Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de doutorado
Álgebra

Nome:____________________________

1) Seja R um anel com unidade e M um R-módulo à esquerda. Mostre que M é um R-módulo projetivo se, e somente se, exitir um conjunto I e duas famílias $\{m_i\}_{i\in I}$ e $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ com $m_i \in M$ e $\varphi_i \in M^* = {}_R\mathrm{Hom}(M,R)$, tais que

(i) Para todo elemento $m \in M$ apenas para uma quantidade finita de índices $i \in I$ temos $\varphi(m) \neq 0$.

(ii) Para todo elemento $m \in M$ temos que $m = \sum_{i\in I} \varphi_i(m) \cdot m_i$.

2) Mostre que um $\mathbb{Z}$-módulo é injetivo se, e somente se é divisível.

3) Considere o seguinte diagrama comutativo de grupos abelianos com as linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mostre que se ϕ e ψ são isomorfismos, então θ também é isomorfismo.

4) Sejam $p \in \mathbb{N}$ um primo e G_p o subgrupo do grupo quociente $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definido por $G_p = \{x \in A | \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p^n \text{ vezes}} = 0$ para um dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Note que para n fixo, existe um único subgrupo

$$G_{p,n} = \{x \in A | \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p^n \text{ vezes}} = 0\} \subseteq G_p.$$

Assim, temos que $G_p = \bigcup_n G_{p,n}$.

a) Prove que $G_{p,n} \subsetneq G_{p,n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

b) Concluir que G_p não satisfaz a condição de cadeia ascendente.