Florianópolis, 24 de agosto de 2018
Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação para o Doutorado (Análise)
Nome: ______________________________
Matrícula: ______________

Instruções

- Esta prova é composta por 2 páginas. Certifique-se de que não há páginas faltando e preencha as informações requeridas no topo desta página.
- Coloque nome em todas as folhas de soluções e não utilize uma mesma folha para duas questões.
- A prova terá duração de 4 horas.

Bom exame!

---

1. Sejam $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida com μ uma medida finita, $f \in L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $\mathcal{S}_0$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X contida em $\mathcal{S}$. Mostre que existe $\tilde{f} \in L_1(X, \mathcal{S}_0, \mu)$ tal que

$$\int_E \tilde{f}\, \mathbf{d}\mu = \int_E f\, \mathbf{d}\mu,$$

para todo $E \in \mathcal{S}_0$.
Sugestão. Resolva o caso em que f é não negativa considerando a medida em $(X, \mathcal{S}_0)$ induzida pela integral de f e aplique o Teorema de Radon-Nikodym (considerando o espaço $(X, \mathcal{S}_0)$).

2. **Definição.** Sejam $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais mensuráveis em $(X, \mathcal{S})$ e f uma função real mensurável em $(X, \mathcal{S})$. Dizemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge *quase uniformemente* para f se, para todo $\epsilon > 0$, existe $E_\epsilon \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $X \backslash E_\epsilon$.

   (a) Mostre que convergência quase uniforme implica convergência em quase todo ponto.

   (b) Dê um exemplo para mostrar que a volta do item anterior não é verdadeira.

   (c) Para $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, defina

$$E_n^\epsilon = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

   Mostre que:

   (i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase uniformemente para f se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n^\epsilon\right) = 0;$$

   (ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em quase todo ponto para f se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$,

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n^\epsilon\right) = 0.$$

3. Seja X um espaço métrico completo e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos abertos tal que A_n é denso em X para cada $n \in \mathbb{N}$. Prove que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

é denso em X.

4. Sejam X e Y espaços de Banach e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B(X,Y)$. Mostre que são equivalentes:

   (i) $\{||T_n||\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada;

   (ii) $\{||T_n(x)||\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, para todo $x \in X$;

   (iii) $\{|g(T_n(x))|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, para quaisquer $x \in X$ e $g \in Y^*$.

   Observação. Você pode usar o Princípio da Limitação Uniforme sem demonstrar.

5. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Mostre que se o dual topológico X^* deste espaço é separável, então X também é separável.

   Sugestão. Considere um conjunto enumerável e denso da esfera unitária de X^*:

$$S = \{x_n^* \in X^* \ / \ \|x_n^*\| = 1, \ \forall\, n \geq 0\}\,.$$

   Mostre que existe $x_n \in X$ com norma 1 tal que $x_n^*(x_n) > 1/2$. Conclua provando que $M = span(\{x_n\})$ é denso em X.

6. Sejam X um espaço de Banach e $T \in B(X)$. Prove que o espectro de T é compacto.