EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ÁLGEBRA 2024.2

Questão 1. *Para todos os itens desta questão, A é um anel qualquer.*

a) *Dê um exemplo de um módulo projetivo que não seja livre.*

b) *Seja P um $A-$módulo à esquerda e seja $P^* := {}_A\operatorname{Hom}(P, A)$. Prove que P é projetivo se, e somente se, existem famílias $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq P$ e $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq P^*$ tais que, para todo $a \in A$, $f_i(a) = 0$ para todos, exceto um número finito de índices $i \in I$, e $a = \sum_{i\in I} f_i(a) \triangleright a_i$.*

c) *Relembrando que, se M é um A-módulo à esquerda, então M^* é um A-módulo à direita, com ação dada por $(f \blacktriangleleft a)(x) := f(x)a, \quad \forall a \in A,\ f \in M^*,\ x \in M$. Similarmente, se N é um módulo a direita, então ${}^*N = \operatorname{Hom}_A(P, A)$ é um A-módulo à esquerda, com ação $(a \blacktriangleright f)(x) = af(x)$. Assim, se M é um $A-$módulo a esquerda então ${}^*(M^*)$ é um $A-$módulo à esquerda, e existe um homomorfismo canônico $\epsilon : M \to {}^*(M^*)$, dado pela avaliação; $\operatorname{ev}_m(f) := f(m), \forall m \in M, f \in M^*$. Mostre que, se P é um A-módulo projetivo à esquerda finitamente gerado, então o homomorfismo canônico $\operatorname{ev} : P \to {}^*(P^*)$ é um isomorfismo.*

d) *Mostre que a hipótese de ser finitamente gerado no exercício anterior é necessária (Dica: considere $P = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}$).*

Questão 2. a) *Sejam A um anel e $M = M_n(A)$ o anel de matrizes $n \times n$ com coeficientes em A. Prove que qualquer ideal I de M é da forma $M_n(J)$ para um* ***único*** *ideal J de A.*

b) *Sejam D um anel de divisão e $R = M_n(D)$. Prove que R é simples, semisimples à esquerda, noetheriano à esquerda.*

c) *Sejam D um anel de divisão e $R = M_n(D)$. Prove que, a menos de isomorfismo, R tem um único módulo simples V e $R \simeq \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$ como R módulos.*

Questão 3. *Considere o diagrama comutativo abaixo de grupos abelianos, com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r] & 0 \\
M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

a) *Mostre que existe um único morfismo $\sigma : P \to P'$ fazendo com que o diagrama fique comutativo.*

b) *Mostre que, se φ e ψ são isomorfismos, então σ também o é.*

Questão 4. a) *Seja A um grupo abeliano finito. Mostre que $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.*

b) *Mostre que*

$$\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d,$$

em que $d = \operatorname{mdc}(m, n)$.

c) *Seja R um anel, $I \trianglelefteq R$ um ideal bilateral e N um R-módulo à esquerda. Defina*

$$IN = \{\sum_k a_k n_k \mid a_k \in I,\ n_k \in N\}.$$

Mostre o isomorfismo de R-módulos à esquerda:

$$(R/I) \otimes N \cong N/IN.$$