Exame de Qualificação de Análise

Parte 1. Medida e Integração.

Questão 1 (2pt). Seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, e seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, não negativa e tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f dm < \infty$. Demonstre que dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto Lebesgue mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $m(E) < \infty$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dm \leqslant \int_E f dm + \varepsilon.$$

Dica. Encontre uma maneira de usar o Teorema da Convergência Monótona.

Questão 2 (2pt). Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável, m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função integrável com $f > 0$ q.s.. Mostre que

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f^{\frac{1}{k}} dm = m(A).$$

Dica. Defina $B := \{x \in A\colon 0 < f(x) \leqslant 1\}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B, \\ f(x), & \text{se } x \in A \setminus B. \end{cases}$$

Considere separadamente os casos $m(B) < \infty$ e $m(B) = \infty$.

Questão 3 (1pt). Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida, com μ σ-finita, e considere $f \in L^+(X)$. Defina

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty)\colon y < f(x)\}.$$

Mostre que G_f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)}$-mensurável e que

$$\mu \times m(G_f) = \int_X f d\mu.$$

Parte 2. Análise Funcional.

Questão 4 (1pt). Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear. Mostre que se $f \circ T \in X'$ para cada $f \in Y'$ então T é limitado.

Questão 5 (2pt). Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear contínuo e bijetor.

- **(a)** Mostre que se $\{x \in X\colon \|x\| \leqslant 1\}$ é compacto então T^{-1} é contínua.
- **(b)** Mostre, com um exemplo, que T^{-1} pode não ser contínua se $\{x \in X\colon \|x\| \leqslant 1\}$ não for compacto.

Questão 6 (2pt). Sejam H um espaço de Hilbert e Y um subespaço de H.

- **(a)** Mostre que $Y^{\perp\perp} = Y$ se, e somente se, Y é fechado.
- **(b)** Dado $f \in H' \setminus \{0\}$, mostre que $\dim(\ker(f)^{\perp}) = 1$.
