Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais

10 de Junho de 2021

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Questão 1. Sejam $a, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $\lim_{t\to\infty} a(t) = 1$ e b absolutamente integrável sobre $\mathbb{R}^+$. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\, y(t), \\ y'(t) = b(t)\, x(t). \end{cases} \tag{1}$$

Prove que se (x, y) é uma solução do sistema (1) com x limitado sobre $\mathbb{R}^+$, então $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Questão 2. Assuma que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica com período 2π. Seja ∂f a notação para a derivada de f.

(a) Mostre que se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0,$$
então
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\partial f(x)|^2\, dx,$$
e que se a igualdade é válida então
$$f(x) = a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)$$
para certos números reais a, b.

(b) Mostre que se $f \in C^2(\mathbb{R})$ então
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\partial f(x)|^2\, dx \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\partial^2 f(x)|^2\, dx\right).$$

Questão 3. Seja $u(x) = e^x \cos(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) Não existe um polinômio $p(x)$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$|u(x)| \leq p(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(b) Prove que u define uma distribuição temperada.

Questão 4. Seja $\alpha, \beta > 0$. Considere a EDO escalar $x' = f(t,x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$, sendo f uma função contínua definida sobre $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, $|x - x_0| \leq \beta$, tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)|\,(t - t_0) \leq k\,|x - y|.$$

Prove que se $0 < k < 1$, então a propriedade de unicidade da solução é válida (à direita).

Questão 5.

(a) Escreva $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ em coordenadas polares.

(b) Resolva o seguinte problema de Dirichlet (dado em coordenadas polares):

$$\begin{cases} u_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\, u_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, \qquad \text{para } 1 < r < 3, \quad 0 < \theta < \pi, \\ u(1,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0, \qquad \text{para } 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ u(3,\theta) = \operatorname{sen}(2\theta), \qquad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$