EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM GEOMETRIA - PARTE 1

DOUTORADO MTM/UFSC 2020/2

Questão 1. Seja M variedade C^∞ de dimensão m em $\mathbb{R}^n, (n > m)$.

(i) Seja $p \in M$. Faça a construção do espaço tangente T_pM e do espaço cotangente (dual do espaço tangente) T_pM^*.

(ii) Faça a construção do fibrado tangente TM e do fibrado cotangente TM^*.

(iii) O que é uma seção do fibrado tangente? E do fibrado cotangente?

Questão 2. Seja M variedade C^∞ de dimensão m. Denote $\Omega^k(M)$ o módulo das $k-$formas diferenciais em M, $k \geq 0$.

(i) Dê a definição da derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ e mostre que
- se $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ então $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- $d(d\omega) = 0$.

(ii) Faça a construção do grupo de cohomologia de de Rham $H^p_{dR}(M)$, $p \geq 0$.

(iii) Calcule $H^0_{dR}(M)$.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM GEOMETRIA - PARTE 2

DOUTORADO MTM/UFSC 2020/2

Questão 3. Sejam $\widetilde{M}$ e M variedades suaves de dimensão n com ou sem bordo e seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento a k-folhas suave, isto é, π é sobrejetora e todo ponto de M admite uma vizinhança aberta U tal que $\pi^{-1}(U)$ tem k componentes conexas e π se restringe a um difeomorfismo em cada uma delas. Mostre que se $\widetilde{M}$ e M são orientadas e π preserva orientação, então

$$\int_{\widetilde{M}} \pi^*\omega = k \int_M \omega,$$

para qualquer n-forma diferencial $\omega \in \Omega^n(M)$ com suporte compacto.
Dica: escolhendo uma cobertura apropriada, uma partição da unidade em M induz, por composição com π, uma partição da unidade em $\widetilde{M}$.

Questão 4. Seja $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ o grupo de Lie das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas complexas e considere a aplicação $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que calcula o determinante.

(i) Usando que $\det A$ é multilinear nos vetores coluna de A, mostre que a diferencial $\mathrm{d}\det_{\mathrm{Id}}$ na matriz identidade satisfaz $\mathrm{d}\det_{\mathrm{Id}} A = \mathrm{tr}(A)$ para qualquer matriz $A \in T_{\mathrm{Id}}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

(ii) Relembre que para qualquer homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G_1 \to G_2$ vale $\exp_2 \circ \mathrm{d}\varphi_e = \varphi \circ \exp_1$, sendo $\exp_i : \mathfrak{g}_i \to G_i$ a aplicação exponencial. Usando este fato, mostre que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

para qualquer matriz com entradas complexas A.