$ e $y = z_{i_1}...z_{i_{n-1}}b$. Se $\psi(x) = \psi(y)$, temos então que $\psi(a) = \psi(b)$. Logo, como $a, b \in P_{i_n}$, temos que $a = b$, contrariando que $x \neq y$.

Como $z = x \vee y$, temos que $z_{i_n} = a \vee b$, e isso implica $\psi(a) \vee \psi(b) = \psi(z_{i_n})$. Logo,

$$\begin{aligned}
\psi(x \vee y) &= \psi(z_{i_1}...z_{i_{n-1}})\psi(z_{i_n}) = \psi(z_{i_1}...z_{i_{n-1}})(\psi(a) \vee \psi(b)) \\
&\overset{(*)}{=} (\psi(z_{i_1}...z_{i_{n-1}})\psi(a)) \vee (\psi(z_{i_1}...z_{i_{n-1}})\psi(b)) \\
&= \psi(x) \vee \psi(y).
\end{aligned}$$

A igualdade (*) segue do fato de que, dado um grupo quase-reticulado $(G, P)$ e $x, y, z \in P$ tais que $x \vee y \neq \infty$, temos que $(zx) \vee (zy) = z(x \vee y)$. $\square$

**Exemplo 20.** Considere $(F_2, P)$ e $(F_\infty, SF_\infty)$ como no exemplo 7. Observe que $(F_\infty, SF_\infty)$ pode ser identificado com $(\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}, \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N})$. Segue então do teorema 19 que $(F_\infty, SF_\infty)$ é amenable. Como $P$ é isomorfo a $SF_\infty$ como semigrupo, concluímos que $(F_2, P)$ é amenable.

Em [Nica 1992], o autor prova que o grupo quase-reticulado $(F_n, SF_n)$ do exemplo 5 é amenable, que é um caso bastante particular do teorema 19. No entanto, a demonstração de Nica, inspirada na decomposição de Wold de isometrias, é completamente diferente da demonstração do teorema 19, e mais intuitiva.

# 4 REPRESENTAÇÕES FIÉIS

Neste capítulo, provamos um teorema devido a Laca e Raeburn que dá uma condição elegante para uma representação da $C^*$-álgebra de um grupo quase-reticulado amenable ser fiel. Como aplicação desse resultado, provaremos que a $C^*$-álgebra universal gerada por um conjunto infinito de isometrias com imagens mutualmente ortogonais é simples.

Primeiro, daremos uma ideia sobre a demonstração do teorema. Dados $(G, P)$ grupo quase-reticulado e $W : P \to \mathcal{A}$ representação covariante, considere $\phi$ como no teorema 13 e $\mathcal{D}$ como em (3.3). O que faremos é provar que, sob uma certa condição, $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel e existe uma aplicação $\phi_W : C^*(\{W_p/p \in P\}) \to C^*(\{W_p/p \in P\})$ linear e contrativa satisfazendo

$$\phi_W(W_x W_y^*) = \begin{cases} W_x W_y^*, & \text{caso } x = y \\ 0, & \text{caso } x \neq y. \end{cases} \tag{4.1}$$

Então, pelo corolário 11, o seguinte diagrama comutará:

$$\begin{array}{ccc} C^*(G,P) & \xrightarrow{\tilde{W}} & C^*(\{W_p/p \in P\}) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_W} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[\tilde{W}|_{\mathcal{D}}]{} & C^*(\{W_p/p \in P\}) \end{array}$$

Caso $(G, P)$ seja amenable, teremos também que $\phi$ é fiel. Daí seguirá facilmente que $\tilde{W}$ é fiel.

Para provar que $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel, deveremos estimar a norma de termos do tipo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_{x_i} W_{x_i}^*$. Esse é o objetivo do próximo lema, cuja demonstração pode ser vista como um refinamento de argumentos do teorema 13.

Dado $A = \{x_1, ..., x_n\} \subset P$, denotaremos $x_1 \vee ... \vee x_n$ por $\sigma A$.

**Lema 21.** *Seja $(G, P)$ grupo quase-reticulado e $W : P \to \mathcal{A}$ representação covariante. Para $x \in P \cup \{\infty\}$, defina $L_x := W_x W_x^*$.*

*Dados $F$ um subconjunto finito de $P$ e $A \subset F$, seja*

$$Q_A := \prod_{x \in A} L_x \prod_{x \in F \setminus A} (1 - L_x) = L_{\sigma A} \prod_{x \in F \setminus A} (1 - L_x).$$

*No caso em que $A = \emptyset$, estamos interpretando a expressão acima como sendo $Q_\emptyset = \prod_{x\in F}(1 - L_x)$. Caso $A = F$, $Q_F = \prod_{x\in A} L_x = L_{\sigma F}$.*

*Então, $\{Q_A/A \subset F\}$ é uma decomposição da unidade em projeções mutualmente ortogonais que satisfaz, para quaisquer $\alpha_x \in \mathbb{C}$, $x \in F$, o seguinte:*

$$\sum_{x\in F} \alpha_x L_x = \sum_{A\subset F} \left( \sum_{x\in A} \alpha_x \right) Q_A \tag{4.2}$$

$$\left\| \sum_{x\in F} \alpha_x L_x \right\| = \max \left\{ \left| \sum_{x\in A} \alpha_x \right| / A \subset F \ e \ Q_A \neq 0 \right\}. \tag{4.3}$$

*Demonstração.* Provemos primeiro que

$$\prod_{x\in F} (L_x + (1 - L_x)) = \sum_{A\subset F} \prod_{x\in A} L_x \prod_{x\in F\setminus A} (1 - L_x). \tag{4.4}$$

Faremos isso por indução na cardinalidade de $F$. Caso $\#F = 1$, i.e., $F = \{y\}$, temos que o somatório acima possui dois termos, associados a $A = \{y\}$ e $A = \emptyset$. Então, os dois lados da igualdade acima são iguais a $L_y + (1 - L_y)$.

Dado $n \geq 1$, suponha que (4.4) seja válido para qualquer $H \subset P$ com cardinalidade $n$. Provemos que (4.4) vale para um $F \subset P$ com cardinalidade $n+1$. Neste caso, podemos supor $F = H \cup \{y\}$ e $\#H = n$.

$$\prod_{x\in H\cup\{y\}} (L_x + (1 - L_x)) = \left( \prod_{x\in H} L_x + (1 - L_x) \right) (L_y + (1 - L_y))$$

$$= \left( \sum_{A\subset H} \prod_{x\in A} L_x \prod_{x\in H\setminus A} (1 - L_x) \right) (L_y + (1 - L_y))$$

$$= \sum_{A\subset H} L_y \prod_{x\in A} L_x \prod_{x\in H\setminus A} (1 - L_x) + \sum_{A\subset H} \prod_{x\in A} L_x (1 - L_y) \prod_{x\in H\setminus A} (1 - L_x)$$

$$= \sum_{\substack{B\subset F\\ y\in B}} \prod_{z\in B} L_z \prod_{z\in F\setminus B} (1 - L_z) + \sum_{\substack{B\subset F\\ y\notin B}} \prod_{z\in B} L_z \prod_{z\in F\setminus B} (1 - L_z)$$

$$= \sum_{B\subset F} \prod_{z\in B} L_z \prod_{z\in F\setminus B} (1 - L_z).$$

Assim, provamos que (4.4) vale para qualquer $F \subset P$ finito.

Portanto,

$$1 = \prod_{x \in F} (L_x + (1 - L_x)) = \sum_{A \subset F} \prod_{x \in A} L_x \prod_{x \in F \setminus A} (1 - L_x)$$
$$= \sum_{A \subset F} Q_A.$$

Temos assim que a unidade escreve-se como a soma das projeções $Q_A$. Como os $Q_A$ comutam, segue que são mutualmente ortogonais.

Provemos agora (4.2):

$$\sum_{x \in F} \alpha_x L_x = \sum_{x \in F} \alpha_x L_x \left( \sum_{A \subset F} Q_A \right)$$
$$= \sum_{A \subset F} \sum_{x \in F} \alpha_x L_x Q_A = (*).$$

Se $x \notin A$, $L_x Q_A$ contém um termo $L_x(1 - L_x)$. Assim, $L_x Q_A = 0$. Por outro lado, se $x \in A$, $Q_A$ possui um termo $L_x$. Então, $L_x Q_A = Q_A$. Logo,

$$(*) = \sum_{A \subset F} \left( \sum_{x \in A} \alpha_x \right) Q_A.$$

Como os $Q_A$ são projeções mutualmente ortogonais, podemos utilizar a transformada de Gelfand para concluir que

$$\left\| \sum_{x \in F} \alpha_x L_x \right\| = \left\| \sum_{A \subset F} \left( \sum_{x \in A} \alpha_x \right) Q_A \right\|$$
$$= \max \left\{ \left| \sum_{x \in A} \alpha_x \right| / A \subset F \text{ e } Q_A \neq 0 \right\}.$$

$\square$

**Proposição 22.** *Seja $(G, P)$ grupo quase-reticulado. Se $W$ é uma representação covariante de $P$, então $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel se e somente se*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - W_{x_i} W_{x_i}^*) \neq 0, \quad \textit{para quaisquer } x_1, ..., x_n \in P \setminus \{e\}. \qquad (4.5)$$

*Demonstração.* Suponha que $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel. Dados $x_1, ..., x_n \in P \setminus \{e\}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^{n}(I - \lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^*)\right)(\delta_e) = \delta_e \neq 0 \\
&\Longrightarrow\ \tilde{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1 - v_{x_i}v_{x_i}^*)\right) = \prod_{i=1}^{n}(I - \lambda_{x_i}\lambda_{x_i}^*) \neq 0 \\
&\Longrightarrow\ \prod_{i=1}^{n}(1 - v_{x_i}v_{x_i}^*) \neq 0 \ \Longrightarrow\ \prod_{i=1}^{n}(1 - W_{x_i}W_{x_i}^*) \neq 0.
\end{aligned}$$

Assim, (4.5) se verifica.

Reciprocamente, suponha que (4.5) valha e provemos que $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel. Para isso, basta mostrar que, dado $F \subset P$ finito, e $\alpha_x \in \mathbb{C}$ para $x \in F$, vale que

$$\left\|\sum_{x\in F}\alpha_x W_x W_x^*\right\| = \left\|\sum_{x\in F}\alpha_x v_x v_x^*\right\|. \tag{4.6}$$

Obviamente, vale "$\leq$", pois

$$\sum_{x\in F}\alpha_x W_x W_x^* = \tilde{W}\left(\sum_{x\in F}\alpha_x v_x v_x^*\right).$$

Para provar que vale "$\geq$" em (4.6), utilizaremos as estimativas do lema 21.

Como

$$\begin{aligned}
v : P &\to C^*(G, P) \\
p &\mapsto v_p
\end{aligned}$$

é representação covariante, podemos tomar uma decomposição em projeções $\{Q_A / A \subset F\}$ da unidade de $C^*(G, P)$ como no lema 21. Seja $\{Q_A^W / A \subset F\}$ a decomposição em projeções associada à representação $W$.

Pelo lema 21,

$$\left\|\sum_{x\in F}\alpha_x W_x W_x^*\right\| = \max\left\{\left|\sum_{x\in A}\alpha_x\right| / A \subset F \text{ e } Q_A^W \neq 0\right\}$$

e

$$\left\| \sum_{x\in F} \alpha_x v_x v_x^* \right\| = \max\left\{ \left| \sum_{x\in A} \alpha_x \right| / A \subset F \ \text{ e } Q_A \neq 0 \right\}.$$

Portanto, para mostrar que vale "$\geq$" em (4.6), é suficiente provar que, dado $A \subset F$ não-vazio, $Q_A \neq 0$ implica $Q_A^W \neq 0$.

Tome então $A$ não-vazio tal que $Q_A \neq 0$. Então, $\sigma A \neq \infty$. Afirmamos que, para $x \in F \setminus A$, não pode ocorrer $\sigma A \geq x$. Se isso ocorresse, teríamos que $\sigma A \vee x = \sigma A$. Como $Q_A$ contém um termo

$$v_{\sigma A} v_{\sigma A}^* (1 - v_x v_x^*) = v_{\sigma A} v_{\sigma A} - v_{\sigma A \vee x} v_{\sigma A \vee x} = 0,$$

teríamos $Q_A = 0$.

Caso $\sigma A \vee x = \infty$ para todo $x \in F \setminus A$, temos que

$$Q_A^W = W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* \prod_{x \in F\setminus A} (1 - W_x W_x^*) = W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* \neq 0.$$

.

Suponha então que exista $z \in F \setminus A$ tal que $\sigma A < z$. Temos que

$$\begin{aligned}
Q_A^W &= W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* \prod_{x\in F\setminus A} (1 - W_x W_x^*) \\
&= (W_{\sigma A} W_{\sigma A}^*)^{\#(F\setminus A)} \prod_{x\in F\setminus A} (1 - W_x W_x^*) \\
&= \prod_{x\in F\setminus A} (W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* - W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* W_x W_x^*) \\
&= \prod_{\substack{x\in F\setminus A \\ \sigma A < x}} (W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* - W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* W_x W_x^*) \prod_{\substack{x\in F\setminus A \\ \sigma A \vee x = \infty}} W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* \\
&= \prod_{\substack{x\in F\setminus A \\ \sigma A < x}} (W_{\sigma A} W_{\sigma A}^* - W_x W_x^*) \\
&= \prod_{\substack{x\in F\setminus A \\ \sigma A < x}} W_{\sigma A} (1 - W_{(\sigma A)^{-1}x} W_{(\sigma A)^{-1}x}^*) W_{\sigma A}^* \\
&\overset{(*)}{=} W_{\sigma A} \left( \prod_{\substack{x\in F\setminus A \\ \sigma A < x}} (1 - W_{(\sigma A)^{-1}x} W_{(\sigma A)^{-1}x}^*) \right) W_{\sigma A}^*.
\end{aligned}$$

(*) segue do fato de $W_{\sigma A}$ ser isometria, i.e., $W_{\sigma A}^* W_{\sigma A} = 1$. Logo, ocorre um cancelamento mútuo no produto.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|Q_A^W\| &= \left\| W_{\sigma A} \left( \prod_{\substack{x \in F \setminus A \\ \sigma A < x}} (1 - W_{(\sigma A)^{-1}x} W_{(\sigma A)^{-1}x}^*) \right) W_{\sigma A}^* \right\| \\
&= \left\| \left( \prod_{\substack{x \in F \setminus A \\ \sigma A < x}} (1 - W_{(\sigma A)^{-1}x} W_{(\sigma A)^{-1}x}^*) \right) \right\| \overset{(**)}{>} 0.
\end{aligned}$$

(**) é consequência de $W$ satisfazer (4.5). □

O próximo lema serve para auxiliar-nos na construção de uma $\phi_W$ satisfazendo (4.1), no caso em que $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel.

**Lema 23.** *Seja $(G, P)$ grupo quase-reticulado e $W : P \to \mathcal{A}$ uma representação covariante tal que $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel. Seja $F \subset P$ finito e $\alpha_x \in \mathbb{C}$ para $x \in F$. Existe uma projeção $Q \in \tilde{W}(\mathcal{D})$ satisfazendo*

$$QW_x W_y^* Q = 0 \quad \text{para } x, y \in F, x \neq y \text{ e} \tag{4.7}$$

$$\left\| Q \left( \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right) Q \right\| = \left\| \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right\|. \tag{4.8}$$

*Demonstração.* Caso $F$ só tenha um elemento, basta tomar $Q = 1$.

Caso

$$\left\| \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right\| = 0,$$

basta tomar $Q = 0$. Suponha então que a norma acima é positiva e que $F$ possua mais de um elemento. Pelo lema 21, existe $A \subset F$ não-vazio tal que $Q_A^W \neq 0$ e

$$\left\| \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right\| = \left| \sum_{x \in A} \alpha_x \right|.$$

Vamos dividir o problema em casos:

*Caso 1:* $A$ contém um único elemento $z$.

Neste caso, defina

$$Q := Q_A^W = W_z W_z^* \prod_{b \in F \setminus A} (1 - W_b W_b^*) = \left( \prod_{b \in F \setminus A} (1 - W_b W_b^*) \right) W_z W_z^*.$$

Dados $x, y \in F$, $x \neq y$, suponha, sem perda de generalidade, $x \notin A$. O produto $QW_xW_y^*Q$ contém um termo $(1 - W_xW_x^*)W_x = 0$. Já $QW_yW_x^*Q$ possui um termo $W_x^*(1 - W_xW_x^*) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} &\left\| Q_A^W \left( \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right) Q_A^W \right\| = \| Q_A^W \alpha_z W_z W_z^* Q_A^W \| \\ &= |\alpha_z| = \left\| \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right\|. \end{aligned}$$

*Caso 2:* $A$ possui mais de um elemento.

Como $Q_A^W \neq 0$, segue $\sigma A \neq \infty$. Daqui para baixo, denotaremos $\sigma A$ por $a$. Dados $x, y \in A$ com $x \neq y$, defina

$$d_{x,y} = \begin{cases} (x^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a), & \text{caso } (x^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a) \neq e \\ (y^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Caso $x^{-1}a \vee y^{-1}a = \infty$, estamos interpretando $d_{x,y}$ como sendo $\infty$.

Note que $(x^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a) = e$ implica $x^{-1}a \vee y^{-1}a = x^{-1}a$ e $d_{x,y} = (y^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a) = (y^{-1}a)^{-1}x^{-1}a = a^{-1}yx^{-1}a \neq e$ pois $x \neq y$. Ou seja, em qualquer caso, $d_{x,y} \neq e$.

Defina

$$\begin{aligned} Q &:= Q_A^W \prod_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} (W_a W_a^* - W_{ad_{x,y}} W_{ad_{x,y}}^*) \\ &= W_a W_a^* \prod_{z \in F \setminus A} (1 - W_z W_z^*) \prod_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} (W_a W_a^* - W_{ad_{x,y}} W_{ad_{x,y}}^*) \\ &= \prod_{z \in F \setminus A} (W_a W_a^* - W_{a \vee z} W_{a \vee z}^*) \prod_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} (W_a W_a^* - W_{ad_{x,y}} W_{ad_{x,y}}^*). \end{aligned}$$

Note que $Q$ é um produto de projeções comutativas, logo é projeção.

Dado $z \in F \setminus A$, temos que

$$W_a W_a^* - W_{a \vee z} W_{a \vee z}^* = W_a (1 - W_{a^{-1}(a \vee z)} W_{a^{-1}(a \vee z)}^*) W_a^*.$$

Também vale que, para $x, y \in A$ distintos,

$$W_a W_a^* - W_{ad_{x,y}} W_{ad_{x,y}}^* = W_a(1 - W_{d_{x,y}} W_{d_{x,y}}^*) W_a^*.$$

Utilizando o fato de que $W_a^* W_a = 1$, obtemos

$$Q = W_a \left( \prod_{z \in F \setminus A} (1 - W_{a^{-1}(a \vee z)} W_{a^{-1}(a \vee z)}^*) \prod_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} (1 - W_{d_{x,y}} W_{d_{x,y}}^*) \right) W_a^*.$$

Portanto,

$$\|Q\| = \left\| \prod_{z \in F \setminus A} (1 - W_{a^{-1}(a \vee z)} W_{a^{-1}(a \vee z)}^*) \prod_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} (1 - W_{d_{x,y}} W_{d_{x,y}}^*) \right\|.$$

Caso $A = F$, estamos interpretando a expressão acima como

$$\|Q\| = \left\| \prod_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} (1 - W_{d_{x,y}} W_{d_{x,y}}^*) \right\|.$$

Observamos que, como $Q_A^W \neq 0$, temos que para $z \in F \setminus A$ não vale $a \geq z$. Equivalentemente, $A = \{x \in F / x \leq a\}$. Assim, para $z \in F \setminus A$, $a^{-1}(a \vee z) \neq e$. Já observamos também que $d_{x,y} \neq e$. Segue do fato de $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ ser fiel e de (4.5) que $Q \neq 0$.

Por fim, como para $z \in F \setminus A$, $W_z W_z^* Q_A^W = 0$, e, para $x \in A$, $W_x W_x^* Q_A^W = Q_A^W$, temos que

$$\left\| Q \left( \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right) Q \right\| = \left\| \left( \sum_{x \in A} \alpha_x \right) Q \right\| \tag{4.9}$$

$$= \left| \sum_{x \in A} \alpha_x \right| = \left\| \sum_{x \in F} \alpha_x W_x W_x^* \right\|, \tag{4.10}$$

provando assim (4.8).

Finalmente, provemos (4.7), i.e., para $x, y \in F$, com $x \neq y$, $Q W_x W_y^* Q = 0$. Caso $x$ ou $y$ estejam em $F \setminus A$, um argumento análogo ao do caso 1 nos dá (4.7). Suponhamos então $x, y \in A$.

Caso $x^{-1}a \vee y^{-1}a = \infty$, $QW_xW_y^*Q$ possui um fator

$$\begin{aligned}
W_aW_a^*W_xW_y^*W_aW_a^* &= W_{x(x^{-1}a)}W^*_{x(x^{-1}a)}W_xW_y^*W_{y(y^{-1}a)}W^*_{y(y^{-1}a)} \\
&= W_xW_{x^{-1}a}W^*_{x^{-1}a}W_{y^{-1}a}W^*_{y^{-1}a}W_y^* \\
&= W_xW_{x^{-1}a\vee y^{-1}a}W^*_{x^{-1}a\vee y^{-1}a}W_y^* = 0.
\end{aligned}$$

Suponha então $x^{-1}a \vee y^{-1}a \neq \infty$. Primeiro, observemos que para quaisquer $b, c \in P$ tais que $b \vee c \neq \infty$, vale

$$\begin{aligned}
W_b(W_{b^{-1}(c\vee b)}W^*_{b^{-1}(c\vee b)}) &= W_b(W_{b^{-1}(c\vee b)}W^*_{b^{-1}(c\vee b)})W_b^*W_b \\
&= (W_{c\vee b}W^*_{c\vee b})W_b \\
&= (W_cW_c^*W_bW_b^*)W_b \\
&= (W_cW_c^*)W_b. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Aplicando a operação $*$ nas equações acima, resulta também que

$$(W_{b^{-1}(c\vee b)}W^*_{b^{-1}(c\vee b)})W_b^* = W_b^*(W_cW_c^*). \qquad (4.12)$$

Suponha $d_{x,y} = (x^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a)$ e note que $QW_xW_y^*Q$ contém um fator

$$\begin{aligned}
&(W_aW_a^* - W_{ad_{x,y}}W^*_{ad_{x,y}})W_xW_y^*W_aW_a^* \\
&= W_aW_a^*W_xW_y^*W_aW_a^* - W_{ad_{x,y}}W^*_{ad_{x,y}}W_xW_y^*W_aW_a^* \\
&\overset{(*)}{=} W_x(W_{x^{-1}a}W^*_{x^{-1}a})(W_{y^{-1}a}W^*_{y^{-1}a})W_y^* \\
&\quad - W_x(W_{x^{-1}ad_{x,y}}W^*_{x^{-1}ad_{x,y}})(W_{y^{-1}a}W^*_{y^{-1}a})W_y^* \\
&= W_x(W_{x^{-1}a\vee y^{-1}a}W^*_{x^{-1}a\vee y^{-1}a})W_y^* \\
&\quad - W_x(W_{x^{-1}a\vee y^{-1}a}W^*_{x^{-1}a\vee y^{-1}a})(W_{y^{-1}a}W^*_{y^{-1}a})W_y^* \\
&= W_x(W_{x^{-1}a\vee y^{-1}a}W^*_{x^{-1}a\vee y^{-1}a} - W_{x^{-1}a\vee y^{-1}a}W^*_{x^{-1}a\vee y^{-1}a})W_y^* = 0.
\end{aligned}$$

A igualdade (*) segue das relações (4.11) e (4.12), e do fato de que $x \vee a = a$, $y \vee a = a$, $x \vee ad_{x,y} = ad_{x,y}$.

Caso $d_{x,y} = (y^{-1}a)^{-1}(x^{-1}a \vee y^{-1}a)$, basta usar o fato de que $QW_xW_y^*Q = 0 \iff QW_yW_x^*Q = 0$ e repetir as contas acima.

□

**Proposição 24.** *Seja $(G, P)$ grupo quase-reticulado e $W$ uma repre-*

*sentação covariante. Se $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel, então existe*

$$\phi_W : C^*(\{W_x/x \in P\}) \to C^*(\{W_x/x \in P\})$$

*linear e contrativa satisfazendo*

$$\phi_W(W_x W_y^*) = \begin{cases} W_x W_y^*, & \textit{caso } x = y \\ 0, & \textit{caso } x \neq y. \end{cases} \tag{4.13}$$

*Demonstração.* Dada uma combinação linear $\sum_{i=i}^n \beta_i W_{x_i} W_{y_i}^*$, seja $F := \cup_{i=1}^n \{x_i, y_i\}$ e, para $x, y \in F$,

$$\alpha_{x,y} := \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (x_i, y_i) = (x,y)}} \beta_i.$$

Temos então que

$$\sum_{i=i}^n \beta_i W_{x_i} W_{y_i}^* = \sum_{x,y \in F} \alpha_{x,y} W_x W_y^*.$$

Pelo lema 23, existe $Q$ projeção satisfazendo (4.7) e (4.8) com $\alpha_{x,x}$ no lugar de $\alpha_x$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=i}^n \beta_i W_{x_i} W_{y_i}^* \right\| &= \left\| \sum_{x,y \in F} \alpha_{x,y} W_x W_y^* \right\| \geq \left\| Q \left( \sum_{x,y \in F} \alpha_{x,y} W_x W_y^* \right) Q \right\| \\ &= \left\| Q \left( \sum_{x \in F} \alpha_{x,x} W_x W_x^* \right) Q \right\| = \left\| \sum_{x \in F} \alpha_{x,x} W_x W_x^* \right\| \\ &= \left\| \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i = y_i}} \beta_i W_{x_i} W_{y_i}^* \right\|. \end{aligned}$$

Portanto, existe $\phi_W : \overline{\text{span}}\{W_x W_y^*/x, y \in P\} \to C^*(\{W_x/x \in P\})$ linear, contrativa e satisfazendo (4.13). Como, pelo corolário 11, $\overline{\text{span}}\{W_x W_y^*/x, y \in P\} = C^*(\{W_x/x \in P\})$, segue o resultado. $\square$

Finalmente, podemos demonstrar o principal teorema deste capítulo.

**Teorema 25.** *Sejam $(G, P)$ grupo quase-reticulado amenable e $W$ :*

*$P \to \mathcal{A}$ representaçao covariante. Então, a representação*

$$\tilde{W} : C^*(G,P) \to C^*(\{W(p)/p \in P\})$$

*dada pela propriedade universal de $C^*(G,P)$ é um isomorfismo se e somente se, para quaisquer $x_1, ..., x_n \in P \setminus \{e\}$, vale*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - W_{x_i} W_{x_i}^*) \neq 0. \tag{4.14}$$

*Demonstração.* A ida é consequência direta da proposição 22.

Façamos então a volta. Suponha que vale (4.14) e provemos que $\tilde{W}$ é fiel. Pela proposição 22, $\tilde{W}|_{\mathcal{D}}$ é fiel. Então, existe $\phi_W$ como na proposição 24. Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
C^*(G,P) \arrow[r, "\tilde{W}"] \arrow[d, "\phi"'] & C^*(\{W_p/p \in P\}) \arrow[d, "\phi_W"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "\tilde{W}|_{\mathcal{D}}"'] & C^*(\{W_p/p \in P\})
\end{tikzcd}$$

Se $\tilde{W}(a^*a) = 0$ para algum $a \in C^*(G,P)$, temos $\phi(a^*a) = 0$. Mas, como $(G,P)$ é amenable, temos pelo teorema 13 que $\phi$ é fiel, resultando $a = 0$. $\square$

**Exemplo 26.** Utilizando o teorema 25, podemos reobter o teorema de Coburn mencionado na introdução.

De fato, seja $S$ uma isometria não-unitária em $\mathcal{B}(H)$, $H$ espaço de Hilbert. Considere o grupo quase-reticulado $(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$, que é amenable pela proposição 16.

Defina $\rho : \mathbb{N} \to \mathcal{B}(H)$ por $\rho(n) := S^n$. Provemos que $\rho$ é representação covariante. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \leq m$, temos que $n \vee m = m$ e

$$S^n(S^n)^* S^m (S^m)^* = S^n S^{m-n}(S^m)^* = S^m(S^m)^*.$$

Caso $n \geq m$ é tratado analogamente.

Afirmamos que $\tilde{\rho}$ é fiel. Para poder aplicar o teorema 25, devemos provar que, para $n_1, ..., n_l > 0$, vale que

$$\prod_{i=1}^{l}(I - S^{n_i}(S^{n_i})^*) \neq 0.$$

O produto acima multiplicado por $I - SS^*$ resulta $I - SS^*$ que é diferente de 0 pois $S$ não é unitária. Logo, $\tilde{\rho}$ é fiel e $C^*(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) \cong C^*(\{S^n/n \in \mathbb{N}\}) = C^*(\{S\})$. Em particular, a álgebra de Toeplitz é isomorfa a $C^*(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$.

Como aplicação dos resultados obtidos até o momento, provemos o seguinte:

**Proposição 27.** *Seja $X$ um conjunto infinito. Seja $\mathcal{O}_X$ a $C^*$-álgebra universal gerada por um conjunto $\{S_x/x \in X\}$ de isometrias tais que, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, $S_x^* S_y = 0$. Então, $\mathcal{O}_X$ é simples.*

*Demonstração.* Inicialmente, considere $X$ um conjunto não-vazio, não necessariamente infinito.

Seja $F_X$ o grupo livre gerado por $\{a_x/x \in X\}$ e $SF_X$ o subsemigrupo unital de $F_X$ gerado por $\{a_x/x \in X\}$. Pelo exemplo 6 e pelo teorema 19, $(F_X, SF_X)$ é grupo quase-reticulado amenable.

Afirmamos que $C^*(F_X, SF_X)$ é isomorfa a $\mathcal{O}_X$. Para isso, mostraremos que $C^*(F_X, SF_X)$ satisfaz a propriedade universal de $\mathcal{O}_X$.

Seja então $\pi : X \to \mathcal{A}$ uma representação de $X$ em uma álgebra unital $\mathcal{A}$ por isometrias tais que, para $x, y \in X$ distintos, $\pi_x^* \pi_y = 0$.

Note que $SF_X$ é também o semigrupo unital livre gerado por $\{a_x/x \in X\}$. Logo, existe um homomorfismo unital de semigrupos entre $SF_X$ e o semigrupo de isometrias de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \rho : SF_X &\to \mathcal{A} \\ a_x &\mapsto \pi_x \quad x \in X. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\rho$ é uma representação covariante de $SF_X$. Como $\rho$ é homomorfismo de semigrupos, temos que (2.6) é satisfeita. Quanto a (2.7), tome $s, t \in SF_X$. Devemos provar que

$$\rho_s \rho_s^* \rho_t \rho_t^* = \rho_{s \vee t} \rho_{s \vee t}^*. \tag{4.15}$$

Caso $s$ ou $t$ iguais a $e$ é trivial. Suponha então $s$ e $t$ diferentes do elemento neutro.

Temos $s = a_{s_1} ... a_{s_n}$ e $t = a_{t_1} ... a_{t_k}$. Caso $s \vee t = \infty$, deve haver $j$ tal que $1 \leq j \leq \min(n, k)$, $s_j \neq t_j$ e, para $i < j$, $s_i = t_i$. Então, o produto $\rho_s \rho_s^* \rho_t \rho_t^*$ contém um termo $\pi_{s_j}^* \pi_{t_j} = 0$.

Caso $s \vee t \neq \infty$, então, argumentando como no exemplo 5, deve ser $s \leq t$ ou $s \geq t$. Sem perda de generalidade, suponha $s \leq t$. Neste caso, $n \leq k$ e $s = a_{t_1} ... a_{t_n}$. Então,

$$\rho_s (\rho_s^* \rho_t) \rho_t^* = \rho_s \rho_{t_{n+1} ... t_k} \rho_t^* = \rho_t \rho_t^*.$$

Como $s \vee t = t$, segue (4.15).

Logo, a propriedade universal de $C^*(F_X, SF_X)$ nos diz que existe um $*$-homomorfismo $\tilde{\rho} : C^*(F_X, SF_X) \to \mathcal{A}$ que manda $v_s$ em $\rho_s$ para $s \in SF_X$.

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{v} : X &\to C^*(F_X, SF_X) \\ x &\mapsto v_{a_x}. \end{aligned}$$

Como $\{a_x / x \in X\}$ gera $SF_X$, segue que $\tilde{\rho}$ é o único $*$-homomorfismo unital a comutar o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{v}"] \arrow[d, "\pi"'] & C^*(F_X, SF_X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\rho}"] \\ \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

Concluímos que $C^*(F_X, SF_X) \cong \mathcal{O}_X$.

Suponha agora que $X$ é infinito. Para mostrar que $C^*(F_X, SF_X)$ é simples, i.e., que não possui ideais não-triviais, basta mostrar que toda representação unital e não-nula de $C^*(F_X, SF_X)$ é fiel. Então, se $C^*(F_X, SF_X)$ possuísse um ideal não-trivial $I$, a aplicação canônica

$$C^*(F_X, SF_X) \to C^*(F_X, SF_X)/I$$

seria uma representação unital, não-nula e não-fiel de $C^*(F_X, SF_X)$.

Seja $\rho : C^*(F_X, SF_X) \to \mathcal{A}$ uma representação unital em uma $C^*$-álgebra $\mathcal{A} \neq \{0\}$.

Defina

$$\begin{aligned} \gamma : SF_X &\to \mathcal{A} \\ s &\mapsto \rho(v_s). \end{aligned}$$

Então, $\gamma$ é representação covariante e $\tilde{\gamma} = \rho$.

Logo, pelo teorema 25, para mostrar que $\rho$ é fiel, basta mostrar que, para quaisquer $s_1, ..., s_n \in SF_X \setminus \{e\}$, vale que

$$\prod_{i=1}^{n} (1_{\mathcal{A}} - \rho(v_{s_i})\rho(v_{s_i})^*) \neq 0.$$

Como $X$ é infinito, podemos tomar $x \in X$ tal que $a_x$ não seja a primeira letra de nenhum dos $s_i$. Em particular, $\rho(v_{s_i})^*\rho(v_{a_x}) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Consequentemente,

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1_{\mathcal{A}} - \rho(v_{s_i})\rho(v_{s_i})^*)\right)\rho(v_{a_x}) = \rho(v_{a_x}).$$

Como $\rho(v_{a_x})^*\rho(v_{a_x}) = 1$, segue $\rho(v_{a_x}) \neq 0$. Portanto, $\rho$ é fiel. $\square$

No caso em que $X$ é finito, é provado em [Nica 1992] que

$$C^*(\{\lambda_s/s \in SF_X\})$$

contém propriamente os operadores compactos de $\mathcal{B}(\ell^2(SF_X))$. Como $C^*(F_X, SF_X)$ é isomorfa a $C^*(\{\lambda_s/s \in SF_X\})$, conclui-se que, caso $X$ seja finito, $C^*(F_X, SF_X)$ não é simples.

# APÊNDICE A – $C^*$-ÁLGEBRA UNIVERSAL

## A.1 $C^*$-ÁLGEBRA ENVOLVENTE

Dada uma *-álgebra $A$ munida de uma $C^*$-seminorma $||\cdot||_A$, é construído em [Murphy 1990, Seção 6.1] um par $(B, i)$, em que $B$ é uma $C^*$-álgebra e $i : A \to B$ é um $*$-homomorfismo satisfazendo $i(A)$ denso em $B$ e, para $a \in A$,

$$||i(a)||_B = ||a||_A. \tag{A.1}$$

$(B, i)$ é dito ser a $C^*$-álgebra envolvente de $(A, ||\cdot||_A)$. Provemos que a $C^*$-álgebra envolvente possui uma propriedade universal:

**Proposição 28.** *Seja $A$ uma *-álgebra munida de uma $C^*$-seminorma $||\cdot||_A$. Seja $(B, i)$ sua $C^*$-álgebra envolvente. Dada uma $C^*$-álgebra $C$ e $\pi : A \to C$ um $*$-homomorfismo satisfazendo, para $a \in A$,*

$$||\pi(a)||_C \leq ||a||_A, \tag{A.2}$$

*existe um único $*$-homomorfismo $\tilde{\pi} : B \to C$ comutando o diagrama abaixo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\tilde{\pi}"] \\ C & \end{tikzcd}$$

*Demonstração.* Defina

$$\begin{aligned} \pi' : i(A) &\to C \\ i(a) &\to \pi(a). \end{aligned}$$

Por (A.1) e (A.2), $\pi'$ está bem definida e é um $*$-homomorfismo contínuo. Como $i(A)$ é denso em B, podemos estender de forma única $\pi'$ a um $*$-homomorfismo $\tilde{\pi} : B \to C$. $\square$

## A.2 $C^*$-ÁLGEBRA UNIVERSAL

Nesta seção, construiremos a $C^*$-álgebra universal gerada por um conjunto e sujeita a certas relações. Antes de tornar preciso o que queremos dizer com isso, precisaremos de algumas definições:

**Definição 29.** Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Uma álgebra unital livre sobre $X$ é um par $(\mathcal{F}(X), i)$ em que $\mathcal{F}(X)$ é uma álgebra unital (sobre os complexos) e $i : X \to \mathcal{F}(X)$ é uma função com a seguinte propriedade:

dada $A$ álgebra unital, possivelmente igual a $\{0\}$, e $\phi : X \to A$ função, existe um único homomorfismo unital $\tilde{\phi} : \mathcal{F}(X) \to A$ comutando o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\phi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Omitiremos a prova da existência da álgebra unital livre por ser uma construção padrão em cursos de álgebra. Trata-se apenas de tomar o espaço vetorial livre gerado pelas palavras no alfabeto $X$, incluindo a palavra vazia. Observamos apenas que $\mathcal{F}(X)$ é gerada como álgebra unital por $i(X)$, ou seja, $\mathcal{F}(X)$ é a menor subálgebra unital de $\mathcal{F}(X)$ que contém $i(X)$. Além disso, $i : X \to \mathcal{F}(X)$ é injetiva.

**Definição 30.** Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Uma *-álgebra unital livre sobre $X$ é um par $(\mathcal{A}(X), i)$ em que $\mathcal{A}(X)$ é uma *-álgebra unital e $i : X \to \mathcal{A}(X)$ é uma função com a seguinte propriedade: dada $C$ uma *-álgebra unital, possivelmente igual a $\{0\}$, e $\phi : X \to C$ função, existe um único $*$-homomorfismo unital $\tilde{\phi} : \mathcal{A}(X) \to C$ comutando o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\phi}"] \\ C & \end{tikzcd}$$

**Proposição 31.** *Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, existe a *-álgebra unital livre $\mathcal{A}(X)$.*

*Demonstração.* Intuitivamente, a ideia é definir $\mathcal{A}(X)$ como sendo a álgebra unital livre com geradores em $X$ e em "$X^*$". Para tornar isso preciso, temos duas opções: ou consideramos $(X\times\{1\})\sqcup(X\times\{2\})$ como geradores, ou invocamos argumentos de cardinalidade para garantir a existência de um conjunto $Y$ com mesma cardinalidade e disjunto de $X$, tomando então como geradores $X \sqcup Y$. Vamos escolher a primeira alternativa.

Defina $Z := (X \times \{1\}) \sqcup (X \times \{2\})$. Seja então $\mathcal{A}(X) := \mathcal{F}(Z)$, i.e., a álgebra unital livre sobre $Z$. Utilizando a aplicação canônica, vamos supor $Z \subset \mathcal{A}(X)$.

Precisamos definir uma operação "$*$" em $\mathcal{A}(X)$. Primeiro, vamos denotar as operações de soma, multiplicação por escalar, produto de elementos de $\mathcal{A}(X)$ por $+$, $.$, $\times$, respectivamente. Defina uma nova multiplicação por escalar em $\mathcal{A}(X)$ por

$$\lambda \odot a := \bar{\lambda}.a, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ a \in \mathcal{A}(X).$$

Defina também um novo produto $\otimes$ em $\mathcal{A}(X)$ por

$$a \otimes b := b \times a, \quad a, b \in \mathcal{A}(X).$$

Vamos denotar $\mathcal{A}(X)$ munida das operações $+$, $\odot$, $\otimes$ por $\overline{\mathcal{A}(X)}^{op}$. É fácil verificar que $\overline{\mathcal{A}(X)}^{op}$ é também uma álgebra unital.

Defina

$$\begin{aligned} \phi : Z &\to \overline{\mathcal{A}(X)}^{op} \\ (x,1) &\to (x,2) \\ (x,2) &\to (x,1). \end{aligned}$$

Pela propriedade universal de álgebra unital livre de $\mathcal{A}(X)$, existe um único homomorfismo unital $\tilde{\phi} : \mathcal{A}(X) \to \overline{\mathcal{A}(X)}^{op}$ comutando o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\phi}"] \\ \overline{\mathcal{A}(X)}^{op} & \end{tikzcd}$$

Como $\overline{\mathcal{A}(X)}^{op}$, visto como conjunto é igual a $\mathcal{A}(X)$, faz sentido ver $\tilde{\phi}$ como uma função de $\mathcal{A}(X)$ para $\mathcal{A}(X)$. Dado $a \in \mathcal{A}(X)$, defina $a^* := \tilde{\phi}(a)$. Então, para $a, b \in \mathcal{A}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $(a \times b)^* = b^* \times a^*$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda.a)^* = \bar{\lambda}.a^*$.

Provemos que $*$ é involutiva. Note que $a \to (a^*)^*$ é um homomorfismo unital de $\mathcal{A}(X)$ em si mesmo, e que é a identidade quando restrito aos geradores. Logo, pela propriedade universal, $a = (a^*)^*$, para todo $a \in \mathcal{A}(X)$.

Defina

$$\begin{aligned} i : X &\to \mathcal{A}(X) \\ x &\to (x,1). \end{aligned}$$

Provemos que $(\mathcal{A}(X), i)$ é uma *-álgebra unital livre sobre $X$. Seja $C$

uma *-álgebra e $\psi : X \to C$ uma função qualquer. Defina

$$\begin{aligned} \psi' &: Z \to C \\ (x,1) &\to \psi(x) \\ (x,2) &\to \psi(x)^*. \end{aligned}$$

Pela propriedade universal de $\mathcal{A}(X)$ visto como álgebra unital livre sobre $Z$, existe um único $\tilde{\psi} : \mathcal{A}(X) \to C$ homomorfismo unital de álgebra que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi'"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\psi}"] \\ C & \end{tikzcd} \tag{A.3}$$

Note que, para $x \in X$, $\tilde{\psi}(i(x)) = \tilde{\psi}((x,1)) = \psi'((x,1)) = \psi(x)$. Logo, $\tilde{\psi}$ comuta o diagrama abiaxo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\psi}"] \\ C & \end{tikzcd} \tag{A.4}$$

Provemos agora que $\tilde{\psi}$ preserva a operação $*$. Defina

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A}(X) &\to C \\ a &\to \tilde{\psi}(a^*)^*. \end{aligned}$$

Na definição de $f$, utilizamos a mesma notação para a involução de C e de $\mathcal{A}(X)$. Note que $f$ é um homomorfismo unital que manda $(x,1)$ em $\psi(x)$ e $(x,2)$ em $\psi(x)^*$. Em particular, $f$ também faz comutar o diagrama (A.3). Pela unicidade de $\tilde{\psi}$, segue que $f = \tilde{\psi}$. Assim, $\tilde{\psi}$ é $*$-homomorfismo.

Se $T : \mathcal{A}(X) \to C$ for outro $*$-homomorfismo unital comutando o diagrama (A.4), teremos que $T$ também faz comutar (A.3). Daí, $T = \tilde{\psi}$.

Observamos também que, como $\mathcal{A}(X)$ é gerada como álgebra unital por $Z$, temos que $\mathcal{A}(X)$ é gerada como *-álgebra unital por $i(X)$.

$\square$

**Definição 32.** Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, uma *relação* em $X$ é um elemento de $\mathcal{A}(X)$. Dado um conjunto $\mathcal{R}$ de relações em $X$, uma *representação* de $(X,\mathcal{R})$ é uma função $g : X \to C$, em que $C$ é uma $C^*$-álgebra unital, possivelmente igual a $\{0\}$, tal que a aplicação $\tilde{g} : \mathcal{A}(X) \to C$ dada pela propriedade universal de $\mathcal{A}(x)$ satisfaz, para $a \in \mathcal{R}$, $\tilde{g}(a) = 0$.

**Definição 33.** Uma $C^*$-álgebra unital universal para $(X,\mathcal{R})$ é um par $(A,p)$ em que $A$ é uma $C^*$-álgebra unital, possivelmente igual a $\{0\}$, e $p : X \to A$ é uma representação que satisfaz a seguinte propriedade: dada uma representação $\pi : X \to C$, existe um único $*$-homomorfismo unital $\hat{\pi} : A \to C$ que faz comutar o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\hat{\pi}"] \\ C & \end{tikzcd} \tag{A.5}$$

**Definição 34.** Um par $(X,\mathcal{R})$ é dito ser *admissível* se para todo $x \in X$ existe $k_x \geq 0$ tal que, para toda $\pi : X \to C$ representação, vale

$$||\pi(x)|| \leq k_x.$$

**Proposição 35.** *Se $(X,\mathcal{R})$ for admissível, então possui $C^*$-álgebra unital universal.*

*Demonstração.* Vamos definir a seguinte seminorma $|||\cdot|||$ em $\mathcal{A}(X)$:

$$|||a||| := \sup_{\pi \text{ rep. de } (X,\mathcal{R})} ||\tilde{\pi}(a)||, \tag{A.6}$$

em que $\tilde{\pi} : \mathcal{A}(X) \to C$ provém canonicamente de representações $\pi$ de $(X,\mathcal{R})$.

Da admissibilidade de $(X,\mathcal{R})$ e do fato de que $\mathcal{A}(X)$ é gerado como *-álgebra unital por $i(X)$, segue que $|||a|||$ é finita para todo $a \in \mathcal{A}(X)$. É um exercício trivial mostrar que $|||\cdot|||$ é $C^*$-seminorma.

Seja $(A,j)$ a $C^*$-álgebra envolvente de $(\mathcal{A}(X), |||\cdot|||)$. Seja $p := j \circ i$, em que $i : X \to \mathcal{A}(X)$ é a aplicação canônica de $\mathcal{A}(X)$. Afirmamos que $(A,p)$ é a $C^*$-álgebra unital universal de $(X,\mathcal{R})$. Note que, como $\mathcal{A}(X)$ é unital e $j(\mathcal{A}(X))$ é denso em $A$, temos que $A$ é unital, embora talvez igual a $\{0\}$.

Além disso, $j : \mathcal{A}(X) \to A$ é $*$-homomorfismo unital e o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[dl, "j"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Segue que a aplicação $\tilde{p} : \mathcal{A}(X) \to A$ dada pela propriedade universal de $(\mathcal{A}(X), i)$ é igual a $j$.

Por (A.6), temos que para todo $a \in \mathcal{R}$ vale $j(a) = 0$. Portanto, $p = j \circ i$ é representação de $(X, \mathcal{R})$.

Seja $C$ uma $C^*$-álgebra unital, $\pi : X \to C$ representação e $\tilde{\pi} : \mathcal{A}(X) \to C$ a aplicação dada pela propriedade universal de $\mathcal{A}(X)$. Por (A.6), temos que, para todo $a \in \mathcal{A}(X)$, $|||a||| \geq ||\tilde{\pi}(a)||$. Da propriedade universal de $(A, j)$, segue que existe um único $*$-homomorfismo $\hat{\pi} : A \to C$ comutando o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & A \arrow[dl, dashed, "\hat{\pi}"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Como $j$ e $\tilde{\pi}$ são unitais, segue que $\hat{\pi}$ é unital também.

Observe que $\hat{\pi} \circ p = \hat{\pi} \circ j \circ i = \tilde{\pi} \circ i = \pi$. Portanto, $\hat{\pi}$ faz o diagrama (A.5) comutar. A unicidade de $\hat{\pi}$ sai do fato da $C^*$-álgebra unital gerada por $p(X)$ ser $A$.

$\square$

Claramente, vale a recíproca da proposição acima.

O caso em que a $C^*$-álgebra envolvente de $(X, \mathcal{R})$ é igual a $\{0\}$ corresponde àquele em que $(X, \mathcal{R})$ não possui representação em uma $C^*$-álgebra unital que não seja igual a $\{0\}$.

## REFERÊNCIAS


BOAVA, G. *Caracterizações da $C^*$-álgebra Gerada por uma Compressão Aplicadas a Cristais e Quasicristais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/pos/Giuliano_Boava.pdf>.

COHN, D. L. *Measure Theory*. Birkhauser, 1994.

CRISP, J.; LACA, M. On the Toeplitz algebras of right-angled and finite-type Artin groups. *J. Austral. Math. Soc.*, v. 72, p. 223–245, 2002.

HEWITT, E.; ROSS, K. A. *Abstract Harmonic Analysis I*. Springer-Verlag, 1979.

LACA, M.; RAEBURN, I. Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups. *J. Funct. Anal.*, v. 139, p. 415–440, 1996.

LI, X. Semigroup $C^*$-algebras and amenability of semigroups. *J. Funct. Anal.*, v. 262, p. 4302–4340, 2012.

MURPHY, G. J. *$C^*$-Algebras and Operator Theory*. Academic Press, 1990.

NICA, A. $C^*$-algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators. *J. Operator Theory*, v. 27, n. 1, p. 17–52, 1992.