# Universidade Federal de Santa Catarina
# Programa de Pós-Graduação em Matemática

## Exame de qualificação de doutorado – 22/08/2018
## Álgebra

**Nome:** ______________________________________________________

1) [1,5] Dizemos que um anel $R$ é *Dedekind-finito* se, para todos $a, b \in R$, $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$. Dizemos também que um $R$-módulo à esquerda $M$ é dito *hopfiano* se todo endomorfismo sobrejetivo de $M$ é um automorfismo.

a) Mostre que todo módulo noetheriano é hopfiano.

b) Mostre que o módulo ${}_RR$ é hopfiano se, e somente se, $R$ é Dedekind-finito.

2) [1,5] Diga quais dos $\mathbb{Z}$-módulos abaixo são semissimples:

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots$
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times \cdots$
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \oplus \cdots$

3) [2,0] Considere o submódulo $M$ de $\mathbb{Z}^3$ gerado pelos elementos $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$. Determine inteiros $r$, $k$, $d_1, \ldots, d_k$ tais que

$$\frac{\mathbb{Z}^3}{M} \cong \mathbb{Z}^r \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{(d_1)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(d_2)} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{(d_k)}\right)$$

e $d_1 | d_2 | \cdots | d_k$.

4) [1,5] Prove que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, em que $d = \mathrm{mdc}(m, n)$.

5) [1,5] Prove que existe um isomorfismo de anéis entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

6) [2,0] Seja $A$ um $R$-módulo (à esquerda), seja $I$ um conjunto não vazio de índices e, para cada $i \in I$, seja $B_i$ um $R$-módulo (à esquerda). Prove os seguinte isomorfismos de grupos abelianos (quando $R$ é comutativo, mostre que de fato temos um isomorfismo de $R$-módulos):

a) $\mathrm{Hom}_R(\oplus_{i \in I} B_i, A) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(B_i, A)$

b) $\mathrm{Hom}_R(A, \prod_{i \in I} B_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A, B_i)$