EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM GEOMETRIA - PARTE 1

DOUTORADO MTM/UFSC 2020/2

Questão 1. Seja M variedade C^∞ de dimensão m em $\mathbb{R}^n, (n > m)$.

(i) Seja $p \in M$. Faça a construção do espaço tangente T_pM e do espaço cotangente (dual do espaço tangente) T_pM^*.

(ii) Faça a construção do fibrado tangente TM e do fibrado cotangente TM^*.

(iii) O que é uma seção do fibrado tangente? E do fibrado cotangente?

Questão 2. Seja M variedade C^∞ de dimensão m. Denote $\Omega^k(M)$ o módulo das $k-$formas diferenciais em M, $k \geq 0$.

(i) Dê a definição da derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ e mostre que
- se $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ então $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- $d(d\omega) = 0$.

(ii) Faça a construção do grupo de cohomologia de de Rham $H^p_{dR}(M)$, $p \geq 0$.

(iii) Calcule $H^0_{dR}(M)$.

1)

i) Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ variedade suave de dim. $m < n$.
Há diversas maneiras de construir o espaço tangente T_pM.
Faremos aqui a construção via derivações em p, que possui a vantagem de ser mais prático para a teoria abstrata de variedades, mas a desvantagem de não ser geometricamente intuitiva.

Fixado $p \in M$, uma derivação em p é um funcional linear $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ (i.e., $\mathbb{R}$-linear) que satisfaz a Regra de Leibniz:

$$v(fg) = f(p)\,v(g) + g(p)\,v(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

O espaço tangente à p é o conjunto de derivações em p: $T_pM = \{ v \in L(C^\infty(M), \mathbb{R}) \mid v \text{ é derivação em } p \}$
com estrutura linear de subespaço vetorial de $L(C^\infty(M), \mathbb{R})$.
Naturalmente, $L(C^\infty(M), \mathbb{R})$ possui dimensão infinita, mas os funcionais que obedecem a regra de Leibniz formam um espaço vetorial de dimensão finita.
Vamos argumentar isto primeiro em $\mathbb{R}^m$, depois transferir isto para M por meio de cartas locais.
Antes, observe duas propriedades gerais de derivações em p:
- $v(c) = 0$ p/ c constante, $(\star)$
- Se $f(p) = g(p) = 0$, $v(f \cdot g) = 0$.

Fixado $p \in \mathbb{R}^m$, o espaço tangente geométrico em p é o conjunto $\{p\} \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m_p$, com estrutura linear $(p, v) + c(p, w) = (p, v + cw)$.

P/ simplificar, denote $v_p \equiv (p, v)$.

Considere a aplicação $v_p \in \mathbb{R}^m_p \longmapsto D_{v_p} \in T_p\mathbb{R}^m$, definida por $D_{v_p} f = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + tv)$.

na base canônica $e_1|_p, \dots, e_m|_p$, $v = v^i e_i|_p$, (Notação de Einstein $\sum_i$ omitido)

e pela regra da cadeia temos

$$D_{v_p} f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

assim é fácil ver que $v_p \mapsto D_{v_p}$ é linear, e pela regra do produto é uma derivação em p.

O fato crucial é que, na verdade, $v_p \mapsto D_{v_p}$ é um isomorfismo. P/ ver a injetividade, se $D_{v_p} \equiv 0$, para as funções coordenadas $x^1, \dots, x^m$,

$$D_{v_p} x^j = 0 \Rightarrow v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = 0 \Rightarrow v^j = 0, \; j = 1, \dots, m$$

logo $v_p = 0$.

Para a sobrejetividade, dado W derivação em p, ponha $v_p = v^i e_i|_p$, $v^i = W(x^i)$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, Pelo Teorema de Taylor,

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}(x^i - p^i)(x^j - p^j)\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p + t(x-p))\, dt.$$

Sendo a soma de produtos de funções suaves, podemos aplicar w nesta soma. Pelas propriedades da derivação em $(\star)$, vários termos se anulam, e obtemos

$$w f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\left(w(x^i) - \cancel{w(p^i)}\right) = \sum_i w(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$
$$= D_{v_p} f,$$

mostrando sobrejetividade.

Em particular, $D_{e_i|_p} = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $i = 1, \dots, m$ é base para $T_p\mathbb{R}^m$.

Para transferir esta construção em M, dado $p \in M$, seja $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ carta suave centrada em p. Temos $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ difeomorfismo, logo sua aplicação derivada $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, logo T_pM possui dimensão finita igual a m.

OBS: Se $F: M \to N$ é uma função suave entre variedades, a noção de derivada de F em p independe dos detalhes de T_pM, e é simplesmente definida por $dF_p(v)f = v(f \circ F)$.

Uma base para T_pM é obtida por

$$d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{\varphi(p)}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad i=1,\dots,m$$

(($u^1 \dots u^m$) denotam as coordenadas em $\mathbb{R}^m$ aqui, para evitar confusões.)

tal base age em funções $f \in C^\infty(M)$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)).$$

Com o T_pM construído, T_p^*M é simplesmente seu dual algébrico, $T_p^*M = L(T_pM, \mathbb{R})$.

Em coordenadas, $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^m$ é uma base de T_pM, e sua base dual é denotada por $\left(dx^i|_p\right)_{i=1}^m$, que é dada por $dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta^i{}_j$.

ii) O fibrado tangente é o conjunto

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM \quad \text{(união disjunta).}$$

que representa o conjunto de todas derivações em pontos $p \in M$. Por meio de cartas de M, podemos construir cartas de TM, e com estas cartas podemos induzir uma estrutura natural de variedade suave de dimensão $2m$, e de fibrado vetorial de rank m. Se $(\mathcal{U}, \varphi)$ é carta suave de M, seja $\pi : TM \to M$ a projeção natural, $\pi(v) = p$ p/ $v \in T_pM$.
É uma conta simples verificar que a função

$$T\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^m \quad \text{dada por}$$

$$T\varphi(v) = (\varphi(p), v^1, \dots, v^m), \quad \text{onde } v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

é uma bijeção, e se (V, ψ) é outra carta suave de M tal que $V \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$,

$$T\psi \circ (T\varphi)^{-1}(u, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(u), D(\psi \circ \varphi^{-1})_u(v))$$

onde $D(\psi \circ \varphi^{-1})_u$ é a derivada total de $\psi \circ \varphi^{-1}$.

Uma conta análoga se dá para $T\varphi \circ (T\varphi^{-1})$, de forma que $T\varphi \circ (T\varphi)^{-1}$ é difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^{2m}$, o que já mostra as cartas que devem ser usadas para construir a estrutura diferenciável em TM.

Já a construção de T^*M é análoga:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

e um elemento de T^*M é um funcional dual $w_p : T_pM \to \mathbb{R}$

comentários análogos valem para a construção de estrutura diferencial para T^*M, e construção de cartas é também similar, apenas lembrando que a matriz de transformação de bases duais é a inversa da transposta da base do espaço vetorial, de forma que a transição de cartas do fibrado cotangente terá forma similar, levando este fato em consideração.

iii) Em geral, se $\pi : E \to M$ é uma função sobrejetora, uma seção local de π é uma função $\sigma : U \subseteq M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_U$.

Se E, M são variedades suaves e π é uma submersão sobrejetora, é possível mostrar, por meio da forma local das submersões, que seções locais suaves sempre existem.

No caso de TM e T^*M, as projeções naturais $\pi : TM \to M$ e $\pi' : T^*M \to M$ são submersões sobrejetoras, logo seções locais sempre existem. Para TM, $\sigma : U \subseteq M \to TM$ seção local suave, $\sigma(p) \in T_pM$, logo é um vetor de T_pM $\forall p \in U$. Seções de TM são chamados de campos vetoriais.

Analogamente, $\sigma : U \to T^*M$ seção local, σ_p é um elemento do dual T_p^*M, $\forall p \in U$. Seções de T^*M são chamados de 1-formas.

2)

i) A derivada exterior é uma aplicação $d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ que é

- $\mathbb{R}$- linear
- $d \circ d = 0$
- se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- Se $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, df é o diferencial de f, definido por $df(X) = Xf$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

É possível mostrar que existe uma única coleção de tais aplicações $d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ satisfazendo tais condições, p/ $k \in \mathbb{N}$.

Isto é feito definindo d em coordenadas: se $\omega = \sum_I \omega_I \, dx^I$ em algum sistema de coordenadas, $d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I$, onde $I = (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ e a soma é sobre tais índices, e $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Para mostrar os itens necessários, por linearidade é suficiente mostrar para k-formas $f \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, f suave em um aberto de M.

(Claramente $d\omega$ como definido em cartas é linear, sendo $d\omega_I = \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i$)

Sejam $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}$, $\eta = g\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$

$$d(\omega \wedge \eta) = d(f \cdot g\, dx^I \wedge dx^J) = (f dg + g df) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

$$= f dg \wedge dx^I \wedge dx^J + g df \wedge dx^I \wedge dx^J$$

$$= \underbrace{dg \wedge \omega}_{(-1)^k,} \wedge dx^J + \underbrace{df \wedge dx^I}_{d\omega} \wedge \eta$$

(sendo dg 1-forma e ω k-forma)

$$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Para o segundo item, Primeiro, se f é 0-forma,

$$d(df) = d\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j =$$

$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j$$

$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j - \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

Para o caso geral, considere novamente

$\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ Por linearidade.

$$d\omega = df \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{dx^I}$$

$$d(d\omega) = d(\overset{0}{\cancel{df}}) \wedge dx^I + (-1)^k f\, d(dx^I)$$

e $d(dx^I)$ se anula pois podemos aplicar o argumento em cada dx^{i_j}, que é multiplicado por uma função constante (1), que se anulará em uma finita quantidade de passos.

ii) Seja $Z^k(M) = \ker\{d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\}$
$B^k(M) = \operatorname{im}\{d: \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\}$

$Z^k(M)$ é o subespaço dos k-formas fechadas, e $B^k(M)$ é o subespaço dos k-formas exatas.

O grupo de CoHomologia de de Rham de grau k é o espaço vetorial quociente

$$H^k_{dR}(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$$

iii) Assumo primeiro que M é conexa.
Não existem (-1)-formas, logo $B^k(M) = 0$ e se f e 0-forma fechada, $df = 0 \iff f$ é constante, pois M é conexa, logo

$$Z^k(M) \cong \mathbb{R}$$

e $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$

Se M não é conexa, sendo variedade possui no máximo quantidade enumerável de componentes conexas e $df = 0 \iff f$ é const em cada componente,

logo $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}^r$, $1 \leq r \leq +\infty$.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM GEOMETRIA - PARTE 2

DOUTORADO MTM/UFSC 2020/2

Questão 3. Sejam $\widetilde{M}$ e M variedades suaves de dimensão n com ou sem bordo e seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento a k-folhas suave, isto é, π é sobrejetora e todo ponto de M admite uma vizinhança aberta U tal que $\pi^{-1}(U)$ tem k componentes conexas e π se restringe a um difeomorfismo em cada uma delas. Mostre que se $\widetilde{M}$ e M são orientadas e π preserva orientação, então

$$\int_{\widetilde{M}} \pi^*\omega = k \int_M \omega,$$

para qualquer n-forma diferencial $\omega \in \Omega^n(M)$ com suporte compacto.
Dica: escolhendo uma cobertura apropriada, uma partição da unidade em M induz, por composição com π, uma partição da unidade em $\widetilde{M}$.

Questão 4. Seja $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ o grupo de Lie das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas complexas e considere a aplicação $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que calcula o determinante.

(i) Usando que $\det A$ é multilinear nos vetores coluna de A, mostre que a diferencial $\mathrm{d}\det_{\mathrm{Id}}$ na matriz identidade satisfaz $\mathrm{d}\det_{\mathrm{Id}} A = \mathrm{tr}(A)$ para qualquer matriz $A \in T_{\mathrm{Id}}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

(ii) Relembre que para qualquer homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G_1 \to G_2$ vale $\exp_2 \circ \mathrm{d}\varphi_e = \varphi \circ \exp_1$, sendo $\exp_i : \mathfrak{g}_i \to G_i$ a aplicação exponencial. Usando este fato, mostre que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

para qualquer matriz com entradas complexas A.

3) Sendo $\omega \in \Omega^m(M)$ de suporte compacto, assuma primeiro que supp ω está contido no domínio de uma única carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ orientada de maneira positiva ou negativa com a orientação de M. Sendo π recobrimento, denote por $V_1, \dots, V_k$ as k-folhas de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ denotando por π_j a restrição à V_j,

$\pi_j : V_j \to \mathcal{U}$ é difeomorfismo que preserva orientação, vemos que $(V_j = \pi_j^{-1}(\mathcal{U}), \varphi \circ \pi_j)$ é carta de $\tilde{M}$ com mesma orientação. Agora, por definição

$$\int_{\tilde{M}} \pi_j^* \omega = \pm \int_{\varphi \circ \pi_j(V_j)} ((\varphi \circ \pi_j)^{-1})^* (\pi_j^* \omega) =$$

$$= \pm \int_{\varphi(\mathcal{U})} (\pi_j \circ \pi_j^{-1} \circ \varphi^{-1})^* \omega = \pm \int_{\varphi(\mathcal{U})} (\varphi^{-1})^* \omega$$

$$= \int_M \omega$$

OBS: Sendo π_j difeo., supp $\pi^* \omega$ é compacto e contido em $\pi_j^{-1}(\mathcal{U})$.

agora, como para cada restrição π_j, $\operatorname{supp}\pi_j^* w \subseteq \pi_j^{-1}(U)$, vemos que $\operatorname{supp}\pi^* w \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{k} V_j$, e portanto integrar $\pi^* w$ significa somar as integrais sobre cada V_j, logo

$$\int_{\tilde{M}} \pi^* w = \sum_{j=1}^{k} \int_{\tilde{M}} \pi_j^* w = k \int_M w.$$

~~Para o caso geral, cubra o suporte de w com finitos abertos $\{U_i\}_{i=1}^{N}$ tais que cada U_i é um domínio de uma carta suave positiva ou negativamente orientada, e seja $\{\lambda_i : U_i \to \mathbb{R}\}$ partição da unidade subordinada à $\{U_i\}$. Agora, argumentando como no primeiro caso em cada U_i,~~

Para o caso geral, sendo π recobrimento, em cada $p \in \operatorname{supp} \omega$ existe um aberto U tal que $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^{*} W_i$ e a restrição para cada W_i é difeomorfismo. Podemos reduzir cada U e assumir que é domínio de uma carta positiva ou negativamente orientada. Sendo $\operatorname{supp} \omega$ compacto, cubra-o com uma quantidade finita de tais abertos, digamos $\{U_i\}_{i=1}^{N}$. Seja $\{\lambda_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i=1}^{N}$ partição da unidade subordinada à tal cobertura. p/ cada U_i,

$$\pi^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{j=1}^{*} V_{i,j}, \quad \text{com restrição}$$

à cada $V_{i,j}$ difeomorfismo, $\operatorname{supp} \pi^* \omega \subseteq$
$$\subseteq \bigcup_{i,j} V_{i,j}, \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_{i,j} = \lambda_i \circ \pi|_{V_{i,j}} : V_{i,j} \to \mathbb{R}$$

é partição da unidade para $\operatorname{supp} \pi^* \omega$.

Temos portanto, por definição,

$$\int_{\tilde{M}} \pi^* \omega = \sum_{i,j} \int_{\tilde{M}} \tilde{\lambda}_{i,j} \pi^* \omega = \sum_{i,j} \int_{\tilde{M}} \tilde{\lambda}_{i,j} \cdot \pi|_{V_{i,j}}^{*} \omega$$

$$= \sum_{j} \sum_{i} \int_{\tilde{M}}$$

em cada U_i, o argumento é tal como o caso em uma carta feito anteriormente, para a n-forma $\tilde{\lambda}_{i,j}\, \Pi|_{V_{i,j}}^{*}\, \omega$, observando que, neste caso a carta em $\tilde{M}$ é $(V_{i,j};\ \varphi_i \circ \Pi|_{V_{i,j}})$ e o pullback terá uma inversa de $\Pi|_{V_{i,j}}$, de forma que recuperamos $\lambda_i \omega$, e assim

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\tilde{M}} \tilde{\lambda}_{i,j}\, \Pi^{*} \omega = k \int_{M} \lambda_i \omega, \quad e$$

somando em i, por definição e uma vez que a integral não depende da escolha de partição da unidade,

$$\int_{\tilde{M}} \Pi^{*} \omega = k \int_{M} \omega .$$

(4)

i) $\det : GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ é suave, sendo polinomial nas entradas de qualquer matriz em $M(n, \mathbb{C})$, e em particular no aberto $GL(n, \mathbb{C})$.

Agora, $$d(\det)_{I_n}(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(I + tA).$$

agora, $$\det(I + tA) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{i=1}^{n} \left(\delta_{i,\sigma(i)} + t A_{i,\sigma(i)}\right)$$

Observe que este é um polinômio em t, e que, como queremos $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$, apenas o termo de grau t^1 importará. este termo é obtido por meio da permutação $\sigma = Id$, pois, se $\sigma \neq Id$, há dois índices que trocam no mínimo será um termo da forma $t^2 A_{j,\sigma(j)} A_{k,\sigma(k)}(\cdots)$ uma vez que $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Para $\sigma = Id$, temos $(1 + tA_{11}) \cdots (1 + tA_{nn}) \equiv P(t)$ que é um polinômio de grau n em t.

Indutivamente, verifica-se que $P(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} tA_{ii} + O(t^2)$

De fato, o caso $n=1$ é imediato.

Se vale p/ $n-1$, temos

$$\prod_{i=1}^{n}(1+tA_{ii})=\left[\prod_{i=1}^{n-1}(1+tA_{ii})\right](1+tA_{nn})$$

$$=\left(1+t\sum_{i=1}^{n-1}A_{ii}+O(t^2)\right)(1+tA_{nn})$$

$$=\left(1+t\sum_{i=1}^{n-1}A_{ii}+O(t^2)+tA_{nn}+t^2A_{nn}\sum_{i=1}^{n-1}A_{ii}+O(t^3)\right)$$

$$=1+t\sum_{i=1}^{n}A_{ii}+O(t^2)$$

Com isto, temos $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(I+tA) =$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(1 + t\,\mathrm{Tr}(A) + O(t^2)\right) = \mathrm{tr}\, A.$$

assim $d(\det)_I(A) = \mathrm{tr}\, A.$

ii) No caso de $GL(n, \mathbb{C})$ sabemos que, à menos de identificações entre $T_{I_n} GL(n, \mathbb{C})$ e $gl(n, \mathbb{C}) \cong M(n, \mathbb{C})$, $exp: gl(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ é a exponencial de matrizes complexas.

Como $det: GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é homomorfismo entre grupos de Lie, pois $det(AB) = det A \cdot det B$ e $det(A^{-1}) = 1/det A$ e det é suave, e também a aplicação exponencial em $\mathbb{C}$ é a exponencial de números complexos usual,

$$det \circ exp = e^{d(det)_{I_n}}$$

assim, $\forall A \in gl(n, \mathbb{C})$

$$det(e^A) = e^{d(det)_{I_n}(A)} = e^{tr A}.$$