Exame de Qualificação em Álgebra 2022.1

11 de abril de 2022

Questão 1 (3,0 pontos). *Seja M um R-módulo à esquerda. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *M é semissimples;*

(ii) *todo submódulo de M é um somando direto;*

(iii) *todo módulo quociente de M é um fator direto;*

(iv) *toda sequência exata $0 \to N \to M \to P \to 0$ cinde.*

Questão 2 (2,0 pontos). *Seja R um anel. Prove que*

(a) *qualquer R-módulo cíclico à esquerda é isomorfo ao quociente R/I para algum ideal à esquerda I de R;*

(b) *todo ideal à esquerda de R é principal se e somente se todo submódulo de um R-módulo cíclico à esquerda é cíclico.*

Questão 3 (2,0 pontos). *Sejam $p \in \mathbb{N}$ um primo e G_p o subgrupo do grupo quociente $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definido por $G_p = \{x \in A | p^k x = 0 \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Note que para n fixo, $G_{p,n} = \{x \in A | p^n x = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é um subgrupo de G_p. Assim, temos que $G_p = \bigcup_n G_{p,n}$.*

- *Prove que $G_{p,n} \subsetneq G_{p,n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.*
- *Concluir que G_p não satisfaz a condição de cadeia ascendente como $\mathbb{Z}-$módulo.*

Questão 4 (3,0 pontos). *Seja R um anel comutativo com unidade.*

- *Seja $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal, prove que $\mathfrak{a}$ é livre como $R-$módulo se, e somente se, $\mathfrak{a}$ é um ideal principal gerado por um elemento que não é divisor de zero em R.*
- *Seja R um domínio de ideais principais. Prove que um $R-$módulo M de torsão (i.e., $M = tor(M)$, onde para qualquer $R-$modulo temos $tor(M) := \{m \in M \setminus \{0\} \mid \exists x \in R \setminus \{0\} \text{ com } x \cdot m = 0\}$) é irredutível se, e somente se, $M = ann(p)$, com $p \in R$ um elemento primo.*