Exame de Qualificação de Equações Diferenciais

Informação. Cada questão vale 2.5 pt.

Questão 1. Sejam $a, b \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $\lim_{t\to\infty} a(t) = 1$ e b absolutamente integrável em $\mathbb{R}^+$. Considere o sistema

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x'(t) = a(t)y(t), \\ y'(t) = b(t)x(t). \end{cases}$$

Prove que se (x, y) é uma solução de (S) em $[0, \infty)$ com x limitada em $[0, \infty)$, então

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Questão 2 (A equação do calor em $\mathbb{R}$). Nessa questão, resolveremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Defina o **núcleo do calor** por

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0.$$

Seja $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, defina

$$u(x, t) = \Phi(x, t) * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) g(y) dy$$

- **(a)** Mostre que $\Phi_t(x, t) - \Phi_{xx}(x, t) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.
- **(b)** Mostre que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty), \mathbb{R})$.
- **(c)** Mostre que $u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.
- **(d)** Mostre que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ temos $|u(x, t) - g(x_0)| \to 0$ quando $(x, t) \to (x_0, 0)$ com $t > 0$.

Dica. Lembre-se que $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x, t) dx = 1$ para cada $t > 0$.

Questão 3.

- **(a)** Defina a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mostre que a aplicação $\mathcal{F} \colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é linear e contínua.
- **(b)** Seja u uma função no espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Prove que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)(x) = i^k x^k \mathcal{F}(u)(x).$$

- **(c)** Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Encontre uma solução para o problema:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \ x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Questão 4.

(a) Demonstre a seguinte versão da **desigualdade de Grönwall**: sejam ϕ, η funções contínua, não-negativas e integráveis num intervalo (a, b) da reta, e g uma função contínua, não-negativa, não-descrescente e localmente integrável em (a, b), satisfazendo:

$$\phi(t) \leqslant g(t) + \int_a^t \eta(s)\phi(s)ds \qquad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Então

$$\phi(t) \leqslant g(t)e^{\int_a^t \eta(s)ds} \qquad \text{para todo } t \in (a, b).$$

(b) Suponha que $A \in M_n(\mathbb{R})$, $U = (\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ é localmente Hölder contínua em t, localmente Lipschitz em x para $(t, x) \in U$ e também que

$$\|f(t, x)\| \leqslant k(t)(1 + \|x\|) \text{ para todo } (t, x) \in U,$$

onde k é uma função contínua não-negativa em (τ, ∞). Se $t_0 > \tau$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que a única solução $x(\cdot, t_0, x_0)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + f(t, x) \quad t > t_0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

está definida para todo $t > t_0$, isto é, o intervalo maximal de existência desta solução é (t_0, ∞).

Dica. Use (sem demonstração) a Fórmula da Variação das Constantes, o fato de que (para este problema) se $(t_0, t_{\max})$ é o intervalo maximal da solução de $x(\cdot, t_0, x_0)$ então ou $t_{\max} = \infty$ ou $t_{\max} < \infty$ e $\|x(t, t_0, x_0)\| \to \infty$ quando $t \to t_{\max}^-$, e por fim, use a Desigualdade de Grönwall do item (a).