Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais

13 de Dezembro de 2021

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Questão 1. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_3(t). \end{cases}$$

(a) Após escrever o sistema acima na forma vetorial $X' = AX$, determine a matriz fundamental e^{At} do sistema.

(b) Determine para que condições iniciais as soluções do sistema tem limite finito quando $t \to +\infty$ e calcule o valor desse limite.

Questão 2. Seja $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$ e $V = H^1(\Omega)$. Considere a forma bilinear

$$B(u,v) = \int_0^2 \frac{du}{dt}(t)\,\frac{dv}{dt}(t)\,dt + \left(\int_0^1 u(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^1 v(t)\,dt\right), \quad \forall\, u, v \in V.$$

(a) Mostre que B é contínua e que $B(u,u) = 0$ implica $u = 0$.

(b) Mostre que B é coerciva.

Questão 3.

(a) Determine as soluções de

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $u(0,x) = (\pi - x)\, x$.

Questão 4. Considere o Problema de Dirichlet em um domínio Ω, subconjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \\ \Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = f, \qquad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega). \end{cases}$$

(a) Enuncie e demonstre o Princípio do Máximo para o problema acima.

(b) Prove que se a solução existir, então é única.

Questão 5. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, \frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2}\, d\xi$. Prove que:

(a) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) u é uma solução de $-\Delta w + w = f$ no $\mathbb{R}^n$.

(c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u(x)|^2 + 2\,|\nabla u(x)|^2 + |\nabla^2 u(x)|^2\right)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx.$