**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada**
**Exame de qualificação para o doutorado**
**Data: 31/08/2016**
**Área de concentração: Álgebra**
**Nome:** ____________________

**1)** Seja $R$ um anel. Mostre o que se pede em cada item.

(i) Se $f : M \longrightarrow M$ é um homomorfismo de $R$-módulos tal que $f \circ f = f$, então $M = Ker(f) \oplus Im(f)$. Sugestão: Lembre o que significa uma sequência exata curta cindir.

(ii) Considere o diagrama comutativo abaixo em $R$-Mod. Admita que as sequências vertical e horizontal sejam exatas.

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & & \\
& & N_1 \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_2"] \arrow[dr, "\beta"'] & M \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"] & M_2 \arrow[r] & 0 \\
& & N_2 \arrow[d] \arrow[ur, "g"'] & & \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Faça o que se pede:

1) mostre que $\alpha$ é o homomorfismo nulo;

2) mostre que $ker(g_2) = Im(f_1)$ e conclua que $ker(g_1) = Im(f_1) = ker(g_2) = Im(f_2)$;

3) mostre que $\beta$ é o homomorfismo nulo;

4) mostre que $f$ e $g$ são isomorfismos.

**2)** Mostre que se $X$ e $Y$ são espaços vetoriais sobre um corpo $K$ com bases $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_j\}_{j \in J}$, respectivamente, então $x \otimes y = 0$, onde $x \in X$ e $y \in Y$ implica que $x = 0$ ou $y = 0$.

Sugestão: É sabido que $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I;\, j \in J}$ é base $X \otimes_K Y$. Você pode usar funcionais lineares $x_\ell^* : X \to K$ tais que $x_\ell^*(x_i) = \delta_{\ell i}$ (Delta de Kronecker) ou $y_t^* : Y \to K$ tais que $y_t^*(y_j) = \delta_{tj}$. Lembre que $K$ é corpo.

**3)** Seja $f \colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^2$ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos definido por $f(x, y, z, w) = (3x - 3y + 2z - 4w, 2x + 3z)$.

(i) $f$ é sobrejetor?

(ii) O núcleo de $f$ é um submóulo livre de $\mathbb{Z}^4$? Em caso afirmativo, determine uma base de $\ker(f)$.

**4)** Seja $R$ um anel com unidade.

(i) Prove que existem ideais à esquerda $I_1$ e $I_2$ de $R$ tais que ${}_R R = I_1 \oplus I_2$ se, e somente se, existem idempotentes $e_1 \in I_1$ e $e_2 \in I_2$ tais que $1 = e_1 + e_2$ e $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$.

(ii) No caso em que ${}_R R = I_1 \oplus I_2$, prove que $I_i = Re_i$ para $i \in \{1, 2\}$, em que $e_1$ e $e_2$ são como no item anterior.

(iii) Seja $A = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f é contínua } \}$ o anel com unidade no qual as operações de soma e multiplicação são definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

Mostre que $A$ não é semissimples. (Sugestão: mostre que o ideal $I = \{f \in A \mid f(0) = 0\}$ não é um somando direto de $A$.)

**Bom exame!**