Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Categorias monoidais e o Teorema de Mac Lane para a condição estrita

Gabriel Samuel de Andrade
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Março de 2016

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Categorias monoidais e o Teorema de Mac Lane para a condição estrita

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Gabriel Samuel de Andrade
Florianópolis
Março de 2016

Categorias monoidais e o Teorema de Mac Lane para a condição estrita

por

Gabriel Samuel de Andrade[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Abdelmoubine Amar Henni
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Luz Adriana Mejía Castaño
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Regina Maria de Aquino
(Universidade Federal do Espírito Santo - UFES)

Sérgio Tadao Martins
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2016.

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

"It has long been an axiom of mine that the little things are infinitely the most important."

Sherlock Holmes

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar o Teorema de Mac Lane para a condição estrita. Tal teorema afirma que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita. Além disso, apresentamos categorias abelianas e demonstramos que toda categoria monoidal também é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética.

Utilizamos como referência principal as notas de aula *Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones* do Prof. Dr. Martín Mombelli.

Abstract

The present work aims to demonstrate Mac Lane's Strictness Theorem. This theorem states that any monoidal category is monoidally equivalent to a strict monoidal category. Moreover, we present abelian categories and demonstrate that any monoidal category is monoidally equivalent to a skeletal monoidal category.

We used as the main reference the class notes *Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones* of the Prof. Dr. Martín Mombelli.

Sumário

Introdução

A teoria de categorias é apresentada pela primeira vez em 1945, no trabalho de Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane intitulado *General Theory of Natural Equivalences*, com o intuito de entender transformações naturais. Por ser uma teoria tão abstrata que aparentemente não tem conteúdo, foi chamada de "abstração sem sentido". Atualmente, tornou-se uma linguagem poderosa, indispensável em muitas áres da matemática, como geometria algébrica, topologia e teoria de representações.

Desenvolvimentos importantes aconteceram quando categorias começaram a serem usadas em teoria de homologia e álgebra homológica. Mac Lane, Buchsbaum, Grothendieck e Heller consideraram categorias em que as coleções de morfismos entre dois objetos fixados têm uma estrutura adicional. Por exemplo, dados objetos X e Y de uma categoria $\mathcal{C}$, o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de morfismos de X em Y forma um grupo abeliano.

Desde então, surgiram outros exemplos de categorias com estruturas semelhantes às conhecidas da álgebra ordinária. Como observado em [5], uma boa maneira de pensar em teoria de categorias é como um refinamento (ou "categorificação") da álgebra ordinária. Em outras palavras, existe um dicionário entre estas duas áreas, tal que estruturas algébricas comuns são obtidas das correspondentes estruturas categóricas considerando o conjunto das classes de isomorfismo de objetos. Por exemplo, a noção de categoria pequena é uma categorificação da noção de conjunto. Similarmente, categorias abelianas são uma categorificação de grupos abelianos (o que justifica a terminologia). Mais geralmente, a categorificação dos monóides, uma das estruturas mais fundamentais da álgebra ordinária, origina as categorias monoidais.

Uma categoria monoidal é, basicamente, uma categoria munida de um funtor $\otimes$ e um objeto $\mathbf{1}$ tais que os objetos $(X \otimes Y) \otimes Z$, $X \otimes (Y \otimes Z)$ e $\mathbf{1} \otimes X$, X, $X \otimes \mathbf{1}$ estão relacionados por isomorfismo naturais. Quando tais isomorfismos naturais são as respectivas identidades, dizemos que a categoria monoidal é estrita. O Teorema de Mac para a condição estrita afirma que podemos, em um certo sentido, considerar quaisquer categorias monoidais como estritas.

Este trabalho é resultado dos estudos do autor e da sua orientadora sobre as notas de aula *Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones* do Prof. Dr. Martín Mombelli. Desde o segundo semestre de 2014, abordamos muitos assuntos através de seminários, por exemplo, categorias, categorias abelianas, categorias monoidais, categorias tensoriais e categorias módulo sobre categorias tensorias. Inicialmente, estas últimas categorias seriam o assunto da dissertação, mas por falta de tempo, nos limitamos a escrever sobre categorias monoidais. Alertamos o leitor que o Capítulo 2 sobre categorias abelianas pode ser ignorado, em termos de pré-requisitos para esse trabalho, pois apesar de algumas categorias abelianas, como por exemplo, a categoria de módulos, serem exemplos de categorias monoidais, tal capítulo não contribui para os principais resultados do trabalho. Escolhemos introduzir categorias abelianas com o objetivo de usar a dissertação como referência para um possível trabalho futuro sobre categorias tensoriais que são, em particular, categorias abelianas e monoidais.

Uma das motivações para realizarmos esse trabalho foram duas observações feitas em ([5]: Remark 2.8.6 e 2.8.7). Para situarmos o leitor, os dois resultados principais estudados aqui são que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética e que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita, este é o conhecido *Mac Lane's strictness theorem*. Na observação 2.8.6, encontramos um exemplo de uma categoria monoidal que não é estrita, mas que pelo teorema de Mac Lane é monoidalmente equivalente a uma monoidal estrita.

Por outro lado, toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética e pelo desenvolvimento da observação 2.8.6 é possível concluirmos que a categoria do exemplo referido acima, não é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal que seja esquelética e estrita ao mesmo tempo, isso é dito exatamente no final da observação 2.8.7. O que fica por detrás desse fato é que, segundo [5], para tornarmos uma categoria monoidal estrita, é necessário adicionar novos objetos a ela (objetos estes isomorfos, mas não iguais aos já existentes). O desejo de evitar adicionar tais objetos nos faz trabalhar com categorias monoidais não estritas (ou seja, a, l e r não sendo os isomorfismos naturais identidade) muito embora o teorema de Mac Lane diga que isso não seja necessário. De alguma forma assegura-se que algumas categorias sejam "mais estritas" do que a categoria apresentada no exemplo dado, a saber, Vec_G^{ω}. Estudamos essa categoria em nosso trabalho, porém a denotamos por $\mathcal{C}(G,\omega)$.

Nossa proposta de trabalho foi entender bem as provas dos dois resultados principais citados acima e a seguir apresentamos a disposição dos capítulos dessa dissertação.

No Capítulo 1, apresentamos os pré-requisitos sobre teoria de categorias. Entre eles, estão os conceitos de categorias, funtores e transformações naturais. Além disso, definimos equivalências entre categorias e demonstramos o fato de que duas categorias são equivalentes se existir um funtor fiel, pleno e denso entre estas.

No Capítulo 2, estudamos categorias abelianas. Definimos objetos iniciais, finais e nulos, categorias pré-aditivas, aditivas e abelianas. Um dos resultados importantes é que em categorias abelianas vale o *Teorema do isomorfismo.*

No Capítulo 3, estudamos categorias monoidais. Apresentamos a definição clássica destas categorias e provamos algumas de suas propriedades. Ao definirmos categorias esqueléticas, que possuem uma estrutura mais simples, mostramos que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética.

No Capítulo 4, demonstramos o "Mac Lane's Strictness Theorem", que afirma que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo apresentamos os conceitos fundamentais para estudarmos categorias. Definimos categoria, funtor, transformação natural, monomorfismo e epimorfismo.

1.1 Categorias

Definição 1.1.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de*

(i) *uma coleção de objetos $Ob(\mathcal{C})$;*

(ii) *para cada par (X, Y) de objetos em $\mathcal{C}$, uma coleção $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de morfismos de X para Y;*

(iii) *para qualquer objeto X em $Ob(\mathcal{C})$, um morfismo id_X em $Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$, chamado morfismo identidade de X;*

(iv) *para quaisquer X, Y, Z objetos em $Ob(\mathcal{C})$, uma função*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

chamada composição, que satisfaz os seguintes axiomas:

(a) *para quaisquer objetos X e Y em $Ob(\mathcal{C})$, o morfismo identidade id_X em $Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ satisfaz*

$$f \circ id_X = f \quad e \quad id_X \circ g = g,$$

para quaisquer f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$;

(b) *dados objetos X, Y, Z, W em $Ob(\mathcal{C})$ e morfismos f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, h em $Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$, a composição é associativa, ou seja,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

A referência [8] é básica no estudo da *Teoria de Categorias*. Nessa referência são apresentadas três definições de categoria, a que apresentamos, uma que envolve apenas uma coleção de morfismos e uma outra que considera uma categoria como um grafo dirigido com duas funções, identidade e composição. Escolhemos a definição dada por ser a mais comum e cômoda para trabalhar.

Vale notar que uma palavra importante na definição dada é "coleção". Evita-se escrever "conjunto de objetos" e "conjunto de morfismos", pois as coleções de objetos e morfismos não costumam ser conjuntos, mesmo nas categorias mais comuns. Na verdade, existem várias questões interessantes da *Teoria de Conjuntos* e dos fundamentos da matemática envolvidos no estudo de categorias. No entanto, não focaremos nestes aspectos, apresentando apenas algumas considerações a respeito deles. Para o leitor interessado, a já citada referência [8] apresenta um quadro geral e fornece ótimas indicações para entender mais profundamente essas questões.

Apesar das coleções envolvidas em categorias não serem sempre conjuntos, vamos usar os símbolos e termos já conhecidos, como $\in$, $\subseteq$, "função", "aplicação", para relacionar coleções e seus elementos. Sabendo disso, fixamos agora algumas notações.

Denotamos um morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ por $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$. Além disso, X e Y são chamados domínio e codomínio do morfismo f, respectivamente. Escrevemos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e, por abuso de notação, escrevemos "$X \in \mathcal{C}$" para designar um objeto X em $Ob(\mathcal{C})$.

Apesar de uma categoria ser constituída por objetos, morfismos, morfismos identidade e uma composição, geralmente se apresentam apenas os objetos e morfismos, ficando subentendidos os morfismos identidade e a composição. É dessa forma que apresentamos a maioria dos exemplos a seguir.

Exemplo 1.1.2 A categoria *Set* é aquela cujos objetos são os conjuntos e os morfismos são as funções.

Exemplo 1.1.3 A categoria *Rel* é aquela cujos objetos são os conjuntos e os morfismos são as relações.

Lembrando, para X, Y conjuntos, uma relação R entre X e Y é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$. Agora, para X, Y, Z conjuntos e $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ relações, definimos a composição $S \circ R \subseteq X \times Z$ como a sendo a relação

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z : \text{ existe } y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

Nesse caso, $id_X \subseteq X \times X$ é a relação $id_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

Exemplo 1.1.4 A categoria *Grp* é aquela cujos objetos são os grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.1.5 A categoria *Ab* é aquela cujos objetos são os grupos abelianos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.1.6 A categoria *Div* é aquela cujos objetos são os grupos divisíveis e os morfismos são os homomorfismos de grupos.

Lembrando, se G é um grupo abeliano, então G é divisível se, para todo $x \in G$ e todo inteiro não-nulo n, existe $y \in G$ tal que $x = ny$. Alguns exemplos de grupos divisíveis são $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, o grupo multiplicativo dos números complexos $\mathbb{C}^*$ e o grupo de Prüfer $Z(p^\infty)$.

Exemplo 1.1.7 A categoria *Ring* é aquela cujos objetos são os anéis e os morfismos são os homomorfismos de anéis.

A categoria *ring* é aquela cujos objetos são os anéis com unidade e os morfismos são os homomorfismos de anéis que preservam a unidade.

A categoria *Cring* é aquela cujos objetos são os anéis comutativos com unidade e os morfismos são os homomorfismos de anéis que preservam a unidade.

Exemplo 1.1.8 Seja R um anel. Denotamos por ${}_R\mathfrak{M}$ (respectivamente $\mathfrak{M}_R$) a categoria cujos objetos são os R-módulos à esquerda (respectivamente à direita) e os morfismos são os homomorfismos de R-módulos à esquerda (respectivamente à direita).

Exemplo 1.1.9 Seja k um corpo. Denotamos por $Vect_k$ a categoria cujos objetos são os k-espaços vetoriais e os morfismos são as transformações k-lineares.

Denotamos por $vect_k$ a categoria cujos objetos são os k-espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos são as transformações k-lineares.

Exemplo 1.1.10 Seja k um corpo. Denotamos por Alg_k a categoria cujos objetos são as k-álgebras e os morfismos são os homomorfismos de k-álgebras.

Exemplo 1.1.11 Seja A uma k-álgebra. Denotamos por ${}_A\mathfrak{M}$ (respectivamente $\mathfrak{M}_A$) a categoria cujos objetos são os A-módulos à esquerda (respectivamente à direita) e os morfismos são os homomorfismos de A-módulos à esquerda (respectivamente à direita).

A categoria ${}_A\mathfrak{m}$ (respectivamente $\mathfrak{m}_A$) é a categoria cujos objetos são os A-módulos à esquerda (respectivamente à direita) de dimensão finita e os morfismos são os homomorfismos de A-módulos à esquerda (respectivamente à direita).

Para os dois próximos exemplos, lembramos as definições de álgebra de Lie e de biálgebra.

Definição 1.1.12 *Seja k um corpo. Uma k-álgebra de Lie é um par $(L, [-,-])$, em que L é um k-espaço vetorial e $[-,-] : L\otimes L \to L$ é uma aplicação k-linear, chamada colchete de Lie, que satisfaz às seguintes propriedades:*

(i) $[x, x] = 0$, *para todo* $x \in L$;
(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, *para quaisquer* $x, y, z \in L$.

Essa última igualdade é conhecida como *Identidade de Jacobi.*

Exemplo 1.1.13 Seja k um corpo. Denotamos por Lie_k a categoria cujos objetos são as k-álgebras de Lie e os morfismos são os homomorfismos de k-álgebras de Lie, ou seja, aplicações k-lineares que preservam o colchete de Lie.

Definição 1.1.14 *Seja k um corpo. Uma k-biálgebra é uma quíntupla $(H, M, \mu, \Delta, \varepsilon)$, em que (H, M, μ) é uma k-álgebra, (H, Δ, ε) é uma k-coálgebra e valem as seguintes condições equivalentes:*

(i) *M e μ são homomorfismos de k-coálgebras;*
(ii) *Δ e ε são homomorfismos de k-álgebras.*

Exemplo 1.1.15 Seja k um corpo. Denotamos por $Bialg_k$ a categoria cujos objetos são as k-biálgebras e os morfismos são os homomorfismos de k-biálgebras, ou seja, aplicações k-lineares que são homomorfismos de k-álgebras e k-coálgebras.

Exemplo 1.1.16 A categoria Top é aquela cujos objetos são os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas.

Exemplo 1.1.17 A categoria $Diff$ é aquela cujos objetos são as variedades diferenciáveis e os morfismos são as funções diferenciáveis.

Exemplo 1.1.18 Seja A uma k-álgebra. Denotamos por $\underline{A}$ a categoria com um único objeto $*$ e $Hom_{\underline{A}}(*,*) = A$. A composição é dada pelo produto de A e $id_* = 1_A$.

Definição 1.1.19 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias, $\mathcal{D}$ é dita uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, para quaisquer X,$Y \in \mathcal{D}$, e a composição de morfismos em $\mathcal{D}$ é a composição como em $\mathcal{C}$.*

Definição 1.1.20 *Uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é dita plena se $Hom_{\mathcal{D}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{D}$.*

Exemplo 1.1.21 Notemos que, para X,Y conjuntos e $f : X \to Y$ função, podemos considerar f como a relação

$$\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Dessa forma, Set é uma subcategoria de Rel, mas não é uma subcategoria plena, pois nem toda relação é uma função.

Exemplo 1.1.22 A categoria Div é uma subcategoria plena de Ab, que por sua vez é uma subcategoria plena de Grp.

Exemplo 1.1.23 A categoria $ring$ é uma subcategoria de $Ring$ que não é plena. De fato, para R anel com unidade, podemos definir o homomorfismo de anéis

$$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \times R \\ & r & \mapsto & (r, 0). \end{array}$$

Tal homomorfismo é um morfismo em $Ring$, mas não em $ring$.

Exemplo 1.1.24 Para k um corpo, $vect_k$ é uma subcategoria plena de $Vect_k$. Analogamente, para A uma k-álgebra, ${}_A\mathfrak{m}$ é uma subcategoria plena de ${}_A\mathfrak{M}$.

Exemplo 1.1.25 A categoria $Diff$ é uma subcategoria de Top que não é plena.

Definição 1.1.26 *Uma categoria é dita pequena se as coleções de objetos e morfismos forem conjuntos.*

Definição 1.1.27 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita localmente pequena se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um conjunto.*

As principais categorias que vamos estudar são localmente pequenas. Por essa razão, daqui em diante vamos considerar todas as categorias como localmente pequenas.

Apresentamos agora algumas construções básicas que nos permitem obter novas categorias a partir de categorias já conhecidas.

Definição 1.1.28 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotamos por $\mathcal{C}^{op}$ a categoria oposta a $\mathcal{C}$, definida como segue:*

(i) $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$;

(ii) *para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}^{op}$,*

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X);$$

(iii) *para morfismos $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$, a composição é dada por*

$$g \circ^{op} f = f \circ g.$$

Não é difícil ver que $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$. A categoria oposta é importante para estudar dualidade e definir funtores contravariantes. No estudo de categorias, cada conceito é acompanhado do seu conceito dual, obtido "invertendo as flechas" na definição do conceito original. Isso vai ficar mais claro nas seções seguintes. Para mais informações, o leitor pode pesquisar em ([2], section 3.1).

Definição 1.1.29 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias. Denotamos por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a categoria produto de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, definida como segue:*

(i) $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$;

(ii) *para quaisquer $(X, Y), (X', Y') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$,*

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) = Hom_{\mathcal{C}}(X, X') \times Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y');$$

(iii) *para cada par (X, Y) em $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$, $id_{(X,Y)} = (id_X, id_Y)$ é o morfismo identidade em $Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X, Y))$;*

(iv) *para morfismos* $(f,g) \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X') \times Hom_{\mathcal{D}}(Y,Y')$, $(f',g') \in Hom_{\mathcal{C}}(X',X'') \times Hom_{\mathcal{D}}(Y',Y'')$, *a composição é dada por*

$$(f',g') \circ (f,g) = (f' \circ f, g' \circ g).$$

A categoria produto vem acompanhada de funtores de projeção, como será visto na seção sobre funtores. Funtores definidos em uma categoria produto são chamados de bifuntores, que são importantes para definir categorias monoidais.

1.2 Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

Funções injetoras e sobrejetoras podem ser definidas em termos de elementos. Mais precisamente, é apresentada a seguinte definição.

Definição 1.2.1 *Sejam X, Y conjuntos. Uma função $f : X \to Y$ é*
(i) *injetora se, para $x, y \in X$ tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$;*
(ii) *sobrejetora se para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Em uma categoria qualquer, nem sempre os objetos são conjuntos, de maneira que a definição anterior não faria sentido para morfismos. Por essa razão, na tentativa de generalizar esses conceitos, é preciso entender como as funções injetoras e sobrejetoras se relacionam com as outras funções. Um resultado conhecido é apresentado pela proposição seguinte.

Proposição 1.2.2 *Sejam X, Y conjuntos. Uma função $f : X \to Y$ é*
(i) *injetora se, e somente se, existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$;*
(ii) *sobrejetora se, e somente se, existe uma função $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$.*

É sabido que a função $g : Y \to X$ em ambos itens (i) e (ii) não é canonicamente determinada. Essas propriedades de funções injetoras e sobrejetoras seriam muito restritivas em uma categoria qualquer. Por exemplo, consideremos a categoria ${}_R\mathfrak{M}$. Sejam $M \in {}_R\mathfrak{M}$, N um R-submódulo de M e $f : N \to M$ a inclusão canônica. Então, é possível mostrar que existe um homomorfismo de R-módulos $g : M \to N$ tal que $g \circ f = id_N$ se, e somente se, N é um somando direto de M. Por essa razão, a generalização geralmente considerada é a que apresentamos agora.

Definição 1.2.3 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Então, o morfismo f é dito um*
(i) *monomorfismo se para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tais que $f \circ g = f \circ h$, tem-se $g = h$;*
(ii) *epimorfismo se para todo par de morfismos $g, h : Y \to Z$ tais que $g \circ f = h \circ f$, tem-se $g = h$;*
(iii) *isomorfismo se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$.*

Além disso, X e Y são ditos *isomorfos*, e denotamos por $X \simeq Y$, se existir um isomorfismo $f : X \to Y$.

Notemos que monomorfismo e epimorfismo são conceitos duais. Em outras palavras, os monomorfismos de $\mathcal{C}$ são exatamente os epimorfismos de $\mathcal{C}^{op}$. O conceito de isomorfismo é auto-dual. Também, todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo. A recíproca nem sempre é verdadeira, como será mostrado nos exemplos. Aqui, fazemos o comentário de que quando $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana, objeto de estudo do próximo capítulo, a recíproca é verdadeira.

Na categoria *Set*, funções injetoras (sobrejetoras) são exatamente os monomorfismos (epimorfismos). Esses fatos seguem diretamente da Proposição 1.2.2. Abaixo alguns exemplos de monomorfismos não injetores e epimorfismos não sobrejetores.

Exemplo 1.2.4 Em *Div*, a projeção $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um monomorfismo não injetor.

De fato, sejam G um grupo abeliano divisível e $g, h : G \to \mathbb{Q}$ homomorfismos de grupos tais que $\pi \circ g = \pi \circ h$. Isso quer dizer que $g(x), h(x)$ pertencem à mesma classe em $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ou seja, $g(x) - h(x) \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in G$. Chamamos $k : G \to \mathbb{Q}$ o homomorfismo de grupos dado por $k = g - h$.

Seja $x \in G$ tal que $k(x) \geq 0$. Como G é divisível, para $n = k(x) + 1 > 0$, existe $y \in G$ tal que $x = ny$. Portanto, $k(x) = k(ny) = nk(y) = (k(x) + 1)k(y)$. Então

$$0 \leq \frac{k(x)}{k(x) + 1} = k(y) < 1.$$

Como $k(y) \in \mathbb{Z}$, segue que $k(y) = 0$. Como $x = ny$, temos $k(x) = 0$. Se $k(x) < 0$, usando o mesmo raciocínio, chegamos à desigualdade

$$0 < \frac{k(x)}{k(x) + 1} = k(y) < 1,$$

o que é um absurdo, pois $k(y) \in \mathbb{Z}$. Isso implica $k = 0$, logo $g = h$ e π é um monomorfismo. Claramente, π não é injetor.

Exemplo 1.2.5 Em *Ring*, a inclusão $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ é um epimorfismo não sobrejetor.

De fato, sejam R um anel e $g, h : \mathbb{Q} \to R$ homomorfismos de anéis tais que $g \circ i = h \circ i$. Isso quer dizer que g e h coincidem nos inteiros, ou seja, $g(n) = h(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Agora, dado $q \in \mathbb{Q}$, podemos escrever $q = nm^{-1}$, para $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
g(q) &= g(nm^{-1}) \\
&= g(nm^{-1}1) \\
&= g(n)g(m^{-1})g(1) \\
&= h(n)g(m^{-1})h(1) \\
&= h(n)g(m^{-1})h(mm^{-1}) \\
&= h(n)g(m^{-1})h(m)h(m^{-1}) \\
&= h(n)g(m^{-1})g(m)h(m^{-1}) \\
&= h(n)g(m^{-1}m)h(m^{-1}) \\
&= h(n)g(1)h(m^{-1}) \\
&= h(n)h(1)h(m^{-1}) \\
&= h(n1m^{-1}) \\
&= h(nm^{-1}) \\
&= h(q).
\end{aligned}$$

Portanto, $g = h$ e i é um epimorfismo que não é sobrejetor.

Exemplo 1.2.6 Pode ainda acontecer de uma bijeção não ser um isomorfismo. Em *Top*, a função $f : [0, 2\pi) \to S^1$ dada por $f(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, é uma bijeção contínua. No entanto, a inversa de f não é contínua, logo f não é um isomorfismo em *Top*.

Abaixo alguns exemplos de categorias em que monomorfismos são injetores e epimorfismos são sobrejetores.

Exemplo 1.2.7 Em *Grp*, os monomorfismos são injetores.

De fato, sejam $f : G \to H$ um monomorfismo em *Grp* e $K = \{x \in G : f(x) = e_H\}$ o seu núcleo. Sejam $g, h : K \to G$ definidos por

$$g(x) = x \ \text{ e } \ h(x) = e_G, \ \text{ para todo } \ x \in K,$$

ou seja, a inclusão canônica e o homomorfismo trivial, respectivamente. Então $f \circ g = f \circ h$. Como f é um monomorfismo, temos $g = h$ e isso implica $K = \{e_G\}$. Logo, f é injetor.

Provas análogas ao do exemplo anterior mostram que os monomorfismos são injetores nas categorias *Ring* e ${}_R\mathfrak{M}$.

Exemplo 1.2.8 Em *ring*, os monomorfismos são injetores.

Vamos mostrar a contrapositiva, ou seja, um morfismo não injetor em *ring* não é um monomorfismo. Sejam $f : R \to S$ um morfismo em *ring* e $r, s \in R$, $r \neq s$, tais que $f(r) = f(s)$. Se $R[x]$ é o anel de polinômios sobre R, existem $g, h : R[x] \to R$ morfismos em *ring* tais que $g(x) = r$ e $h(x) = s$. Portanto, $f \circ g = f \circ h$, mas $g \neq h$, o que prova que f não é um monomorfismo.

Exemplo 1.2.9 Seja R um anel. Em ${}_R\mathfrak{M}$, os epimorfismos são sobrejetores.

De fato, seja $f : M \to N$ um epimorfismo em ${}_R\mathfrak{M}$. Sejam $g, h : N \to N/f(M)$ dadas por

$$g(n) = n + f(M) \quad \text{e} \quad h(n) = 0 + f(M), \quad \text{para todo} \quad n \in N,$$

ou seja, a projeção canônica e o homomorfismo trivial, respectivamente. Então $g \circ f = h \circ f$. Como f é um epimorfismo, temos $g = h$ e isso implica $f(M) = N$. Logo, f é sobrejetor.

A seguinte proposição mostra que a composição de monomorfismos e epimorfismos é um monomorfismo e um epimorfismo, respectivamente.

Proposição 1.2.10 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : X \to Y$, $f' : Y \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$.*
(i) *Se f' é um monomorfismo, então f é um monomorfismo se, e somente se, $f' \circ f$ é um monomorfismo.*
(ii) *Se f é um epimorfismo, então f' é um epimorfismo se, e somente se, $f' \circ f$ é um epimorfismo.*

Demonstração: (i) ($\Rightarrow$) Sejam $g, h : W \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$. Como f' é um monomorfismo, temos $f \circ g = f \circ h$. Como f é um monomorfismo, temos $g = h$.

($\Leftarrow$) Sejam $g, h : W \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e como $f' \circ f$ é um monomorfismo, temos $g = h$.

(ii) Segue do item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ∎

1.3 Funtores

Ao definirmos uma estrutura algébrica, é natural que sejam definidos também os morfismos que preservam tal estrutura. No nosso caso, definimos agora os "morfismos" entre categorias, chamados funtores.

Definição 1.3.1 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, consiste de duas aplicações:*

(i) *uma aplicação $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ que associa cada objeto $X \in \mathcal{C}$ a um objeto $F(X) \in \mathcal{D}$;*

(ii) *uma aplicação $F : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ que associa cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ a um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $\mathcal{D}$ tal que*

$$F(id_X) = id_{F(X)} \quad e \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),$$

para $X \in \mathcal{C}$ e f, g morfismos em $\mathcal{C}$ tal que a composição $g \circ f$ exista.

Observação 1.3.2 O funtor definido acima é conhecido como funtor *covariante*. Um funtor contravariante é completamente análogo, exceto pelo fato de que "inverte flechas", ou seja, se $f : X \to Y$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, então $F(f) : F(Y) \to F(X)$ é um morfismo em $\mathcal{D}$. Portanto, para f, g morfismos em $\mathcal{C}$ tal que a composição $g \circ f$ exista, tem-se

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Podemos considerar um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ como um funtor covariante $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. De fato, considerando f, g morfismos em $\mathcal{C}^{op}$, a igualdade anterior se torna

$$F(f \circ^{op} g) = F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

É por essa razão que é suficiente estudarmos funtores covariantes.

Definição 1.3.3 *Sejam $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$,$\mathcal{E}$ categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. A composição $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é definida por*

$$(G \circ F)(X) = G(F(X)) \quad e \quad (G \circ F)(f) = G(F(f)),$$

para $X \in \mathcal{C}$ e f um morfismo em $\mathcal{C}$.

Para $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias, denotamos por $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a coleção de funtores entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Na próxima seção, vamos apresentar a coleção $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ como uma categoria. Para uma categoria $\mathcal{C}$, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = End(\mathcal{C})$.

Apresentamos agora alguns exemplos de funtores. Começamos apresentando funtores que podem ser considerados em qualquer categoria.

Exemplo 1.3.4 Toda categoria $\mathcal{C}$ possui um funtor identidade $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, para $X \in \mathcal{C}$ e f um morfismo em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.3.5 Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{D}$ uma subcategoria de $\mathcal{C}$. O funtor inclusão $I_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é definido por $I_{\mathcal{D}}(X) = X$ e $I_{\mathcal{D}}(f) = f$, para $X \in \mathcal{D}$ e f um morfismo em $\mathcal{D}$.

Exemplo 1.3.6 Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $Z \in \mathcal{D}$. O funtor constante $C_Z : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é definido por $C_Z(X) = Z$ e $C_Z(f) = id_Z$, para $X \in \mathcal{C}$ e f um morfismo em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.3.7 Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias. O funtor $P_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, chamado projeção sobre $\mathcal{C}$, é definido por $P_{\mathcal{C}}(X, Y) = X$ e $P_{\mathcal{C}}(f, g) = f$, para $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ e (f, g) um morfismo em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Analogamente, podemos considerar o funtor $P_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, chamado projeção sobre $\mathcal{D}$.

Exemplo 1.3.8 Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X \in \mathcal{C}$. O funtor $L_X : \mathcal{C} \to Set$ é definido por

$$L_X(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad \text{para} \quad Y \in \mathcal{C},$$

e para $f : Y \to Z$ um morfismo em $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{rccc} L_X(f): & Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & \alpha & \mapsto & f \circ \alpha. \end{array}$$

O funtor L_X é chamado funtor representado por X.

Exemplo 1.3.9 Análogo ao exemplo anterior, o funtor $R_X : \mathcal{C} \to Set$ é definido por

$$R_X(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X), \quad \text{para} \quad Y \in \mathcal{C},$$

e para $f : Y \to Z$ um morfismo em $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{rccc} R_X(f): & Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \circ f. \end{array}$$

Nesse caso, o funtor R_X é contravariante. De fato, para $Y \in \mathcal{C}$ e para todo $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$, temos

$$\begin{aligned} R_X(id_Y)(\alpha) &= \alpha \circ id_Y \\ &= \alpha \\ &= id_{R_X(Y)}(\alpha). \end{aligned}$$

Sejam $f : Y \to Z$ e $g : Z \to W$ morfismos em $\mathcal{C}$ e $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(W, X)$. Então

$$\begin{aligned} R_X(g \circ f)(\alpha) &= \alpha \circ (g \circ f) \\ &= (\alpha \circ g) \circ f \\ &= (R_X(g)(\alpha)) \circ f \\ &= R_X(f)(R_X(g)(\alpha)) \\ &= (R_X(f) \circ R_X(g))(\alpha). \end{aligned}$$

Uma notação mais conhecida para L_X (respectivamente R_X) é $Hom_{\mathcal{C}}(X, -)$ (respectivamente $Hom_{\mathcal{C}}(-, X)$). Nessa notação, escreve-se f_* (respectivamente f^*) para $Hom_{\mathcal{C}}(X, -)(f)$ (respectivamente $Hom_{\mathcal{C}}(-, X)(f)$). Esses dois funtores podem ainda ser combinados, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.3.10 Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X \in \mathcal{C}$. O funtor $Hom_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$ é definido por

$$Hom_{\mathcal{C}}(-, -)(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad \text{para} \quad (X, Y) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C},$$

e para $(f, g) : (X, Y) \to (X', Y')$ um morfismo em $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(-, -)(f, g) : \quad Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to Hom_{\mathcal{C}}(X', Y') \\ \alpha &\mapsto g \circ \alpha \circ f. \end{aligned}$$

Notemos que $Hom_{\mathcal{C}}(-, -)$ é um bifuntor e $Hom_{\mathcal{C}}(-, -)(f, g) = f^* \circ g_* = g_* \circ f^*$.

Agora, um caso particular do funtor contravariante R_X, definido no Exemplo 1.3.9.

Exemplo 1.3.11 Denotamos por $D : Vect_k \to Vect_k$ o funtor R_k. Portanto, temos

$$D(V) = V^* \ \text{ e } \ D(T) = T^*,$$

para V um k-espaço vetorial e $T : V \to W$ uma transformação k-linear, em que $V^* = Hom_k(V, k)$ é o k-espaço vetorial dual de V e

$$\begin{aligned} T^* : \quad W^* &\to V^* \\ f &\mapsto f \circ T \end{aligned}$$

é uma transformação k-linear, chamada transposta de $T : V \to W$.

Os próximos exemplos são chamados funtores de esquecimento. São chamados assim porque o efeito deles sobre os objetos consiste em esquecer parte da estrutura ou alguma propriedade do objeto, enquanto os morfismos são preservados. Portanto, esses funtores são, intuitivamente, da forma $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U(X) = X$ e $U(f) = f$, para $X \in \mathcal{C}$ e f um morfismo em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.3.12 O funtor de esquecimento $U : Grp \to Set$ esquece a estrutura de grupo.

Exemplo 1.3.13 O funtor de esquecimento $U : Ab \to Grp$ esquece a comutatividade dos grupos abelianos. Note que esse funtor é exatamente o funtor inclusão de Ab em Grp.

Exemplo 1.3.14 Seja R um anel. O funtor de esquecimento $U : {}_R\mathfrak{M} \to Ab$ esquece a ação de R sobre os R-módulos à esquerda.

Exemplo 1.3.15 Seja k um corpo. O funtor de esquecimento $U : Alg_k \to Vect_k$ esquece o produto das k-álgebras.

Usando os exemplos de categorias que apresentamos, poderíamos considerar ainda vários outros exemplos de funtores de esquecimento. Apesar de serem simples, estes funtores são importantes, especialmente quando se tenta considerar funtores associados a eles na direção contrária. Em muitos casos, obtém-se funtores que associam objetos a objetos chamados livres ou universais. Para podermos dar o primeiro exemplo, fazemos algumas considerações sobre grupos livres gerados por um conjunto.

Definição 1.3.16 *Seja X um conjunto. Um grupo livre gerado por X é um par (F_X, ι_X), em que F_X é um grupo e $\iota_X : X \to F_X$ é uma função, satisfazendo à seguinte propriedade universal: para qualquer par (G, f), em que G é um grupo e $f : X \to G$ é uma função, existe um único homomorfismo de grupos $g : F_X \to G$ tal que $g \circ \iota_X = f$.*

É possível mostrar que, para qualquer conjunto X, existe um grupo livre F_X gerado por X, único, a menos de isomorfismo. Por essa razão, dizemos que F_X é o grupo livre gerado por X. Devido à propriedade universal dos grupos livres, para uma função $f : X \to Y$, existe um único homomorfismo de grupos $\bar{f} : F_X \to F_Y$ tal que $\bar{f} \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. Para mais informações, veja ([7], págs. 64-66).

Exemplo 1.3.17 Seja $F : Set \to Grp$ o funtor definido por $F(X) = F_X$, para um conjunto X, em que F_X é o grupo livre gerado por X, e $F(f) = \bar{f}$, para uma função $f : X \to Y$, em que $\bar{f} : F_X \to F_Y$ é o homomorfismo de grupos citado acima.

Lembramos agora a definição de comutador entre elementos de um grupo.

Seja G um grupo. Para quaisquer $g, h \in G$, consideremos $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, tal elemento é chamado *comutador*.

Denotamos por $[G, G] = < [g, h] : g, h \in G >$ o subgrupo gerado pelos comutadores. Não é difícil ver que $[G, G]$ é o menor subgrupo normal K tal que G/K é um grupo abeliano.

Denotamos por $\pi_G : G \to G/[G, G]$ a projeção canônica. É possível mostrar que $G/[G, G]$ satisfaz à seguinte propriedade universal: para qualquer par (H, f), em que H é um grupo abeliano e $f : G \to H$ é um homomorfismo de grupos, existe um único homomorfismo de grupos $g : G/[G, G] \to H$ tal que $g \circ \pi_G = f$.

Devido a essa propriedade universal, para $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos, existe um único homomorfismo de grupos $\bar{f} : G/[G, G] \to H/[H, H]$ tal que $\bar{f} \circ \pi_G = \pi_H \circ f$. A saber, $\bar{f} : G/[G, G] \to H/[H, H]$ é dado por $\bar{f}([G, G]g) = [H, H]f(g)$, para $g \in G$. Para mais informações, o leitor pode consultar ([7], págs. 102-103).

Exemplo 1.3.18 O funtor abelianização $A : Grp \to Ab$ é definido por $A(G) = G/[G, G]$, para G um grupo e $A(f) = \bar{f}$, para $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos, em que $\bar{f} : G/[G, G] \to H/[H, H]$ é o homomorfismo de grupos já citado.

Sejam R um anel com unidade e G um grupo abeliano. Temos que R e G são $\mathbb{Z}$-módulos e podemos considerar o R-módulo à esquerda $R \otimes_{\mathbb{Z}} G$. Denotamos por $\iota_G : G \to R \otimes_{\mathbb{Z}} G$ o homomorfismo de grupos dado por $\iota_G(g) = 1_R \otimes g$, para $g \in G$.

É sabido que, para G, H grupos abelianos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos, existe um único homomorfismo de R-módulos à esquerda $\bar{f} : R \otimes_{\mathbb{Z}} G \to R \otimes_{\mathbb{Z}} H$ tal que $\bar{f} \circ \iota_G = \iota_H \circ f$. A saber, $\bar{f} : R \otimes_{\mathbb{Z}} G \to R \otimes_{\mathbb{Z}} H$ é dado por $\bar{f}(r \otimes g) = r \otimes f(g)$, para qualquer $r \otimes g \in R \otimes_{\mathbb{Z}} G$.

Exemplo 1.3.19 Seja $R \otimes_{\mathbb{Z}} - : Ab \to {}_R\mathfrak{M}$ o funtor que associa cada G grupo abeliano ao R-módulo à esquerda $R \otimes_{\mathbb{Z}} G$ e $(R \otimes_{\mathbb{Z}} -)(f) = \bar{f}$, para $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos abelianos, em que $\bar{f} : R \otimes_{\mathbb{Z}} G \to R \otimes_{\mathbb{Z}} H$ é o homomorfismo de R-módulos à esquerda dado acima.

Sejam k um corpo e V um k-espaço vetorial. Denotamos por $T(V)$ a k-álgebra tensorial sobre V. Como k-espaços vetoriais, temos

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

em que $V^{\otimes 0} = k$, $V^{\otimes 1} = V$ e $V^{\otimes n} = V \otimes V^{n-1}$, para $n \geq 2$.

Agora, para elementos $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ e $w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in V^{\otimes m}$, definimos a operação

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m.$$

Estendendo essa operação k-linearmente para $T(V)$, obtemos uma estrutura de k-álgebra. Denotamos por $\iota_V : V \to T(V)$ a transformação k-linear dada por $\iota_V(v) = v \in V^{\otimes 1}$, para $v \in V$.

Sabemos que $(T(V), \iota_V)$ satisfaz à seguinte propriedade universal: para qualquer par (A, f), em que A é uma k-álgebra e $f : V \to A$ é uma transformação k-linear, existe um único homomorfismo de k-álgebras $g : T(V) \to A$ tal que $g \circ \iota_V = f$. Veja ([4], pág. 159).

Devido a essa propriedade universal, para $f : V \to W$ uma transformação k-linear, existe um único homomorfismo de k-álgebras $\bar{f} : T(V) \to T(W)$ tal que $\bar{f} \circ \iota_V = \iota_W \circ f$. A saber, $\bar{f} : T(V) \to T(W)$ é dado por

$$\bar{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_n),$$

em que $v_1, ..., v_n \in V$.

Exemplo 1.3.20 Seja $T : Vect_k \to Alg_k$ o funtor que associa cada k-espaço vetorial V à álgebra tensorial $T(V)$ sobre V e $T(f) = \bar{f}$, para $f : V \to W$ uma transformação k-linear, em que $\bar{f} : T(V) \to T(W)$ é o homomorfismo de k-álgebras citado acima.

Prosseguimos apresentando mais exemplos de funtores.

Exemplo 1.3.21 Denotamos por $\Delta : Set \to Set$ o funtor, chamado diagonal, definido por $\Delta(X) = X \times X$ e $\Delta(f) = f \times f$, para X um conjunto e $f : X \to Y$ uma função, em que

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & X \times X & \to & Y \times Y. \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), f(y)) \end{array}$$

Lembramos agora as definições de grupo oposto e de homomorfismo de grupos oposto.

Seja G um grupo com operação $*$. Denotamos por G^{op} o grupo com operação $*^{op}$ cujos elementos são os mesmos de G e

$$x *^{op} y = y * x, \quad \text{para} \quad x, y \in G^{op}.$$

O grupo G^{op} é chamado o grupo oposto de G. Para $f : G \to H$ homomorfismo de grupos, define-se $f^{op} : G^{op} \to H^{op}$ o homomorfismo de grupos dado por $f^{op}(x) = f(x)$, para $x \in G$. Então, $f^{op} : G^{op} \to H^{op}$ é chamado o oposto de $f : G \to H$.

Exemplo 1.3.22 Denotamos por $(-)^{op} : Grp \to Grp$ o funtor que associa cada grupo G e homomorfismo de grupos $f : G \to H$ aos seus opostos G^{op} e $f^{op} : G^{op} \to H^{op}$, respectivamente.

Exemplo 1.3.23 Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Denotamos por $GL_n : Cring \to Grp$ o funtor definido por

$$GL_n(R) = \{A \in M_n(R) : A \ \text{ é uma matriz invertível}\}.$$

Para $f : R \to S$ um morfismo em $Cring$, temos

$$\begin{array}{rccc} GL_n(f): & GL_n(R) & \to & GL_n(S). \\ & (r_{ij})_{i,j} & \mapsto & (f(r_{ij}))_{i,j} \end{array}$$

Exemplo 1.3.24 Denotamos por $(-)^{\times} : Cring \to Grp$ o funtor que associa cada anel comutativo com unidade R ao seu grupo de invertíveis

$$R^{\times} = \{r \in R : r \ \text{ é invertível}\}$$

e cada morfismo $f : R \to S$ em $Cring$ ao homomorfismo de grupos $f^{\times} : R^{\times} \to S^{\times}$, dado pela restrição e corestrição de f a $R^{\times}$ e $S^{\times}$, respectivamente.

Sejam k um corpo e A uma k-álgebra. O comutador de $a, b \in A$, denotado por $[a, b]_A$, é dado por $[a, b]_A = ab - ba$. Notemos que se $f : A \to B$ é um homomorfismo de k-álgebras, então f preserva o comutador, ou seja, $f([a, b]_A) = [f(a), f(b)]_B$.

Exemplo 1.3.25 Denotamos por $\mathcal{L} : Alg_k \to Lie_k$ o funtor definido por $\mathcal{L}(A) = (A, [-, -]_A)$ e $\mathcal{L}(f) = f$, para A uma k-álgebra e $f : A \to B$ um homomorfismo de k-álgebras.

Sejam k um corpo e L uma k-álgebra de Lie. A álgebra envolvente de L, denotada por $\mathcal{U}(L)$, é definida como sendo a k-álgebra $\mathcal{U}(L) =$

$T(L)/I$, em que I é o ideal de $T(L)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in T(L)$, para $x, y \in L$.

Se $f : L \to K$ é um homomorfismo de k-álgebras de Lie, existe um único homomorfismo de k-álgebras $\bar{f} : \mathcal{U}(L) \to \mathcal{U}(K)$ tal que $\bar{f} \circ \iota_L = \iota_K \circ f$.

Exemplo 1.3.26 Denotamos por $\mathcal{U} : Lie_k \to Alg_k$ o funtor que associa cada k-álgebra de Lie L à álgebra envolvente $\mathcal{U}(L)$ de L e $\mathcal{U}(f) = \bar{f}$, para $f : L \to K$ um homomorfismo de k-álgebras de Lie, em que $\bar{f} : \mathcal{U}(L) \to \mathcal{U}(K)$ é o homomorfismo de k-álgebras de Lie citado no comentário anterior.

Exemplo 1.3.27 Seja k um corpo. Denotamos por $P : Bialg_k \to Lie_k$ o funtor que toma primitivos, ou seja, para H uma k-biálgebra com comultiplicação Δ, o conjunto dos elementos primitivos de H é definido por

$$P(H) = \{h \in H : \Delta(h) = h \otimes 1_H + 1_H \otimes h\}.$$

Então, $P(H)$ é um k-espaço vetorial e podemos definir um colchete de Lie em $P(H)$ pelo comutador $[h, k] = hk - kh \in P(H)$, para $h, k \in P(H)$. De fato, para $h, k \in P(H)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta([h,k]) &= \Delta(hk - kh) \\
&= \Delta(h)\Delta(k) - \Delta(k)\Delta(h) \\
&= hk \otimes 1_H + h \otimes k + k \otimes h + 1_H \otimes hk \\
&\quad -kh \otimes 1_H - k \otimes h - h \otimes k - 1_H \otimes kh \\
&= (hk - kh) \otimes 1_H + 1_H \otimes (hk - kh) \\
&= [h,k] \otimes 1_H + 1_H \otimes [h,k],
\end{aligned}$$

provando que $[h, k] \in P(H)$.

Se $f : H \to K$ é um homomorfismo de k-biálgebras, então $P(f) : P(H) \to P(K)$ é a restrição e corestrição de f a $P(H)$ e $P(K)$, respectivamente. Dessa forma, $P(f)$ é um homomorfismo de k-álgebras de Lie. Notemos que $P(f)$ está bem definido. De fato, para $h \in P(H)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(f(h)) &\overset{(*)}{=} (f \otimes f)(\Delta(h)) \\
&= (f \otimes f)(h \otimes 1_H + 1_H \otimes h) \\
&= f(h) \otimes 1_K + 1_K \otimes f(h),
\end{aligned}$$

logo $f(h) \in P(K)$. A igualdade $(*)$ segue do fato de que Δ é um homomorfismo de k-álgebras.

Exemplo 1.3.28 Com a notação do Exemplo 1.3.11, se considerarmos $D \circ D : Vect_k \to Vect_k$, obtemos um funtor covariante, chamado duplo dual. Esse funtor associa cada k-espaço vetorial V ao duplo dual V^{**} e cada transformação k-linear $T : V \to W$ à dupla transposta $T^{**} : V^{**} \to W^{**}$ definida por $T^{**}(\Phi) = \Phi \circ T^*$, para todo $\Phi \in V^{**}$.

Terminamos essa seção definindo propriedades básicas que um funtor pode ter.

Definição 1.3.29 *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito fiel, respectivamente pleno, se para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, a aplicação*

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

é injetiva, respectivamente sobrejetiva.

O funtor F é dito denso se, para todo objeto $Z \in \mathcal{D}$, existe um objeto $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq Z$.

Essas propriedades serão usadas na próxima seção para caracterizar funtores que definem equivalências entre categorias.

1.4 Transformações naturais

Nesta seção ocorre, pela primeira vez, uma definição usando diagramas comutativos. Um diagrama em $\mathcal{C}$ é um grafo dirigido cujos nós são objetos de $\mathcal{C}$ e cujas flechas são morfismos em $\mathcal{C}$. Nesse caso, dizemos que um diagrama comuta ou é comutativo se sempre que se vai de um objeto a outro seguindo as flechas, sempre se obtém o mesmo morfismo. Por exemplo, a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "g'"'] & W \end{tikzcd}$$

é equivalente a dizer que

$$g \circ f = g' \circ f' \in Hom_{\mathcal{C}}(X, W).$$

Sabemos que funtores preservam composições. Portanto, funtores também preservam diagramas comutativos. Por exemplo, se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor, considerando o diagrama comutativo anterior, temos que

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(f')"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ F(Z) \arrow[r, "F(g')"'] & F(W) \end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo em $\mathcal{D}$. Dizemos que o diagrama acima foi obtido aplicando F ao diagrama original em $\mathcal{C}$.

Definição 1.4.1 *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural entre F e G, denotada por $\mu : F \to G$, é uma coleção de morfismos $\{\mu_X : F(X) \to G(X) : X \in \mathcal{C}\}$ em $\mathcal{D}$ tal que, para cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja,

$$G(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ F(f).$$

A transformação natural $\mu : F \to G$ é dita um *isomorfismo natural* se os morfismos $\mu_X : F(X) \to G(X)$ são isomorfismos, para $X \in \mathcal{C}$. Nesse caso, dizemos que F é equivalente a G e denotamos por $F \simeq G$.

Observação 1.4.2 É comum apresentar os morfismos $\mu_X : F(X) \to G(X)$, ficando a transformação natural e os funtores envolvidos subentendidos. Adotamos essa prática. Também vamos descrever a comutatividade do diagrama na definição como sendo a naturalidade de μ para o morfismo f.

Uma forma de interpretarmos uma transformação natural seria como uma coleção de morfismos que transforma os diagramas comutativos obtidos aplicando um funtor naqueles obtidos aplicando outro funtor, ou seja, como se a transformação natural transladasse certos diagramas. Considerando $\mu : F \to G$ uma transformação natural, isso pode ser visto pelos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\
& Y \arrow[dl, "g"] \\
Z &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "\mu_X"] \arrow[dr, "F(f)"] \arrow[dd, "F(h)"'] & & G(X) \arrow[dr, "G(f)"] \arrow[dd, "G(h)"' near end] & \\
& F(Y) \arrow[rr, "\mu_Y" near start] \arrow[dl, "F(g)"] & & G(Y) \arrow[dl, "G(g)"] \\
F(Z) \arrow[rr, "\mu_Z"] & & G(Z) &
\end{tikzcd}$$

em que $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ e f, g, h são morfismos em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.4.3 Todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ possui uma transformação natural identidade $id_F : F \to F$ definida por $(id_F)_X = id_{F(X)}$, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Exemplo 1.4.4 A coleção $\tau : \Delta \to \Delta$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \tau_X : & X \times X & \to & X \times X, \\ & (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

para cada conjunto X, é uma transformação natural.

De fato, para uma função $f : X \to Y$ e $x, y \in X$, temos

$$\begin{aligned}
(\Delta(f) \circ \tau_X)(x, y) &= ((f \times f) \circ \tau_X)(x, y) \\
&= (f \times f)(\tau_X(x, y)) \\
&= (f \times f)(y, x) \\
&= (f(y), f(x)) \\
&= \tau_Y(f(x), f(y)) \\
&= \tau_Y((f \times f)(x, y)) \\
&= (\tau_Y \circ (f \times f))(x, y) \\
&= (\tau_Y \circ \Delta(f))(x, y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(f) \circ \tau_X = \tau_Y \circ \Delta(f)$.

Exemplo 1.4.5 A coleção das inversões nos grupos é um isomorfismo natual. Explicitamente, seja $\mu : Id_{Grp} \to (-)^{op}$ definida por

$$\begin{array}{rccc} \mu_G : & G & \to & G^{op}, \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

para cada grupo G. Claramente, μ_G é um isomorfismo de grupos, para cada grupo G, e como $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, para todo morfismo de grupos f, segue que μ é um isomorfismo natural.

Exemplo 1.4.6 O determinante é uma transformação natural. Explicitamente, $\det : GL_n \to (-)^{\times}$ definida por

$$\begin{array}{rccc} \det_R : & GL_n(R) & \to & R^{\times}, \\ & A & \mapsto & \det_R(A) \end{array}$$

para R um anel comutativo com unidade, é uma transformação natural. Sabemos que $\det_R(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) r_{1\sigma(1)} ... r_{n\sigma(n)}$.

De fato, para $f : R \to S$ um morfismo em $Cring$ e $A = (r_{ij})_{i,j} \in GL_n(R)$, temos

$$\begin{array}{rcl} (f^{\times} \circ \det_R)(A) & = & f^{\times}(\det_R(A)) \\ & = & f(\det_R(A)) \\ & = & f(\det_R((r_{ij})_{i,j})) \\ & = & f(\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) r_{1\sigma(1)} ... r_{n\sigma(n)}) \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f(sign(\sigma) r_{1\sigma(1)} ... r_{n\sigma(n)}) \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) f(r_{1\sigma(1)}) ... f(r_{n\sigma(n)}) \\ & = & \det_S((f(r_{ij}))_{i,j}) \\ & = & \det_S(GL_n(f)((r_{ij})_{i,j})) \\ & = & \det_S(GL_n(f)(A)) \\ & = & (\det_S \circ GL_n(f))(A). \end{array}$$

Portanto, $f^{\times} \circ \det_R = \det_S \circ GL_n(f)$.

Exemplo 1.4.7 A coleção $ev : Id_{Vect_k} \to D \circ D$ dada por

$$\begin{array}{rccc} ev_V : & V & \to & V^{**} \\ & v & \mapsto & ev_V(v) \end{array}$$

é uma transformação natural, em que o morfismo

$$\begin{array}{rccc} ev_V(v): & V^* & \to & k \\ & f & \mapsto & f(v) \end{array}$$

é uma transformação k-linear. De fato, para $T : V \to W$, $v \in V$ e $f \in W^*$, temos

$$\begin{aligned}
(((D \circ D)(T) \circ ev_V)(v))(f) &= ((T^{**} \circ ev_V)(v))(f) \\
&= (T^{**}(ev_V(v)))(f) \\
&= (ev_V(v) \circ T^*)(f) \\
&= (ev_V(v))(T^*(f)) \\
&= (ev_V(v))(f \circ T) \\
&= (f \circ T)(v) \\
&= f(T(v)) \\
&= (ev_W(T(v)))(f) \\
&= ((ev_W \circ T)(v))(f) \\
&= ((ev_W \circ Id_{Vect_k}(T))(v))(f).
\end{aligned}$$

Portanto, $(D \circ D)(T) \circ ev_V = ev_W \circ Id_{Vect_k}(T)$. Se Id_{Vect_k} e $D \circ D$ forem restritos a $vect_k$, então ev é um isomorfismo natural.

Definição 1.4.8 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias.*

(i) *$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $G \circ F \simeq Id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G \simeq Id_{\mathcal{D}}$ e denota-se $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.*

(ii) *$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$ e denota-se $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$.*

Todo isomorfismo entre categorias é uma equivalência, mas a recíproca não é verdadeira.

Para uma categoria $\mathcal{C}$, podemos considerar em $Ob(\mathcal{C})$ a relação $\sim$ tal que $X \sim Y$ se, e somente se, $X \simeq Y$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência e a classe de equivalência de um objeto é chamada classe de isomorfismo desse objeto. Nesse caso, duas categorias são equivalentes se existe uma bijeção entre as suas classes de isomorfismo, enquanto que são isomorfas se existe uma bijeção entre suas classes de objetos.

Agora, apresentamos dois tipos de composições entre transformações naturais: composição vertical e composição horizontal.

Definição 1.4.9 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\mu : F \to G$, $\nu : G \to H$ transformações naturais. A composição vertical de ν e μ é a transformação natural $\nu \circ \mu : F \to H$ dada por*

$$(\nu \circ \mu)_X = \nu_X \circ \mu_X, \quad \textit{para todo} \quad X \in \mathcal{C}.$$

Definição 1.4.10 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ categorias, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $J, H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores e $\mu : F \to G$, $\nu : J \to H$ transformações naturais. A composição horizontal de ν e μ é a transformação natural $\nu * \mu : J \circ F \to H \circ G$ dada por*

$$(\nu * \mu)_X = \nu_{G(X)} \circ J(\mu_X), \quad \textit{para todo} \quad X \in \mathcal{C}.$$

Notemos que vale a igualdade $\nu_{G(X)} \circ J(\mu_X) = H(\mu_X) \circ \nu_{F(X)}$. De fato, da naturalidade de ν e considerando o morfismo $\mu_X : F(X) \to G(X)$, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
J(F(X)) \arrow[r, "\nu_{F(X)}"] \arrow[d, "J(\mu_X)"'] & H(F(X)) \arrow[d, "H(\mu_X)"] \\
J(G(X)) \arrow[r, "\nu_{G(X)}"'] & H(G(X))
\end{tikzcd}$$

ou seja, $\nu_{G(X)} \circ J(\mu_X) = H(\mu_X) \circ \nu_{F(X)}$.

Com respeito às composições verticais e horizontais, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4.11 *As seguintes afirmações são válidas:*
(i) *a composição vertical de transformações naturais é uma transformação natural;*
(ii) *a composição horizontal de transformações naturais é uma transformação natural.*

Demonstração: (i) Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Com as notações da definição de composição vertical, devemos mostrar que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "(\nu\circ\mu)_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "(\nu\circ\mu)_Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}
$$

comuta. Sabemos que os diagramas

$$
\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
G(Y) \arrow[r, "\nu_Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

comutam. Assim,

$$
\begin{aligned}
H(f) \circ (\nu \circ \mu)_X &= H(f) \circ \nu_X \circ \mu_X \\
&= \nu_Y \circ G(f) \circ \mu_X \\
&= \nu_Y \circ \mu_Y \circ F(f) \\
&= (\nu \circ \mu)_Y \circ F(f).
\end{aligned}
$$

(ii) Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Com as notações da definição de composição horizontal, devemos mostrar que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(J \circ F)(X) \arrow[r, "(\nu*\mu)_X"] \arrow[d, "J(F(f))"'] & (H \circ G)(X) \arrow[d, "H(G(f))"] \\
(J \circ F)(Y) \arrow[r, "(\nu*\mu)_Y"'] & (H \circ G)(Y)
\end{tikzcd}
$$

comuta. Além disso, os diagramas

$$\begin{tikzcd} J(G(X)) \arrow[r, "\nu_{G(X)}"] \arrow[d, "J(G(f))"'] & H(G(X)) \arrow[d, "H(G(f))"] \\ J(G(Y)) \arrow[r, "\nu_{G(Y)}"'] & H(G(Y)) \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

comutam. Assim,

$$\begin{array}{rcl} H(G(f)) \circ (\nu * \mu)_X & = & H(G(f)) \circ \nu_{G(X)} \circ J(\mu_X) \\ & = & \nu_{G(Y)} \circ J(G(f)) \circ J(\mu_X) \\ & = & \nu_{G(Y)} \circ J(G(f) \circ \mu_X) \\ & = & \nu_{G(Y)} \circ J(\mu_Y \circ F(f)) \\ & = & \nu_{G(Y)} \circ J(\mu_Y) \circ J(F(f)) \\ & = & (\nu * \mu)_Y \circ J(F(f)). \end{array}$$

■

Observação 1.4.12 A explicação sobre o nome "composição vertical" se deve à representação dessa composição em forma diagramática como abaixo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, no head] \arrow[r, no head] \arrow[dr, bend right, no head] & G \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & \mathcal{D} \\ & H \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "\nu \circ \mu"] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, no head] \arrow[dr, bend right, no head] & & \mathcal{D}. \\ & H \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

Para a "composição horizontal", temos a seguinte representação

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "\mu"] \arrow[dr, bend left] & & J \arrow[dd, "\nu"] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, no head] \arrow[dr, bend right, no head] & & \mathcal{D} \arrow[ur, bend left, no head] \arrow[dr, bend right, no head] & & \mathcal{E} \\ & G \arrow[ur, bend right] & & H \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} & J \circ F \arrow[dd, "\nu * \mu"] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, no head] \arrow[dr, bend right, no head] & & \mathcal{E}. \\ & H \circ G \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

Para funtores F, G, denotamos por $Nat(F, G)$ a coleção de transformações naturais $\mu : F \to G$. Podemos agora apresentar mais um exemplo de categoria.

Exemplo 1.4.13 Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias. Então $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ pode ser considerado como uma categoria cujos objetos são os funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $Hom_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F, G) = Nat(F, G)$. O morfismo identidade do funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é a transformação natural $id_F : F \to F$. A composição é dada pela composição vertical de transformações naturais.

O próximo teorema caracteriza funtores que definem equivalências entre categorias como aqueles que são fiéis, plenos e densos. O leitor atento deve perceber que na parte "se" é usado uma forma mais forte do axioma da escolha.

Teorema 1.4.14 *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se, e somente se, existe um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fiel, pleno e denso.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes, existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\nu : Id_{\mathcal{D}} \to F \circ G$. Referimo-nos à comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(F(Y)) \end{tikzcd}$$

como sendo a naturalidade de μ para o morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$.

Afirmação 1: F é fiel.

Devemos mostrar que $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é aplicação injetora. Sejam $f, f' \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tais que $F(f) = F(f')$. Então $G(F(f)) = G(F(f'))$ e temos

$$\begin{aligned} \mu_Y \circ f &= G(F(f)) \circ \mu_X \\ &= G(F(f')) \circ \mu_X \\ &= \mu_Y \circ f', \end{aligned}$$

em que na primeira e terceira igualdades usamos a naturalidade de μ para os morfismos f e f', respectivamente. Portanto, $\mu_Y \circ f = \mu_Y \circ f'$ e como μ_Y é um isomorfismo, obtemos $f = f'$.

Por argumento análogo, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ também é fiel. Esse fato será usado na próxima afirmação.

Afirmação 2: F é pleno.

Devemos mostrar que $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é aplicação sobrejetora. Seja $g : F(X) \to F(Y)$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Consideremos $f : X \to Y$ o morfismo em $\mathcal{C}$ definido por $f = \mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X$. Então, pela naturalidade de μ para f, temos

$$\begin{aligned} G(F(f)) \circ \mu_X &= \mu_Y \circ f \\ &= \mu_Y \circ \mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X \\ &= G(g) \circ \mu_X. \end{aligned}$$

Portanto, $G(F(f)) \circ \mu_X = G(g) \circ \mu_X$ e como μ_X é um isomorfismo, obtemos $G(F(f)) = G(g)$. Sendo G fiel, concluímos que $F(f) = g$.

Afirmação 3: F é denso.

Seja $Z \in \mathcal{D}$. Então, $G(Z) \in \mathcal{C}$ e $F(G(Z)) \simeq Z$, via o isomorfismo $\nu_Z : Z \to F(G(Z))$.

($\Leftarrow$) Devemos definir um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, $\nu : Id_{\mathcal{D}} \to F \circ G$. Para isso, vamos definir objetos $X_Z \in \mathcal{C}$ e morfismos f_g em $\mathcal{C}$, em que $Z \in \mathcal{D}$ e g são certos morfismos em $\mathcal{D}$.

Como $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é denso, então, para cada $Z \in \mathcal{D}$, existe um objeto $X_Z \in \mathcal{C}$ e um isomorfismo $\nu_Z : Z \to F(X_Z)$ em $\mathcal{D}$.

Agora, como F é fiel e pleno, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, a aplicação $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é bijetora. Logo, se $g : F(X) \to F(Y)$ é um morfismo em $\mathcal{D}$, existe um único morfismo $f_g : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ tal que $F(f_g) = g$. Vamos apresentar três propriedades desses morfismos.

Propriedade 1: $f_{F(h)} = h$, para todo morfismo $h : X \to Y$ em $\mathcal{C}$.

De fato, como $F(h) : F(X) \to F(Y)$ é um morfismo em $\mathcal{D}$, existe um único morfismo $f_{F(h)} : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ tal que $F(f_{F(h)}) = F(h)$. Como F é fiel, $f_{F(h)} = h$.

Propriedade 2: $f_{g' \circ g} = f_{g'} \circ f_g$, para quaisquer morfismos $g : F(X) \to F(X')$ e $g' : F(X') \to F(X'')$ em $\mathcal{D}$.

Como $g' \circ g : F(X) \to F(X'')$ é um morfismo em $\mathcal{D}$, existe um único morfismo $f_{g' \circ g} : X \to X''$ tal que $F(f_{g' \circ g}) = g' \circ g$. Agora,

$$\begin{aligned} F(f_{g' \circ g}) &= g' \circ g \\ &= F(f_{g'}) \circ F(f_g) \\ &= F(f_{g'} \circ f_g). \end{aligned}$$

Portanto, $F(f_{g' \circ g}) = F(f_{g'} \circ f_g)$ e como F é fiel, temos $f_{g' \circ g} = f_{g'} \circ f_g$.

Propriedade 3: $f_g^{-1} = f_{g^{-1}}$, para qualquer isomorfismo $g : F(X) \to F(Y)$ em $\mathcal{D}$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} f_{g^{-1}} \circ f_g &\overset{(*)}{=} f_{g^{-1} \circ g} \\ &= f_{id_{F(X)}} \\ &= f_{F(id_X)} \\ &\overset{(**)}{=} id_X, \end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a Propriedade 2 e em $(**)$ usamos a Propriedade 1 para o morfismo id_X. Logo, $f_{g^{-1}} \circ f_g = id_X$ e analogamente mostra-se $f_g \circ f_{g^{-1}} = id_Y$, provando a propriedade.

Agora, seja $g : Z \to W$ um morfismo em $\mathcal{D}$ e consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\nu_Z"] \arrow[d, "g"'] & F(X_Z) \arrow[d, dotted] \\ W \arrow[r, "\nu_W"'] & F(X_W) \end{tikzcd}$$

Definimos o morfismo pontilhado por

$$\nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1} : F(X_Z) \to F(X_W).$$

Pelo dito acima, existe um único morfismo $f_{\nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}} : X_Z \to X_W$ tal que $F(f_{\nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}}) = \nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}$. (Δ)

Sabendo disso, definimos $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ por

$$G(Z) = X_Z \quad \text{e} \quad G(g) = f_{\nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}},$$

para $Z \in \mathcal{D}$ e $g : Z \to W$ um morfismo em $\mathcal{D}$.

Mostremos que $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é um funtor. De fato, seja $Z \in \mathcal{D}$. Então

$$\begin{aligned} G(id_Z) &= f_{\nu_Z \circ id_Z \circ \nu_Z^{-1}} \\ &= f_{\nu_Z \circ \nu_Z^{-1}} \\ &= f_{id_{F(X_Z)}} \\ &= f_{F(id_{X_Z})} \\ &\overset{(*)}{=} id_{X_Z} \\ &= id_{G(Z)}, \end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a Propriedade 1 para o morfismo id_{X_Z}. Agora, se $g : Z \to W$ e $g' : W \to V$ são morfismos em $\mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned} G(g' \circ g) &= f_{\nu_V \circ g' \circ g \circ \nu_Z^{-1}} \\ &= f_{\nu_V \circ g' \circ \nu_W^{-1} \circ \nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}} \\ &\overset{(*)}{=} f_{\nu_V \circ g' \circ \nu_W^{-1}} \circ f_{\nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}} \\ &= G(g') \circ G(g), \end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a Propriedade 2. Portanto, $G(id_Z) = id_{G(Z)}$ e $G(g' \circ g) = G(g') \circ G(g)$ e assim, G é um funtor.

Agora, queremos definir um isomorfismo natural $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$. Seja $X \in \mathcal{C}$. Temos que $\nu_{F(X)} : F(X) \to F(X_{F(X)})$ é um (iso)morfismo em $\mathcal{D}$. Assim, existe um único morfismo $f_{\nu_{F(X)}} : X \to X_{F(X)}$ em $\mathcal{C}$ tal que $F(f_{\nu_{F(X)}}) = \nu_{F(X)}$. Como $X_{F(X)} = G(F(X))$, então $f_{\nu_{F(X)}} : X \to G(F(X))$.

Definindo $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ por $\mu_X = f_{\nu_{F(X)}}$, para $X \in \mathcal{C}$, mostremos que μ é um isomorfismo natural.

De fato, seja $X \in \mathcal{C}$. Usando a Propriedade 3 para o isomorfismo $\nu_{F(X)}$, segue que $\mu_X = f_{\nu_{F(X)}}$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}$, com inversa $\mu_X^{-1} = f_{\nu_{F(X)}^{-1}}$.

Para verificarmos que $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ é uma transformação natural, consideremos $h : X \to Y$ um morfismo qualquer em $\mathcal{C}$. Devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "h"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "G(F(h))"] \\
Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & (G \circ F)(Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Temos

$$\begin{aligned}
G(F(h)) \circ \mu_X &= f_{\nu_{F(Y)} \circ F(h) \circ \nu_{F(X)}^{-1}} \circ \mu_X \\
&= f_{\nu_{F(Y)}} \circ f_{F(h)} \circ f_{\nu_{F(X)}^{-1}} \circ \mu_X \\
&= \mu_Y \circ h \circ \mu_X^{-1} \circ \mu_X \\
&= \mu_Y \circ h \circ id_X \\
&= \mu_Y \circ h.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ é um isomorfismo natural.

Para cada $Z \in \mathcal{D}$, existe o isomorfismo $\nu_Z : Z \to F(X_Z)$ em $\mathcal{D}$. Como $X_Z = G(Z)$, podemos escrever $\nu_Z : Z \to F(G(Z))$.

Mostremos que $\nu : Id_{\mathcal{D}} \to F \circ G$ é um isomorfismo natural. Restanos mostrar apenas a naturalidade. Seja $g : Z \to W$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\nu_Z"] \arrow[d, "g"'] & (F \circ G)(Z) \arrow[d, "F(G(g))"] \\
W \arrow[r, "\nu_W"'] & (F \circ G)(W)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Temos

$$\begin{aligned}
F(G(g)) \circ \nu_Z &= F(f_{\nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1}}) \circ \nu_Z \\
&\overset{(\Delta)}{=} \nu_W \circ g \circ \nu_Z^{-1} \circ \nu_Z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nu_W \circ g \circ id_Z \\
&= \nu_W \circ g
\end{aligned}
$$

e isso nos diz que ν é um isomorfismo natural.

Assim, encontramos um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\nu : Id_{\mathcal{D}} \to F \circ G$. Logo, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias equivalentes. ∎

Capítulo 2

Categorias abelianas

Neste capítulo estudamos as categorias abelianas. Para isso, precisamos definir núcleos, conúcleos e categorias aditivas. Estas últimas são categorias com estrutura adicional dada pela existência de um objeto zero, soma de morfismos e soma direta de objetos. Como referência básica, citamos [8] e [9].

2.1 Núcleos e conúcleos

Definição 2.1.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $Z \in \mathcal{C}$ é dito*
(i) *inicial se, para qualquer $X \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$ é unitário;*
(ii) *final se, para qualquer $X \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ é unitário.*

Notemos que objetos inicial e final são conceitos duais. Segue da definição que se Z é objeto inicial ou final, então $Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z) = \{id_Z\}$. Usaremos esse fato no próximo resultado.

Proposição 2.1.2 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes afirmações são válidas:*
(i) *se $\mathcal{C}$ tem objeto inicial, este é único, a menos de isomorfismo;*
(ii) *se $\mathcal{C}$ tem objeto final, este é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração: (i) Sejam Z e Z' objetos iniciais em $\mathcal{C}$. Então existem únicos morfismos $f : Z \to Z'$ e $g : Z' \to Z$ e portanto $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z) = \{id_Z\}$ e $f \circ g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z', Z') = \{id_{Z'}\}$. Logo, $g \circ f = id_Z$ e $f \circ g = id_{Z'}$. Concluímos que $Z \simeq Z'$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

Definição 2.1.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $Z \in \mathcal{C}$ é dito objeto zero, ou objeto nulo, se Z é objeto inicial e final.*

No caso de Z ser objeto zero, para $X \in \mathcal{C}$, denotamos por

$$0^X : X \to Z \quad \text{e} \quad 0_X : Z \to X$$

os únicos morfismos em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$, respectivamente. Notemos que objeto zero é um conceito auto-dual.

Corolário 2.1.4 *Se uma categoria $\mathcal{C}$ possui um objeto zero, este é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Segue da Proposição 2.1.2. ■

Observação 2.1.5 Devido ao corolário acima, referimo-nos a um objeto zero (quando o mesmo existir) de uma categoria $\mathcal{C}$ como o objeto zero de $\mathcal{C}$.

Nos exemplos abaixo verifiquemos se as categorias que conhecemos possuem objeto zero. Se uma categoria não tem objeto zero, dizemos quem são os objetos iniciais e finais.

Exemplo 2.1.6 A categoria Set não possui objeto zero.

De fato, o objeto inicial em Set é o conjunto vazio $\emptyset$ e os objetos finais são os conjuntos unitários.

Exemplo 2.1.7 Na categoria Rel, o objeto zero é o conjunto vazio $\emptyset$.

Exemplo 2.1.8 Nas categorias Grp, Ab e Div, o objeto zero é o grupo trivial $\{e\}$.

Exemplo 2.1.9 Na categoria $Ring$, o objeto zero é o anel trivial $\{0\}$.

Exemplo 2.1.10 As categorias $ring$ e $Cring$ não têm objeto zero.

De fato, em ambas categorias, o objeto inicial é o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ e o objeto final é o anel trivial $\{0\}$. Basta observarmos que $Hom_{ring}(\mathbb{Z}, R) = Hom_{Cring}(\mathbb{Z}, R) = \{f_R\}$, em que $f_R(z) = z1_R$, para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.1.11 Sejam R um anel, k um corpo e A uma k-álgebra. Nas categorias ${}_R\mathfrak{M}$, $Vect_k$, $vect_k$, ${}_A\mathfrak{M}$ e ${}_A\mathfrak{m}$, o objeto zero é o módulo trivial $\{0\}$.

Exemplo 2.1.12 Seja k um corpo. A categoria Alg_k não tem objeto zero.

De fato, o objeto inicial é o corpo k e o objeto final é a k-álgebra trivial $\{0\}$.

Nas categorias de grupos, anéis e módulos, são comuns os homomorfismos triviais. Tais homomorfismos podem ser generalizados para categorias com objeto zero.

Definição 2.1.13 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$. Para $X, Y \in \mathcal{C}$, o morfismo nulo de X em Y, denotado por $0_Y^X : X \to Y$, é definido pelo diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "0_Y^X"] \arrow[dr, "0^X"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "0_Y"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja, em termos de composição, temos

$$0_Y^X = 0_Y \circ 0^X.$$

Proposição 2.1.14 *O morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ não depende do objeto zero.*

Demonstração: Sejam Z, Z' objetos zeros. Pelo Corolário 2.1.4, existe um isomorfismo $\iota : Z \to Z'$. Sejam $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z') = \{\phi^X\}$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z', Y) = \{\phi_Y\}$. Temos que $\iota \circ 0^X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Z')$ e $0_Y \circ \iota^{-1} \in Hom_{\mathcal{C}}(Z', Y)$. Logo, $\iota \circ 0^X = \phi^X$ e $0_Y \circ \iota^{-1} = \phi_Y$. Podemos nos basear no diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "0_Y^X"] \arrow[dr, "0^X"'] \arrow[ddr, bend right, "\phi^X"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "0_Y"'] \arrow[d, "\iota"'] & \\ & Z' \arrow[uur, bend right, "\phi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

cujos triângulos comutam. Então

$$0_Y^X \quad = \quad 0_Y \circ 0^X$$

$$
\begin{aligned}
&= 0_Y \circ \iota^{-1} \circ \iota \circ 0^X \\
&= \phi_Y \circ \phi^X.
\end{aligned}
$$

■

É de se esperar que a composição com morfismos nulos resultem em morfismos nulos.

Proposição 2.1.15 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$, $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$ e $W \in \mathcal{C}$. Então, temos*

$$f \circ 0_X^W = 0_Y^W \quad e \quad 0_W^Y \circ f = 0_W^X.$$

Demonstração: Podemos nos basear no diagrama

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "0_X^W"] \arrow[dr, "0^W"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& Z \arrow[u, "0_X"] \arrow[ur, "0_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

cujos triângulos comutam. De fato, temos que $f \circ 0_X \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y) = \{0_Y\}$. Logo, $f \circ 0_X = 0_Y$. Então

$$
\begin{aligned}
f \circ 0_X^W &= f \circ 0_X \circ 0^W \\
&= 0_Y \circ 0^W \\
&= 0_Y^W.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f \circ 0_X^W = 0_Y^W$. Analogamente, mostra-se $0_W^Y \circ f = 0_W^X$. ■

Observação 2.1.16 Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero Z e $Y \in \mathcal{C}$. Então $0_Y^Z = 0_Y$ e $0_Z^Y = 0^Y$. De fato, $0_Y^Z = 0_Y \circ 0^Z = 0_Y \circ id_Z = 0_Y$. Analogamente, $0_Z^Y = 0^Y$.

Definição 2.1.17 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Um núcleo de f é um par (K, k), em que $K \in \mathcal{C}$ e $k : K \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = 0_Y^K$ e a seguinte propriedade universal é satisfeita: para qualquer par (K', k'), em que $K' \in \mathcal{C}$ e $k' : K' \to X$*

é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, existe um único morfismo $u : K' \to K$ tal que $k' = k \circ u$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[dr, "k'"] \arrow[drr, bend left, "0_Y^{K'}"] \arrow[dd, dotted, "u"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] & Y \\
K \arrow[ur, "k"'] \arrow[urr, bend right, "0_Y^{K}"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

(ii) *Um conúcleo de f é um par (Q, q), em que $Q \in \mathcal{C}$ e $q : Y \to Q$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q \circ f = 0_Q^X$ e a seguinte propriedade universal é satisfeita: para qualquer par (Q', q'), em que $Q' \in \mathcal{C}$ e $q' : Y \to Q'$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q' \circ f = 0_{Q'}^X$, existe um único morfismo $u : Q \to Q'$ tal que $q' = u \circ q$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& & Q \arrow[dd, dotted, "u"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0_Q^X"] \arrow[drr, bend right, "0_{Q'}^X"'] & Y \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & \\
& & Q'
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Notemos que núcleo e conúcleo são conceitos duais. Em outras palavras, um núcleo de um morfismo em $\mathcal{C}$ é um conúcleo desse morfismo em $\mathcal{C}^{op}$.

Observação 2.1.18 Vale notarmos que se aplicarmos a propriedade do núcleo (K, k) para o par (K, k), o único morfismo que se obtém de K para K é o morfismo $id_K : K \to K$. Usamos esse fato na demonstração da proposição abaixo.

Proposição 2.1.19 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e f um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Se* (K, k) *e* (K', k') *são núcleos de* f*, então existe um único isomorfismo* $u : K \to K'$ *tal que* $k = k' \circ u$*, isto é, núcleos de* f *são únicos, salvo isomorfismo.*

(ii) *Se* (Q, q) *e* (Q', q') *são conúcleos de* f*, então existe um único isomorfismo* $u : Q' \to Q$ *tal que* $q = u \circ q'$*, isto é, conúcleos de* f *são únicos, salvo isomorfismo.*

Demonstração: (i) Aplicando a propriedade dos núcleos (K, k) e (K', k') para os pares (K', k') e (K, k), respectivamente, existem únicos morfismos $v : K' \to K$ e $u : K \to K'$ tais que $k = k' \circ u$ e $k' = k \circ v$. Observamos que o morfismo $v \circ u : K \to K$ satisfaz

$$k \circ (v \circ u) = (k \circ v) \circ u = k' \circ u = k.$$

Como $k \circ id_K = k$, segue da observação acima que $v \circ u = id_K$. Analogamente, $u \circ v = id_{K'}$. Assim, $u : K \to K'$ é o único isomorfismo tal que $k = k' \circ u$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. Isto é, em $\mathcal{C}^{op}$, (Q, q) e (Q', q') são núcleos de f. Pelo item (i), existe um único isomorfismo $u \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Q, Q') = Hom_{\mathcal{C}}(Q', Q)$ tal que $q = q' \circ^{op} u = u \circ q'$. Portanto, existe um único isomorfismo $u : Q' \to Q$ tal que $q = u \circ q'$. ■

Observação 2.1.20 Devido à proposição anterior, referimo-nos a um núcleo e a um conúcleo de f como o núcleo e o conúcleo de f, respectivamente. Usamos as notações $(Ker(f), k)$ e $(Cok(f), q)$ ou $(Ker\, f, k)$ e $(Cok\, f, q)$ para o núcleo e o conúcleo de f, respectivamente. Também é comum referirmos ao núcleo e ao conúcleo de f como os morfismos k e q.

Proposição 2.1.21 *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria com objeto zero e* $f : X \to Y$ *um morfismo em* $\mathcal{C}$.
(i) *Se* f *possui núcleo* (K, k)*, então* $k : K \to X$ *é um monomorfismo.*
(ii) *Se* f *possui conúcleo* (Q, q)*, então* $q : Y \to Q$ *é um epimorfismo.*

Demonstração: (i) Sejam $g, h : Z \to K$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $k \circ g = k \circ h$. O morfismo $k \circ g : Z \to X$ é tal que

$$f \circ (k \circ g) = (f \circ k) \circ g = 0_Y^K \circ g = 0_Y^Z.$$

Aplicando a propriedade universal do núcleo (K, k) para o par $(Z, k \circ g)$, existe um único morfismo $u : Z \to K$ tal que $k \circ g = k \circ u$. Então

$k \circ g = k \circ h = k \circ u$. Pela unicidade de u, $u = g = h$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

Os exemplos abaixo mostram categorias cujos morfismos têm núcleos e conúcleos.

Exemplo 2.1.22 Em *Grp*, todo morfismo possui núcleo e conúcleo.

De fato, seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Sabemos que $K = \{x \in G : f(x) = e_H\}$ é um subgrupo de G. O par

$$(K, k), \quad \text{em que} \quad k : K \to G$$

é a inclusão canônica, é o núcleo de f.

Agora, para K um subgrupo de H, denotamos por K^H a interseção de todos os subgrupos normais em H que contêm K. Logo, K^H é o menor subgrupo normal em H que contém K. O par

$$(H/f(G)^H, q), \quad \text{em que} \quad q : H \to H/f(G)^H$$

é a projeção canônica, é o conúcleo de f.

De fato, seja $q' : H \to Q'$ um morfismo em *Grp* tal que $q' \circ f$ é o morfismo trivial. Então $f(G) \subseteq Ker(q')$. Como $Ker(q')$ é um subgrupo normal de H e $f(G)^H$ é o menor subgrupo normal contendo $f(G)$, $f(G)^H \subseteq Ker(q')$. Pela propriedade universal do quociente, existe um único homomorfismo de grupos $u : H/f(G)^H \to Q'$ tal que $q' = u \circ q$.

Exemplo 2.1.23 Em *Ring*, todo morfismo possui núcleo e conúcleo.

De fato, seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Sabemos que $I = \{r \in R : f(r) = 0_S\}$ é um ideal de R e $J = Sf(R)S$ é o ideal de S gerado por $f(R)$. Os pares

$$(I, k) \quad \text{e} \quad (J, q)$$

são o núcleo e o conúcleo de f, respectivamente, em que

$$k : I \to R \quad \text{e} \quad q : S \to S/J$$

são a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente.

Verifiquemos o conúcleo. Seja $q' : S \to Q'$ um morfismo em *Ring* tal que $q' \circ f = 0$. Então $f(R) \subseteq Ker(q')$. Como $Ker(q')$ é um ideal, segue que $J \subseteq Ker(q')$. Pela propriedade universal do quociente, existe um único homomorfismo de anéis $u : S/J \to Q'$ tal que $q' = u \circ q$.

Exemplo 2.1.24 Em ${}_R\mathfrak{M}$, todo morfismo possui núcleo e conúcleo.

De fato, seja $f : M \to N$ um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Sabemos que $P = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$ e $f(M)$ são R-submódulos de M e N, respectivamente. Os pares

$$(P, k) \text{ e } (N/f(M), q)$$

são o núcleo e o conúcleo de f, respectivamente, em que

$$k : P \to M \text{ e } q : N \to N/f(M)$$

são a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente.

Os próximos resultados apresentam os núcleos e conúcleos de monomorfismos, epimorfismos, morfismos identidade e morfismos nulos.

Proposição 2.1.25 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*
(i) *Se f é um monomorfismo, então $(Z, 0_X)$ é o núcleo de f.*
(ii) *Se f é um epimorfismo, então $(Z, 0^Y)$ é o conúcleo de f.*

Demonstração: (i) Temos que $f \circ 0_X = 0_Y$ e já vimos que $0_Y = 0_Y^Z$. Seja $k' : K' \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$. Então $f \circ k' = f \circ 0_X^{K'}$ e como f é um monomorfismo, temos $k' = 0_X^{K'}$, ou seja, $k' = 0_X \circ 0^{K'}$. Como $0^{K'} : K' \to Z$ é o único morfismo em $Hom_{\mathcal{C}}(K', Z)$, concluímos que $(Z, 0_X)$ é o núcleo de f.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

Corolário 2.1.26 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$. O morfismo identidade $id_X : X \to X$ tem núcleo e conúcleo dados por $(Z, 0_X)$ e $(Z, 0^X)$, respectivamente.*

Proposição 2.1.27 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$ e $X, Y \in \mathcal{C}$. O morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ tem núcleo e conúcleo dados por (X, id_X) e (Y, id_Y), respectivamente.*

Demonstração: Claramente, $0_Y^X \circ id_X = 0_Y^X$. Seja $k' : K' \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $0_Y^X \circ k' = 0_Y^{K'}$. Então $k' = id_X \circ k'$. Se $\alpha : K \to X$ é outro morfismo tal que $k' = id_X \circ \alpha$, então $\alpha = k'$. Logo, (X, id_X) é o núcleo de 0_Y^X. Analogamente, (Y, id_Y) é o conúcleo de 0_Y^X.
■

2.2 Categorias aditivas

Definição 2.2.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita pré-aditiva se*

(i) $\mathcal{C}$ *possui objeto zero;*

(ii) *para quaisquer* $X, Y \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *é um grupo abeliano;*

(iii) *a composição de morfismos é bilinear, ou seja, para quaisquer morfismos* $f, f' : X \to Y$ *e* $g, g' : Y \to Z$, *tem-se*

$$\begin{array}{rcl} g \circ (f + f') & = & g \circ f + g \circ f' \\ (g + g') \circ f & = & g \circ f + g' \circ f. \end{array}$$

Notemos que se $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ são categorias pré-aditivas, então $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ também o são, isso segue da definição das mesmas.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e $X, Y \in \mathcal{C}$. Denotando por $e_{Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)}$ o elemento neutro do grupo abeliano $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.2 *Com a notação acima,* $e_{Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)} = 0_Y^X$.

Demonstração: Consideremos Z o objeto zero de $\mathcal{C}$. Então $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{0^X\}$ e portanto, $0^X + 0^X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{0^X\}$, ou seja, $0^X + 0^X = 0^X$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} 0_Y^X & = & 0_Y \circ 0^X \\ & = & 0_Y \circ (0^X + 0^X) \\ & = & 0_Y \circ 0^X + 0_Y \circ 0^X \\ & = & 0_Y^X + 0_Y^X. \end{array}$$

Logo, $0_Y^X = 0_Y^X + 0_Y^X$. Somando o oposto de 0_Y^X em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, obtemos $e_{Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)} = 0_Y^X$. ■

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$. Mostramos na Proposição 2.1.25 que se $f : X \to Y$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$, então f tem núcleo $(Z, 0_X)$. Uma propriedade interessante de categorias pré-aditivas é que vale a recíproca desse resultado. Para ver isso, mostramos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.3 *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria pré-aditiva e* $f : X \to Y$ *um morfismo em* $\mathcal{C}$. *As seguintes afirmações são válidas:*

(i) *f é um monomorfismo se, e somente se, para todo morfismo $g : W \to X$ em $\mathcal{C}$ com $f \circ g = 0_Y^W$ implica $g = 0_X^W$;*
(ii) *f é um epimorfismo se, e somente se, para todo morfismo $g : Y \to W$ com $g \circ f = 0_W^X$ implica $g = 0_W^Y$.*

Demonstração: (i) ($\Rightarrow$) Seja $g : W \to X$ tal que $f \circ g = 0_Y^W$. Então $f \circ g = f \circ 0_X^W$ e como f é um monomorfismo, segue que $g = 0_X^W$.

($\Leftarrow$) Sejam $g, h : W \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $f \circ (g - h) = 0_Y^W$. Por hipótese, $g - h = 0_X^W$ e portanto, $g = h + 0_X^W = h$. Logo, f é um monomorfismo.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ∎

Corolário 2.2.4 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*
(i) *Se $(Z, 0_X)$ é o núcleo de f, então f é um monomorfismo.*
(ii) *Se $(Z, 0^Y)$ é o conúcleo de f, então f é um epimorfismo.*

Demonstração: (i) Seja $g : W \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ g = 0_Y^W$. Como $(Z, 0_X)$ é o núcleo de f, existe um único morfismo $k : W \to Z$ tal que $g = 0_X \circ k = 0_X^W$. Da proposição anterior, segue que f é um monomorfismo.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ∎

Dada a estrutura adicional que as categorias pré-aditivas possuem, podemos considerar subcategorias que têm tal estrutura e funtores que preservam a mesma.

Definição 2.2.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é uma subcategoria pré-aditiva se $Z \in \mathcal{D}$ e $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$ é um subgrupo de $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{D}$.*

Definição 2.2.6 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito aditivo se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tem-se*

$$F(f + g) = F(f) + F(g),$$

ou seja, a aplicação $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é um homomorfismo de grupos.

Segue da Proposição 2.2.2 e da definição anterior que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $F(0_Y^X) = 0_{F(Y)}^{F(X)}$.

Exemplos de funtores aditivos são apresentados após definirmos as categorias aditivas. Para isso, precisamos da definição de soma direta de objetos.

Definição 2.2.7 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e $X, Y \in \mathcal{C}$. Uma soma direta de X e Y é uma quíntupla (S, p_X, p_Y, i_X, i_Y), em que $S \in \mathcal{C}$ e $p_X : S \to X$, $p_Y : S \to Y$, $i_X : X \to S$, $i_Y : Y \to S$ são morfismos em $\mathcal{C}$ que satisfazem*

$$p_X \circ i_X = id_X, \ p_Y \circ i_Y = id_Y \quad e \quad i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y = id_S.$$

Notemos que as relações $p_X \circ i_X = id_X$ e $p_Y \circ i_Y = id_Y$ implicam que i_X, i_Y são monomorfismos e p_X, p_Y são epimorfismos. Tais morfismos são chamados de inclusões e projeções, respectivamente. É imediato verificar que (S, i_X, i_Y, p_X, p_Y) é uma soma direta de X e Y em $\mathcal{C}^{op}$. Vamos usar esse fato para facilitar algumas demonstrações.

Proposição 2.2.8 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e $X, Y \in \mathcal{C}$ tais que existe uma soma direta (S, p_X, p_Y, i_X, i_Y). Então*

$$p_Y \circ i_X = 0_Y^X \quad e \quad p_X \circ i_Y = 0_X^Y.$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
p_Y \circ i_X + p_Y \circ i_X &= p_Y \circ i_X \circ id_X + id_Y \circ p_Y \circ i_X \\
&= p_Y \circ i_X \circ p_X \circ i_X + p_Y \circ i_Y \circ p_Y \circ i_X \\
&= p_Y \circ (i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y) \circ i_X \\
&= p_Y \circ id_S \circ i_X \\
&= p_Y \circ i_X.
\end{aligned}$$

Logo, $p_Y \circ i_X + p_Y \circ i_X = p_Y \circ i_X$. Somando o oposto de $p_Y \circ i_X$ em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, obtemos $p_Y \circ i_X = 0_Y^X$. Analogamente, $p_X \circ i_Y = 0_X^Y$. ∎

A unicidade da soma direta, a menos de isomorfismo, está garantida pela próxima proposição. Na verdade, mostramos que dadas duas somas diretas de objetos em uma categoria pré-aditiva, existe um único isomorfismo que respeita os morfismos de inclusão e projeção.

Proposição 2.2.9 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e $X, Y \in \mathcal{C}$. Sejam (S, p_X, p_Y, i_X, i_Y) e $(S', p'_X, p'_Y, i'_X, i'_Y)$ somas diretas de X e Y. Então existe um isomorfismo $\mu : S \to S'$ tal que os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
S \arrow[ur, "p_X"] \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & S' \arrow[ul, "p'_X"'] \arrow[dl, "p'_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "i_X"'] \arrow[dr, "i'_X"] & \\
S \arrow[rr, "\mu"] & & S' \\
& Y \arrow[ul, "i_Y"] \arrow[ur, "i'_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

sejam comutativos. Tal isomorfismo é único com a propriedade do primeiro ou segundo diagramas comutarem.

Demonstração: Temos que $i'_X \circ p_X, i'_Y \circ p_Y \in Hom_{\mathcal{C}}(S, S')$. Definimos $\mu : S \to S'$ por $\mu = i'_X \circ p_X + i'_Y \circ p_Y$. Então

$$\begin{aligned}
p'_X \circ \mu &= p'_X \circ (i'_X \circ p_X + i'_Y \circ p_Y) \\
&= p'_X \circ i'_X \circ p_X + p'_X \circ i'_Y \circ p_Y \\
&= id_X \circ p_X + 0_X^Y \circ p_Y \\
&= p_X + 0_X^S \\
&= p_X.
\end{aligned}$$

Portanto, $p'_X \circ \mu = p_X$ e $p'_Y \circ \mu = p_Y$ é mostrado de modo análogo. Logo, o primeiro diagrama da proposição comuta.

Mostramos a comutatividade do segundo diagrama. Temos

$$u \circ i_X = i'_X \circ p_X \circ i_X + i'_Y \circ p_Y \circ i_X = i'_X \circ id_X = i'_X.$$

Analogamente, $\mu \circ i_Y = i'_Y$.

Mostremos que μ é um isomorfismo. Temos que $i_X \circ p'_X, i_Y \circ p'_Y \in Hom_{\mathcal{C}}(S', S)$. Definimos $\nu : S' \to S$ por $\nu = i_X \circ p'_X + i_Y \circ p'_Y$. Então

$$\begin{aligned}
\nu \circ \mu &= (i_X \circ p'_X + i_Y \circ p'_Y) \circ \mu \\
&= i_X \circ p'_X \circ \mu + i_Y \circ p'_Y \circ \mu \\
&\overset{(*)}{=} i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y \\
&= id_S,
\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a comutatividade do primeiro diagrama. Portanto, $\nu \circ \mu = id_S$ e analogamente, $\mu \circ \nu = id_{S'}$.

Resta-nos mostrar que o morfismo μ é o único comutando o primeiro ou o segundo diagramas. Seja $\eta : S \to S'$ tal que o primeiro diagrama comuta com η no lugar de μ, isto é, $p'_X \circ \eta = p_X$ e $p'_Y \circ \eta = p_Y$. Temos

$$\begin{aligned}
\eta &= id_{S'} \circ \eta \\
&= (i'_X \circ p'_X + i'_Y \circ p'_Y) \circ \eta \\
&= i'_X \circ p'_X \circ \eta + i'_Y \circ p'_Y \circ \eta \\
&= i'_X \circ p_X + i'_Y \circ p_Y \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

O caso em que η é tal que o segundo diagrama comuta com η no lugar de μ é análogo. ■

Observação 2.2.10 Devido à proposição anterior, referimo-nos a uma soma direta de X e Y como a soma direta de X e Y. É comum a notação $(X \oplus Y, p_X, p_Y, i_X, i_Y)$, assim como é comum referirmos à soma direta de X e Y como o objeto $X \oplus Y$, ficando os morfismos p_X, p_Y, i_X, i_Y subentendidos.

Definição 2.2.11 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita aditiva se*

(i) $\mathcal{C}$ *é pré-aditiva;*
(ii) *para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, existe a soma direta $X \oplus Y \in \mathcal{C}$.*

Definição 2.2.12 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Dizemos que uma subcategoria pré-aditiva $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é uma subcategoria aditiva se $\mathcal{D}$ é uma categoria aditiva.*

Abaixo alguns exemplos de categorias aditivas. Escrevemos a soma direta simplesmente pelo objeto $X \oplus Y$, ficando subentendidas as inclusões e projeções.

Exemplo 2.2.13 As categorias *Ab* e *Div* são aditivas.

De fato, já vimos que o grupo trivial $\{e\}$ é o objeto zero de *Ab*. Para $G, H \in Ab$, $Hom_{Ab}(G, H)$ tem estrutura de grupo abeliano dada por

$$f, g \in Hom_{Ab}(G, H) : (f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in G.$$

A soma direta de $G, H \in Ab$ é dada pelo produto direto $G \times H$. As mesmas considerações valem em *Div*.

Exemplo 2.2.14 Sejam R um anel, k um corpo e A uma k-álgebra. As categorias ${}_R\mathfrak{M}$, $Vect_k$, ${}_A\mathfrak{M}$ e ${}_A\mathfrak{m}$ são categorias aditivas.

De fato, já vimos que o módulo trivial $\{0\}$ é objeto zero nessas categorias. A soma direta de módulos M e N é dada pela soma direta de módulos $M \oplus N$.

Sabendo desses exemplos de categorias aditivas, apresentamos exemplos de funtores aditivos.

Exemplo 2.2.15 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ uma subcategoria aditiva de $\mathcal{C}$. Os funtores identidade $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, inclusão $I_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e constante $C_Z : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ são aditivos.

Exemplo 2.2.16 Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias aditivas. O funtor projeção $P_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é aditivo.

Exemplo 2.2.17 Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $X \in \mathcal{C}$. Os funtores $L_X, R_X : \mathcal{C} \to Ab$, análogos aos funtores dos Exemplos 1.3.8, 1.3.9, são aditivos.

Exemplo 2.2.18 O funtor de esquecimento $U : {}_R\mathfrak{M} \to Ab$ do Exemplo 1.3.14 é aditivo.

Exemplo 2.2.19 O funtor $R \otimes_{\mathbb{Z}} - : Ab \to {}_R\mathfrak{M}$ do Exemplo 1.3.19 é aditivo.

Exemplo 2.2.20 O funtor $D : Vect_k \to Vect_k$ do Exemplo 1.3.11 é aditivo.

Para o próximo exemplo, precisamos definir a soma direta de morfismos.

Definição 2.2.21 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ morfismos em $\mathcal{C}$. Sejam $(X \oplus X', p_X, p_{X'}, i_X, i_{X'})$ e $(Y \oplus Y', p_Y, p_{Y'}, i_Y, i_{Y'})$ as somas diretas de X, X' e Y, Y', respectivamente. A soma direta de f e f' é o morfismo $f \oplus f' : X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ em $\mathcal{C}$ dado por*

$$f \oplus f' = i_Y \circ f \circ p_X + i_{Y'} \circ f' \circ p_{X'}.$$

Proposição 2.2.22 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então $f \oplus f' : X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ é tal* *que os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
X & X \oplus X' \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{X'}"] \arrow[d, dotted, "f\oplus f'"] & X' \arrow[d, "f'"] \\
Y & Y \oplus Y' \arrow[l, "p_Y"] \arrow[r, "p_{Y'}"'] & Y'
\arrow[from=1-1, to=2-1, "f"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & X \oplus X' \arrow[d, dotted, "f\oplus f'"] & X' \arrow[l, "i_{X'}"'] \arrow[d, "f'"] \\
Y \arrow[r, "i_Y"'] & Y \oplus Y' & Y' \arrow[l, "i_{Y'}"]
\end{tikzcd}$$

sejam comutativos. Tal morfismo é único com a propriedade do primeiro ou segundo diagramas comutarem. Em particular, $id_X \oplus id_Y = id_{X \oplus Y}$.

Demonstração: De fato, temos

$$\begin{aligned}
p_Y \circ (f \oplus f') &= p_Y \circ (i_Y \circ f \circ p_X + i_{Y'} \circ f' \circ p_{X'}) \\
&= p_Y \circ i_Y \circ f \circ p_X + p_Y \circ i_{Y'} \circ f' \circ p_{X'} \\
&= id_Y \circ f \circ p_X + 0_Y^{Y'} \circ f' \circ p_{X'} \\
&= f \circ p_X + 0_Y^{X \oplus X'} \\
&= f \circ p_X.
\end{aligned}$$

Portanto, $p_Y \circ (f \oplus f') = f \circ p_X$ e analogamente, $p_{Y'} \circ (f \oplus f') = f' \circ p_{X'}$. A comutatividade do segundo diagrama segue da comutatividade do primeiro diagrama para $\mathcal{C}^{op}$.

Resta-nos mostrar que o morfismo $f \oplus f'$ é o único tal que o primeiro ou o segundo diagramas comutam. Seja $g : X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que o primeiro diagrama comuta com g no lugar de $f \oplus f'$. Então $p_Y \circ g = f \circ p_X$ e $p_{Y'} \circ g = f' \circ p_{X'}$. Temos

$$\begin{aligned}
g &= id_{Y \oplus Y'} \circ g \\
&= (i_Y \circ p_Y + i_{Y'} \circ p_{Y'}) \circ g
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i_Y \circ p_Y \circ g + i_{Y'} \circ p_{Y'} \circ g \\
&= i_Y \circ f \circ p_X + i_{Y'} \circ f' \circ p_{X'} \\
&= f \oplus f'.
\end{aligned}
$$

Portanto, $g = f \oplus f'$. O caso em que g é tal que o segundo diagrama da proposição comuta com g no lugar de $f \oplus f'$ é análogo. Por definição, $id_X \oplus id_Y = id_{X\oplus Y}$. ∎

Proposição 2.2.23 *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria aditiva e* $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$, $g : Y \to Z$, $g' : Y' \to Z'$ *morfismos em* $\mathcal{C}$. *Então*

$$(g \circ f) \oplus (g' \circ f') = (g \oplus g') \circ (f \oplus f').$$

Demonstração: Vamos mostrar que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "g\circ f"'] & X \oplus X' \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{X'}"] \arrow[d, dotted, "(g\oplus g')\circ(f\oplus f')"] & X' \arrow[d, "g'\circ f'"] \\
Z & Z \oplus Z' \arrow[l, "p_Z"] \arrow[r, "p_{Z'}"'] & Z'
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Pela proposição anterior, sabemos que os diagramas

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "g"'] & Y \oplus Y' \arrow[l, "p_Y"'] \arrow[r, "p_{Y'}"] \arrow[d, dotted, "g\oplus g'"] & Y' \arrow[d, "g'"] \\
Z & Z \oplus Z' \arrow[l, "p_Z"] \arrow[r, "p_{Z'}"'] & Z'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X \oplus X' \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{X'}"] \arrow[d, dotted, "f\oplus f'"] & X' \arrow[d, "f'"] \\
Y & Y \oplus Y' \arrow[l, "p_Y"] \arrow[r, "p_{Y'}"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

são comutativos. Então

$$\begin{aligned} p_Z \circ (g \oplus g') \circ (f \oplus f') &= g \circ p_Y \circ (f \oplus f') \\ &= g \circ f \circ p_X. \end{aligned}$$

Portanto, $p_Z \circ (g \oplus g') \circ (f \oplus f') = g \circ f \circ p_X$ e, de maneira análoga, $p_{Z'} \circ (g \oplus g') \circ (f \oplus f') = g' \circ f' \circ p_{X'}$. Pela proposição anterior, segue que $(g \circ f) \oplus (g' \circ f') = (g \oplus g') \circ (f \oplus f')$. ■

Proposição 2.2.24 *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria aditiva e* $f, g : X \to Y$, $f', g' : X' \to Y'$ *morfismos em* $\mathcal{C}$. *Então*

$$(f + g) \oplus (f' + g') = (f \oplus f') + (g \oplus g').$$

Demonstração: Vamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f+g"'] & X \oplus X' \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{X'}"] \arrow[d, dotted, "(f\oplus f')+(g\oplus g')"] & X' \arrow[d, "f'+g'"] \\ Y & Y \oplus Y' \arrow[l, "p_Y"] \arrow[r, "p_{Y'}"'] & Y' \end{tikzcd}$$

é comutativo. Pela Proposição 2.2.22, sabemos que os diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X \oplus X' \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{X'}"] \arrow[d, dotted, "f\oplus f'"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y \oplus Y' \arrow[l, "p_Y"] \arrow[r, "p_{Y'}"'] & Y' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] & X \oplus X' \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{X'}"] \arrow[d, dotted, "g\oplus g'"] & X' \arrow[d, "g'"] \\ Y & Y \oplus Y' \arrow[l, "p_Y"] \arrow[r, "p_{Y'}"'] & Y' \end{tikzcd}$$

são comutativos. Então

$$\begin{array}{rcl} p_Y \circ ((f \oplus f') + (g \oplus g')) & = & p_Y \circ (f \oplus f') + p_Y \circ (g \oplus g') \\ & = & f \circ p_X + g \circ p_X \\ & = & (f+g) \circ p_X. \end{array}$$

Portanto, $p_Y \circ ((f \oplus f') + (g \oplus g')) = (f+g) \circ p_X$ e analogamente, $p_{Y'} \circ ((f \oplus f') + (g \oplus g')) = (f'+g') \circ p_{X'}$. Pela Proposição 2.2.22, segue que $(f+g) \oplus (f'+g') = (f \oplus f') + (g \oplus g')$. ■

Com a definição de soma direta, podemos definir o seguinte funtor.

Exemplo 2.2.25 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. O funtor $- \oplus - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por

$$(- \oplus -)(X, X') = X \oplus X' \ \text{ e } \ (- \oplus -)(f, f') = f \oplus f',$$

para $X, Y \in \mathcal{C}$ e f, f' morfismos em $\mathcal{C}$, é aditivo.

De fato, $- \oplus -$ é um funtor pelas proposições 2.2.22 e 2.2.23, isto é,

$$\begin{array}{rcl} (- \oplus -)(id_X, id_Y) & = & id_X \oplus id_Y \\ & = & id_{X \oplus Y} \\ & = & id_{(-\oplus-)(X,Y)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} (- \oplus -)(g, g') \circ (- \oplus -)(f, f') & = & (g \oplus g') \circ (f \oplus f') \\ & = & (g \circ f) \oplus (g' \circ f') \\ & = & (- \oplus -)(g \circ f, g' \circ f'). \end{array}$$

É aditivo pela proposição anterior.

Proposição 2.2.26 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias aditivas, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor aditivo e $X, Y \in \mathcal{C}$. Se $(X \oplus Y, p_X, p_Y, i_X, i_Y)$ é a soma direta de X e Y, então $(F(X \oplus Y), F(p_X), F(p_Y), F(i_X), F(i_Y))$ é a soma direta de $F(X)$ e $F(Y)$.*

Demonstração: De fato, temos

$$\begin{array}{rcl} F(p_X) \circ F(i_X) & = & F(p_X \circ i_X) \\ & = & F(id_X) \end{array}$$

$$= \quad id_{F(X)}.$$

Logo, $F(p_X) \circ F(i_X) = id_{F(X)}$ e analogamente, $F(p_Y) \circ F(i_Y) = id_{F(Y)}$. Além disso, por ser F um funtor aditivo, temos

$$\begin{aligned}
F(i_X) \circ F(p_X) + F(i_Y) \circ F(p_Y) &= F(i_X \circ p_X) + F(i_Y \circ p_Y) \\
&= F(i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y) \\
&= F(id_{X \oplus Y}) \\
&= id_{F(X \oplus Y)}.
\end{aligned}$$

■

Como último resultado dessa seção, mostramos como a soma e a soma direta de morfismos estão relacionadas.

Proposição 2.2.27 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então, existem morfismos $\Delta_X : X \to X \oplus X$ e $\delta_Y : Y \oplus Y \to Y$ em $\mathcal{C}$ tais que*

$$f + g = \delta_Y \circ (f \oplus g) \circ \Delta_X.$$

Demonstração: Sejam $(X \oplus X, p_X^1, p_X^2, i_X^1, i_X^2)$ e $(Y \oplus Y, p_Y^1, p_Y^2, i_Y^1, i_Y^2)$ as somas diretas de X, X e Y, Y, respectivamente. Definimos $\Delta_X : X \to X \oplus X$ e $\delta_Y : Y \oplus Y \to Y$ por

$$\Delta_X = i_X^1 + i_X^2 \quad \text{e} \quad \delta_Y = p_Y^1 + p_Y^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
\delta_Y \circ (f \oplus g) \circ \Delta_X &= (p_Y^1 + p_Y^2) \circ (f \oplus g) \circ \Delta_X \\
&= (p_Y^1 \circ (f \oplus g) + p_Y^2 \circ (f \oplus g)) \circ \Delta_X \\
&= (f \circ p_X^1 + g \circ p_X^2) \circ \Delta_X \\
&= (f \circ p_X^1 + g \circ p_X^2) \circ (i_X^1 + i_X^2) \\
&= f \circ p_X^1 \circ i_X^1 + f \circ p_X^1 \circ i_X^2 + \\
&\quad\; g \circ p_X^2 \circ i_X^1 + g \circ p_X^2 \circ i_X^2 \\
&= f \circ id_X + f \circ 0_X^X + g \circ 0_X^X + g \circ id_X \\
&= f + 0_Y^X + 0_Y^X + g \\
&= f + g.
\end{aligned}$$

■

2.3 Categorias abelianas

Definição 2.3.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita abeliana se*

(i) *$\mathcal{C}$ é aditiva;*
(ii) *todo morfismo em $\mathcal{C}$ possui núcleo e conúcleo;*
(iii) *todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.*

Dado um morfismo f em uma categoria abeliana, podemos considerar a sequência $\{(K_n, k_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, em que (K_1, k_1) é o núcleo de f, (K_{2n}, k_{2n}) é o conúcleo de k_{2n-1} e (K_{2n+1}, k_{2n+1}) é o núcleo de k_{2n}, para todo $n \in \mathbb{N}$. A próxima proposição mostra que, para n ímpar, (K_n, k_n) é o núcleo de f e para n par, (K_n, k_n) é o conúcleo do núcleo de f.

Proposição 2.3.2 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Se $(Ker(f), k)$ é o núcleo de f e $(Cok(k), \pi)$ é o conúcleo de k, então $(Ker(f), k)$ é o núcleo de π.*

(ii) *Se $(Cok(f), q)$ é o conúcleo de f e $(Ker(q), \iota)$ é o núcleo de q, então $(Cok(f), q)$ é o conúcleo de ι.*

Demonstração: (i) Já temos $\pi \circ k = 0_{Cok(k)}^{Ker(f)}$, que é a primeira condição para $(Ker(f), k)$ ser o núcleo de π. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K' \arrow[dl, dotted, "u"'] \arrow[d, "k'"] & \\
Ker(f) \arrow[r, "k"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y. \\
 & Cok(k) \arrow[ur, dotted, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$ segue, pela propriedade universal do conúcleo $(Cok(k), \pi)$ para o par (Y, f), que existe um único morfismo $v : Cok(k) \to Y$ tal que $f = v \circ \pi$.

Agora, seja $k' : K' \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $\pi \circ k' = 0^{K'}_{Cok(k)}$. Então

$$f \circ k' = v \circ \pi \circ k' = v \circ 0^{K'}_{Cok(k)} = 0^{K'}_{Y}.$$

Pela propriedade universal do núcleo $(Ker(f), k)$ para o par (K', k'), existe um único morfismo $u : K' \to Ker(f)$ tal que $k' = k \circ u$. Portanto, $(Ker(f), k)$ é o núcleo de π.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. Nesse caso, teríamos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Ker(q) \arrow[d, "\iota"] & \\
X \arrow[ur, dotted, "v"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & Cok(f) \arrow[dl, dotted, "u"] \\
 & Q' &
\end{tikzcd}$$

■

Proposição 2.3.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. As seguintes afirmaçãoes são válidas:*
(i) *todo monomorfismo em $\mathcal{C}$ é o núcleo do seu conúcleo;*
(ii) *todo epimorfismo em $\mathcal{C}$ é o conúcleo do seu núcleo.*

Demonstração: (i) Seja $k : K \to X$ um monomorfismo em $\mathcal{C}$ e $(Cok(k), \pi)$ seu conúcleo. Por (iii) da Definição 2.3.1, existe um morfismo f em $\mathcal{C}$ tal que (K, k) é o núcleo de f. Pela Proposição 2.3.2, (K, k) é o núcleo do seu conúcleo.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

Não é difícil ver que em uma categoria $\mathcal{C}$, todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo. Em uma categoria abeliana, vale a recíproca.

Proposição 2.3.4 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana com objeto zero $Z \in \mathcal{C}$. Se $f : X \to Y$ é um monomorfismo e um epimorfismo em $\mathcal{C}$, então f é um isomorfismo.*

Demonstração: Como f é um epimorfismo, pela Proposição 2.1.25, $(Z, 0^Y)$ é o conúcleo de f. Pela Proposição 2.1.27, (Y, id_Y) é o núcleo de 0^Y. Por outro lado, como f é um monomorfismo, pela proposição anterior, (X, f) é o núcleo de 0^Y. Pela unicidade do núcleo dada pela Proposição 2.1.19, existe um único isomorfismo $u : X \to Y$ tal que $f = id_Y \circ u$. Logo, $f = u$ é um isomorfismo. ∎

Abaixo apresentamos exemplos de categorias abelianas e um exemplo de uma categoria aditiva que não é abeliana.

Exemplo 2.3.5 A categoria Ab é abeliana.

De fato, já vimos no Exemplo 2.2.13 que Ab é uma categoria aditiva. Seguindo a mesma prova do Exemplo 2.1.24, prova-se que todo morfismo em Ab possui núcleo e conúcleo. Agora, se $f : G \to H$ é um monomorfismo em Ab, não é difícil ver que (X, f) é o núcleo da projeção canônica $\pi : H \to H/f(G)$. Portanto, todo monomorfismo é um núcleo. Analogamente, todo epimorfismo é um conúcleo.

Exemplo 2.3.6 A categoria ${}_R\mathfrak{M}$ é abeliana.

De fato, a prova é análoga a do exemplo anterior. A categoria ${}_R\mathfrak{M}$ é aditiva pelo Exemplo 2.2.14 e todo morfismo em ${}_R\mathfrak{M}$ possui núcleos e conúcleos pelo Exemplo 2.1.24.

Exemplo 2.3.7 A categoria Div é aditiva, mas não é abeliana.

De fato, a categoria Div é aditiva pelo Exemplo 2.2.13. No entanto, o morfismo $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ em Div é monomorfismo pelo Exemplo 1.2.4 e é epimorfismo, pois é sobrejetor. Porém, π não é isomorfismo em Div. Usando a Proposição 2.3.4, temos que Div não pode ser categoria abeliana.

A próxima proposição mostra que, em uma categoria abeliana, todo morfismo admite duas decomposições, uma envolvendo um monomorfismo canônico e outra envolvendo um epimorfismo canônico.

Proposição 2.3.8 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Sejam $(Cok(f), q)$ o conúcleo de f e $(Ker(q), \iota)$ o núcleo de q. Então existe $u : X \to Ker(q)$ tal que $f = \iota \circ u$.*

(ii) *Sejam* $(Ker(f), k)$ *o núcleo de* f *e* $(Cok(k), \pi)$ *o conúcleo de* k*. Então existe* $v : Cok(k) \to Y$ *tal que* $f = v \circ \pi$*.*

Demonstração: (i) Como $q \circ f = 0^X_{Cok(f)}$, segue, pela propriedade universal do núcleo $(Ker(q), \iota)$ para o par (X, f), que existe um único morfismo $u : X \to Ker(q)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "0^X_{Cok(f)}"] \arrow[dd, dotted, "u"'] & & \\
& Y \arrow[r, "q"] & Cok(f) \\
Ker(q) \arrow[ur, "\iota"] \arrow[urr, bend right, "0^{Ker(q)}_{Cok(f)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, $f = \iota \circ u$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

Vamos mostrar que as decomposições da proposição anterior são a composição de um epimorfismo e um monomorfismo e esta decomposição é única, a menos de isomorfismo. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3.9 *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria abeliana e* $f : X \to Y$ *um morfismo em* $\mathcal{C}$*. Sejam* $f = \iota \circ u$ *e* $f = v \circ \pi$ *as decomposições de* f *como nos itens (i) e (ii) da proposição anterior.*

(i) *Se* $u' : X \to K$ *e* $\iota' : K \to Y$ *são morfismos em* $\mathcal{C}$ *tais que* $f = \iota' \circ u'$ *e* ι' *é um monomorfismo, então existe um único morfismo* $\psi : Ker(q) \to K$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & Ker(q) \arrow[d, "\iota"] \arrow[dl, "\psi"'] \\
K \arrow[r, "\iota'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, se u e u' são epimorfismos, então ψ é um isomorfismo.

(ii) *Se $\pi' : X \to Q$ e $v' : Q \to Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f = v' \circ \pi'$ e π' é um epimorfismo, então existe um único morfismo $\psi : Q \to Cok(k)$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \arrow[d, "v'"] \arrow[dl, "\psi"'] \\
Cok(k) \arrow[r, "v"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, se v e v' são monomorfismos, então ψ é um isomorfismo.

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & Ker(q) \arrow[d, "\iota"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] & \\
K \arrow[r, "\iota'"'] & Y \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "q"'] & Cok(\iota'). \\
& Cok(f) \arrow[ur, dotted, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja $(Cok(\iota'), q')$ o conúcleo de ι'. Temos

$$q' \circ f = q' \circ \iota' \circ u' = 0^K_{Cok(\iota')} \circ u' = 0^X_{Cok(\iota')}.$$

Pela propriedade universal do conúcleo $(Cok(f), q)$ para o par $(Cok(\iota'), q')$, existe um único morfismo $\psi' : Cok(f) \to Cok(\iota')$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Cok(f) \arrow[dd, dotted, "\psi'"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0^X_{Cok(f)}"] \arrow[drr, bend right, "0^X_{Cok(\iota')}"'] & Y \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & \\
 & & Cok(\iota')
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, $q' = \psi' \circ q$.

Agora, ι' é um monomorfismo. Pela Proposição 2.3.3, (K, ι') é o núcleo de q'. Temos

$$q' \circ \iota = \psi' \circ q \circ \iota = \psi' \circ 0^{Ker(q)}_{Cok(f)} = 0^{Ker(q)}_{Cok(\iota')}.$$

Pela propriedade universal do núcleo (K, ι') para o par $(Ker(q), \iota)$, existe um único morfismo $\psi : Ker(q) \to K$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ker(q) \arrow[dd, dotted, "\psi"'] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, bend left, "0^{Ker(q)}_{Cok(\iota')}"] & & \\
 & Y \arrow[r, "q'"] & Cok(\iota') \\
K \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[urr, bend right, "0^K_{Cok(\iota')}"'] & &
\end{tikzcd}$$

seja comutativo. Portanto, $\iota = \iota' \circ \psi$. Além disso, $u' = \psi \circ u$. De fato,

$$\iota' \circ u' = f = \iota \circ u = \iota' \circ \psi \circ u.$$

Logo, $\iota' \circ u' = \iota' \circ \psi \circ u$ e como ι' é um monomorfismo, segue que $u' = \psi \circ u$. Então $\iota = \iota' \circ \psi$ e $u' = \psi \circ u$, ou seja, o diagrama da proposição é comutativo.

Agora, suponhamos que u e u' sejam epimorfismos. Como $\iota' \circ \psi = \iota$ e $\psi \circ u = u'$ então, pela Proposição 1.2.10, temos que ψ é um monomorfismo e um epimorfismo, respectivamente. Pela Proposição 2.3.4, temos que ψ é um isomorfismo.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. $\blacksquare$

Corolário 2.3.10 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Sejam $f = \iota \circ u$ e $f = v \circ \pi$ as decomposições de f como nos itens (i) e (ii) da Proposição 2.3.8. Então*

(i) *u é um epimorfismo.*
(ii) *v é um monomorfismo.*

Demonstração: (i) Mostremos que u é um epimorfismo usando a Proposição 2.2.3. Seja $h : Ker(q) \to W$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $h \circ u = 0_W^X$.

Seja $(Ker(h), k')$ o núcleo de h. Pela propriedade universal do núcleo $(Ker(h), k')$ para o par (X, u), existe um único morfismo $u' : X \to Ker(h)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "0_W^X"] \arrow[dd, dotted, "u'"'] & & \\
& Ker(q) \arrow[r, "h"] & W \\
Ker(h) \arrow[ur, "k'"] \arrow[urr, bend right, "0_W^{Ker(h)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, $u = k' \circ u'$. Logo, $f = \iota \circ u = \iota \circ k' \circ u'$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & Ker(q) \arrow[d, "\iota"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \\
Ker(h) \arrow[r, "\iota \circ k'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Agora, como ι e k' são monomorfismos então, pela Proposição 1.2.10, $\iota \circ k'$ é um monomorfismo. Pelo lema anterior, existe um único morfismo $\psi : Ker(q) \to Ker(h)$ tal que $\iota = \iota \circ k' \circ \psi$ e como ι é um monomorfismo, temos $id_{Ker(q)} = k' \circ \psi$. Logo,

$$h = h \circ id_{Ker(q)} = h \circ k' \circ \psi = 0_W^{Ker(h)} \circ \psi = 0_W^{Ker(q)}.$$

Portanto, $h \circ u = 0_W^X$ implica $h = 0_W^{Ker(q)}$. Logo, u é um epimorfismo.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

O próximo teorema pode ser chamado *Teorema do Isomorfismo* para categorias abelianas.

Teorema 2.3.11 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$ com núcleo $(Ker(f), k)$ e conúcleo $(Cok(f), q)$. Sejam $(Cok(k), \pi)$ o conúcleo de k e $(Ker(q), \iota)$ o núcleo de q. Então existe um único isomorfismo $\phi : Cok(k) \to Ker(q)$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ Cok(k) \arrow[r, "\phi"'] & Ker(q) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração: Consideremos as decomposições $f = \iota \circ u$ e $f = v \circ \pi$ dos itens (i) e (ii), respectivamente, da Proposição 2.3.8. Pelo corolário anterior, u é um epimorfismo e v é um monomorfismo. Pelo Lema 2.3.9, existe um único isomorfismo $\psi : Ker(q) \to Cok(k)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & Ker(q) \arrow[d, "\iota"] \arrow[dl, "\psi"'] \\ Cok(k) \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, $\pi = \psi \circ u$ e $\iota = v \circ \psi$. Para $\phi : Cok(k) \to Ker(q)$, $\phi = \psi^{-1}$, temos $\phi \circ \pi = u$ e $\iota \circ \phi = v$. Então

$$\iota \circ \phi \circ \pi = \iota \circ u = f.$$

■

Agora, definimos imagem e coimagem de um morfismo. Notemos que tal definição pode ser feita para qualquer categoria, em contraste com a definição de núcleo e conúcleo, que deve ser feita para uma categoria com objeto zero. No entanto, escolhemos apresentá-la nessa seção, pois vamos mostrar que em categorias abelianas todo morfismo tem imagem e coimagem.

Definição 2.3.12 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Uma imagem de f é um par (I, ι), em que $I \in \mathcal{C}$ e $\iota : I \to Y$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f = \iota \circ g$, para algum morfismo $g : X \to I$, tal que a seguinte propriedade universal é satisfeita: para qualquer par (I', ι'), em que $I' \in \mathcal{C}$ e $\iota' : I' \to Y$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f = \iota' \circ g'$, para algum morfismo $g' : X \to I'$, existe um único morfismo $u : I \to I'$ tal que $\iota = \iota' \circ u$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[drr, bend left, "\iota"] \arrow[dd, dotted, "u"'] & & \\
& X \arrow[ul, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "g'"] & Y \\
I' \arrow[urr, bend right, "\iota'"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

(ii) *Uma coimagem de f é um par (C, π), em que $C \in \mathcal{C}$ e $\pi : X \to C$ é um epimorfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f = g \circ \pi$, para algum morfismo $g : C \to Y$, tal que a seguinte propriedade universal é satisfeita: para qualquer par (C', π'), em que $C' \in \mathcal{C}$ e $\pi' : X \to C'$ é um epimorfismo em $\mathcal{C}$ com $f = g' \circ \pi'$, para algum morfismo $g' : C' \to Y$, existe um único morfismo $u : C' \to C$ tal que $\pi = u \circ \pi'$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& & C' \arrow[dl, "g'"] \arrow[dd, dotted, "u"] \\
X \arrow[urr, bend left, "\pi'"] \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "\pi"'] & Y & \\
& & C \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Notemos que imagem e coimagem são conceitos duais. Em outras palavras, uma imagem de um morfismo em $\mathcal{C}$ é uma coimagem desse morfismo em $\mathcal{C}^{op}$.

Vale notarmos que se aplicarmos a propriedade universal da imagem (I, ι) para o par (I, ι), o único morfismo que se obtém é $id_I : I \to I$. Usamos esse fato na demonstração da proposição abaixo.

Proposição 2.3.13 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Se (I, ι) e (I', ι') são imagens de f, então existe um único isomorfismo $u : I \to I'$ tal que $\iota = \iota' \circ u$.*

(ii) *Se (C, π) e (C', π') são coimagens de f, então existe um único isomorfismo $u : C' \to C$ tal que $\pi = u \circ \pi'$.*

Demonstração: (i) Aplicando a propriedade das imagens (I, ι) e (I', ι') para os pares (I', ι') e (I, ι), respectivamente, existem morfismos $u : I \to I'$ e $v : I' \to I$ tais que $\iota = \iota' \circ u$ e $\iota' = \iota \circ v$. Notemos que o morfismo $v \circ u : I \to I$ satisfaz

$$\iota \circ (v \circ u) = (\iota \circ v) \circ u = \iota' \circ u = \iota.$$

Segue que $v \circ u : I \to I$ é o único morfismo que se obtém ao aplicar a propriedade da imagem (I, ι) para o par (I, ι). Logo, $v \circ u = id_I$. Analogamente, $u \circ v = id_{I'}$. Assim, $u : I \to I'$ é um isomorfismo tal que $\iota = \iota' \circ u$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ∎

Proposição 2.3.14 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Sejam $(Cok(f), q)$ o conúcleo de f e $(Ker(q), \iota)$ o núcleo de q. Então $(Ker(q), \iota)$ é a imagem de f.*

(ii) *Sejam $(Ker(f), k)$ o núcleo de f e $(Cok(k), \pi)$ o conúcleo de k. Então $(Cok(k), \pi)$ é a coimagem de f.*

Demonstração: (i) Da Proposição 2.3.8, existe $u : X \to Ker(q)$ tal que $f = \iota \circ u$, que é a primeira condição para $(Ker(q), \iota)$ ser a imagem de f.

Seja (I', ι'), em que $I' \in \mathcal{C}$ e $\iota' : I' \to Y$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$ tal que existe um morfismo $g' : X \to I'$ com $f = \iota' \circ g'$. Pelo Lema 2.3.9, existe um único morfismo $\psi : Ker(q) \to I'$ tal que $\iota = \iota' \circ \psi$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{op}$. ■

Sejam R um anel, M e N R-módulos à esquerda e $f : M \to N$ um morfismo em ${}_R\mathfrak{M}$. Vimos no Exemplo 2.1.24 que o núcleo e o conúcleo de f são, respectivamente, os pares

$$(P, k) \quad \text{e} \quad (N/f(M), q),$$

em que $P = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$, $k : P \to M$ é a inclusão canônica e $q : N \to N/f(M)$ é a projeção canônica. Então, usando novamente o Exemplo 2.1.24 e a proposição anterior, a imagem e a coimagem de f são, respectivamente, os pares

$$(f(M), \iota) \quad \text{e} \quad (M/P, \pi)$$

em que $\iota : f(M) \to Y$ é a inclusão canônica e $\pi : M \to M/P$ é a projeção canônica. Nesse caso, o Teorema 2.3.11 mostra que existe um único isomorfismo $\phi : M/P \to f(M)$ tal que $f = \iota \circ \phi \circ \pi$.

Capítulo 3

Categorias monoidais

Os monóides são uma das estruturas mais fundamentais da álgebra ordinária. Por exemplo, grupos são monóides em que todos os elementos são invertíveis, anéis são grupos abelianos com a adição e monóides com o produto, módulos são grupos abelianos com a soma, o conjunto de endomorfismos de objetos algébricos são monóides com a composição. Portanto, as categorias monoidais, sendo a categorificação dos monóides, são uma das estruturas mais fundamentais em teoria de categorias.

Noções importantes que podem ser definidas em categorias monoidais são objetos monóides e categorias enriquecidas. Monóides, anéis, álgebras, biálgebras e suas versões comutativas ou topológicas são objetos monóides em determinadas categorias monoidais. Em [10], as álgebras de Nichols são, em particular, objetos monóides na categoria monoidal dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf que estão relacionados com a classificação de álgebras de Hopf pontuadas. Uma categoria enriquecida sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é uma categoria $\mathcal{D}$ tal que, para $X, Y \in \mathcal{D}$, $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y) \in \mathcal{C}$ e existe uma compatibilidade entre as estruturas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ (veja [8]). A motivação para esses categorias se deve ao fato de que, em muitas situações, os morfismos frequentemente têm estrutura adicional que deve ser respeitada. Categorias monoidais também têm aplicações em lógica categórica (ver [1]), teoria quântica de campos, teoria das cordas (ver [3]) e no estudo do grupo de Thompson (ver [6]).

Neste capítulo apresentamos as categorias monoidais. Definimos tais categorias e os chamados funtores monoidais, que são funtores que preservam a estrutura monoidal. A seguir, definimos equivalências monoidais. O resultado importante deste capítulo é o fato de que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética, e esta última possui uma estrutura de categoria mais simples. No próximo capítulo, mostramos que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita, que tem estrutura monoidal mais simples. Como referência básica, citamos [5], [8] e [9].

3.1 Categorias monoidais

Um monóide pode ser definido como uma terna $(M, *, 1)$, em que M é um conjunto, $* : M \times M \to M$ é uma função, $1 \in M$ e, para quaisquer $x, y, z \in M$, valem

$$(x * y) * z = x * (y * z), \ 1 * x = x \ \text{ e } \ x * 1 = x.$$

Baseados nessa definição de monóide, definimos categorias monoidais. Neste capítulo, denotamos a composição de morfismos g e f por gf invés de $g \circ f$.

Definição 3.1.1 *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ *em que*

(i) $\mathcal{C}$ *é uma categoria.*

(ii) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor dado por*

$$\otimes(X, Y) = X \otimes Y \quad e \quad \otimes(f, g) = f \otimes g,$$

para $X, Y \in \mathcal{C}$ *e* $f : X \to Y$, $g : X' \to Y'$ *morfismos em* $\mathcal{C}$, *em que* $f \otimes g : X \otimes X' \to Y \otimes Y'$.

(iii) $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ *é chamado objeto unidade.*

(iv) $\{a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z) : X, Y, Z \in \mathcal{C}\}$, $\{l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X : X \in \mathcal{C}\}$ *e* $\{r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X : X \in \mathcal{C}\}$ *são isomorfismos naturais tais que, para quaisquer* $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$, *os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
& ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y \otimes Z,W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

comutam, ou seja,

$$\begin{aligned}
a_{X,Y,Z\otimes W}\, a_{X\otimes Y,Z,W} &= (id_X \otimes a_{Y,Z,W})a_{X,Y\otimes Z,W}(a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \\
e \;\; r_X \otimes id_Y &= (id_X \otimes l_Y)a_{X,\mathbf{1},Y}.
\end{aligned}$$

As comutatividades do primeiro e segundo diagramas da definição anterior são chamadas *axiomas do pentágono e do triângulo*, respectivamente.

Chamamos o funtor $\otimes$ de *produto tensorial*, apesar de não ser sempre um produto tensorial ordinário. Chamamos a e l, r de isomorfismos naturais de associatividade e unidade, respectivamente. Analogamente, para $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, chamamos $a_{X,Y,Z}$ e l_X, r_X de isomorfismos de associatividade e de unidade, respectivamente.

Referimo-nos a uma categoria monoidal por $\mathcal{C}$ quando o funtor produto tensorial, o objeto unidade e os isomorfismos naturais de associatividade e unidade estão subentendidos.

Explicamos alguns detalhes da Definição 3.1.1. Sendo $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ um funtor, para $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$, $g : Y \to Z$ e $g' : Y' \to Z'$ morfismos em $\mathcal{C}$, temos

$$gf \otimes g'f' = (g \otimes g')(f \otimes f').$$

Em particular, se $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são isomorfismos em $\mathcal{C}$, então existem $f^{-1} : Y \to X$ e $g^{-1} : Y' \to X'$ e como $\otimes$ é um funtor, temos

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \otimes g^{-1})(f \otimes g) &= f^{-1}f \otimes g^{-1}g \\
&= id_X \otimes id_{X'} \\
&= \otimes(id_X, id_{X'}) \\
&= \otimes(id_{(X,X')}) \\
&= id_{\otimes(X,X')} \\
&= id_{X \otimes X'}.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(f \otimes g)(f^{-1} \otimes g^{-1}) = id_{Y \otimes Y'}$. Logo, $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Além disso, $id_X \otimes g'f' = (id_X \otimes g')(id_X \otimes f')$. Assim, para $X \in \mathcal{C}$, podemos considerar o funtor $X \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por

$$(X \otimes -)(Y) = X \otimes Y \quad \text{e} \quad (X \otimes -)(f) = id_X \otimes f,$$

para todo $Y \in \mathcal{C}$ e f um morfismo em $\mathcal{C}$. Analogamente, para $Y \in \mathcal{C}$, podemos considerar o funtor $- \otimes Y : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por

$$(- \otimes Y)(X) = X \otimes Y \quad \text{e} \quad (- \otimes Y)(f) = f \otimes id_Y,$$

para todo $X \in \mathcal{C}$ e f um morfismo em $\mathcal{C}$.

Para o isomorfismo natural de associatividade, os funtores envolvidos são

$$a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes),$$

ambos de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$ e isto quer dizer que

$$\otimes(\otimes(X, Y), Z) = \otimes(X \otimes Y, Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$$

e

$$\otimes(X, \otimes(Y, Z)) = \otimes(X, Y \otimes Z) = X \otimes (Y \otimes Z).$$

Para os isomorfismos naturais de unidade, temos

$$l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}},$$

ambos de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$.

Sejam $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ e $h : Z \to Z'$ morfismos em $\mathcal{C}$, os diagramas de naturalidade de a, l e r são, respectivamente,

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\
(X' \otimes Y') \otimes Z' \arrow[r, "a_{X',Y',Z'}"'] & X' \otimes (Y' \otimes Z')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{1} \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Notemos que se $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal, então $(\mathcal{C}^{op}, \otimes, \mathbf{1}, a^{-1}, l^{-1}, r^{-1})$ é uma categoria monoidal. Outra categoria monoidal associada a $\mathcal{C}$ é definida abaixo.

Definição 3.1.2 *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A categoria reversa a $\mathcal{C}$ é a categoria monoidal $(\mathcal{C}^{rev}, \otimes^{rev}, \mathbf{1}^{rev}, a^{rev}, l^{rev}, r^{rev})$ em que*

(i) $\mathcal{C}^{rev} = \mathcal{C}$*;*

(ii) $\otimes^{rev} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é o funtor definido por*

$$X \otimes^{rev} Y = Y \otimes X \quad e \quad f \otimes^{rev} g = g \otimes f,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e f, g morfismos em $\mathcal{C}$;

(iii) $\mathbf{1}^{rev} = \mathbf{1}$*;*

(iv) *para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$,*

$$a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}, \; l^{rev}_X = r_X \quad e \; r^{rev}_X = l_X.$$

Proposição 3.1.3 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $id_{\mathbf{1}} \otimes f = id_{\mathbf{1}} \otimes g$. Então $f = g$.*

Demonstração: De fato, usando a naturalidade de l para esses morfismos, temos

$$fl_X = l_Y(id_{\mathbf{1}} \otimes f) = l_Y(id_{\mathbf{1}} \otimes g) = gl_X.$$

Portanto, $fl_X = gl_X$ e como l_X é um isomorfismo, temos $f = g$. Analogamente, $f \otimes id_{\mathbf{1}} = g \otimes id_{\mathbf{1}}$ implica $f = g$. ■

Os seguintes resultados tratam de propriedades dos isomorfismos de unidade. Tais resultados são importantes para o Capítulo 4, no entanto, são apresentados nesse capítulo exatamente por estarmos tratando de categorias monoidais.

Proposição 3.1.4 *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal e $X, Y \in \mathcal{C}$. Então os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes id_Y"'] & & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_{X \otimes Y}"'] & & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \arrow[dl, "id_X \otimes r_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Demonstração: Consideremos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
((\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(r_{\mathbf{1}}\otimes id_X)\otimes id_Y"] \arrow[d, "a_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[rr, bend left=40, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\otimes id_Y"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "(1)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & (\mathbf{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[d, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & (\mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes X))\otimes Y \arrow[l, "(id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)\otimes id_Y"'] \arrow[d, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes X,Y}"] \\
(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "r_{\mathbf{1}}\otimes id_{X\otimes Y}"'] \arrow[dr, bend right, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X\otimes Y}"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \mathbf{1}\otimes(X\otimes Y) & \mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes X)\otimes Y) \arrow[l, "id_{\mathbf{1}}\otimes(l_X\otimes id_Y)"] \arrow[dl, bend left, "id_{\mathbf{1}}\otimes a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \\
& \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes(X\otimes Y)) \arrow[u, "id_{\mathbf{1}}\otimes l_{X\otimes Y}"] & (5)
\end{tikzcd}
$$

em que (5) é o diagrama formado pelas flechas da borda. Abaixo explicamos a comutatividade de cada diagrama.

Diagrama (1), consideramos o axioma do triângulo para os objetos $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ e X, ou seja, $(id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} = r_{\mathbf{1}}\otimes id_X$ e usando o funtor $-\otimes Y$, temos

$$
\begin{aligned}
((id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)\otimes id_Y)(a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\otimes id_Y) &= (id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\otimes id_Y \\
&= (-\otimes Y)((id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}) \\
&= (-\otimes Y)(r_{\mathbf{1}}\otimes id_X) \\
&= (r_{\mathbf{1}}\otimes id_X)\otimes id_Y.
\end{aligned}
$$

Diagrama (2), segue da naturalidade de a para os objetos $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, X e Y e os morfismos $r_{\mathbf{1}}$, id_X e id_Y.

Diagrama (3), segue da naturalidade de a para os objetos $\mathbf{1}$, X e Y e para os morfismos $id_{\mathbf{1}}$, l_X e id_Y.

Diagrama (4), segue do axioma do triâgulo para os objetos $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ e $X\otimes Y$.

Diagrama (5), segue do axioma do pentágono para os objetos $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$, X e Y.

Mostremos que o diagrama $(*)$ é comutativo. Temos

$$
\begin{aligned}
& (id_{\mathbf{1}} \otimes (l_X \otimes id_Y))a_{\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes X,Y}(a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \otimes id_Y) \\
\overset{(3)}{=} \; & a_{\mathbf{1},X,Y}((id_{\mathbf{1}} \otimes l_X) \otimes id_Y)(a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \otimes id_Y) \\
\overset{(1)}{=} \; & a_{\mathbf{1},X,Y}((r_{\mathbf{1}} \otimes id_X) \otimes id_Y) \\
\overset{(2)}{=} \; & (r_{\mathbf{1}} \otimes id_{X\otimes Y})a_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},X,Y} \\
\overset{(4)}{=} \; & (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{X\otimes Y})a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X\otimes Y}a_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},X,Y} \\
\overset{(5)}{=} \; & (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{X\otimes Y})(id_{\mathbf{1}} \otimes a_{\mathbf{1},X,Y})a_{\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes X,Y}(a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \otimes id_Y).
\end{aligned}
$$

Como $a_{\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes X,Y}$ e $a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \otimes id_Y$ são isomorfismos, segue que $id_{\mathbf{1}} \otimes (l_X \otimes id_Y) = (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{X\otimes Y})(id_{\mathbf{1}} \otimes a_{\mathbf{1},X,Y})$, ou seja, o diagrama $(*)$ comuta. Reescrevendo, temos $id_{\mathbf{1}} \otimes (l_X \otimes id_Y) = id_{\mathbf{1}} \otimes l_{X\otimes Y}a_{\mathbf{1},X,Y}$. Pela Proposição 3.1.3, temos $l_X \otimes id_Y = l_{X\otimes Y}a_{\mathbf{1},X,Y}$. Logo, o primeiro diagrama comuta. A comutatividade do segundo diagrama segue da comutatividade do primeiro diagrama para $\mathcal{C}^{rev}$. De fato, o primeiro diagrama para Y e X em $\mathcal{C}^{rev}$ é

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes^{rev} Y) \otimes^{rev} X \arrow[rr, "a^{rev}_{\mathbf{1},Y,X}"] \arrow[dr, "l^{rev}_Y \otimes^{rev} id_X"'] & & \mathbf{1} \otimes^{rev} (Y \otimes^{rev} X) \arrow[dl, "l^{rev}_{Y\otimes^{rev} X}"] \\
& Y \otimes^{rev} X &
\end{tikzcd}
$$

que, como mostramos, é comutativo. Usando a definição de $\otimes^{rev}$, a^{rev} e l^{rev}, o diagrama anterior torna-se

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \arrow[rr, "a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "id_X \otimes r_Y"'] & & (X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "r_{X\otimes Y}"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

que é o segundo diagrama da proposição considerando a inversa de $a_{X,Y,\mathbf{1}}$. ■

Proposição 3.1.5 *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Então*

(i) $l_{\mathbf{1}\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X$, *para todo* $X \in \mathcal{C}$*;*
(ii) $r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}}$, *para todo* $X \in \mathcal{C}$*;*
(iii) $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$.

Demonstração: (i) Para $X \in \mathcal{C}$, usamos a naturalidade de l_X e temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[r, "l_{\mathbf{1}\otimes X}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes l_X"'] & \mathbf{1}\otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $l_X l_{\mathbf{1}\otimes X} = l_X(id_{\mathbf{1}} \otimes l_X)$. Como l_X é um isomorfismo, segue que $l_{\mathbf{1}\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X$.

(ii) É o item (i) para $\mathcal{C}^{rev}$.

(iii) Os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes\mathbf{1} \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "l_{\mathbf{1}}\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & & \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) \arrow[dl, "l_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}"] \\
& \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes\mathbf{1} \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_{\mathbf{1}}\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & & \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) \arrow[dl, "id_{\mathbf{1}}\otimes l_{\mathbf{1}}"] \\
& \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} &
\end{tikzcd}$$

são comutativos. De fato, o primeiro triângulo comuta pela proposição anterior para $X = Y = \mathbf{1}$ e o segundo pelo axioma do triângulo para $X = Y = \mathbf{1}$. Com a comutatividade desses diagramas e considerando o item (i) dessa proposição para $X = \mathbf{1}$, temos as seguintes relações

$$l_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \quad (1)$$
$$r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} = (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \quad (2)$$

$$l_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} \;=\; id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}. \qquad \text{(i)}$$

Então

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} &\overset{(1)}{=} l_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \\ &\overset{(i)}{=} (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \\ &\overset{(2)}{=} r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

Portanto, $l_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}$ e, pela Proposição 3.1.3, $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$. ■

Mostraremos agora que o objeto unidade é único, a menos de isomorfismo. Mais especificamente, para ternas $(\mathbf{1}, l, r)$ e $(\mathbf{1}', l', r')$, existe um único isomorfismo ι que respeita os isomorfismos de unidade.

Proposição 3.1.6 *Sejam* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$, $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}', a, l', r')$ *categorias monoidais e* $X \in \mathcal{C}$. *Então existe um único isomorfismo* $\iota : \mathbf{1} \to \mathbf{1}'$ *tal que os diagramas*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[rr, "\iota \otimes id_X"] \arrow[dr, "l_X"'] & & \mathbf{1}' \otimes X \arrow[dl, "l'_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "id_X \otimes \iota"] \arrow[dr, "r_X"'] & & X \otimes \mathbf{1}' \arrow[dl, "r'_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

comutam. Tal isomorfismo é único com a propriedade do primeiro ou segundo diagramas comutarem.

Demonstração: Definimos $\iota : \mathbf{1} \to \mathbf{1}'$ por $\iota = l_{\mathbf{1}'}(r'_{\mathbf{1}})^{-1}$. Claramente, ι é um isomorfismo, pois é a composição de isomorfismos. Agora, vejamos que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}') \otimes X \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1}',X}"] \arrow[dr, "l_{\mathbf{1}'} \otimes id_X"'] & & \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1}' \otimes X) \arrow[dl, "l_{\mathbf{1}' \otimes X}"] \\
& \mathbf{1}' \otimes X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}') \otimes X \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1}',X}"] \arrow[dr, "r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X"'] & & \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1}' \otimes X) \arrow[dl, "id_{\mathbf{1}} \otimes l'_X"] \\
& \mathbf{1} \otimes X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1}' \otimes X) \arrow[r, "l_{\mathbf{1}' \otimes X}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes l'_X"'] & \mathbf{1}' \otimes X \arrow[d, "l'_X"] \\
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

são comutativos. De fato, o primeiro triângulo comuta pela Proposição 3.1.4 para os objetos $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$ e X, sendo $\mathbf{1}$ a unidade. O segundo triângulo comuta pelo axioma do triângulo para os objetos $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$ e X, sendo $\mathbf{1}'$ a unidade. O quadrado comuta pela naturalidade de l para o morfismo l'_X. Logo, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
l_{\mathbf{1}'} \otimes id_X &= l_{\mathbf{1}' \otimes X} a_{\mathbf{1},\mathbf{1}',X} & (1)\\
r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X &= (id_{\mathbf{1}} \otimes l'_X) a_{\mathbf{1},\mathbf{1}',X} & (2)\\
l'_X l_{\mathbf{1}' \otimes X} &= l_X (id_{\mathbf{1}} \otimes l'_X). & (3)
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
l_X(r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X) &\overset{(2)}{=} l_X(id_{\mathbf{1}} \otimes l'_X) a_{\mathbf{1},\mathbf{1}',X}\\
&\overset{(3)}{=} l'_X l_{\mathbf{1}' \otimes X} a_{\mathbf{1},\mathbf{1}',X}\\
&\overset{(1)}{=} l'_X (l_{\mathbf{1}'} \otimes id_X)\\
&\overset{(*)}{=} l'_X (\iota r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X)\\
&\overset{(**)}{=} l'_X (\iota \otimes id_X)(r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X),
\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a definição de ι e em $(**)$ o fato de $\otimes$ ser um funtor. Portanto, $l_X(r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X) = l'_X(\iota \otimes id_X)(r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X)$ e como $r'_{\mathbf{1}} \otimes id_X$ é um isomorfismo, segue que $l_X = l'_X(\iota \otimes id_X)$. Logo, o primeiro diagrama comuta. A comutatividade do segundo diagrama é análoga.

Resta-nos mostrar que o morfismo ι é único tal que um dos diagramas comuta. Seja $\iota' : \mathbf{1} \to \mathbf{1}'$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que o primeiro diagrama comuta. Considerando $X = \mathbf{1}'$, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}' \arrow[rr, "\iota' \otimes id_{\mathbf{1}'}"] \arrow[dr, "l_{\mathbf{1}'}"'] & & \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}' \arrow[dl, "l'_{\mathbf{1}'}"] \\
& \mathbf{1}' &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Daí, pelo item (iii) da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}
l_{\mathbf{1}'} &= l'_{\mathbf{1}'}(\iota' \otimes id_{\mathbf{1}'}) \\
&= r'_{\mathbf{1}'}(\iota' \otimes id_{\mathbf{1}'}) \\
&= \iota' r'_{\mathbf{1}},
\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos a naturalidade de r' para o morfismo ι'. Portanto, $l_{\mathbf{1}'} = \iota' r'_{\mathbf{1}}$. Logo, $\iota' = l_{\mathbf{1}'}(r'_{\mathbf{1}})^{-1} = \iota$. ■

Antes de apresentarmos exemplos de categorias monoidais, definimos categorias monoidais estritas. Tais categorias apresentam uma estrutura mais simples do que categorias monoidais quaisquer.

Definição 3.1.7 *Uma categoria monoidal estrita é uma terna* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$*, em que* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor e* $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ *tal que, para quaisquer* $X, Y, Z \in \mathcal{C}$*,*

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z),\ \mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$$

e as transformações naturais a*,* l *e* r *são as respectivas transformações naturais identidade.*

Exemplo 3.1.8 $(Set, \times, \{*\}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal, em que $\times : Set \times Set \to Set$ é o produto cartesiano, $\{*\}$ é qualquer conjunto unitário e, para X, Y, Z conjuntos,

$$\begin{array}{rccc}
a_{X,Y,Z} : & (X \times Y) \times Z & \to & X \times (Y \times Z), \\
& ((x, y), z) & \mapsto & (x, (y, z))
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} l_X: & \{*\}\times X & \to & X \\ & (*,x) & \mapsto & x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rrcl} r_X: & X\times\{*\} & \to & X \\ & (x,*) & \mapsto & x \end{array}$$

De fato, mostremos que a, l e r são isomorfismos naturais que satisfazem os axiomas do pentágono e do triângulo. Sejam $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ e $h : Z \to Z'$ funções. É claro que $a_{X,Y,Z}, l_X$ e r_X são bijeções, logo isomorfismos em Set. Agora, vejamos que os diagramas

$$\begin{tikzcd} (X\times Y)\times Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "(f\times g)\times h"'] & X\times(Y\times Z) \arrow[d, "f\times(g\times h)"] \\ (X'\times Y')\times Z' \arrow[r, "a_{X',Y',Z'}"'] & X'\times(Y'\times Z') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{*\}\times X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\{*\}}\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \{*\}\times X' \arrow[r, "l_{X'}"'] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X\times\{*\} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f\times id_{\{*\}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X'\times\{*\} \arrow[r, "r_{X'}"'] & X' \end{tikzcd}$$

comutam. Sejam $x \in X, y \in Y$ e $z \in Z$. Então

$$\begin{aligned} (f\times(g\times h))a_{X,Y,Z}((x,y),z) &= (f\times(g\times h))(x,(y,z)) \\ &= (f(x),(g(y),h(z))) \\ &= a_{X',Y',Z'}((f(x),g(y)),h(z)) \\ &= a_{X',Y',Z'}((f\times g)\times h)((x,y),z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} fl_X(*,x) &= f(x) \\ &= l_{X'}(*,f(x)) \\ &= l_{X'}(id_{\{*\}}\times f)(*,x). \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que r é um isomorfismo natural. Mostremos os axiomas do pentágono e do triângulo. Sejam X, Y, Z, W conjuntos e $x \in X, y \in Y, z \in Z, w \in W$. Então

$$a_{X,Y,Z\times W}a_{X\times Y,Z,W}(((x,y),z),w)$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{X,Y,Z\times W}((x,y),(z,w))\\
&= (x,(y,(z,w)))\\
&= (id_X\times a_{Y,Z,W})(x,((y,z),w))\\
&= (id_X\times a_{Y,Z,W})a_{X,Y\times Z,W}((x,(y,z)),w)\\
&= (id_X\times a_{Y,Z,W})a_{X,Y\times Z,W}(a_{X,Y,Z}\times id_W)(((x,y),z),w)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(r_X\times id_Y)((x,*),y) &= (x,y)\\
&= (id_X\times l_Y)(x,(*,y))\\
&= (id_X\times l_Y)a_{X,\{*\},Y}((x,*),y).
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.1.9 Seja k um corpo. Então $(Vect_k,\otimes_k,k,a,l,r)$ é uma categoria monoidal, em que $\otimes_k : Vect_k\times Vect_k\to Vect_k$ é o produto tensorial sobre k e, para X,Y,Z conjuntos,

$$
\begin{array}{rccc}
a_{X,Y,Z}: & (X\otimes Y)\otimes Z & \to & X\otimes(Y\otimes Z),\\
 & (x\otimes y)\otimes z & \mapsto & x\otimes(y\otimes z)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
l_X: & k\otimes X & \to & X & e & r_X: & X\otimes k & \to & X\\
 & 1\otimes x & \mapsto & x & & & x\otimes 1 & \mapsto & x
\end{array}
$$

Analogamente, $(vect_k,\otimes_k,k,a,l,r)$ é uma categoria monoidal.

Exemplo 3.1.10 Sejam k um corpo, G um grupo e ω um 3-cociclo, ou seja, $\omega : G\times G\times G\to k^\times$, em que $k^\times = k-\{0\}$, é uma função tal que, para quaisquer $a,b,c,d\in G$,

$$\omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\omega(b,c,d)=\omega(ab,c,d)\omega(a,b,cd).$$

A categoria $\mathcal{C}(G,\omega)$ é aquela cujos objetos são os k-espaços vetoriais G-graduados, ou seja, $X\in\mathcal{C}(G,\omega)$ se X é um k-espaço vetorial e $X=\bigoplus_{g\in G}X_g$, em que X_g são k-subespaços de X.

Para $X=\bigoplus_{g\in G}X_g$, $Y=\bigoplus_{g\in G}Y_g\in\mathcal{C}(G,\omega)$, um morfismo em $\mathcal{C}(G,\omega)$ é uma transformação k-linear $f:X\to Y$ tal que $f(X_g)\subseteq Y_g$, para todo $g\in G$.

Se $X,Y\in\mathcal{C}(G,\omega)$ com graduações $X=\bigoplus_{g\in G}X_g, Y=\bigoplus_{g\in G}Y_g$, então $X\otimes Y\in\mathcal{C}(G,\omega)$ com graduação

$$X\otimes Y=\bigoplus_{g\in G}(X\otimes Y)_g,\ \text{ em que }\ (X\otimes Y)_g=\bigoplus_{ab=g}X_a\otimes Y_b.$$

O objeto $\mathbf{1}\in\mathcal{C}(G,\omega)$ é o corpo k com graduação $k=\bigoplus_{g\in G}\delta_{1,g}k$, em que $\delta_{1,g}$ é o *delta de Kronecker* e $\otimes=\otimes_k$.

Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{C}(G,\omega)$ com graduações $X = \bigoplus_{g\in G} X_g, Y = \bigoplus_{g\in G} Y_g, Z = \bigoplus_{g\in G} Z_g$. Para quaisquer $a, b, c \in G$, $x \in X_a, y \in Y_b, z \in Z_c$, consideremos as seguintes transformações k-lineares

$$\begin{array}{rccc} a_{X,Y,Z}: & (X\otimes Y)\otimes Z & \to & X\otimes(Y\otimes Z), \\ & (x\otimes y)\otimes z & \mapsto & \omega(a,b,c)x\otimes(y\otimes z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} l_X: & k\otimes X & \to & X & \text{e} & r_X: & X\otimes k & \to & X. \\ & 1\otimes x & \mapsto & \omega(1,1,a)^{-1}x & & & x\otimes 1 & \mapsto & \omega(a,1,1)x \end{array}$$

Então $(\mathcal{C}(G,\omega), \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal. De fato, mostremos que, para $X, Y, Z \in \mathcal{C}(G,\omega)$, $a_{X,Y,Z}$ e l_X são morfismos em $\mathcal{C}(G,\omega)$. Notemos que, para cada $g \in G$, temos

$$\begin{aligned} ((X\otimes Y)\otimes Z)_g &= \bigoplus_{ec=g} (X\otimes Y)_e \otimes Z_c \\ &= \bigoplus_{ec=g}\bigoplus_{ab=e} (X_a\otimes Y_b)\otimes Z_c \\ &= \bigoplus_{abc=g} (X_a\otimes Y_b)\otimes Z_c. \end{aligned}$$

Analogamente, $(X\otimes(Y\otimes Z))_g = \bigoplus_{abc=g} X_a\otimes(Y_b\otimes Z_c)$. Também,

$$(k\otimes X)_g = \bigoplus_{ab=g} \delta_{1,a} k\otimes X_b = k\otimes X_g.$$

Agora, para $g, a, b, c \in G$, $g = abc$, $x \in X_a$, $y \in Y_b$, $z \in Z_c$, temos

$$a((x\otimes y)\otimes z) = \omega(a,b,c)x\otimes(y\otimes z) \in X_a\otimes(Y_b\otimes Z_c),$$

$$\text{e} \;\; l_X(1\otimes x) = x \in X_a.$$

Logo, $a_{X,Y,Z}((X_a\otimes Y_b)\otimes Z_c) \subseteq X_a\otimes(Y_b\otimes Z_c)$ e $l_X(k\otimes X_a)\subseteq X_a$ e isso nos diz que $a_{X,Y,Z}(((X\otimes Y)\otimes Z)_g) \subseteq (X\otimes(Y\otimes Z))_g$ e que $l_X((k\otimes X)_g)\subseteq X_g$. Portanto, $a_{X,Y,Z}$ e l_X são morfismos em $\mathcal{C}(G,\omega)$ e analogamente, r_X é um morfismo em $\mathcal{C}(G,\omega)$.

Resta-nos mostrar o axioma do pentágono e do triângulo. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}(G,\omega)$, $a, b, c, d \in G$ e $x \in X_a$, $y \in Y_b$, $z \in Z_c$, $w \in W_d$. Então

$$\begin{aligned} & a_{X,Y,Z\otimes W}\, a_{X\otimes Y,Z,W}(((x\otimes y)\otimes z)\otimes w) \\ \overset{(*)}{=} \;& a_{X,Y,Z\otimes W}(\omega(ab,c,d)(x\otimes y)\otimes(z\otimes w)) \\ = \;& \omega(ab,c,d)\omega(a,b,cd)x\otimes(y\otimes(z\otimes w)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(**)}{=} && \omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\omega(b,c,d)x\otimes(y\otimes(z\otimes w))\\
&= && (id_X\otimes a_{Y,Z,W})(\omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)x\otimes((y\otimes z)\otimes w))\\
&= && (id_X\otimes a_{Y,Z,W})a_{X,Y\otimes Z,W}(\omega(a,b,c)(x\otimes(y\otimes z))\otimes w)\\
&= && (id_X\otimes a_{Y,Z,W})a_{X,Y\otimes Z,W}(a_{X,Y,Z}\otimes id_W)(((x\otimes y)\otimes z)\otimes w),
\end{aligned}
$$

em $(*)$ usamos o fato de que $x \in X_a$ e $y \in Y_b$, o que implica $x\otimes y \in X_a \otimes Y_b \subseteq (X\otimes Y)_{ab}$ e em $(**)$ usamos a propriedade do 3-cociclo ω. Agora, o triângulo

$$
\begin{aligned}
(r_X\otimes id_Y)((x\otimes 1)\otimes y) &= \omega(a,1,1)x\otimes y\\
&= \omega(a,1,1)\omega(1,1,b)\omega(1,1,b)^{-1}x\otimes y\\
&= \omega(a,1,1)\omega(1,1,b)(id_X\otimes l_Y)(x\otimes(1\otimes y))\\
&\overset{(***)}{=} \omega(a,1,b)(id_X\otimes l_Y)(x\otimes(1\otimes y))\\
&= (id_X\otimes l_Y)a_{X,\mathbf{1},Y}(x\otimes(1\otimes y)),
\end{aligned}
$$

em $(***)$ usamos a propriedade do 3-cociclo ω. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
& \omega(a,1,1)\omega(a,1,b)\omega(1,1,b)\\
= {} & \omega(a,1,1)\omega(a,1\cdot 1,b)\omega(1,1,b)\\
= {} & \omega(a1,1,b)\omega(a,1,1b)\\
= {} & \omega(a,1,b)\omega(a,1,b),
\end{aligned}
$$

de onde segue que $\omega(a,1,1)\omega(1,1,b) = \omega(a,1,b)$.

Exemplo 3.1.11 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Do Exemplo 1.4.13, para $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, $End(\mathcal{C}) = Fun(\mathcal{C},\mathcal{C})$ é uma categoria. Mostremos que $(End(\mathcal{C}),\otimes, Id_{\mathcal{C}})$ é uma categoria monoidal estrita, em que $\otimes : End(\mathcal{C})\times End(\mathcal{C}) \to End(\mathcal{C})$ é definido por

$$\otimes(G,F) = G\circ F \quad \text{e} \quad \otimes(\nu,\mu) = \nu * \mu,$$

para quaisquer $F, G \in End(\mathcal{C})$ e ν, μ transformações naturais. De fato, sejam $\nu : F \to G$, $\nu' : G \to H$, $\mu : J \to R$, $\mu' : R \to S$ transformações naturais, em que $F, G, H, J, R, S \in End(\mathcal{C})$. Então $\nu'\circ\nu : F \to H$, $\mu'\circ\mu : J \to S$. Notemos que, pela Definição 1.4.10, $\nu' * \mu' : G\circ R \to H\circ S$ e $\nu * \mu : F\circ J \to G\circ R$ são dadas por

$$(\nu' * \mu')_X = \nu'_{S(X)}G(\mu'_X) \quad \text{e} \quad (\nu * \mu)_X = \nu_{R(X)}F(\mu_X), \quad \text{para todo } X \in \mathcal{C}.$$

Mostremos que $\otimes$ é um funtor. De fato, para cada $X \in \mathcal{C}$, temos

$$\otimes(id_{(F,G)})_X \quad = \quad \otimes(id_F, id_G)_X$$

$$
\begin{aligned}
&= (id_F * id_G)_X \\
&= (id_F)_{G(X)} F((id_G)_X) \\
&= id_{F(G(X))} \\
&= id_{(F \circ G)(X)} \\
&= (id_{F \circ G})_X \\
&= (id_{\otimes(F,G)})_X
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\otimes((\nu', \mu') \circ (\nu, \mu))_X &= \otimes(\nu' \circ \nu, \mu' \circ \mu)_X \\
&= ((\nu' \circ \nu) * (\mu' \circ \mu))_X \\
&= (\nu' \circ \nu)_{S(X)} F((\mu' \circ \mu)_X) \\
&= \nu'_{S(X)} \nu_{S(X)} F(\mu'_X \mu_X) \\
&= \nu'_{S(X)} \nu_{S(X)} F(\mu'_X) F(\mu_X) \\
&\overset{(*)}{=} \nu'_{S(X)} G(\mu'_X) \nu_{R(X)} F(\mu_X) \\
&= (\nu' * \mu')_X (\nu * \mu)_X \\
&= ((\nu' * \mu') \circ (\nu * \mu))_X \\
&= (\otimes(\nu', \mu') \circ \otimes(\nu, \mu))_X.
\end{aligned}
$$

em que $(*)$ segue da igualdade dada no parágrafo após a Definição 1.4.10. Portanto, $\otimes(id_{(F,G)}) = id_{\otimes(F,G)}$ e $\otimes((\nu', \mu') \circ (\nu, \mu)) = \otimes(\nu', \mu') \circ \otimes(\nu, \mu)$.

Como categorias monoidais possuem propriedades adicionais, podemos definir os funtores que preservam tais propriedades.

Definição 3.1.12 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias monoidais. Um funtor monoidal entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma terna (F, ζ, ϕ), em que*

(i) *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor;*

(ii) *$\zeta : \otimes \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural, isto é, $\zeta_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$, para $X, Y \in \mathcal{C}$;*

(iii) *$\phi : \mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$;*

além disso, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, os diagramas

$$
\begin{tikzcd}
& (F(X)\otimes F(Y))\otimes F(Z) \arrow[dl, "\zeta_{X,Y}\otimes id_{F(Z)}"'] \arrow[dr, "a_{F(X),F(Y),F(Z)}"] & \\
F(X\otimes Y)\otimes F(Z) \arrow[d, "\zeta_{X\otimes Y,Z}"'] & & F(X)\otimes (F(Y)\otimes F(Z)) \arrow[d, "id_{F(X)}\otimes\zeta_{Y,Z}"] \\
F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dr, "F(a_{X,Y,Z})"'] & & F(X)\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[dl, "\zeta_{X,Y\otimes Z}"] \\
& F(X\otimes (Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "\phi\otimes id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(\mathbf{1})\otimes F(X) \arrow[r, "\zeta_{\mathbf{1},X}"'] & F(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X)\otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "id_{F(X)}\otimes\phi"'] & F(X) \\
F(X)\otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "\zeta_{X,\mathbf{1}}"'] & F(X\otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}
$$

são comutativos, ou seja,

$$\zeta_{X,Y\otimes Z}(id_{F(X)}\otimes\zeta_{Y,Z})a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z})\zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y}\otimes id_{F(Z)}),$$

$$l_{F(X)} = F(l_X)\zeta_{\mathbf{1},X}(\phi\otimes id_{F(X)}) \quad e \quad r_{F(X)} = F(r_X)\zeta_{X,\mathbf{1}}(id_{F(X)}\otimes\phi).$$

Para explicitar, se $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ são morfismos em $\mathcal{C}$, o diagrama de naturalidade de ζ é

$$
\begin{tikzcd}
F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\zeta_{X,Y}"] \arrow[d, "F(f)\otimes F(g)"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F(f\otimes g)"] \\
F(X')\otimes F(Y') \arrow[r, "\zeta_{X',Y'}"'] & F(X'\otimes Y').
\end{tikzcd}
$$

Exemplo 3.1.13 Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A terna $(Id_{\mathcal{C}}, \zeta^{Id_{\mathcal{C}}}, \phi^{Id_{\mathcal{C}}})$ é um funtor monoidal, em que $\zeta^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$, para $X, Y \in \mathcal{C}$ e $\phi^{Id_{\mathcal{C}}} = id_{\mathbf{1}}$.

Definição 3.1.14 *Sejam $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$$\mathcal{E}$ categorias monoidais, $(F, \zeta^F, \phi^F) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $(G, \zeta^G, \phi^G) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores monoidais. A composição de (G, ζ^G, ϕ^G) e (F, ζ^F, ϕ^F) é a terna $(G \circ F, \zeta^{G\circ F}, \phi^{G\circ F})$, em que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $\zeta^{G\circ F}_{X,Y}$ e $\phi^{G\circ F}$ são as composições*

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \otimes G(F(Y)) \arrow[rr, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y}"] \arrow[dr, "\zeta^G_{F(X),F(Y)}"'] & & G(F(X \otimes Y)) \\
& G(F(X) \otimes F(Y)) \arrow[ur, "G(\zeta^F_{X,Y})"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, "\phi^{G\circ F}"] \arrow[dr, "\phi^G"'] & & G(F(\mathbf{1})) \\
& G(\mathbf{1}) \arrow[ur, "G(\phi^F)"'] &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\zeta^{G\circ F}_{X,Y} = G(\zeta^F_{X,Y})\zeta^G_{F(X),F(Y)} \quad e \quad \phi^{G\circ F} = G(\phi^F)\phi^G.$$

Proposição 3.1.15 *A composição de funtores monoidais é um funtor monoidal.*

Demonstração: Com as notações da definição anterior, devemos mostrar que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
& \zeta^{G\circ F}_{X,Y\otimes Z}(id_{(G\circ F)(X)} \otimes \zeta^{G\circ F}_{Y,Z})a_{(G\circ F)(X),(G\circ F)(Y),(G\circ F)(Z)} \\
= \quad & (G \circ F)(a_{X,Y,Z})\zeta^{G\circ F}_{X\otimes Y,Z}(\zeta^{G\circ F}_{X,Y} \otimes id_{(G\circ F)(Z)}),
\end{aligned}$$

$$l_{(G\circ F)(X)} = (G \circ F)(l_X)\zeta^{G\circ F}_{\mathbf{1},X}(\phi^{G\circ F} \otimes id_{(G\circ F)(X)}) \text{ e}$$

$$r_{(G\circ F)(X)} = (G \circ F)(r_X)\zeta^{G\circ F}_{X,\mathbf{1}}(id_{(G\circ F)(X)} \otimes \phi^{G\circ F}).$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
& \zeta^{G\circ F}_{X,Y\otimes Z}(id_{(G\circ F)(X)} \otimes \zeta^{G\circ F}_{Y,Z})a_{(G\circ F)(X),(G\circ F)(Y),(G\circ F)(Z)} \\
= \quad & G(\zeta^F_{X,Y\otimes Z})\zeta^G_{F(X),F(Y\otimes Z)}(id_{G(F(X))} \otimes G(\zeta^F_{Y,Z})\zeta^G_{F(Y),F(Z)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& a_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} \\
= \quad & G(\zeta^F_{X,Y\otimes Z})\zeta^G_{F(X),F(Y\otimes Z)}(G(id_{F(X)})\otimes G(\zeta^F_{Y,Z})) \\
& (id_{G(F(X))}\otimes \zeta^G_{F(Y),F(Z)})a_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} \\
\overset{(1)}{=} \quad & G(\zeta^F_{X,Y\otimes Z})G(id_{F(X)}\otimes \zeta^F_{Y,Z})\zeta^G_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)} \\
& (id_{G(F(X))}\otimes \zeta^G_{F(Y),F(Z)})a_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} \\
\overset{(2)}{=} \quad & G(\zeta^F_{X,Y\otimes Z})G(id_{F(X)})\otimes \zeta^F_{Y,Z})G(a_{F(X),F(Y),F(Z)}) \\
& \zeta^G_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)}(\zeta^G_{F(X),F(Y)}\otimes id_{G(F(Z))}) \\
\overset{(3)}{=} \quad & G(F(a_{X,Y,Z}))G(\zeta^F_{X\otimes Y,Z})G(\zeta^F_{X,Y}\otimes id_{F(Z)}) \\
& \zeta^G_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)}(\zeta^G_{F(X),F(Y)}\otimes id_{G(F(Z))}) \\
\overset{(4)}{=} \quad & G(F(a_{X,Y,Z}))G(\zeta^F_{X\otimes Y,Z})\zeta^G_{F(X\otimes Y),F(Z)} \\
& (G(\zeta^F_{X,Y})\otimes G(id_{F(Z)}))(\zeta^G_{F(X),F(Y)}\otimes id_{G(F(Z))}) \\
= \quad & (G\circ F)(a_{X,Y,Z})\zeta^{G\circ F}_{X\otimes Y,Z}(\zeta^{G\circ F}_{X,Y}\otimes id_{(G\circ F)(Z)}),
\end{aligned}
$$

em (1) e (4) usamos a naturalidade de ζ^G, vide diagramas

$$
\begin{tikzcd}
G(F(X))\otimes G(F(Y)\otimes F(Z)) \arrow[r, "\zeta^G_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)}"] \arrow[d, "G(id_{F(X)})\otimes G(\zeta^F_{Y,Z})"'] & G(F(X)\otimes (F(Y)\otimes F(Z))) \arrow[d, "G(id_{F(X)}\otimes \zeta^F_{Y,Z})"] \\
G(F(X))\otimes G(F(Y\otimes Z)) \arrow[r, "\zeta^G_{F(X),F(Y\otimes Z)}"'] & G(F(X)\otimes F(Y\otimes Z))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G(F(X)\otimes F(Y))\otimes G(F(Z)) \arrow[r, "\zeta^G_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "G(\zeta^F_{X,Y})\otimes G(id_{F(Z)})"'] & G((F(X)\otimes F(Y))\otimes F(Z)) \arrow[d, "G(\zeta^F_{X,Y}\otimes id_{F(Z)})"] \\
G(F(X\otimes Y))\otimes G(F(Z)) \arrow[r, "\zeta^G_{F(X\otimes Y),F(Z)}"'] & G(F(X\otimes Y)\otimes F(Z)).
\end{tikzcd}
$$

Em (2) usamos o fato de G ser funtor monoidal e em (3) usamos o fato de F ser funtor monoidal. Agora, vejamos o próximo diagrama

$$
\begin{aligned}
& l_{(G\circ F)(X)} = l_{G(F(X))} \\
\overset{(*)}{=} \quad & G(l_{F(X)})\zeta^G_{\mathbf{1},F(X)}(\phi^G \otimes id_{G(F(X))}) \\
\overset{(**)}{=} \quad & G(F(l_X))G(\zeta^F_{\mathbf{1},X})G(\phi^F \otimes id_{F(X)})\zeta^G_{\mathbf{1},F(X)}(\phi^G \otimes id_{G(F(X))}) \\
= \quad & G(F(l_X))G(\zeta^F_{\mathbf{1},X})\zeta^G_{F(\mathbf{1}),F(X)}(G(\phi^F) \otimes G(id_{F(X)}))(\phi^G \otimes id_{G(F(X))}) \\
= \quad & (G\circ F)(l_X)\zeta^{G\circ F}_{\mathbf{1},X}(\phi^{G\circ F} \otimes id_{(G\circ F)(X)}),
\end{aligned}
$$

em $(*)$ usamos o fato de G ser funtor monoidal e em $(**)$ usamos o fato de F ser funtor monoidal. A comutatividade do diagrama envolvendo r_X é provada analogamente. ■

Definição 3.1.16 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias monoidais e (F, ζ^F, ϕ^F), $(G, \zeta^G, \phi^G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores monoidais. Uma transformação natural monoidal entre (F, ζ^F, ϕ^F) e (G, ζ^G, ϕ^G) é uma transformação natural $\mu : F \to G$ tal que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, os diagramas*

$$
\begin{tikzcd}
F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\mu_X\otimes\mu_Y"] \arrow[d, "\zeta^F_{X,Y}"'] & G(X)\otimes G(Y) \arrow[d, "\zeta^G_{X,Y}"] \\
F(X\otimes Y) \arrow[r, "\mu_{X\otimes Y}"'] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[dl, "\phi^F"'] \arrow[dr, "\phi^G"] & \\
F(\mathbf{1}) \arrow[rr, "\mu_{\mathbf{1}}"'] & & G(\mathbf{1})
\end{tikzcd}
$$

são comutativos, ou seja,

$$\zeta^G_{X,Y}(\mu_X \otimes \mu_Y) = \mu_{X\otimes Y}\zeta^F_{X,Y} \quad e \quad \phi^G = \mu_{\mathbf{1}}\phi^F.$$

Um *isomorfismo natural monoidal* é uma transformação natural monoidal que é um isomorfismo natural. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são monoidalmente equivalentes se existirem funtores monoidais $(F, \zeta^F, \phi^F) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(G, \zeta^G, \phi^G) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais monoidais $\mu : G \circ F \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\nu : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$.

Para mostrarmos o principal resultado deste capítulo, precisamos definir categoria esquelética e esqueleto de uma categoria.

Definição 3.1.17 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita esquelética se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ tais que $X \simeq Y$ implicar $X = Y$.*

Em outras palavras, uma categoria esquelética $\mathcal{C}$ não possui objetos distintos que sejam isomorfos.

Definição 3.1.18 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O esqueleto de $\mathcal{C}$ é a subcategoria plena $Sk(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ que consiste em considerar um só objeto em cada classe de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$.*

É claro que $Sk(\mathcal{C})$ é uma categoria esquelética.

Exemplo 3.1.19 Seja k um corpo. Denotamos por $Matr_k$ a categoria cujos objetos são os elementos de $\mathbb{N}_o = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}_o$, um morfismo de n para m é uma matriz $m \times n$ com entradas no corpo k. Notamos $Hom_{Matr_k}(n, m)$ pelo espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre k, isto é, $M_{m\times n}(k)$.

Tal categoria é monoidal, para maiores detalhes veja [7]. Mostremos que $Matr_k$ é esquelética. De fato, seja $A \in Hom_{Matr_k}(n, m)$ um isomorfismo. Então existe $B \in Hom_{Matr_k}(m, n)$ tal que $AB = I_n$ e $BA = I_m$. Assim, $n = tr(AB) = tr(BA) = m$. Logo, dois objetos isomorfos em $Matr_k$ são iguais e isso nos diz que $Matr_k$ é esquelética.

Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Gostaríamos de apresentar uma estrutura monoidal para a categoria $Sk(\mathcal{C})$. Fazemos isso através dos próximos dois lemas.

Para cada $X \in \mathcal{C}$, denotamos por $\overline{X} \in Sk(\mathcal{C})$ o único objeto de $Sk(\mathcal{C})$ tal que $\overline{X} \simeq X$ e fixamos um isomorfismo $\sigma_X : \overline{X} \to X$ em $\mathcal{C}$.

Definimos $\odot : Sk(\mathcal{C}) \times Sk(\mathcal{C}) \to Sk(\mathcal{C})$ por

$$\odot(X, Y) = X \odot Y = \overline{X \otimes Y} \quad \text{e} \quad \odot(f, g) = f \odot g = \sigma^{-1}_{X'\otimes Y'}(f \otimes g)\sigma_{X\otimes Y},$$

para quaisquer $X, Y \in Sk(\mathcal{C})$ e $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ morfismos em $Sk(\mathcal{C})$. Para melhor visualização, explicitamos a composta

$$X \odot Y = \overline{X \otimes Y} \xrightarrow{\sigma_{X\otimes Y}} X \otimes Y \xrightarrow{f\otimes g} X' \otimes Y' \xrightarrow{\sigma^{-1}_{X'\otimes Y'}} \overline{X' \otimes Y'} = X' \odot Y'.$$

Lema 3.1.20 *Com a notação acima, $\odot : Sk(\mathcal{C}) \times Sk(\mathcal{C}) \to Sk(\mathcal{C})$ é um funtor.*

Demonstração: De fato, para $f : X \to Y, f' : X' \to Y', g : Y \to Z, g' : Y' \to Z'$ morfismos em $Sk(\mathcal{C})$, temos

$$\odot(id_{(X,Y)}) \;\; = \;\; \odot(id_X, id_Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(id_X \otimes id_Y)\sigma_{X\otimes Y} \\
&= \sigma^{-1}_{X\otimes Y} id_{X\otimes Y}\sigma_{X\otimes Y} \\
&= \sigma^{-1}_{X\otimes Y}\sigma_{X\otimes Y} \\
&= id_{\overline{X\otimes Y}} \\
&= id_{X\odot Y} \\
&= id_{\odot(X,Y)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\odot(gf, g'f') &= gf \odot g'f' \\
&= \sigma^{-1}_{Z\otimes Z'}(gf \otimes g'f')\sigma_{X\otimes X'} \\
&= \sigma^{-1}_{Z\otimes Z'}(g \otimes g')(f \otimes f')\sigma_{X\otimes X'} \\
&= \sigma^{-1}_{Z\otimes Z'}(g \otimes g')\sigma_{Y\otimes Y'}\sigma^{-1}_{Y\otimes Y'}(f \otimes f')\sigma_{X\otimes X'} \\
&= (g \odot g')(f \odot f').
\end{aligned}
$$

Logo, $\odot$ é um funtor. ∎

Sejam $X, Y, Z \in Sk(\mathcal{C})$. Definimos $\overline{a}_{X,Y,Z} : (X \odot Y) \odot Z \to X \odot (Y \odot Z)$, $\overline{l}_X : \overline{\mathbf{1}} \odot X \to X$ e $\overline{r}_X : X \odot \overline{\mathbf{1}} \to X$ por

$$\overline{a}_{X,Y,Z} = \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot Z)}(id_X \otimes \sigma^{-1}_{Y\otimes Z})a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y} \otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z},$$

$$\overline{l}_X = l_X(\sigma_{\mathbf{1}} \otimes id_X)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X} \;\text{ e }\; \overline{r}_X = r_X(id_X \otimes \sigma_{\mathbf{1}})\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}}.$$

Lema 3.1.21 *A sêxtupla* $(Sk(\mathcal{C}), \odot, \overline{\mathbf{1}}, \overline{a}, \overline{l}, \overline{r})$ *é uma categoria monoidal.*

Demonstração: Primeiramente, vejamos que $\overline{a}$, $\overline{l}$ e $\overline{r}$ são isomorfismos naturais. É claro que $\overline{a}_{X,Y,Z}$, $\overline{l}_X$ e $\overline{r}_X$ são isomorfismos, para quaisquer $X, Y, Z \in Sk(\mathcal{C})$, pois são composições de isomorfismos. Agora, para $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, $h : Z \to Z'$ morfismos em $Sk(\mathcal{C})$, temos

$$
\begin{aligned}
& (f \odot (g \odot h))\overline{a}_{X,Y,Z} \\
=\;& \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(f \otimes (g \odot h))\sigma_{X\otimes(Y\odot Z)}\overline{a}_{X,Y,Z} \\
=\;& \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(f \otimes (g \odot h))(id_X \otimes \sigma^{-1}_{Y\otimes Z}) \\
& a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y} \otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z} \\
=\;& \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(f \otimes (g \odot h)\sigma^{-1}_{Y\otimes Z}) \\
& a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y} \otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= && \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(f\otimes\sigma^{-1}_{Y'\otimes Z'}(g\otimes h)\sigma_{Y\otimes Z}\sigma^{-1}_{Y\otimes Z})\\
& && a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&= && \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(f\otimes\sigma^{-1}_{Y'\otimes Z'}(g\otimes h))\\
& && a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&= && \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(id_{X'}\otimes\sigma^{-1}_{Y'\otimes Z'})\\
& && (f\otimes(g\otimes h))a_{X,Y,Z}\\
& && (\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&\overset{(*)}{=} && \sigma^{-1}_{X'\otimes(Y'\odot Z')}(id_{X'}\otimes\sigma^{-1}_{Y'\otimes Z'})\\
& && a_{X',Y',Z'}((f\otimes g)\otimes h)\\
& && (\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&\overset{(**)}{=} && \overline{a}_{X',Y',Z'}\sigma^{-1}_{(X'\odot Y')\otimes Z'}(\sigma^{-1}_{X'\otimes Y'}\otimes id_{Z'})\\
& && ((f\otimes g)\otimes h)(\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&= && \overline{a}_{X',Y',Z'}\sigma^{-1}_{(X'\odot Y')\otimes Z'}\\
& && (\sigma^{-1}_{X'\otimes Y'}(f\otimes g)\sigma_{X\otimes Y}\otimes h)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&= && \overline{a}_{X',Y',Z'}\sigma^{-1}_{(X'\odot Y')\otimes Z'}((f\odot g)\otimes h)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\\
&= && \overline{a}_{X',Y',Z'}(f\odot g)\odot h),
\end{aligned}
$$

em $(*)$ usamos a naturalidade de a e em $(**)$ usamos a definição de $\overline{a}$. Portanto, $\overline{a}$ é uma transformação natural. Agora, provemos que $\overline{l}$ é uma transformação natural. De fato, seja $f : X \to Y$ um morfismo em $Sk(\mathcal{C})$, temos

$$
\begin{aligned}
f\overline{l}_X &= fl_X(\sigma_{\mathbf{1}}\otimes id_X)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X}\\
&= l_Y(id_{\mathbf{1}}\otimes f)(\sigma_{\mathbf{1}}\otimes id_X)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X}\\
&= l_Y(\sigma_{\mathbf{1}}\otimes f)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X}\\
&= l_Y(\sigma_{\mathbf{1}}id_{\overline{\mathbf{1}}}\otimes id_Y f)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X}\\
&= l_Y(\sigma_{\mathbf{1}}\otimes id_Y)(id_{\overline{\mathbf{1}}}\otimes f)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X}\\
&\overset{(***)}{=} l_Y(\sigma_{\mathbf{1}}\otimes id_Y)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes Y}(id_{\overline{\mathbf{1}}}\odot f)\\
&= \overline{l}_Y(id_{\overline{\mathbf{1}}}\odot f).
\end{aligned}
$$

em $(***)$ usamos a definição de $id_{\overline{\mathbf{1}}}\odot f$. De maneira análoga, concluímos que r é uma transformação natural. Logo, $\overline{a}$, $\overline{l}$ e $\overline{r}$ são isomorfismos naturais.

Mostremos os axiomas do pentágono e do triângulo. Para $X, Y, Z, W \in$

$Sk(\mathcal{C})$, temos

$$
\begin{aligned}
& \overline{a}_{X,Y,Z\odot W}\overline{a}_{X\odot Y,Z,W} \\
= \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)})a_{X,Y,Z\odot W} \\
& (\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_{Z\odot W})\sigma_{(X\odot Y)\otimes(Z\odot W)} \\
& \sigma^{-1}_{(X\odot Y)\otimes(Z\odot W)}(id_{X\odot Y}\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W}) \\
& a_{X\odot Y,Z,W}(\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
= \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)})a_{X,Y,Z\odot W} \\
& (\sigma_{X\otimes Y}\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W}) \\
& a_{X\odot Y,Z,W}(\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
= \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)})a_{X,Y,Z\odot W} \\
& (id_{X\otimes Y}\sigma_{X\otimes Y}\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W}id_{Z\otimes W}) \\
& a_{X\odot Y,Z,W}(\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
= \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)})a_{X,Y,Z\odot W} \\
& (id_{X\otimes Y}\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W})(\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_{Z\otimes W}) \\
& a_{X\odot Y,Z,W}(\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
= \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)})a_{X,Y,Z\odot W} \\
& ((id_X\otimes id_Y)\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W})(\sigma_{X\otimes Y}\otimes(id_Z\otimes id_W)) \\
& a_{X\odot Y,Z,W}(\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
\overset{(1)}{=} \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)})(id_X\otimes(id_Y\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W})) \\
& a_{X,Y,Z\otimes W}a_{X\otimes Y,Z,W} \\
& ((\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\otimes id_W)(\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
\overset{(2)}{=} \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)}(id_Y\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W})) \\
& (id_X\otimes a_{Y,Z,W})a_{X,Y\otimes Z,W}(a_{X,Y,Z}\otimes id_W) \\
& ((\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
= \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\sigma^{-1}_{Y\otimes(Z\odot W)}(id_Y\otimes\sigma^{-1}_{Z\otimes W})a_{Y,Z,W}) \\
& a_{X,Y\otimes Z,W} \\
& (a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y}\otimes id_Z)\sigma_{(X\odot Y)\otimes Z}\otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
\overset{(3)}{=} \ & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X\otimes\overline{a}_{Y,Z,W})(id_X\otimes\sigma^{-1}_{(Y\odot Z)\otimes W}) \\
& (id_X\otimes(\sigma^{-1}_{Y\otimes Z}\otimes id_W))a_{X,Y\otimes Z,W}((id_X\otimes\sigma_{Y\otimes Z})\otimes id_W)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\sigma_{X\otimes(Y\odot Z)} \otimes id_W)(\overline{a}_{X,Y,Z} \otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot(Z\odot W))}(id_X \otimes \overline{a}_{Y,Z,W})(id_X \otimes \sigma^{-1}_{(Y\odot Z)\otimes W}) \\
& a_{X,Y\odot Z,W} \\
& (\sigma_{X\otimes(Y\odot Z)} \otimes id_W)(\overline{a}_{X,Y,Z} \otimes id_W)\sigma_{((X\odot Y)\odot Z)\otimes W} \\
\overset{(4)}{=} \; & (id_X \odot \overline{a}_{Y,Z,W})\sigma^{-1}_{X\otimes((Y\odot Z)\odot W)} \\
& (id_X \otimes \sigma^{-1}_{(Y\odot Z)\otimes W})a_{X,Y\odot Z,W}(\sigma_{X\otimes(Y\odot Z)} \otimes id_W) \\
& \sigma_{(X\odot(Y\odot Z))\otimes W}(\overline{a}_{X,Y,Z} \odot id_W) \\
\overset{(5)}{=} \; & (id_X \odot \overline{a}_{Y,Z,W})\overline{a}_{X,Y\odot Z,W}(\overline{a}_{X,Y,Z} \odot id_W),
\end{aligned}
$$

em (1) usamos duas vezes a naturalidade de a, em (2) usamos o axioma do pentágono, em (3) usamos duas vezes a definição de $\overline{a}$, em (4) usamos a definição de $id_X \odot \overline{a}_{Y,Z,W}$ e $\overline{a}_{X,Y,Z} \odot id_W$ e em (5) usamos a definição de $\overline{a}$. Agora, verifiquemos o axioma do triângulo. Temos

$$
\begin{aligned}
& \overline{r}_X \odot id_Y \\
= \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(\overline{r}_X \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(r_X(id_X \otimes \sigma_{\mathbf{1}})\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(r_X \otimes id_Y)((id_X \otimes \sigma_{\mathbf{1}}) \otimes id_Y)(\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
\overset{(1)}{=} \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(id_X \otimes l_Y)a_{X,\mathbf{1},Y}((id_X \otimes \sigma_{\mathbf{1}}) \otimes id_Y) \\
& (\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
\overset{(2)}{=} \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(id_X \otimes l_Y)(id_X \otimes (\sigma_{\mathbf{1}} \otimes id_Y))a_{X,\overline{\mathbf{1}},Y} \\
& (\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
\overset{(3)}{=} \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(id_X \otimes \overline{l}_Y)(id_X \otimes \sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}\otimes Y})(id_X \otimes (\sigma^{-1}_{\mathbf{1}} \otimes id_Y)) \\
& (id_X \otimes (\sigma_{\mathbf{1}} \otimes id_Y))a_{X,\overline{\mathbf{1}},Y}(\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(id_X \otimes \overline{l}_Y)(id_X \otimes \sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}\otimes Y})a_{X,\overline{\mathbf{1}},Y} \\
& (\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
= \; & (id_X \odot \overline{l}_Y)\sigma^{-1}_{X\otimes(\overline{\mathbf{1}}\odot Y)}(id_X \otimes \sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}\otimes Y})a_{X,\overline{\mathbf{1}},Y} \\
& (\sigma_{X\otimes\overline{\mathbf{1}}} \otimes id_Y)\sigma_{(X\odot\overline{\mathbf{1}})\otimes Y} \\
\overset{(4)}{=} \; & (id_X \odot \overline{l}_Y)\overline{a}_{X,\overline{\mathbf{1}},Y},
\end{aligned}
$$

em (1) usamos o axioma do triângulo, em (2) usamos a naturalidade do a, em (3) usamos a definição de $\overline{l}$ e em (4) usamos a definição de $\overline{a}$.

Portanto, $(Sk(\mathcal{C}), \odot, \overline{\mathbf{1}}, \overline{a}, \overline{l}, \overline{r})$ é uma categoria monoidal. ■

Teorema 3.1.22 *Toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética.*

Demonstração: Seja uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$, segue, pelos lemas acima, que $(Sk(\mathcal{C}), \odot, \overline{\mathbf{1}}, \overline{a}, \overline{l}, \overline{r})$ é uma categoria monoidal. Queremos mostrar que $\mathcal{C}$ e $Sk(\mathcal{C})$ são monoidalmente equivalentes. Para tanto, primeiramente definimos funtores monoidais F e G. Seja $F : \mathcal{C} \to Sk(\mathcal{C})$ por

$$F(X) = \overline{X} \quad \text{e} \quad F(f) = \sigma_Y^{-1} f \sigma_X,$$

para $X \in \mathcal{C}$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Para $X, Y \in \mathcal{C}$, definimos $\zeta^F_{X,Y} : F(X) \odot F(Y) \to F(X \otimes Y)$ por

$$\zeta^F_{X,Y} = \sigma^{-1}_{X \otimes Y} (\sigma_X \otimes \sigma_Y) \sigma_{F(X) \otimes F(Y)} = \sigma^{-1}_{X \otimes Y} (\sigma_X \otimes \sigma_Y) \sigma_{\overline{X} \otimes \overline{Y}}.$$

Observamos que, como $F(X) = \overline{X}$, para todo $X \in \mathcal{C}$, então $F(X) \odot F(Y) = \overline{X} \odot \overline{Y} = \overline{\overline{X} \otimes \overline{Y}}$ (definição dada no Lema 3.1.20). Daí,

$$\zeta^F_{X,Y} : \overline{\overline{X} \otimes \overline{Y}} \xrightarrow{\sigma_{\overline{X} \otimes \overline{Y}}} \overline{X} \otimes \overline{Y} \xrightarrow{\sigma_X \otimes \sigma_Y} X \otimes Y \xrightarrow{\sigma^{-1}_{X \otimes Y}} \overline{X \otimes Y} = F(X \otimes Y).$$

e isso explica a definição de $\zeta^F_{X,Y}$.

Mostremos que $\zeta^F : \odot \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural. É claro que $\zeta^F_{X,Y}$ é um isomorfismo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, pois é uma composição de isomorfismos. Sejam $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então

$$\begin{aligned}
& F(f \otimes g) \zeta^F_{X,Y} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X' \otimes Y'} (f \otimes g) \sigma_{X \otimes Y} \zeta^F_{X,Y} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X' \otimes Y'} (f \otimes g) (\sigma_X \otimes \sigma_Y) \sigma_{\overline{X} \otimes \overline{Y}} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X' \otimes Y'} (f \sigma_X \otimes g \sigma_Y) \sigma_{\overline{X} \otimes \overline{Y}} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X' \otimes Y'} (\sigma_{X'} F(f) \otimes \sigma_{Y'} F(g)) \sigma_{\overline{X} \otimes \overline{Y}} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X' \otimes Y'} (\sigma_{X'} \otimes \sigma_{Y'}) (F(f) \otimes F(g)) \sigma_{\overline{X} \otimes \overline{Y}} \\
= \; & \sigma^{-1}_{X' \otimes Y'} (\sigma_{X'} \otimes \sigma_{Y'}) \sigma_{\overline{X'} \otimes \overline{Y'}} (F(f) \odot F(g)) \\
= \; & \zeta^F_{X',Y'} (F(f) \odot F(g)).
\end{aligned}$$

Agora definimos

$$\phi^F : \overline{\mathbf{1}} \to F(\mathbf{1}) \quad \text{por} \quad \phi^F = id_{\overline{\mathbf{1}}}.$$

Verifiquemos que (F, ζ^F, ϕ^F) é um funtor monoidal. Para $X, Y \in \mathcal{C}$, queremos mostrar que

$$\zeta^F_{X,Y\otimes Z}(id_{\overline{X}} \odot \zeta^F_{Y,Z})\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} = F(a_{X,Y,Z})\zeta^F_{X\otimes Y,Z}(\zeta^F_{X,Y} \odot id_{\overline{Z}}),$$

$$\overline{l}_{\overline{X}} = F(l_X)\zeta^F_{\mathbf{1},X}(\phi^F \odot id_{\overline{X}})$$

$$\text{e} \;\; \overline{r}_{\overline{X}} = F(r_X)\zeta^F_{X,\mathbf{1}}(id_{\overline{X}} \odot \phi^F).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \sigma_{X\otimes(Y\otimes Z)}\zeta^F_{X,Y\otimes Z}(id_{\overline{X}} \odot \zeta^F_{Y,Z})\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} \\
= \;& (\sigma_X \otimes \sigma_{Y\otimes Z})\sigma_{\overline{X}\otimes\overline{Y\otimes Z}}(id_{\overline{X}} \odot \zeta^F_{Y,Z})\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} \\
= \;& (\sigma_X \otimes \sigma_{Y\otimes Z})(id_{\overline{X}} \otimes \zeta^F_{Y,Z})\sigma_{\overline{X}\otimes(\overline{Y}\odot\overline{Z})}\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} \\
= \;& (\sigma_X \otimes \sigma_{Y\otimes Z}\zeta^F_{Y,Z})\sigma_{\overline{X}\otimes(\overline{Y}\odot\overline{Z})}\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} \\
= \;& (\sigma_X \otimes (\sigma_Y \otimes \sigma_Z)\sigma_{\overline{Y}\otimes\overline{Z}})\sigma_{\overline{X}\otimes(\overline{Y}\odot\overline{Z})}\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} \\
= \;& (\sigma_X \otimes (\sigma_Y \otimes \sigma_Z))(id_{\overline{X}} \otimes \sigma_{\overline{Y}\otimes\overline{Z}})\sigma_{\overline{X}\otimes(\overline{Y}\odot\overline{Z})}\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} \\
\overset{(1)}{=} \;& (\sigma_X \otimes (\sigma_Y \otimes \sigma_Z))a_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}}(\sigma_{\overline{X}\otimes\overline{Y}} \otimes id_{\overline{Z}})\sigma_{(\overline{X}\odot\overline{Y})\otimes\overline{Z}} \\
\overset{(2)}{=} \;& a_{X,Y,Z}((\sigma_X \otimes \sigma_Y) \otimes \sigma_Z)(\sigma_{\overline{X}\otimes\overline{Y}} \otimes id_{\overline{Z}})\sigma_{(\overline{X}\odot\overline{Y})\otimes\overline{Z}} \\
= \;& a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y} \otimes \sigma_Z)(\zeta^F_{X,Y} \otimes id_{\overline{Z}})\sigma_{(\overline{X}\odot\overline{Y})\otimes\overline{Z}} \\
= \;& a_{X,Y,Z}(\sigma_{X\otimes Y} \otimes \sigma_Z)\sigma_{\overline{X\otimes Y}\otimes\overline{Z}}(\zeta^F_{X,Y} \odot id_{\overline{Z}}) \\
= \;& a_{X,Y,Z}\sigma_{(X\otimes Y)\otimes Z}\zeta^F_{X\otimes Y,Z}(\zeta^F_{X,Y} \odot id_{\overline{Z}}) \\
\overset{(3)}{=} \;& \sigma_{X\otimes(Y\otimes Z)}F(a_{X,Y,Z})\zeta^F_{X\otimes Y,Z}(\zeta^F_{X,Y} \odot id_{\overline{Z}}).
\end{aligned}$$

em (1) usamos a definição de $\overline{a}$, em (2) usamos a naturalidade de a e em (3) usamos que $F(a_{X,Y,Z}) = \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\otimes Z)}a_{X,Y,Z}\sigma_{(X\otimes Y)\otimes Z}$, ou seja, $\sigma_{X\otimes(Y\otimes Z)}F(a_{X,Y,Z}) = a_{X,Y,Z}\sigma_{(X\otimes Y)\otimes Z}$.

Como $\sigma_{X\otimes(Y\otimes Z)}$ é um isomorfismo, segue a primeira condição para que (F, ζ^F, ϕ^F) seja um funtor monoidal. Vejamos a segunda igualdade

$$\begin{aligned}
\sigma_X\overline{l}_{\overline{X}} &= \sigma_X l_{\overline{X}}(\sigma_{\mathbf{1}} \otimes id_{\overline{X}})\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes\overline{X}} \\
&\overset{(1)}{=} l_X(id_{\mathbf{1}} \otimes \sigma_X)(\sigma_{\mathbf{1}} \otimes id_{\overline{X}})\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes\overline{X}} \\
&= l_X(\sigma_{\mathbf{1}} \otimes \sigma_X)\sigma_{\overline{\mathbf{1}}\otimes\overline{X}} \\
&= l_X\sigma_{\mathbf{1}\otimes X}\zeta^F_{\mathbf{1},X} \\
&\overset{(2)}{=} \sigma_X F(l_X)\zeta^F_{\mathbf{1},X}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_X F(l_X)\zeta^F_{\mathbf{1},X}(id_{\overline{\mathbf{1}}} \odot id_{\overline{X}}) \\
&= \sigma_X F(l_X)\zeta^F_{\mathbf{1},X}(\phi^F \odot id_{\overline{X}}),
\end{aligned}
$$

em (1) usamos a naturalidade de l e em (2) usamos que $F(l_X) = \sigma_X^{-1} l_X \sigma_{\mathbf{1}\otimes X}$.

Como σ_X é um isomorfismo, segue que $\bar{l}_{\overline{X}} = F(l_X)\zeta^F_{\mathbf{1},X}(\phi^F \otimes id_{\overline{X}})$. A última igualdade é provada analogamente. Portanto, (F, ζ^F, ϕ^F) é um funtor monoidal.

Agora, consideremos o funtor inclusão $G : Sk(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ e mostremos que o mesmo é monoidal, em que

$$\zeta^G_{X,Y} = \sigma^{-1}_{X\otimes Y}, \quad \text{para} \quad X, Y \in Sk(\mathcal{C}) \;\; \text{e} \; \phi^G = \sigma^{-1}_{\mathbf{1}}.$$

De fato, para $X, Y, Z \in Sk(\mathcal{C})$, temos

$$
\begin{aligned}
& \zeta^G_{X,Y\odot Z}(id_{G(X)} \otimes \zeta^G_{Y,Z}) a_{G(X),G(Y),G(Z)} \\
= \;& \sigma^{-1}_{X\otimes(Y\odot Z)}(id_X \otimes \sigma^{-1}_{Y\otimes Z}) a_{X,Y,Z} \\
= \;& \overline{a}_{X,Y,Z}\sigma^{-1}_{(X\odot Y)\otimes Z}(\sigma^{-1}_{X\otimes Y} \otimes id_Z) \\
= \;& G(\overline{a}_{X,Y,Z})\zeta^G_{X\odot Y,Z}(\zeta^G_{X,Y} \otimes id_{G(Z)})
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
l_{G(X)} &= l_X \\
&= \bar{l}_X \sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}\otimes X}(\sigma^{-1}_{\mathbf{1}} \otimes id_X) \\
&= G(\bar{l}_X)\zeta^G_{\overline{\mathbf{1}},X}(\sigma^{-1}_{\mathbf{1}} \otimes id_{G(X)}) \\
&= G(\bar{l}_X)\zeta^G_{\overline{\mathbf{1}},X}(\phi^G \otimes id_{G(X)}).
\end{aligned}
$$

A condição envolvendo $r_{G(X)} = G(r_X)\zeta^G_{X,\overline{\mathbf{1}}}(id_{G(X)} \otimes \phi^G)$ é provada de maneira análoga.

Agora, definimos $\alpha : G \circ F \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\beta : F \circ G \to Id_{Sk(\mathcal{C})}$ por

$$\alpha_X : \overline{X} \to X, \; \alpha_X = \sigma_X, \quad \text{para todo } X \in \mathcal{C},$$

$$\beta_X : \overline{X} \to X, \; \beta_X = \sigma_X, \quad \text{para todo } X \in Sk(\mathcal{C}).$$

Já temos que $\alpha_X = \sigma_X$ é um isomorfismo, para todo $X \in \mathcal{C}$ e portanto, resta verificarmos que α é uma transformação natural monoidal.

Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$ e mostremos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G \circ F)(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "(G\circ F)(f)"'] & Id_{\mathcal{C}}(X) \arrow[d, "f"] \\
(G \circ F)(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & Id_{\mathcal{C}}(Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, temos

$$\begin{aligned}
f\alpha_X &= f\sigma_X \\
&= id_Y f\sigma_X \\
&= \sigma_Y \sigma_Y^{-1} f \sigma_X \\
&= \sigma_Y F(f) \\
&= \sigma_Y G(F(f)) \\
&= \alpha_Y (G \circ F)(f).
\end{aligned}$$

Portanto, α é um isomorfismo natural. Agora vejamos que α é uma transformação natural monoidal, ou seja, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, os diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd}
(G \circ F)(X) \otimes (G \circ F)(Y) \arrow[r, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"] \arrow[d, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y}"'] & Id_{\mathcal{C}}(X) \otimes Id_{\mathcal{C}}(Y) \arrow[d, "\zeta^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y}"] \\
(G \circ F)(X \otimes Y) \arrow[r, "\alpha_{X\otimes Y}"'] & Id_{\mathcal{C}}(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[dl, "\phi^{G\circ F}"'] \arrow[dr, "\phi^{Id_{\mathcal{C}}}"] & \\
(G \circ F)(\mathbf{1}) \arrow[rr, "\alpha_{\mathbf{1}}"'] & & Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})
\end{tikzcd}$$

são comutativos. A estrutura monoidal de $G \circ F$ é dada por

$$\zeta^{G\circ F}_{X,Y} = G(\zeta^F_{X,Y})\zeta^G_{F(X),F(Y)} = \sigma^{-1}_{X\otimes Y}(\sigma_X \otimes \sigma_Y)\sigma_{\overline{X}\otimes\overline{Y}}\sigma^{-1}_{\overline{X}\otimes\overline{Y}},$$

ou seja,

$$\zeta_{X,Y}^{G\circ F} = \sigma_{X\otimes Y}^{-1}(\sigma_X \otimes \sigma_Y).$$

Além disso,

$$\phi^{G\circ F} = G(\phi^F)\phi^G = id_{\mathbf{1}}\sigma_{\mathbf{1}}^{-1} = \sigma_{\mathbf{1}}^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\zeta_{X,Y}^{Id_{\mathcal{C}}}(\alpha_X \otimes \alpha_Y) &= id_{X\otimes Y}(\sigma_X \otimes \sigma_Y)\\ &= \sigma_{X\otimes Y}\sigma_{X\otimes Y}^{-1}(\sigma_X \otimes \sigma_Y)\\ &= \sigma_{X\otimes Y}\zeta_{X,Y}^{G\circ F}\\ &= \alpha_{X\otimes Y}\zeta_{X,Y}^{G\circ F}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{1}}\phi^{G\circ F} &= \sigma_{\mathbf{1}}\sigma_{\mathbf{1}}^{-1}\\ &= id_{\mathbf{1}}\\ &= \phi^{Id_{\mathcal{C}}}.\end{aligned}$$

Finalmente, provemos que β é uma transformação natural monoidal. A prova de que β é um isomorfismo natural é análoga à prova feita para α. Resta-nos mostrar que β é uma transformação natural monoidal. Mostremos que, para $X, Y \in Sk(\mathcal{C})$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}(F\circ G)(X)\odot(F\circ G)(Y) \arrow[r, "\beta_X\odot\beta_Y"] \arrow[d, "\zeta_{X,Y}^{F\circ G}"'] & Id_{Sk(\mathcal{C})}(X)\odot Id_{Sk(\mathcal{C})}(Y) \arrow[d, "\zeta_{X,Y}^{Id_{Sk(\mathcal{C})}}"] \\ (F\circ G)(X\odot Y) \arrow[r, "\beta_{X\odot Y}"'] & Id_{Sk(\mathcal{C})}(X\odot Y)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathbf{1}} \arrow[dl, "\phi^{F\circ G}"'] \arrow[dr, "\phi^{Id_{Sk(\mathcal{C})}}"] & \\ (F\circ G)(\overline{\mathbf{1}}) \arrow[rr, "\beta_{\overline{\mathbf{1}}}"'] & & Id_{Sk(\mathcal{C})}(\overline{\mathbf{1}})\end{tikzcd}$$

são comutativos. A estrutura monoidal de $F\circ G$ é dada por

$$\zeta_{X,Y}^{F\circ G} = F(\zeta_{X,Y}^{G})\zeta_{G(X),G(Y)}^{F}$$

$$
\begin{aligned}
&= F(\sigma^{-1}_{X\otimes Y})\zeta^F_{X,Y} \\
&= \sigma^{-1}_{\overline{X\otimes Y}}\sigma^{-1}_{X\otimes Y}\sigma_{X\otimes Y}\zeta^F_{X,Y},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\zeta^{F\circ G}_{X,Y} = \sigma^{-1}_{\overline{X\otimes Y}}\zeta^F_{X,Y}.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\phi^{F\circ G} &= F(\phi^G)\phi^F \\
&= F(\sigma^{-1}_{\mathbf{1}})id_{\overline{\mathbf{1}}} \\
&= \sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}}\sigma^{-1}_{\mathbf{1}}\sigma_{\mathbf{1}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\phi^{F\circ G} = \sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\zeta^{Id_{Sk(\mathcal{C})}}_{X,Y}(\beta_X \odot \beta_Y) &= id_{X\odot Y}(\sigma_X \odot \sigma_Y) \\
&= id_{X\odot Y}\sigma^{-1}_{X\otimes Y}(\sigma_X \otimes \sigma_Y)\sigma_{\overline{X}\otimes\overline{Y}} \\
&= id_{X\odot Y}\zeta^F_{X,Y} \\
&= \sigma_{X\odot Y}\sigma^{-1}_{X\odot Y}\zeta^F_{X,Y} \\
&= \sigma_{X\odot Y}\sigma^{-1}_{\overline{X\otimes Y}}\zeta^F_{X,Y} \\
&= \beta_{X\odot Y}\zeta^{F\circ G}_{X,Y}
\end{aligned}
$$

e

$$\beta_{\overline{\mathbf{1}}}\phi^{F\circ G} = \sigma_{\overline{\mathbf{1}}}\sigma^{-1}_{\overline{\mathbf{1}}} = id_{\overline{\mathbf{1}}} = \phi^{Id_{Sk(\mathcal{C})}}.$$

Portanto, existem funtores monoidais (F, ζ^F, ϕ^F) e (G, ζ^G, ϕ^G) e isomorfismos naturais monoidais $\alpha : G\circ F \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\beta : F\circ G \to Id_{Sk(\mathcal{C})}$. Assim, $\mathcal{C}$ e $Sk(\mathcal{C})$ são monoidalmente equivalentes. ■

Capítulo 4

Mac Lane's Strictness Theorem

No capítulo anterior, mostramos que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal esquelética. Agora o objetivo é mostrar que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita. Esse resultado é o conhecido "*Mac Lane's Strictness Theorem*".

Este teorema garante que muitos problemas e propriedades de categorias monoidais podem ser reduzidos ao caso em que tais categorias são estritas, cujas estruturas monoidais são mais simples. Além disso, sejam $X_1, ..., X_n$ objetos em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ objetos obtidos colocando parênteses no produto tensorial de $X_1, ..., X_n$. Em [5], o *Mac Lane's Strictness Theorem* é usado para provar que quaisquer isomorfismos entre P_1 e P_2, obtidos pelo produto tensorial de identidades e dos isomorfismos de associatividade e unidade, são iguais. Esse resultado é chamado *Mac Lane Coherence Theorem.*

É sabido da álgebra ordinária que, para R um anel com unidade, existe um isomorfismo de R-módulos à esquerda $R \simeq Hom_R(R, R)$, em que $Hom_R(R, R)$ são os endomorfismos de R considerado como R-módulo à direita. A prova deste fato é análoga à demonstração que apresentamos para o *Mac Lane's Strictness Theorem.*

4.1 Construção de uma categoria monoidal estrita

Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Construímos uma categoria monoidal estrita associada a $\mathcal{C}$ que é usada no teorema principal desse capítulo. Denotamos por $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ a categoria definida pelo que segue:

(i) Objetos: são pares (F, c), em que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um funtor e $c : \otimes \circ (F \times Id_{\mathcal{C}}) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural, isto é,

$$c_{X,Y} : F(X) \otimes Y \to F(X \otimes Y),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
& (F(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "c_{X,Y} \otimes id_Z"'] \arrow[dr, "a_{F(X),Y,Z}"] & \\
F(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "c_{X \otimes Y, Z}"'] & & F(X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "c_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "F(a_{X,Y,Z})"'] & & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{F(X)}"] \arrow[dr, "c_{X,\mathbf{1}}"'] & & F(X) \\
& F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[ur, "F(r_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, ou seja,

$$c_{X,Y \otimes Z} a_{F(X),Y,Z} = F(a_{X,Y,Z}) c_{X \otimes Y, Z} (c_{X,Y} \otimes id_Z) \tag{4.1}$$
$$\text{e} \quad r_{F(X)} = F(r_X) c_{X,\mathbf{1}}. \tag{4.2}$$

(ii) Morfismos: para $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, um morfismo de (F, c^F) em (G, c^G) é uma transformação natural $\mu : F \to G$ tal que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes Y \arrow[r, "\mu_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^F_{X,Y}"'] & G(X) \otimes Y \arrow[d, "c^G_{X,Y}"] \\
F(X \otimes Y) \arrow[r, "\mu_{X \otimes Y}"'] & G(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

(iii) Morfismo identidade: para cada $(F, c) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, o morfismo identidade é a transformação natural $id_F : F \to F$.

(iv) Composição de morfismos: é a composição vertical de transformações naturais.

Afirmação 1: A composição está bem definida.

Sejam $(F, c^F), (G, c^G), (H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\mu : F \to G, \nu : G \to H$ morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Provemos que a composição vertical $\nu \circ \mu : F \to H$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, isto é, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vejamos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes Y \arrow[r, "(\nu \circ \mu)_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^F_{X,Y}"'] & H(X) \otimes Y \arrow[d, "c^H_{X,Y}"] \\
F(X \otimes Y) \arrow[r, "(\nu \circ \mu)_{X \otimes Y}"'] & H(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato,

$$\begin{aligned}
c^H_{X,Y}((\nu \circ \mu)_X \otimes id_Y) &= c^H_{X,Y}(\nu_X \mu_X \otimes id_Y) \\
&= c^H_{X,Y}(\nu_X \otimes id_Y)(\mu_X \otimes id_Y) \\
&\overset{(1)}{=} \nu_{X \otimes Y} c^G_{X,Y}(\mu_X \otimes id_Y) \\
&\overset{(2)}{=} \nu_{X \otimes Y} \mu_{X \otimes Y} c^F_{X,Y}
\end{aligned}$$

$$= \quad (\nu \circ \mu)_{X \otimes Y} c^F_{X,Y},$$

em (1) e (2) usamos que ν e μ são morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, respectivamente.

Agora, definimos $\otimes : End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \times End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \to End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ por

$$\otimes((G, c^G), (F, c^F)) = (G, c^G) \otimes (F, c^F) = (G \circ F, c^{G \circ F}) \ \text{ e } \ \otimes(\nu, \mu) = \nu \otimes \mu = \nu * \mu,$$

para quaisquer $(G, c^G) \otimes (F, c^F) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e ν, μ morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Além disso, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $c^{G \circ F}_{X,Y}$ é definido pela composição

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \otimes Y \arrow[rr, "c^{G \circ F}_{X,Y}"] \arrow[dr, "c^G_{F(X),Y}"'] & & G(F(X \otimes Y)) \\
& G(F(X) \otimes Y) \arrow[ur, "G(c^F_{X,Y})"'] &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$c^{G \circ F}_{X,Y} = G(c^F_{X,Y}) c^G_{F(X),Y}.$$

Afirmação 2: $\otimes$ definido acima é um funtor.

Mostremos que $\otimes$ está bem definido. Para isso, vejamos que $(G \circ F, c^{G \circ F}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\nu * \mu$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, para quaisquer $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e μ, ν morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Iniciamos mostrando que $c^{G \circ F}$ satisfaz as relações

$$\begin{aligned}
c^{G \circ F}_{X, Y \otimes Z} a_{(G \circ F)(X), Y, Z} &= (G \circ F)(a_{X,Y,Z}) c^{G \circ F}_{X \otimes Y, Z} (c^{G \circ F}_{X,Y} \otimes id_Z) \\
\text{e} \ \ r_{(G \circ F)(X)} &= (G \circ F)(r_X) c^{G \circ F}_{X, \mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& c^{G \circ F}_{X, Y \otimes Z} a_{(G \circ F)(X), Y, Z} \\
= \ & G(c^F_{X, Y \otimes Z}) c^G_{F(X), Y \otimes Z} a_{G(F(X)), Y, Z} \\
\overset{(1)}{=} \ & G(c^F_{X, Y \otimes Z}) G(a_{F(X), Y, Z}) c^G_{F(X) \otimes Y, Z} (c^G_{F(X), Y} \otimes id_Z) \\
= \ & G(c^F_{X, Y \otimes Z} a_{F(X), Y, Z}) c^G_{F(X) \otimes Y, Z} (c^G_{F(X), Y} \otimes id_Z) \\
\overset{(2)}{=} \ & G(F(a_{X,Y,Z})) G(c^F_{X \otimes Y, Z}) G(c^F_{X,Y} \otimes id_Z) c^G_{F(X) \otimes Y, Z} (c^G_{F(X), Y} \otimes id_Z) \\
\overset{(3)}{=} \ & G(F(a_{X,Y,Z})) G(c^F_{X \otimes Y, Z}) c^G_{F(X \otimes Y), Z} (G(c^F_{X,Y}) \otimes id_Z) (c^G_{F(X), Y} \otimes id_Z) \\
= \ & G(F(a_{X,Y,Z})) G(c^F_{X \otimes Y, Z}) c^G_{F(X \otimes Y), Z} (G(c^F_{X,Y}) c^G_{F(X), Y} \otimes id_Z)
\end{aligned}$$

$$= \quad (G\circ F)(a_{X,Y,Z})c^{G\circ F}_{X\otimes Y,Z}(c^{G\circ F}_{X,Y}\otimes id_Z)$$

e

$$\begin{aligned}
r_{(G\circ F)(X)} &= r_{G(F(X))}\\
&\overset{(4)}{=} G(r_{F(X)})c^G_{F(X),\mathbf{1}}\\
&\overset{(5)}{=} G(F(r_X))G(c^F_{X,\mathbf{1}})c^G_{F(X),\mathbf{1}}\\
&= (G\circ F)(r_X)c^{G\circ F}_{X,\mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

Nas igualdades (1) e (4) usamos que $(G, c^G)\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, em (2) e (5) usamos que $(F, c^F)\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e que G é um funtor e na igualdade (3) usamos a naturalidade de c^G. Portanto, $(G\circ F, c^{G\circ F})\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Agora, sejam $(F, c^F), (G, c^G), (J, c^J), (H, c^H)\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, $\mu : F\to G$ e $\nu : J\to H$ morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Verifiquemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
J(F(X))\otimes Y \arrow[r, "(\nu*\mu)_X\otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{J\circ F}_{X,Y}"'] & H(G(X))\otimes Y \arrow[d, "c^{H\circ G}_{X,Y}"] \\
J(F(X\otimes Y)) \arrow[r, "(\nu*\mu)_{X\otimes Y}"'] & H(G(X\otimes Y))
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato,

$$\begin{aligned}
& c^{H\circ G}_{X,Y}((\nu*\mu)_X\otimes id_Y)\\
\overset{(1)}{=}\ & H(c^G_{X,Y})c^H_{G(X),Y}(H(\mu_X)\otimes id_Y)(\nu_{F(X)}\otimes id_Y)\\
\overset{(2)}{=}\ & H(c^G_{X,Y})H(\mu_X\otimes id_Y)c^H_{F(X),Y}(\nu_{F(X)}\otimes id_Y)\\
=\ & H(c^G_{X,Y}(\mu_X\otimes id_Y))c^H_{F(X),Y}(\nu_{F(X)}\otimes id_Y)\\
\overset{(3)}{=}\ & H(\mu_{X\otimes Y})H(c^F_{X,Y})c^H_{F(X),Y}(\nu_{F(X)}\otimes id_Y)\\
\overset{(4)}{=}\ & H(\mu_{X\otimes Y})H(c^F_{X,Y})\nu_{F(X)\otimes Y}c^J_{F(X),Y}\\
\overset{(5)}{=}\ & H(\mu_{X\otimes Y})\nu_{F(X\otimes Y)}J(c^F_{X,Y})c^J_{F(X),Y}\\
=\ & (\nu*\mu)_{X\otimes Y}c^{J\circ F}_{X,Y}.
\end{aligned}$$

Na igualdade (1) usamos que $(\nu*\mu)_X = H(\mu_X)\nu_{F(X)}$, em (2) usamos a natualidade de c^H, em (3) usamos que $\mu\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e que H

é um funtor, em (4) usamos que $\nu \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e em (5) usamos a naturalidade de ν. Portanto, $\nu * \mu$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Seguimos mostrando que $\otimes$ é um funtor. A prova desse fato é similar ao que foi feito no Exemplo 3.1.11. Sejam $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Então

$$\begin{aligned}
\otimes(id_{((G,c^G),(F,c^F))}) &= \otimes(id_{(G,c^G)}, id_{(F,c^F)}) \\
&= \otimes(id_G, id_F) \\
&= id_G * id_F \\
&= id_{G\circ F} \\
&= id_{(G\circ F, c^{G\circ F})} \\
&= id_{(G,c^G)\otimes(F,c^F)} \\
&= id_{\otimes((G,c^G),(F,c^F))}.
\end{aligned}$$

Sejam μ, ν, μ', ν' morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Então

$$\begin{aligned}
\otimes((\nu, \nu') \circ (\mu, \mu')) &= \otimes(\nu \circ \mu, \nu' \circ \mu') \\
&= (\nu \circ \mu) * (\nu' \circ \mu') \\
&= (\nu * \nu') \circ (\mu * \mu') \\
&= \otimes(\nu, \nu') \circ \otimes(\mu, \mu').
\end{aligned}$$

Portanto, $\otimes$ é um funtor.

No par $(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}})$, consideramos $c^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Daí, é claro que $(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Lema 4.1.1 *Com a notação apresentada anteriormente,* $(End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}), \otimes, (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}))$ *é uma categoria monoidal estrita.*

Demonstração: Sejam $(F, c^F), (G, c^G), (H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Provemos que

$$((H, c^H) \otimes (G, c^G)) \otimes (F, c^F) = (H, c^H) \otimes ((G, c^G) \otimes (F, c^F))$$

$$\text{e} \quad (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \otimes (F, c^F) = (F, c^F) = (F, c^F) \otimes (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}).$$

Segundo a definição de $\otimes$, devemos mostrar que

$$((H \circ G) \circ F, c^{(H\circ G)\circ F}) = (H \circ (G \circ F), c^{H\circ(G\circ F)})$$

$$\text{e} \quad (Id_{\mathcal{C}} \circ F, c^{Id_{\mathcal{C}}\circ F}) = (F, c^F) = (F \circ Id_{\mathcal{C}}, c^{F\circ Id_{\mathcal{C}}}).$$

Já temos que $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ e $Id_{\mathcal{C}} \circ F = F = F \circ Id_{\mathcal{C}}$. Resta-nos mostrar $c^{(H\circ G)\circ F} = c^{H\circ(G\circ F)}$ e $c^{Id_{\mathcal{C}}\circ F} = c^F = c^{F\circ Id_{\mathcal{C}}}$. Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
c^{(H\circ G)\circ F}_{X,Y} &= (H\circ G)(c^F_{X,Y})c^{H\circ G}_{F(X),Y} \\
&= H(G(c^F_{X,Y}))H(c^G_{F(X),Y})c^H_{G(F(X)),Y} \\
&= H(G(c^F_{X,Y})c^G_{F(X),Y})c^H_{(G\circ F)(X),Y} \\
&= H(c^{G\circ F}_{X,Y})c^H_{(G\circ F)(X),Y} \\
&= c^{H\circ(G\circ F)}_{X,Y}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c^{Id_{\mathcal{C}}\circ F}_{X,Y} &= Id_{\mathcal{C}}(c^F_{X,Y})c^{Id_{\mathcal{C}}}_{F(X),Y} \\
&= c^F_{X,Y} id_{F(X)\otimes Y} \\
&= c^F_{X,Y} \\
&= id_{F(X\otimes Y)}c^F_{X,Y} \\
&= F(id_{X\otimes Y})c^F_{X,Y} \\
&= F(c^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y})c^F_{Id_{\mathcal{C}}(X),Y} \\
&= c^{F\circ Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y}.
\end{aligned}$$

■

4.2 Teorema de Mac Lane

Tendo definido uma categoria monoidal estrita $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, podemos apresentar o teorema principal do trabalho.

Teorema 4.2.1 ([5], Theorem 2.8.5, Mac Lane's Strictness Theorem). *Toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.*

Demonstração: Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ a categoria monoidal estrita definida no Lema 4.1.1. Definimos $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ por

$$\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \ \text{ e } \ \mathcal{F}(g) : \mathcal{F}_W \to \mathcal{F}_V,$$

para quaisquer $W \in \mathcal{C}$ e $g : W \to V$ morfismo em $\mathcal{C}$, em que

$$\mathcal{F}_W = W \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \ \text{ isto é, } \ \mathcal{F}_W(X) = W \otimes X \ \text{ e } \ \mathcal{F}_W(g) = id_W \otimes g,$$

$$c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} = a_{W,X,Y} \;\text{ e }\; \mathcal{F}(g)_X = g \otimes id_X,$$

para quaisquer $X, Y, V \in \mathcal{C}$. Observamos que

$$c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} : \mathcal{F}_W(X) \otimes Y \to \mathcal{F}_W(X \otimes Y), \;\text{ isto é },\; c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} : (W \otimes X) \otimes Y \to W \otimes (X \otimes Y)$$

e isso explica o porquê de $c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} = a_{W,X,Y}$ e também

$$\mathcal{F}(g)_X : \mathcal{F}_W(X) \to \mathcal{F}_V(X), \;\text{ isto é }\; \mathcal{F}(g)_X : W \otimes X \overset{g \otimes id_X}{\longrightarrow} V \otimes X.$$

Afirmação 1: $\mathcal{F}$ é um funtor.

Primeiramente mostremos que, para $W \in \mathcal{C}$ e g um morfismo em $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{F}(g)$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Devemos mostrar que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{F}_W(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} \otimes id_Z"'] \arrow[dr, "a_{\mathcal{F}_W(X),Y,Z}"] & \\
\mathcal{F}_W(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W}_{X \otimes Y, Z}"'] & & \mathcal{F}_W(X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W}_{X, Y \otimes Z}"] \\
\mathcal{F}_W((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "\mathcal{F}_W(a_{X,Y,Z})"'] & & \mathcal{F}_W(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_W(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{\mathcal{F}_W(X)}"] \arrow[dr, "c^{\mathcal{F}_W}_{X,\mathbf{1}}"'] & & \mathcal{F}_W(X) \\
 & \mathcal{F}_W(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[ur, "\mathcal{F}_W(r_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos. Usando a definição de $\mathcal{F}$, os diagramas tornam-se

$$\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W,X,Y} \otimes id_Z"'] \arrow[dr, "a_{W \otimes X,Y,Z}"] & \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,X \otimes Y,Z}"'] & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "a_{W,X,Y \otimes Z}"] \\
W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "id_W \otimes a_{X,Y,Z}"'] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(W \otimes X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{W \otimes X}"] \arrow[dr, "a_{W,X,\mathbf{1}}"'] & & W \otimes X \\
& W \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \arrow[ur, "id_W \otimes r_X"'] &
\end{tikzcd}$$

e são comutativos, pois são os respectivos axioma do pentágono para os objetos W, X, Y, Z e o segundo diagrama da Proposição 3.1.4. Portanto, $(\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Agora, seja $g : W \to V$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Verifiquemos que $\mathcal{F}(g)$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, ou seja, a comutatividade do diagrama, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_W(X) \otimes Y \arrow[r, "\mathcal{F}(g)_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y}"'] & \mathcal{F}_V(X) \otimes Y \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_V}_{X,Y}"] \\
\mathcal{F}_W(X \otimes Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)_{X \otimes Y}"'] & \mathcal{F}_V(X \otimes Y).
\end{tikzcd}$$

Usando a definição de $\mathcal{F}$, o diagrama torna-se

$$\begin{tikzcd}
(W \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "(g \otimes id_X) \otimes id_Y"] \arrow[d, "a_{W,X,Y}"'] & (V \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "a_{V,X,Y}"] \\
W \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "g \otimes id_{X \otimes Y}"'] & V \otimes (X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, pois é a naturalidade de a para $((g, id_X), id_Y)$. Lembremos que $id_{X \otimes Y} = id_X \otimes id_Y$. Portanto, $\mathcal{F}(g)$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Concluímos que $\mathcal{F}$ está bem definido.

Lembremos que a transformação natural identidade $id_F : F \to F$ está definida por $(id_F)_X = id_{F(X)}$, veja Exemplo 1.4.3. Esse fato é muito usado e não faremos nenhuma menção.

Mostremos que $\mathcal{F}$ é um funtor. Seja $W \in \mathcal{C}$. Então $\mathcal{F}(id_W) : \mathcal{F}_W \to \mathcal{F}_W$ e, para cada $X \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(id_W)_X &= id_W \otimes id_X \\
&= id_{W \otimes X} \\
&= id_{\mathcal{F}_W(X)} \\
&= (id_{\mathcal{F}_W})_X \\
&= (id_{\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}})_X \\
&= (id_{\mathcal{F}(W)})_X
\end{aligned}$$

e isso nos diz que $\mathcal{F}(id_W) = id_{\mathcal{F}(W)}$. Além disso, para quaisquer morfismos $g : W \to V$ e $h : V \to U$ em $\mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(hg)_X &= hg \otimes id_X \\
&= (h \otimes id_X)(g \otimes id_X) \\
&= \mathcal{F}(h)_X \mathcal{F}(g)_X \\
&= (\mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g))_X
\end{aligned}$$

e portanto $\mathcal{F}(hg) = \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g)$ e isso termina a prova da afirmação.

Gostaríamos de definir uma estrutura monoidal para $\mathcal{F}$. Da estrutura monoidal de $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ temos, para $W, V \in \mathcal{C}$, que

$$\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V) \;=\; (\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \otimes (\mathcal{F}_V, c^{\mathcal{F}_V})$$

$$= \quad (\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V, c^{\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V}),$$

e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
c^{\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V}_{X,Y} &= \mathcal{F}_W(c^{\mathcal{F}_V}_{X,Y}) c^{\mathcal{F}_W}_{\mathcal{F}_V(X),Y} \\
&= \mathcal{F}_W(a_{V,X,Y}) c^{\mathcal{F}_W}_{V \otimes X,Y} \\
&= (id_W \otimes a_{V,X,Y}) a_{W,V\otimes X,Y}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathcal{F}(W \otimes V) = (\mathcal{F}_{W\otimes V}, c^{\mathcal{F}_{W\otimes V}})$$

e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $c^{\mathcal{F}_{W\otimes V}}_{X,Y} = a_{W\otimes V,X,Y}$.

Precisamos estabelecer uma terna $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$. Primeiramente vemos que, para $W, V \in \mathcal{C}$,

$$\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} : \mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(W \otimes V), \quad \text{ou seja,} \quad \zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} : \mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_{W\otimes V}.$$

Definimos, para todo $X \in \mathcal{C}$,

$$(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X : (\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) = W \otimes (V \otimes X) \to \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) = (W \otimes V) \otimes X$$

por $(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X = a^{-1}_{W,V,X}$.

Afirmação 2: $\zeta^{\mathcal{F}} : \otimes \circ (\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \to \mathcal{F} \circ \otimes$ é um isomorfismo natural.

Precisamos provar que $\zeta^{\mathcal{F}}$ é uma transformação natural e que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, para quaisquer $W, V \in \mathcal{C}$. Sejam $g : W \to W'$ e $h : V \to V'$ morfismos em $\mathcal{C}$. Devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(g)\otimes\mathcal{F}(h)=\mathcal{F}(g)*\mathcal{F}(h)"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V} \arrow[d, "\mathcal{F}(g\otimes h)"] \\
\mathcal{F}_{W'} \circ \mathcal{F}_{V'} \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W',V'}"'] & \mathcal{F}_{W'\otimes V'}
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Recordamos que $\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(h) : \mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_{W'} \circ \mathcal{F}_{V'}$ e assim, para $X \in \mathcal{C}$, temos

$$(\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(h))_X \quad = \quad \mathcal{F}_{W'}(\mathcal{F}(h)_X)\mathcal{F}(g)_{\mathcal{F}_V(X)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{F}_{W'}(h \otimes id_X)\mathcal{F}(g)_{V\otimes X}\\
&= (id_{W'} \otimes (h \otimes id_X))(g \otimes id_{V\otimes X})\\
&= g \otimes (h \otimes id_X).
\end{aligned}
$$

Considerando o objeto $X \in \mathcal{C}$ no diagrama anterior, temos

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,X}"] \arrow[d, "g\otimes(h\otimes id_X)"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) \arrow[d, "(g\otimes h)\otimes id_X"] \\
(\mathcal{F}_{W'} \circ \mathcal{F}_{V'})(X) \arrow[r, "a^{-1}_{W',V',X}"'] & \mathcal{F}_{W'\otimes V'}(X)
\end{tikzcd}
$$

e o mesmo é comutativo devido à naturalidade de a^{-1} para $(g,(h,id_X))$. Logo, $\zeta^{\mathcal{F}}$ é uma transformação natural.

O próximo passo é mostrarmos que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Vejamos que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} : \mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_{W\otimes V}$ é uma transformação natural, ou seja, o diagrama abaixo comuta, para $f : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{C}$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X"] \arrow[d, "(\mathcal{F}_W\circ\mathcal{F}_V)(f)"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) \arrow[d, "\mathcal{F}_{W\otimes V}(f)"] \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(Y) \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_Y"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(Y).
\end{tikzcd}
$$

Usando as definições de $\mathcal{F}$ e de $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$, o diagrama torna-se

$$
\begin{tikzcd}
W \otimes (V \otimes X) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,X}"] \arrow[d, "id_W\otimes(id_V\otimes f)"'] & (W \otimes V) \otimes X \arrow[d, "id_{W\otimes V}\otimes f"] \\
W \otimes (V \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,Y}"'] & (W \otimes V) \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

que é comutativo devido à naturalidade de a^{-1} para $(id_W, (id_V, f))$. Portanto, $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é uma transformação natural e como $(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X = a^{-1}_{W,V,X}$ é um isomorfismo, para todo $X \in \mathcal{C}$, segue que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo natural.

Para concluirmos que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \otimes Y \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V}_{X,Y}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) \otimes Y \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_{W\otimes V}}_{X,Y}"] \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X \otimes Y) \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{X\otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Usando a definição de $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ e as igualdades para $c^{\mathcal{F}_{W\otimes V}}_{X,Y}$ e $c^{\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V}_{X,Y}$, o diagrama torna-se

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \otimes Y \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,X} \otimes id_Y"] \arrow[d, "(id_W \otimes a_{V,X,Y})a_{W,V\otimes X,Y}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) \otimes Y \arrow[d, "a_{W\otimes V,X,Y}"] \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,X\otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

e é comutativo devido ao axioma do pentágono para os objetos W, V, X, Y. Portanto, $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e finalizamos a prova da afirmação.

Agora, definimos

$$\phi^{\mathcal{F}} : Id_{\mathcal{C}} \to \mathcal{F}_{\mathbf{1}} \quad \text{por} \quad \phi^{\mathcal{F}}_X = l^{-1}_X : X \to \mathbf{1} \otimes X,$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Afirmação 3: $\phi^{\mathcal{F}}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

É claro que $\phi^{\mathcal{F}}$ é uma transformação natural e, para todo $X \in \mathcal{C}$, $\phi^{\mathcal{F}}_X$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}$. Para mostrarmos que $\phi^{\mathcal{F}}$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, é necessário que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}}(X) \otimes Y \arrow[r, "\phi^{\mathcal{F}}_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(X) \otimes Y \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}_{X,Y}"] \\
Id_{\mathcal{C}}(X \otimes Y) \arrow[r, "\phi^{\mathcal{F}}_{X \otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(X \otimes Y),
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. O diagrama acima torna-se

$$\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}}(X) \otimes Y \arrow[r, "l^{-1}_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "id_{X \otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(X) \otimes Y \arrow[d, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \\
Id_{\mathcal{C}}(X \otimes Y) \arrow[r, "l^{-1}_{X \otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

e é comutativo devido ao primeiro diagrama da Proposição 3.1.4. Assim, $\phi^{\mathcal{F}}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Afirmação 4: $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$ é um funtor monoidal.

Segundo a Definição 3.1.12, devemos mostrar que, para $W, V, U \in \mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V)) \otimes \mathcal{F}(U) \arrow[dl, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} \otimes id_{\mathcal{F}(U)}"'] \arrow[dr, "a_{\mathcal{F}(W),\mathcal{F}(V),\mathcal{F}(U)}"] & \\
\mathcal{F}(W \otimes V) \otimes \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W \otimes V, U}"'] & & \mathcal{F}(W) \otimes (\mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{F}(U)) \arrow[d, "id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}((W \otimes V) \otimes U) \arrow[dr, "\mathcal{F}(a_{W,V,U})"'] & & \mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V \otimes U) \arrow[dl, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V \otimes U}"] \\
 & \mathcal{F}(W \otimes (V \otimes U)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \otimes \mathcal{F}(W) \arrow[r, "l_{\mathcal{F}(W)}"] \arrow[d, "\phi^{\mathcal{F}} \otimes id_{\mathcal{F}(W)}"'] & \mathcal{F}(W) \\
\mathcal{F}(\mathbf{1}) \otimes \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{\mathbf{1},W}"'] & \mathcal{F}(\mathbf{1} \otimes W) \arrow[u, "\mathcal{F}(l_W)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(W) \otimes (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \arrow[r, "r_{\mathcal{F}(W)}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \phi^{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F}(W) \\
\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(\mathbf{1}) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,\mathbf{1}}"'] & \mathcal{F}(W \otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "\mathcal{F}(r_W)"']
\end{tikzcd}$$

comutam. Antes de partirmos para a verificação da comutatividade dos diagramas, determinamos as seguintes composições horizontais. Para cada $X \in \mathcal{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
(id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U}) &= (id_{\mathcal{F}_W} \otimes \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U}) = (id_{\mathcal{F}_W} * \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U})_X \\
&= \mathcal{F}_W((\zeta^{\mathcal{F}}_{V,U})_X)(id_{\mathcal{F}_W})_{(\mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_U)(X)} \\
&= \mathcal{F}_W(a^{-1}_{V,U,X})(id_{\mathcal{F}_W})_{V \otimes (U \otimes X)} \\
&= (id_W \otimes a^{-1}_{V,U,X}) id_{\mathcal{F}_W(V \otimes (U \otimes X))} \\
&= id_W \otimes a^{-1}_{V,U,X},
\end{aligned}$$

para facilitar, estamos aplicando a definição $(\nu * \mu)_X = H(\mu_X)\nu_{F(X)}$ para $F = \mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_U$, $G = \mathcal{F}_{V \otimes U}$ e $J = H = \mathcal{F}_W$.

$$(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} \otimes id_{\mathcal{F}(U)})_X = (\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} \otimes id_{\mathcal{F}_U})_X = (\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} * id_{\mathcal{F}_U})_X$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{F}_{W\otimes V}((id_{\mathcal{F}_U})_X)(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{\mathcal{F}_U(X)}\\
&= \mathcal{F}_{W\otimes V}(id_{\mathcal{F}_U(X)})(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{\mathcal{F}_U(X)}\\
&= \mathcal{F}_{W\otimes V}(id_{U\otimes X})(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{U\otimes X}\\
&= id_{\mathcal{F}_{W\otimes V}(U\otimes X)}a^{-1}_{W,V,U\otimes X}\\
&= a^{-1}_{W,V,U\otimes X},
\end{aligned}
$$

aqui $F = G = \mathcal{F}_U$, $J = \mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V$ e $H = \mathcal{F}_{W\otimes V}$ na definição de $(\nu * \mu)_X$.

$$
\begin{aligned}
(\phi^{\mathcal{F}} \otimes id_{\mathcal{F}(W)})_X &= (\phi^{\mathcal{F}} \otimes id_{\mathcal{F}_W})_X = (\phi^{\mathcal{F}} * id_{\mathcal{F}_W})_X\\
&= \mathcal{F}_{\mathbf{1}}((id_{\mathcal{F}_W})_X)\phi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}_W(X)}\\
&= \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(id_{\mathcal{F}_W(X)})\phi^{\mathcal{F}}_{W\otimes X}\\
&= id_{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}(\mathcal{F}_W(X))}\phi^{\mathcal{F}}_{W\otimes X}\\
&= id_{(\mathcal{F}_{\mathbf{1}}\circ\mathcal{F}_W)(X)}\phi^{\mathcal{F}}_{W\otimes X}\\
&= id_{\mathbf{1}\otimes(W\otimes X)}l^{-1}_{W\otimes X}\\
&= l^{-1}_{W\otimes X},
\end{aligned}
$$

estamos considerando $F = G = \mathcal{F}_W$, $J = Id_{\mathcal{C}}$ e $H = \mathcal{F}_{\mathbf{1}}$ na definição de $(\nu * \mu)_X$.

$$
\begin{aligned}
(id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \phi^{\mathcal{F}})_X &= (id_{\mathcal{F}_W} \otimes \phi^{\mathcal{F}})_X = (id_{\mathcal{F}_W} * \phi^{\mathcal{F}})_X\\
&= \mathcal{F}_W(\phi^{\mathcal{F}}_X)(id_{\mathcal{F}_W})_{Id_{\mathcal{C}}(X)}\\
&= \mathcal{F}_W(l^{-1}_X)(id_{\mathcal{F}_W})_X\\
&= (id_W \otimes l^{-1}_X)id_{\mathcal{F}_W(X)}\\
&= id_W \otimes l^{-1}_X,
\end{aligned}
$$

na definição de $\nu * \mu$, $F = Id_{\mathcal{C}}$, $G = \mathcal{F}_{\mathbf{1}}$ e $J = H = \mathcal{F}_W$.

Considerando o objeto $X \in \mathcal{C}$ nos diagramas acima, o fato de que $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ é estrita e as definições de $\mathcal{F}$, do produto tensorial em

$End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, de $\zeta^{\mathcal{F}}$ e de $\phi^{\mathcal{F}}$, obtemos os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V) \circ \mathcal{F}_U)(X) \arrow[dl, "a^{-1}_{W,V,U\otimes X}"'] \arrow[dr, "id_{(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_U)(X)}"] & \\
(\mathcal{F}_{W\otimes V} \circ \mathcal{F}_U)(X) \arrow[d, "a^{-1}_{W\otimes V,U,X}"'] & & (\mathcal{F}_W \circ (\mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_U))(X) \arrow[d, "id_W \otimes a^{-1}_{V,U,X}"] \\
\mathcal{F}_{(W\otimes V)\otimes U}(X) \arrow[dr, "a_{W,V,U} \otimes id_X"'] & & (\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_{V\otimes U})(X) \arrow[dl, "a^{-1}_{W,V\otimes U,X}"] \\
 & \mathcal{F}_{W\otimes(V\otimes U)(X)} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(Id_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}_W)(X) \arrow[r, "id_{\mathcal{F}_W(X)}"] \arrow[d, "l^{-1}_{W\otimes X}"'] & \mathcal{F}_W(X) \\
(\mathcal{F}_{\mathbf{1}} \circ \mathcal{F}_W)(X) \arrow[r, "a^{-1}_{\mathbf{1},W,X}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}\otimes W}(X) \arrow[u, "l_W \otimes id_X"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ Id_{\mathcal{C}})(X) \arrow[r, "id_{W\otimes X}"] \arrow[d, "id_W \otimes l^{-1}_X"'] & \mathcal{F}_W(X) \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_{\mathbf{1}})(X) \arrow[r, "a^{-1}_{W,\mathbf{1},X}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes\mathbf{1}}(X) \arrow[u, "r_W \otimes id_X"']
\end{tikzcd}$$

e os mesmos são comutativos. A comutatividade do hexágono segue do axioma do pentágono para os objetos W, V, U, X e a dos quadrados segue, respectivamnte, da Proposição 3.1.4 e do axioma do triângulo para os objetos $W, \mathbf{1}, X$. Portanto, $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$ é um funtor monoidal.

Agora, definimos

$$\mathcal{G} : End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}, \;\; \mathcal{G}(F, c) = F(\mathbf{1}) \;\; \text{e} \;\; \mathcal{G}(\mu) = \mu_{\mathbf{1}},$$

para quaisquer $(F, c) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e μ um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Afirmação 5: $\mathcal{G}$ é um funtor.

De fato, sejam $(F,c) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e μ, ν morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(id_{(F,c)}) &= \mathcal{G}(id_F) \\ &= (id_F)_{\mathbf{1}} \\ &= id_{F(\mathbf{1})} \\ &= id_{\mathcal{G}(F,c)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\nu \circ \mu) &= (\nu \circ \mu)_{\mathbf{1}} \\ &= \nu_{\mathbf{1}}\mu_{\mathbf{1}} \\ &= \mathcal{G}(\nu)\mathcal{G}(\mu). \end{aligned}$$

Agora, consideramos uma estrutura monoidal para o funtor $\mathcal{G}$. Para facilitar a notação, algumas vezes escrevemos (F, c^F) somente como F. Definimos

$$\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} : \mathcal{G}(G)\otimes\mathcal{G}(F) \to \mathcal{G}(G\otimes F), \quad \text{ou seja, } \zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} : G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1}) \to G(F(\mathbf{1})),$$

por

$$\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} = G(l_{F(\mathbf{1})})c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})},$$

para quaisquer $F = (F, c^F), G = (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Afirmação 6: $\zeta^{\mathcal{G}} : \otimes \circ (\mathcal{G} \times \mathcal{G}) \to \mathcal{G} \circ \otimes$ é um isomorfismo natural.

Já temos que, para $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ é um isomorfismo, pois é composição de isomorfismos. Agora, sejam $(F, c^F), (G, c^G)$, $(F', c^{F'}), (G', c^{G'}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\mu : (F, c^F) \to (F', c^{F'})$, $\nu : (G, c^G) \to (G', c^{G'})$ morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, mostremos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(G, c^G) \otimes \mathcal{G}(F, c^F) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\nu)\otimes\mathcal{G}(\mu)=\mathcal{G}(\nu*\mu)"'] & \mathcal{G}((G, c^G) \otimes (F, c^F)) \arrow[d, "\mathcal{G}(\nu\otimes\mu)=\mathcal{G}(\nu*\mu)"] \\
\mathcal{G}(G', c^{G'}) \otimes \mathcal{G}(F', c^{F'}) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{G}}_{G',F'}"'] & \mathcal{G}((G', c^{G'}) \otimes (F', c^{F'}))
\end{tikzcd}$$

é comutativo e isto no diz que $\zeta^{\mathcal{G}}$ é uma transformação natural. De fato,

$$\mathcal{G}(\nu * \mu)\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} \quad = \quad (\nu * \mu)_{\mathbf{1}} G(l_{F(\mathbf{1})})c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}$$

$$\begin{aligned}
&= G'(\mu_{\mathbf{1}})\nu_{F(\mathbf{1})}G(l_{F(\mathbf{1})})c^{G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}\\
&\overset{(1)}{=} G'(\mu_{\mathbf{1}})G'(l_{F(\mathbf{1})})\nu_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1})}c^{G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}\\
&= G'(\mu_{\mathbf{1}}l_{F(\mathbf{1})})\nu_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1})}c^{G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}\\
&\overset{(2)}{=} G'(l_{F'(\mathbf{1})}(id_{\mathbf{1}}\otimes\mu_{\mathbf{1}}))\nu_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1})}c^{G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}\\
&\overset{(3)}{=} G'(l_{F'(\mathbf{1})})G'(id_{\mathbf{1}}\otimes\mu_{\mathbf{1}})c^{G'}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}(\nu_{\mathbf{1}}\otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&\overset{(4)}{=} G'(l_{F'(\mathbf{1})})c^{G'}_{\mathbf{1},F'(\mathbf{1})}(G'(id_{\mathbf{1}})\otimes\mu_{\mathbf{1}})(\nu_{\mathbf{1}}\otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&= G'(l_{F'(\mathbf{1})})c^{G'}_{\mathbf{1},F'(\mathbf{1})}(id_{G'(id_{\mathbf{1}})}\nu_{\mathbf{1}}\otimes\mu_{\mathbf{1}})\\
&= \zeta^{\mathcal{G}}_{G',F'}(\nu_{\mathbf{1}}\otimes\mu_{\mathbf{1}})\\
&= \zeta^{\mathcal{G}}_{G',F'}(\mathcal{G}(\nu)\otimes\mathcal{G}(\mu))\\
&= \zeta^{\mathcal{G}}_{G',F'}(\mathcal{G}(\nu)*\mathcal{G}(\mu)).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a naturalidade de ν com o morfismo $l_{F(\mathbf{1})}$, em (2) usamos a naturalidade de l, em (3) usamos que ν é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e em (4) a naturalidade de $c^{G'}$. Logo, $\zeta^{\mathcal{G}}$ é um isomorfismo natural e isso termina a prova da afirmação.

Também definimos

$$\phi^{\mathcal{G}}:\mathbf{1}\to\mathcal{G}(Id_{\mathcal{C}},c^{Id_{\mathcal{C}}})=Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})=\mathbf{1}\ \text{ por } \phi^{\mathcal{G}}=id_{\mathbf{1}}.$$

Afirmação 7: $(\mathcal{G},\zeta^{\mathcal{G}},\phi^{\mathcal{G}})$ é um funtor monoidal.

Devemos mostrar que, para quaisquer $(F,c^F),(G,c^G),(H,c^H)\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, as igualdades abaixo são verdadeiras

$$\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G\circ F}(id_{\mathcal{G}(H)}\otimes\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})a_{\mathcal{G}(H),\mathcal{G}(G),\mathcal{G}(F)}=\mathcal{G}(a_{H,G,F})\zeta^{\mathcal{G}}_{H\circ G,F}(\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G}\otimes id_{\mathcal{G}(F)}),$$

$$\begin{aligned}
l_{\mathcal{G}(F)} &= \mathcal{G}(l_F)\zeta^{\mathcal{G}}_{Id_{\mathcal{C}},F}(\phi^{\mathcal{G}}\otimes id_{\mathcal{G}(F)}),\\
\text{e }\ r_{\mathcal{G}(F)} &= \mathcal{G}(r_F)\zeta^{\mathcal{G}}_{F,Id_{\mathcal{C}}}(id_{\mathcal{G}(F)}\otimes\phi^{\mathcal{G}}).
\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G\circ F}(id_{\mathcal{G}(H)}\otimes\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})a_{\mathcal{G}(H),\mathcal{G}(G),\mathcal{G}(F)}\\
&= H(l_{(G\circ F)(\mathbf{1})})c^{H}_{\mathbf{1},(G\circ F)(\mathbf{1})}(H(id_{\mathbf{1}})\otimes\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})a_{H(\mathbf{1}),G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}\\
&\overset{(1)}{=} H(l_{G(F(\mathbf{1}))})H(id_{\mathbf{1}}\otimes\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})c^{H}_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})}a_{H(\mathbf{1}),G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}\\
&= H(l_{G(F(\mathbf{1}))}(id_{\mathbf{1}}\otimes\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}))c^{H}_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})}a_{H(\mathbf{1}),G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2)}{=} && H(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} l_{G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})}) c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})} a_{H(\mathbf{1}),G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}\\
&\overset{(3)}{=} && H(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}) H(l_{G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})}) H(a_{\mathbf{1},G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}) c^H_{\mathbf{1}\otimes G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})} (c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})} \otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&= && H(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}) H(l_{G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})} a_{\mathbf{1},G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}) c^H_{\mathbf{1}\otimes G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})} (c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})} \otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&\overset{(4)}{=} && H(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}) H(l_{G(\mathbf{1})} \otimes id_{F(\mathbf{1})}) c^H_{\mathbf{1}\otimes G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})} (c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})} \otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&\overset{(5)}{=} && H(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}) c^H_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})} (H(l_{G(\mathbf{1})}) \otimes id_{F(\mathbf{1})}) (c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})} \otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&\overset{(6)}{=} && H(G(l_{F(\mathbf{1})})) H(c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}) c^H_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})} (H(l_{G(\mathbf{1})}) c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})} \otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&= && (H\circ G)(l_{F(\mathbf{1})}) c^{H\circ G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})} (\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes id_{\mathcal{G}(F)})\\
&= && \zeta^{\mathcal{G}}_{H\circ G,F} (\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes id_{\mathcal{G}(F)})\\
&= && (id_{(H\circ G)\circ F})_{\mathbf{1}} \zeta^{\mathcal{G}}_{H\circ G,F} (\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes id_{\mathcal{G}(F)})\\
&= && \mathcal{G}(id_{(H\circ G)\circ F}) \zeta^{\mathcal{G}}_{H\circ G,F} (\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes id_{\mathcal{G}(F)})\\
&\overset{(7)}{=} && \mathcal{G}(a_{H,G,F}) \zeta^{\mathcal{G}}_{H\circ G,F} (\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes id_{\mathcal{G}(F)}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{\mathcal{G}(F)} &= l_{F(\mathbf{1})}\\
&= Id_{\mathcal{C}}(l_{F(\mathbf{1})}) id_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1})}\\
&= Id_{\mathcal{C}}(l_{F(\mathbf{1})}) c^{Id_{\mathcal{C}}}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}\\
&= \zeta^{\mathcal{G}}_{Id_{\mathcal{C}},F}\\
&= \mathcal{G}(id_F) \zeta^{\mathcal{G}}_{Id_{\mathcal{C}},F} (id_{\mathbf{1}} \otimes id_{F(\mathbf{1})})\\
&\overset{(8)}{=} \mathcal{G}(l_F) \zeta^{\mathcal{G}}_{Id_{\mathcal{C}},F} (\phi^{\mathcal{G}} \otimes id_{\mathcal{G}(F)})
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
r_{\mathcal{G}(F)} &= r_{F(\mathbf{1})}\\
&\overset{(9)}{=} F(r_{\mathbf{1}}) c^F_{\mathbf{1},\mathbf{1}}\\
&\overset{(10)}{=} F(l_{\mathbf{1}}) c^F_{\mathbf{1},\mathbf{1}}\\
&= F(l_{Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})}) c^F_{\mathbf{1},Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})}\\
&= \zeta^{\mathcal{G}}_{F,Id_{\mathcal{C}}}\\
&= \mathcal{G}(id_F) \zeta^{\mathcal{G}}_{F,Id_{\mathcal{C}}} (id_{F(\mathbf{1})} \otimes id_{\mathbf{1}})\\
&\overset{(11)}{=} \mathcal{G}(r_F) \zeta^{\mathcal{G}}_{F,Id_{\mathcal{C}}} (id_{\mathcal{G}(F)} \otimes \phi^{\mathcal{G}}).
\end{aligned}
$$

Em (1) e (5) usamos a naturalidade de c^H, em (2) usamos a naturalidade de l com o morfismo $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ e que H é um funtor, em (3) usamos que $(H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e portanto satisfaz (4.1), em (4) usamos o primeiro diagrama da Proposição 3.1.4, em (6) usamos a definição de $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ e que H é um funtor, em (7), (8) e (11) usamos que $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ é estrita, em (9) usamos que $(F, c^F) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e portanto satisfaz (4.2) e em (10) usamos a Proposição 3.1.5 (iii).

Finalmente, gostaríamos de provar que $\mathcal{C}$ e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ são monoidalmente equivalentes. Para isso, consideremos $\alpha : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\beta : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$ e definimos

$$\alpha_W : W \otimes \mathbf{1} \to W \quad \text{por} \quad \alpha_W = r_W$$

$$\text{e} \quad \beta_{(F,c^F)} : \mathcal{F}_{F(\mathbf{1})} \to F \quad \text{por} \quad (\beta_{(F,c^F)})_X = F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X},$$

para quaisquer $W, X \in \mathcal{C}$ e $(F, c^F) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Notamos que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(W) = \mathcal{G}(\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) = \mathcal{F}_W(\mathbf{1}) = W \otimes \mathbf{1}$ e daí $\alpha_W : W \otimes \mathbf{1} \to W$, o que justifica a definição de $\alpha_W = r_W$.

Também, $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(F, c^F) = \mathcal{F}(F(\mathbf{1})) = (\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}, c^{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}})$ e $(\beta_{(F,c^F)})_X : \mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X) = F(\mathbf{1}) \otimes X \to F(X)$.

Já sabemos que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $Id_{\mathcal{C}}$ e $Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$ são funtores monoidais, o que prova parte da equivalência que queremos estabelecer entre $\mathcal{C}$ e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Afirmação 8: α é um isomorfismo natural monoidal, isto é, uma transformação natural monoidal que é um isomorfismo natural.

É claro que α é um isomorfismo natural. Queremos mostrar que α é uma transformação natural monoidal, ou seja, para quaisquer $W, V \in \mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(W) \otimes (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(V) \arrow[r, "\alpha_W \otimes \alpha_V"] \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}_{W,V}"'] & Id_{\mathcal{C}}(W) \otimes Id_{\mathcal{C}}(V) \arrow[d, "id_{W \otimes V}"] \\
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(W \otimes V) \arrow[r, "\alpha_{W \otimes V}"'] & Id_{\mathcal{C}}(W \otimes V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[dl, "\phi^{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}"'] \arrow[dr, "id_{\mathbf{1}}"] & \\
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(\mathbf{1}) \arrow[rr, "\alpha_{\mathbf{1}}"'] & & Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})
\end{tikzcd}$$

comutam. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha_W \otimes \alpha_V &= r_W \otimes r_V \\
&= (id_W \otimes r_V)(r_W \otimes id_{V\otimes \mathbf{1}}) \\
&\overset{(1)}{=} (id_W \otimes r_V)(id_W \otimes l_{V\otimes \mathbf{1}})a_{W,\mathbf{1},V\otimes \mathbf{1}} \\
&= (id_W \otimes r_V)(id_W \otimes l_{\mathcal{F}_V(\mathbf{1})})a_{W,\mathbf{1},\mathcal{F}_V(\mathbf{1})} \\
&= (id_W \otimes r_V)\mathcal{F}_W(l_{\mathcal{F}_V(\mathbf{1})})c^{\mathcal{F}_W}_{\mathbf{1},\mathcal{F}_V(\mathbf{1})} \\
&= (id_W \otimes r_V)\zeta^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}_W,\mathcal{F}_V} \\
&\overset{(2)}{=} r_{W\otimes V}a^{-1}_{W,V,\mathbf{1}}\zeta^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}_W,\mathcal{F}_V} \\
&= r_{W\otimes V}(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{\mathbf{1}}\zeta^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}_W,\mathcal{F}_V} \\
&= r_{W\otimes V}\mathcal{G}(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})\zeta^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}_W,\mathcal{F}_V} \\
&\overset{(3)}{=} \alpha_{W\otimes V}\zeta^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}_{W,V}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathbf{1}}\phi^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}} &\overset{(4)}{=} r_{\mathbf{1}}\mathcal{G}(\phi^{\mathcal{F}})\phi^{\mathcal{G}} \\
&\overset{(5)}{=} l_{\mathbf{1}}(\phi^{\mathcal{F}})_{\mathbf{1}}id_{\mathbf{1}} \\
&= l_{\mathbf{1}}l^{-1}_{\mathbf{1}} \\
&= id_{\mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

Em (1) usamos o axioma do triângulo, em (2) usamos a Proposição 3.1.4, em (3) e (4) usamos a Definição 3.1.14 e em (5) usamos Proposição 3.1.5 (iii).

Afirmação 9: β é um isomorfismo natural monoidal.

Primeiramente mostremos que, para $(F, c^F) \in End^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, $\beta_{(F,c^F)} : \mathcal{F}_{F(\mathbf{1})} \to F$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Para facilitar a notação, escrevemos β_F invés de $\beta_{(F,c^F)}$. Começamos mostrando que $\beta_{(F,c^F)}$ é um isomorfismo natural. Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X) \arrow[r, "(\beta_F)_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(Y) \arrow[r, "(\beta_F)_Y"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo e isso nos diz que β_F é uma transformação natural. De fato,

$$\begin{aligned}
F(f)(\beta_F)_X &= F(f)F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X} \\
&= F(fl_X)c^F_{\mathbf{1},X} \\
&\overset{(1)}{=} F(l_Y)F(id_{\mathbf{1}} \otimes f)c^F_{\mathbf{1},X} \\
&\overset{(2)}{=} F(l_Y)c^F_{\mathbf{1},Y}(F(id_{\mathbf{1}}) \otimes f) \\
&= (\beta_F)_Y(id_{F(\mathbf{1})} \otimes f) \\
&= (\beta_F)_Y \mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(f),
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a naturalidade de l e que F é um funtor e em (2) usamos a naturalidade de c^F.

É claro que $(\beta_F)_X = F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X}$ é um isomorfismo, para todo $X \in \mathcal{C}$. Portanto, concluímos que β_F é um isomorfismo natural.

Vejamos que β_F é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Sejam $X, Y \in \mathcal{C}$. Então verifiquemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X) \otimes Y \arrow[r, "(\beta_F)_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}}_{X,Y}"'] & F(X) \otimes Y \arrow[d, "c^F_{X,Y}"] \\
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X \otimes Y) \arrow[r, "(\beta_F)_{X \otimes Y}"'] & F(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato,

$$c^F_{X,Y}((\beta_F)_X \otimes id_Y) \quad = \quad c^F_{X,Y}(F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X} \otimes id_Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= c^F_{X,Y}(F(l_X) \otimes id_Y)(c^F_{\mathbf{1},X} \otimes id_Y) \\
&\overset{(1)}{=} F(l_X \otimes id_Y)c^F_{\mathbf{1}\otimes X,Y}(c^F_{\mathbf{1},X} \otimes id_Y) \\
&\overset{(2)}{=} F(l_{X\otimes Y})F(a_{\mathbf{1},X,Y})c^F_{\mathbf{1}\otimes X,Y}(c^F_{\mathbf{1},X} \otimes id_Y) \\
&\overset{(3)}{=} F(l_{X\otimes Y})c^F_{\mathbf{1},X\otimes Y}a_{F(\mathbf{1}),X,Y} \\
&= (\beta_F)_{X\otimes Y}c^{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}}_{X,Y}.
\end{aligned}
$$

Em (1) usamos a naturalidade de c^F, em (2) usamos a Proposição 3.1.4 e que F é um funtor e em (3) usamos que $(F, c^F) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e portanto satisfaz (4.1).

Portanto, β_F é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Finalmente, necessitamos verificar que β é uma transformação natural monoidal. Sejam $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\mu : F \to G$ um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Devemos mostrar que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(F,c^F) \arrow[r, "\beta_F"] \arrow[d, "(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(\mu)"'] & Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}(F,c^F) \arrow[d, "Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}(\mu)"] \\
(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(G,c^G) \arrow[r, "\beta_G"'] & Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}(G,c^G)
\end{tikzcd}
$$

é comutativo, ou seja, β é uma transformação natural. De fato, seja $X \in \mathcal{C}$. Então

$$
\begin{aligned}
(\mu \circ \beta_F)_X &= \mu_X(\beta_F)_X \\
&= \mu_X F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X} \\
&\overset{(1)}{=} G(l_X)\mu_{\mathbf{1}\otimes X}c^F_{\mathbf{1},X} \\
&\overset{(2)}{=} G(l_X)c^G_{\mathbf{1},X}(\mu_{\mathbf{1}} \otimes id_X) \\
&= (\beta_G)_X\mathcal{F}(\mu_{\mathbf{1}})_X \\
&= (\beta_G \circ \mathcal{F}(\mu_{\mathbf{1}}))_X \\
&= (\beta_G \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mu)))_X \\
&= (\beta_G \circ (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(\mu))_X.
\end{aligned}
$$

Em (1) usamos a naturalidade de μ e em (2) usamos o fato de que μ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Logo, $\mu \circ \beta_F = \beta_G \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(\mu)$ e como $\beta_{(F,c^F)}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ (isomorfismo natural), segue que β é um isomorfismo natural.

Resta-nos verificar que β é uma transformação natural monoidal. Sejam $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Devemos mostrar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(G, c^G) \otimes (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(F, c^F) \arrow[r, "\beta_G * \beta_F"] \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}}_{G,F}"'] & (G, c^G) \otimes (F, c^F) \arrow[d, "id_{G\circ F}"] \\
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})((G, c^G) \otimes (F, c^F)) \arrow[r, "\beta_{G\circ F}"'] & (G, c^G) \otimes (F, c^F)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& Id_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\phi^{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}}"'] \arrow[dr, "id_{Id_{\mathcal{C}}}"] & \\
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(Id_{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\beta_{Id_{\mathcal{C}}}"'] & & Id_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

são comutativos. De fato, seja $X \in \mathcal{C}$. Então

$$\begin{aligned}
& (\beta_G * \beta_F)_X \\
= \ & G((\beta_F)_X)(\beta_G)_{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X)} \\
= \ & G((\beta_F)_X)(\beta_G)_{F(\mathbf{1})\otimes X} \\
= \ & G((\beta_F)_X)G(l_{F(\mathbf{1})\otimes X})c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})\otimes X} \\
\overset{(1)}{=} \ & G((\beta_F)_X)G(l_{F(\mathbf{1})} \otimes id_X)G(a^{-1}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1}),X})c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})\otimes X} \\
\overset{(2)}{=} \ & G((\beta_F)_X)G(l_{F(\mathbf{1})} \otimes id_X)c^G_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1}),X}(c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})} \otimes id_X)a^{-1}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1}),X} \\
\overset{(3)}{=} \ & G((\beta_F)_X)c^G_{F(\mathbf{1}),X}(G(l_{F(\mathbf{1})}) \otimes id_X)(c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})} \otimes id_X)a^{-1}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1}),X} \\
= \ & G(F(l_X))G(c^F_{\mathbf{1},X})c^G_{F(\mathbf{1}),X}(G(l_{F(\mathbf{1})})c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})} \otimes id_X)a^{-1}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1}),X} \\
\overset{(4)}{=} \ & (G \circ F)(l_X)c^{G\circ F}_{\mathbf{1},X}(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} \otimes id_X)(\zeta^{\mathcal{F}}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})})_X \\
= \ & (\beta_{G\circ F})_X(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} \otimes id_X)(\zeta^{\mathcal{F}}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})})_X \\
\overset{(5)}{=} \ & (\beta_{G\circ F})_X\mathcal{F}(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})_X(\zeta^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}(G),\mathcal{G}(F)})_X \\
= \ & (\beta_{G\circ F} \circ \mathcal{F}(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}) \circ \zeta^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}(G),\mathcal{G}(F)})_X \\
\overset{(6)}{=} \ & (\beta_{G\circ F} \circ \zeta^{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}})_X
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\beta_{Id_{\mathcal{C}}} \circ \phi^{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}})_X &\overset{(7)}{=} (\beta_{Id_{\mathcal{C}}} \circ \mathcal{F}(\phi^{\mathcal{G}}) \circ \phi^{\mathcal{F}})_X \\
&= (\beta_{Id_{\mathcal{C}}})_X \mathcal{F}(id_{\mathbf{1}})_X \phi^{\mathcal{F}}_X \\
&= Id_{\mathcal{C}}(l_X) c^{Id_{\mathcal{C}}}_{\mathbf{1},X} (id_{\mathbf{1}} \otimes id_X) l_X^{-1} \\
&= l_X id_{\mathbf{1}\otimes X} l_X^{-1} \\
&= id_X \\
&= id_{Id_{\mathcal{C}}(X)} \\
&= (id_{Id_{\mathcal{C}}})_X.
\end{aligned}
$$

Em (1) usamos a Proposição 3.1.4 e que G é um funtor, em (2) usamos o fato de que $(G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e portanto satisfaz (4.1), em (3) usamos a naturalidade de c^G, em (4) usamos a definição de $c^{G\circ F}$, em (5) usamos $\mathcal{F}(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})_X = \zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} \otimes id_X$ e em (6) e (7) usamos a Definição 3.1.14.

Portanto, β é um isomorfismo natural monoidal. Assim, existem funtores monoidais $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$ e $(\mathcal{G}, \zeta^{\mathcal{G}}, \phi^{\mathcal{G}})$ e isomorfismos naturais monoidais $\alpha : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\beta : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$. Logo, $\mathcal{C}$ e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ são monoidalmente equivalentes. ■

Referências Bibliográficas

[1] ABRAMSKY, S.; TZEVELEKOS, N. **Introduction to Category Theory and Categorical Logic**, New Structures for Physics 813, Springer, Berlin, 2011, pp. 3-95.

[2] AWODEY, S. **Category Theory**, Oxford, 256p. (2006).

[3] BAEZ, J.; STAY, M. **Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone**, New Structures for Physics, Lecture Notes in Physics vol. 813, Springer, Berlin, 2011, pp. 95-174.

[4] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 401p. (2001).

[5] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor Categories**, Mathematical Surveys and Monographs, Providence, Rhode Island: AMS, 343p. (2015).

[6] FIORE, M.; LEINSTER, T. **An abstract characterization of Thompson's group F**, Semigroup Forum 80, 325-340 (2010).

[7] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**, New York: Springer- Verlag, 502p. (2000).

[8] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**, Springer, (1971).

[9] MOMBELLI, J. M. **Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**, Notas de aula.

[10] PINTER, S., **Álgebras de Hopf trançadas**, Dissertação de mestrado, UFSC, (2013).

[11] PINTER, S., Tese de doutorado (em andamento), UFSC, (2016).