Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE - 2021.2 – PARTE 1

(1) Considerando apenas funções Lebesgue mensuráveis $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ e a medida de Lebesgue:
- Enuncie o Lema de Fatou.
- Enuncie e demonstre o Teorema da Convergência Dominada (pode usar o Lema de Fatou).
- Dê um exemplo de uma sequência $f_n(x) \to 0$ q.s. mas $\int f_n(x)dx \to 1$.

(2) Seja X um espaço de Banach e suponha que $A \subseteq X$ é um conjunto não enumerável tal que existe uma constante $c > 0$ com $\|a - b\| \geq c$ para todo $a \neq b$ em A. Mostre que X não é separável. Aplique isto para mostrar que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ não é separável.