Exame de Qualificação - Análise - 2024.2

Data: 17/09/2024

Instruções: Das 10 questões abaixo, resolva apenas 8 questões no total, distribuídas da seguinte forma: escolha 2 das 3 primeiras questões (1-3), e mais 6 questões dentre as questões restantes (4-10).

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável, seja m a medida de Lebesgue e seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável e $f > 0$ q.s. Mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_A f^{\frac{1}{n}} dm = m(A).$$
Sugestão: usar o teorema da convergência dominada.

2. Demonstre que dado um conjunto Lebesgue mensurável e limitado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $K \subseteq E$ e $m(E \setminus K) < \varepsilon$.

   Sugestão: Usar o fato de que todo conjunto Lebesgue mensurável pode ser aproximado por fora (em medida) por conjuntos abertos.

3. Seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável e $f \in L^2(X)$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$, em que $E_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$.

4. Seja X um espaço normado.
   (a) Mostre que se X tem infinitos vetores linearmente independentes então X' também tem infinitos vetores linearmente independentes.
   (b) É verdade que se X é separável então X' é separável?
   (c) É verdade que se X é separável então qualquer subconjunto de X é separável?

5. Seja $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma ordenação de todos os números racionais em $[0, 1]$. Defina $T : l^\infty \to l^\infty$ por $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Determine o espectro de T.
   (b) Existem auto-valores no espectro? Quais são?
   (c) É possível que T seja compacto?

6. Sejam X, Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ linear. Mostre que se $f \circ T \in X'$ para cada $f \in Y'$ se e somente se T é limitado.

7. Seja H um espaço de Hilbert e seja Y um subespaço de H.

    (a) Mostre que $Y^{\perp\perp} = Y$ se e somente se Y é fechado.

    (b) Vale uma igualdade como acima se Y for apenas um *conjunto* fechado?

    (c) Dado $f \in H' \setminus \{0\}$, mostre que $dim(ker(f)^{\perp}) = 1$.

8. Sejam X e Y espaço normados, $K \subseteq X$ um subconjunto e $f : K \to Y$ uma função contínua. Mostre que se K é compacto então f é uniformemente contínua. Vale o mesmo se K for apenas fechado?

9. Seja H um espaço de Hilbert e $K \subseteq H$ um subespaço fechado. Suponha que $(x_n)_{n\in\ N} \subseteq K$ é uma sequência que converge fracamente para $x \in H$. Mostre que $x \in K$.

10. Seja X um espaço de Banach e suponha que $A \subseteq X$ é um conjunto não enumerável tal que existe uma constante $c > 0$ com $\|a - b\| \geq c$ para todo $a \neq b$ em A. Mostre que X não é separável. Aplique isto para mostrar que $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ não é separável.