Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE - 2021.2 – PARTE 2

(3) Seja H um espaço de Hilbert e $K \subseteq H$ um subespaço fechado. Suponha que $(x_n) \subseteq K$ é uma sequência que converge fracamente para $x \in H$. Mostre que $x \in K$.

(4) Sejam V, Y espaços de Banach reflexivos. Seja $A : V \to Y$ um operador linear e contínuo.

Denotaremos por V' e Y' o conjunto dos funcionais lineares e contínuos definidos em V e Y respectivamente.

Assuma que existe uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V^* \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f \in V'$ existe um único $u^* \in V^*$ tal que

$$f(u) = \langle u, u^* \rangle_V, \ \forall u \in V.$$

Aqui V^* é também um espaço de Banach e é dito ser o espaço dual a V.

Assuma também que existe uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y : Y \times Y^* \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f_1 \in Y'$ existe um único $y^* \in Y^*$ tal que

$$f_1(y) = \langle y, y^* \rangle_Y, \ \forall y \in Y.$$

Aqui Y^* é também um espaço de Banach e é dito ser o espaço dual a Y.

(a) Seja $\{u_n\} \subset V$ uma sequência limitada (em norma). Seja $\{y_n^*\} \subset Y^*$ uma sequência tal que

$$y_n^* \to y_0^* \in Y^*, \text{ quando } n \to \infty, \text{ em norma.}$$

Mostre que existem uma subsequência $\{n_k\}$ de $\mathbb{N}$ e $u_0 \in V$ tais que

$$\langle A(u_{n_k}), y_{n_k}^* \rangle_Y \to \langle A(u_0), y_0^* \rangle_Y, \text{ quando } k \to \infty.$$

(b) Seja $B \subset V$ um conjunto convexo, limitado e fechado e seja $v_0 \in Y$. Mostre que existe $u_0 \in B$ tal que

$$\|A(u_0) - v_0\|_Y = \inf_{u \in B} \|A(u) - v_0\|_Y.$$