

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática  
Pura e Aplicada

**Taxas de Decaimento para a Energia Associada a  
um Sistema Semilinear de Ondas Elásticas em  $\mathbb{R}^n$   
com Potencial do Tipo Dissipativo**

**Jaqueline Luiza Horbach**

Orientador: Prof. Dr. Cleverton Roberto da Luz

Coorientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática  
Pura e Aplicada

**Taxas de Decaimento para a Energia Associada a  
um Sistema Semilinear de Ondas Elásticas em  $\mathbb{R}^n$   
com Potencial do Tipo Dissipativo**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-  
Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
da Universidade Federal de Santa Catarina,  
para a obtenção do grau de Mestre em  
Matemática, com área de concentração  
em Equações Diferenciais Parciais.

Jaqueline Luiza Horbach

Florianópolis

Fevereiro de 2013

Taxas de Decaimento para a Energia Associada a um Sistema Semilinear

de Ondas Elásticas em  $\mathbb{R}^n$  com Potencial do Tipo Dissipativo

por

Jaqueline Luiza Horbach

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

---

Prof. Dr. Daniel Gonçalves

Coordenador do Curso de Pós-Graduação

**Comissão Examinadora:**

---

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz (UFSC-Orientador)

---

Prof. Dr. Ryo Ikehata (Hiroshima University)

---

Prof. Dr. Cláudio R. Ávila da Silva Junior (IFTR-PR)

---

Prof. Dr. Jardel Moraes Pereira (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2013.

A Deus.

Ao meu orientador Cleverson.

Aos meus pais Valcir e Sueli.

Ao meu irmão Juliano.

Aos meus amigos.

Ao CNPq e ao REUNI.

# Resumo

Neste trabalho estuda-se a existência e a unicidade de soluções globais do problema de valor inicial, associado ao sistema semilinear de ondas elásticas em um meio isotrópico, com uma não linearidade do tipo não absorvente. O coeficiente do termo dissipativo é um potencial não constante em  $\mathbb{R}^n$  e estudam-se os casos quando esse potencial dissipativo é do tipo considerado crítico e não crítico. Taxas de decaimento da energia total também são estudadas para os casos linear e semilinear. A existência e o decaimento para o problema semilinear são obtidos mediante a hipótese de dados iniciais pequenos. Neste trabalho seguimos idéias de Charão-Ikehata [6] e de Ikehata-Todorova-Yordanov [10].

**Palavras-chave:** Ondas elásticas, semigrupos, existência e unicidade de solução, função potencial, método dos multiplicadores.

# Abstract

We study the existence and uniqueness of global solutions of the initial value problem associated to the semi-linear system of elastic waves in an isotropic medium with a nonlinearity of type nonabsorption. The coefficient of the dissipative term is non constant potential in  $\mathbb{R}^n$  and we study the case where the potential type of damping is considered critical and noncritical. Decay rates of the total energy are also studied for linear and semi-linear system. The global existence and the asymptotic behavior of the semi-linear problem are obtained on the hypothesis of small initial data. In this work we follow ideas of Charão-Ikehata [6] and Ikehata-Todorova-Yordanov [10].

**Keywords:** Elastic waves, semigroups, existence and uniqueness of solution, potential function, method of multipliers.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Resultados Básicos</b>	<b>6</b>
1.1	Notações e identidades vetoriais . . . . .	7
1.2	Distribuições . . . . .	12
1.3	Espaços $L^p(\Omega)$ . . . . .	14
1.4	Espaços de Sobolev . . . . .	18
1.5	Desigualdades importantes . . . . .	21
1.6	Teorema da Divergência e Fórmulas de Green . . . . .	24
1.7	Operadores elípticos . . . . .	25
1.8	Teorema de Lax-Milgram . . . . .	26
1.9	Semigrupos de operadores lineares . . . . .	27

<b>2</b>	<b>Existência e Unicidade de Soluções para o Sistema de Ondas Elásticas Linear</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>Taxas de Decaimento para a Energia Total do Sistema Linear</b>	<b>49</b>
3.1	Função potencial $V(x) \geq \frac{C_0}{1 +  x }$ . . . . .	58
3.2	Função potencial $V(t, x) \geq \frac{C_0}{1 +  x  + t}$ . . . . .	66
3.3	Função potencial $V(x) \geq \frac{C_0}{(1 +  x )^\alpha}$ . . . . .	72
3.4	Função potencial de Euler-Poisson -Darboux . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Sistema Semilinear de Ondas Elásticas</b>	<b>82</b>
4.1	Existência de soluções locais . . . . .	84
4.2	Existência de soluções globais e taxas de decaimento para a energia . . . . .	86
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>

# Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções para um problema de valor inicial associado ao sistema de ondas elásticas sob efeitos de um termo semilinear, do tipo não absorvente, e de um termo dissipativo associado a um potencial do tipo 'damping',  $V(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ , a saber

$$u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(t, x) u_t = |u|^{p-1} u$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

$$u_t(0, x) = u_1(x)$$

sendo  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  e os coeficientes de Lamé  $a > 0$ ,  $b > 0$  satisfazem  $0 < a^2 < b^2$ .

No problema acima  $u = u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x))$  é uma função vetorial que representa o deslocamento da onda no ponto  $x$  e no instante de tempo  $t$ . O expoente  $p$  no termo não linear é constante e assumimos que

$$\begin{aligned} \text{se } n = 2 \quad \text{então} \quad 1 + \frac{4}{n-1} < p < \infty \\ \text{se } n \geq 3 \quad \text{então} \quad 1 + \frac{4}{n-1} < p < \frac{n+2}{n-2}. \end{aligned}$$

Os dados iniciais  $u_0$  e  $u_1$  são escolhidos o mais fraco possível para que a energia total do sistema esteja bem definida, ou seja, escolhemos

$$[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Neste trabalho mostramos estimativas de decaimento no tempo para a energia total do sistema de ondas elásticas acima. No caso do sistema de ondas elásticas linear e no caso semilinear não absorvente, as taxas que encontramos são polinomiais, como pode ser visto no artigo de Charão e Ikehata [6] que estuda o caso semilinear absorvente. Além de conseguirmos obter todos os resultados que aparecem em [6], também estudamos o caso do potencial  $V(t, x) = V(x)$ , não estudado em [6], satisfazendo uma

condição do tipo

$$V(x) \geq \frac{C_0}{(1 + |x|)^\alpha}$$

com  $\alpha$  uma constante satisfazendo  $0 < \alpha < 1$ .

O caso de um potencial do tipo Euler-Poisson-Darboux que foi mencionado rapidamente no artigo de Charão-Ikehata [6] é feito neste trabalho com todos os detalhes que não aparecem em [6].

Os resultados que obtemos para o sistema de ondas elásticas com termo semilinear não absorvente ainda não foram publicados em revista indexada, mas aparecem em um preprint e em um trabalho apresentado por Ruy Charão e Ryo Ikehata no VII Workshop of Partial Differential Equations (LNCCV/UFRJ)[7].

O caminho para estudar o problema semilinear não absorvente é estudar primeiro o caso linear de maneira completa. Depois obter resultados para o caso semilinear não absorvente usando as estimativas do problema linear, combinadas com estimativas e ideias mais avançadas utilizadas em trabalhos anteriores de Todorova-Yordanov [19] e Ikehata-Todorova-Yordanov [10].

Para o caso da equação da onda com dissipação do tipo potencial

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) + V(t, x)u_t(t, x) + \eta|u(t, x)|^{p-1}u(t, x) = 0,$$

existem vários trabalhos com resultados sobre o decaimento e não decaimento da energia total, podemos citar por exemplo [12], [15], [16], [20] para o caso  $\eta = 0$ . Recentemente, Todorova-Yordanov [19] obtiveram taxas de decaimento para a energia total considerando  $V(x) \approx (1 + |x|)^{-\gamma}$  com  $0 \leq \gamma < 1$  e  $\eta = 0$ . Eles também estudaram o problema semilinear com  $\eta = 1$  (ver [18]).

Para o sistema de ondas elásticas em domínios exteriores, com uma dissipação localizada próximo ao infinito, Charão-Ikehata [4] obtiveram taxas de decaimento polinomial assumindo uma condição adicional sobre os coeficientes de Lamé:  $b^2 < 4a^2$ .

Este trabalho foi dividido em 4 capítulos. No Capítulo 1 é apresentado resultados teóricos necessários para o desenvolvimento do trabalho. A existência e unicidade para o caso linear com  $V(t, x) = V(x)$ , via teoria de semigrupos, é estudada no Capítulo 2.

No Capítulo 3 é estudado o comportamento assintótico do problema linear para quatro diferentes potenciais que foram divididos em 4 seções.

Na Seção 3.1 estudamos o caso crítico onde o potencial  $V(x) \geq \frac{C_0}{1+|x|}$ , já na Seção 3.3 o potencial estudado satisfaz  $V(x) \geq \frac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$ , onde  $0 < \alpha < 1$ . Esses dois potenciais foram estudados separadamente pois conseguimos encontrar taxas de decaimento melhores para o potencial da Seção 3.3. Nas Seções 3.2 e 3.4 os potenciais estudados dependem de  $x$  e de  $t$ , são eles:  $V(t, x) \geq \frac{C_0}{1+|x|+t}$  e o potencial de Euler-Poisson-Darboux. Nas três primeiras seções desse capítulo precisamos da condição de que os dados iniciais tenham suporte compacto, tal condição não é necessária quando consideramos o potencial de Euler-Poisson-Darboux.

Na primeira seção do Capítulo 4 é estudado a existência de soluções locais para o sistema de ondas elásticas semilinear. Na Seção 4.2 é obtida, para dados iniciais pequenos, a existência de soluções globais e taxas de decaimento para a energia total do sistema. A existência de soluções globais e o decaimento da energia, com taxas polinomiais, são obtidas simultaneamente.

# Capítulo 1

## Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos as seguintes referências, Adams [1], Agmon-Douglis-Nirenberg [2], Brezis [3], Alvercio [9], Kesavan [11] e Medeiros-Rivera [13], [14], Pazy [17], onde tais resultados podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo  $\Omega$  representará um subconjunto aberto do espaço  $\mathbb{R}^n$ , que eventualmente poderá ser todo  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.1 Notações e identidades vetoriais

1.  $\mathbb{K}$  indica o corpo  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
2.  $\|\cdot\|$  representa a norma usual em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .
3.  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ .
5. Se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável, então o *gradiente* de  $f$ , que será denotado por  $\nabla f$ , é definido como o vetor do  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

6. Se  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  é um campo vetorial de classe  $C^1$ , definimos o *divergente* de  $F(x)$ , denotado por  $\operatorname{div}(F)$ , como

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

onde  $\nabla$  é o operador definido como  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ .

7. O *laplaciano* de uma função  $f$  é definido como

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

e é denotado por  $\Delta f$ .

8. Se  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  então

$$\Delta F(x) = (\Delta f_1(x), \dots, \Delta f_n(x)) \quad \text{e}$$

$$|\nabla F(x)|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla f_i(x)|^2.$$

## Identidades úteis

Se  $f, g$  são funções escalares de classe  $C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $c$  é uma constante real e  $F$  e  $G$  são campos vetoriais também de classe  $C^1(\Omega)$ , então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas.

1.  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2.  $\nabla(cf) = c\nabla f$
3.  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4.  $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$
5.  $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \nabla f \cdot F$

O ponto  $\cdot$  indica o produto interno em  $\mathbb{R}^n$ .

Para todo vetor  $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$  e  $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$  vamos definir o vetor:

$$v : \nabla u = v^1 \nabla u^1 + v^2 \nabla u^2 + \dots + v^n \nabla u^n = \sum_{i=1}^n v^i \nabla u^i.$$

**Lema 1.1** *Seja  $u = u(t, x)$  com  $t \in \mathbb{R}^+$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , uma função vetorial com  $n$  componentes. Se  $u$  é uma função de classe  $C^2$  as seguintes identidades são verdadeiras:*

$$a) \operatorname{div}(u : \nabla u) = (u \cdot \Delta u) + |\nabla u|^2;$$

$$b) \operatorname{div}(u_t : \nabla u) = (u_t \cdot \Delta u) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2;$$

$$c) \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) = (\operatorname{div} u)^2 + (u \cdot \nabla \operatorname{div} u);$$

$$d) \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} u)^2 + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u).$$

**Demonstração:** Sejam  $u, v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^2$  tal que  $u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x))$  e  $v(t, x) = (v^1(t, x), \dots, v^n(t, x))$ . Considerando a definição de  $v : \nabla u$  dada acima tem-se que

$$\operatorname{div}(v : \nabla u) = \operatorname{div} \sum_{i=1}^n (v^i \nabla u^i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(v^i \nabla u^i) \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(v^i u_{x_1}^i, \dots, v^i u_{x_n}^i) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (v^i u_{x_1}^i) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} (v^i u_{x_n}^i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (v^i (u_{x_1 x_1}^i + \dots + u_{x_n x_n}^i) + v_{x_1}^i u_{x_1}^i + \dots + v_{x_n}^i u_{x_n}^i) \\
&= \sum_{i=1}^n (v^i \Delta u^i + (\nabla v^i \cdot \nabla u^i)) \\
&= (v \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n (\nabla v^i \cdot \nabla u^i).
\end{aligned}$$

Considerando  $v = u$  na igualdade acima tem-se que

$$\operatorname{div}(u : \nabla u) = (u \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n (\nabla u^i \cdot \nabla u^i) = (u \cdot \Delta u) + |\nabla u|^2.$$

Por outro lado, tomando  $v = u_t$  tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(u_t : \nabla u) &= (u_t \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n (\nabla u_t^i \cdot \nabla u^i) \\
&= (u_t \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u^i|^2 \\
&= (u_t \cdot \Delta u) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

As duas últimas igualdades provam os itens a) e b) do lema.

Para demonstrar os itens c) e d) vamos usar a identidade

$$\operatorname{div}(Ff) = f \operatorname{div}(F) + (F \cdot \nabla f),$$

onde  $f$  é uma função escalar e  $F$  é uma função vetorial.

Considerando  $f = \operatorname{div} u$  e  $F = u$  temos

$$\operatorname{div}(u \operatorname{div} u) = (\operatorname{div} u)^2 + (u \cdot \nabla \operatorname{div} u)$$

e se considerarmos  $f = \operatorname{div} u$  e  $F = u_t$  temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) &= \operatorname{div} u \operatorname{div} u_t + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} u)^2 + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u). \end{aligned}$$

Assim, o lema está demonstrado.

■

## 1.2 Distribuições

Seja  $u$  uma função numérica definida em  $\Omega$ ,  $u$  mensurável, e seja  $(K_i)_{i \in I}$  a família de todos os subconjuntos abertos  $K_i$  de  $\Omega$  tais que  $u = 0$  quase sempre em  $K_i$ . Considera-se o subconjunto aberto  $K = \bigcup_{i \in I} K_i$ . Então

$$u = 0 \quad \text{quase sempre em } K.$$

Como consequência, define-se o *suporte* de  $u$ , que será denotado por  $\text{supp}(u)$ , como sendo o subconjunto fechado de  $\Omega$

$$\text{supp}(u) = \Omega \setminus K.$$

**Definição 1.1** Representamos por  $C_0^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de  $\Omega$ . Os elementos de  $C_0^\infty(\Omega)$  são chamados de *funções testes*.

Naturalmente,  $C_0^\infty(\Omega)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com as operações

usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

## Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

**Definição 1.2** *Sejam  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $C_0^\infty(\Omega)$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .*

*Dizemos que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  se:*

*i)  $\exists K \subset \Omega$ ,  $K$  compacto, tal que  $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;*

*ii) Para cada  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$  uniformemente em  $x \in$*

*$\Omega$ .*

**Definição 1.3** *O espaço vetorial  $C_0^\infty(\Omega)$  com a noção de convergência definida acima é denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e é chamado de espaço das funções testes.*

**Definição 1.4** *Uma distribuição sobre  $\Omega$  é um funcional linear definido em  $\mathcal{D}(\Omega)$  e contínuo em relação a noção de convergência definida em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . O conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$  é denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}; T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que  $\mathcal{D}'(\Omega)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

Se  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  denotaremos por  $\langle T, \varphi \rangle$  o valor de  $T$  aplicado no elemento  $\varphi$ .

## Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Definição 1.5** Dizemos que  $T_k \rightarrow T$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  se

$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ , para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

## 1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho as integrais realizadas sobre  $\Omega$  são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

**Definição 1.6** Sejam  $\Omega$  um conjunto mensurável e  $1 \leq p \leq \infty$ . Indicamos por  $L^p(\Omega)$  o conjunto das funções mensuráveis  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  onde:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup \operatorname{ess}_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &= \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \mid \operatorname{med}\{x \in \Omega \mid |f(x)| > C\} = 0\} \\ &= \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}\end{aligned}$$

onde  $\operatorname{med}\{A\}$  significa a medida de Lebesgue de conjunto mensurável  $A$ .

**Observação 1.1** As funções  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , são normas.

Na verdade  $L^p(\Omega)$  deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em  $\Omega$ .

Os espaços  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , são espaços de Banach, sendo  $L^2(\Omega)$  um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para  $1 < p < \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  é reflexivo.

**Teorema 1.1**  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

**Teorema 1.2 (Interpolação dos espaços  $L^p(\Omega)$ )** *Sejam  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Se  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  então  $f \in L^r(\Omega)$  para todo  $r \in [p, q]$ . Além*

disso,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

com  $\alpha \in [0, 1]$  tal que  $\frac{1}{r} = \alpha \frac{1}{p} + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$ .

## Espaços $L_{loc}^p(\Omega)$

**Definição 1.7** *Sejam  $\Omega$  um aberto do espaço  $\mathbb{R}^n$  e  $1 \leq p < \infty$ . Indicamos por  $L_{loc}^p(\Omega)$  o conjunto das funções mensuráveis  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ , para todo  $K$  compacto de  $\Omega$ , onde  $\chi_K$  é a função característica de  $K$ .*

**Observação 1.2**  $L_{loc}^1(\Omega)$  é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

Para  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  consideremos o funcional  $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$  definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

É fácil verificar que  $T$  define uma distribuição sobre  $\Omega$ .

**Lema 1.2 (Du Bois Reymond)** *Seja  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Então  $T_u = 0$  se e somente se  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .*

A aplicação

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.2). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição  $T_u$  com a função  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Nesse sentido tem-se que  $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ . Como  $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$  temos que toda função de  $L^p(\Omega)$  define uma distribuição sobre  $\Omega$ , isto é, toda função de  $L^p(\Omega)$  pode ser vista como uma distribuição.

**Definição 1.8** *Sejam  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . A derivada de ordem  $\alpha$  de  $T$ , denotada por  $D^\alpha T$ , é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

$D^\alpha T$  chama-se a derivada distribucional de  $T$ .

Com esta definição tem-se que se  $u \in C^k(\Omega)$  então  $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$ , para todo  $|\alpha| \leq k$ , onde  $D^\alpha u$  indica a derivada clássica de  $u$ . E, se  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  então  $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

## 1.4 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [3], Kesavan [11] e Medeiros-Rivera [13], [14].

**Definição 1.9** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Indicaremos por  $W^{m,p}(\Omega)$  o conjunto de todas as funções  $u$  de  $L^p(\Omega)$  tais que para todo  $|\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha u$  pertence a  $L^p(\Omega)$ , sendo  $D^\alpha u$  a derivada distribucional de  $u$ .  $W^{m,p}(\Omega)$  é chamado de Espaço de Sobolev de ordem  $m$  relativo ao espaço  $L^p(\Omega)$ .*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

### Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |(D^\alpha u)(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty,$$

define uma norma sobre  $W^{m,p}(\Omega)$ .

### Observações:

1.  $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$  é um espaço de Banach.
2. Quando  $p = 2$ , o espaço de Sobolev  $W^{m,2}(\Omega)$  torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se  $W^{m,2}(\Omega)$  por  $H^m(\Omega)$ .
4.  $H^m(\Omega)$  é reflexivo e separável.
5. Seja  $v = (v^1, \dots, v^n) \in (H^m(\Omega))^n$  então

$$\|v\|_{(H^m(\Omega))^n}^2 = \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{H^m(\Omega)}^2.$$

## O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

**Definição 1.10** Definimos o espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ .

### Observações:

1. Quando  $p = 2$ , escreve-se  $H_0^m(\Omega)$  em lugar de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .
2. Se  $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ , o complemento de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^n$  possui medida de Lebesgue igual a zero.
3. Vale que  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

## O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

**Definição 1.11** Suponha  $1 \leq p < \infty$  e  $q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Representa-se por  $W^{-m,q}(\Omega)$  o dual topológico de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

O dual topológico de  $H_0^m(\Omega)$  representa-se por  $H^{-m}(\Omega)$ .

## Imersões de Sobolev

**Teorema 1.3 (Teorema de Sobolev)** Sejam  $m \geq 1$  e  $1 \leq p < \infty$ .

- i) Se  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$  então  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ ;

- ii) Se  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$  então  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $q \in [p, \infty)$ ;
- iii) Se  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$  então  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ ;

sendo as imersões acima contínuas.

## 1.5 Desigualdades importantes

### Desigualdade de Young

Se  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$  e  $1 < p, q < \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  então  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .

### Desigualdade de Hölder

Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  com  $1 < p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ou  $q = 1$  e  $p = \infty$  ou  $q = \infty$  e  $p = 1$ . Então  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

### Desigualdade de Poincaré

Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Então

$$\|u\|^2 \leq C \|\nabla u\|^2,$$

para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$ , sendo  $C > 0$  uma constante que depende do diâmetro de  $\Omega$ .

Em particular, se  $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e  $\text{supp}(u)$  está contido na bola  $|x| \leq R$ ,  $R > 0$ , vale que

$$\|u\|^2 \leq CR^2 \|\nabla u\|^2,$$

com  $C > 0$  uma constante.

## Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $1 \leq r < z \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq z$  e  $0 \leq k \leq m$ . Então existe uma constante  $\tilde{C}_g > 0$  tal que

$$\|u\|_{W^{k,z}(\Omega)} \leq \tilde{C}_g \|D^m u\|_{L^q(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\theta},$$

para todo  $u \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$  onde

$$\|D^m u\|_{L^q(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)},$$

$$\text{e } \theta = \left( \frac{k}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{z} \right) \left( \frac{m}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)^{-1}.$$

**Observação 1.3** *No capítulo 4 aplicaremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para uma função vetorial  $u = (u_1, \dots, u_n)$ . Observemos que para  $z > 2$  temos*

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |u(x)|^z dx &= \int_{\Omega} (|u(x)|^2)^{z/2} dx \\
 &= \int_{\Omega} (|u_1(x)|^2 + \dots + |u_n(x)|^2)^{z/2} dx \\
 &\leq C_z \int_{\Omega} (|u_1(x)|^z + \dots + |u_n(x)|^z) dx \\
 &= C_z \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u_i(x)|^z dx \\
 &= C_z \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^z}^z.
 \end{aligned}$$

*Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para o caso particular  $m = 1$ ,  $k = 0$  e  $r = q = 2$  temos*

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |u(x)|^z dx &\leq C_z \sum_{i=1}^n \tilde{C}_g \|\nabla u_i\|^{\theta z} \|u_i\|^{(1-\theta)z} \\
 &\leq C_z \tilde{C}_g \|\nabla u\|^{\theta z} \|u\|^{(1-\theta)z} \\
 &= C_g \|\nabla u\|^{\theta z} \|u\|^{(1-\theta)z},
 \end{aligned}$$

*com  $C_g$  uma constante positiva que depende de  $z, n$  e da constante que*

*aparece na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.*

## 1.6 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas para um aberto limitado  $\Omega$  bem regular:

i.

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x) dx = \int_{\Gamma} F(x) \cdot \eta(x) d\Gamma, \quad F \in (H^1(\Omega))^n;$$

ii.

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), u \in H^2(\Omega);$$

iii.

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \Delta v(x) u(x) dx, \quad v \in H_0^2(\Omega), u \in H^2(\Omega)$$

sendo  $\Omega$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira de classe  $C^2$  e  $\eta(x)$  denota a normal exterior unitária no ponto  $x \in \Gamma = \partial\Omega$ . A função  $F$  integrada sobre  $\partial\Omega$  é no sentido da função traço.

## 1.7 Operadores elípticos

**Definição 1.12** *Um operador diferencial de ordem  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \quad x \in \Omega$$

*é chamado de operador elíptico se existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \right| \geq C |\xi|^{2m}$$

*para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $x \in \Omega$ .*

**Proposição 1.1** *O operador  $L(u) = -a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + 2u$  é um operador elíptico de ordem 2.*

**Teorema 1.4 (Teorema de regularidade elíptica)** *Sejam  $L$  um operador diferencial elíptico de ordem  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , definido em um aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Se  $u$  é solução de  $Lu = f$ , no sentido das distribuições, com  $f \in L^2(\Omega)$  então  $u \in H^{2m}(\Omega)$ .*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Agmon-Douglis-Nirenberg [2].

## 1.8 Teorema de Lax-Milgram

**Definição 1.13** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert real. Uma aplicação*

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

*é chamada de forma bilinear se  $B(\cdot, y)$  é linear para cada  $y \in H$  e  $B(x, \cdot)$  é linear para cada  $x \in H$ .*

*$B$  é chamada de limitada (contínua) se existe uma constante  $C$  tal que*

$$|B(x, y)| \leq C \|x\|_H \|y\|_H, \quad \forall x, y \in H.$$

*$B$  é chamada coerciva se existe uma constante  $\delta > 0$  tal que*

$$B(x, x) \geq \delta \|x\|_H^2, \quad \forall x \in H.$$

**Teorema 1.5 (Lax-Milgram)** *Seja  $B$  uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert  $H$ . Então para cada funcional linear contínuo  $F$  em  $H$ , existe um único  $u \in H$  tal que*

$$B(x, u) = F(x), \quad \forall x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [3].

## 1.9 Semigrupos de operadores lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências Alvercio [9], Brezis [3] e Pazy [17].

**Definição 1.14** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\mathcal{L}(X)$  a álgebra dos operadores lineares limitados de  $X$ . Diz-se que uma aplicação*

$$S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

*é um semigrupo de operadores lineares limitados em  $X$  se:*

**I-**  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade de  $\mathcal{L}(X)$ ;

**II-**  $S(t + s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ .

*Diz-se que o semigrupo  $S$  é de classe  $C_0$  se*

**III-**  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0$ ,  $\forall x \in X$ .

**Proposição 1.2** *Todo semigrupo de classe  $C_0$  é fortemente contínuo em*

$\mathbb{R}^+$ , isto é, se  $t \in \mathbb{R}^+$  então

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

**Definição 1.15** Se  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0$ ,  $S$  é dito semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

**Definição 1.16** O operador  $A : D(A) \rightarrow X$  definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X \ / \ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ .

**Proposição 1.3** O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em  $X$ .

**Proposição 1.4** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $A$  o gerador infi-

infinitesimal de  $S$ . Se  $x \in D(A)$ , então  $S(t)x \in D(A)$ ,  $\forall t \geq 0$ , e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

**Definição 1.17** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Ponhamos  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$  e, supondo que  $A^{k-1}$  esteja definido, vamos definir  $A^k$  pondo

$$D(A^k) = \{x / x \in D(A^{k-1}) \text{ e } A^{k-1}x \in D(A)\}$$

$$A^kx = A(A^{k-1}x), \quad \forall x \in D(A^k).$$

**Proposição 1.5** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então:

I-  $D(A^k)$  é um subespaço de  $X$  e  $A^k$  é um operador linear de  $X$ ;

II- Se  $x \in D(A^k)$  então  $S(t)x \in D(A^k)$ ,  $t \geq 0$ , e

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^kx, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

III-  $\bigcap_k D(A^k)$  é denso em  $X$ .

**Lema 1.3** Seja  $A$  um operador linear fechado de  $X$ . Pondo, para cada

$x \in D(A^k)$ ,

$$|x|_k = \sum_{j=0}^k \|A^j x\|_X \quad (1.1)$$

o funcional  $|\cdot|_k$  é uma norma em  $D(A^k)$  munido da qual  $D(A^k)$  é um espaço de Banach.

**Definição 1.18** A norma (1.1) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo  $D(A^k)$  da norma (1.1) será representado por  $[D(A^k)]$ .

## Teorema Lumer-Phillips

**Definição 1.19** Seja  $A$  um operador linear de  $X$ . O conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  para os quais o operador linear  $\lambda I - A$  é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em  $X$ , é dito conjunto resolvente de  $A$  e é representado por  $\rho(A)$ .

O operador linear  $(\lambda I - A)^{-1}$ , representado por  $R(\lambda, A)$ , é dito resolvente de  $A$ .

Seja  $X$  um espaço de Banach,  $X^*$  o dual de  $X$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a dualidade entre  $X$  e  $X^*$ . Ponhamos, para cada  $x \in X$ ,

$$J(x) = \{x^* \in X^* / \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach,  $J(x) \neq \emptyset$ ,  $\forall x \in X$ . Uma aplicação dualidade é uma aplicação  $j : X \rightarrow X^*$  tal que  $j(x) \in J(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

Imediatamente se vê que  $\|j(x)\|_{X^*} = \|x\|_X$ .

**Definição 1.20** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Diz-se que o operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade,  $j$ ,*

$$\operatorname{Re}\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Em espaços de Hilbert, a definição de operador dissipativo é:

**Definição 1.21** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Diz-se que o operador linear  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  é dissipativo se,*

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

**Teorema 1.6 (Lumer-Phillips)** *Se  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  em um espaço de Banach  $X$  então:*

i-  $A$  é dissipativo;

ii-  $Im(\lambda - A) = X, \quad \lambda > 0 \quad (Im(\lambda - A) = \text{imagem de } \lambda I - A).$

*Reciprocamente, se*

i-  $D(A)$  *é denso em*  $X$ ;

ii-  $A$  *é dissipativo*;

iii-  $Im(\lambda_0 - A) = X$ , *para algum*  $\lambda_0 > 0$ , *então*  $A$  *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe*  $C_0$ .

**Definição 1.22** *O operador*  $A$  *é dito ser*  $m$ -*dissipativo se*  $A$  *é dissipativo e*  $Im(\lambda_0 - A) = X$ , *para algum*  $\lambda_0$ .

**Proposição 1.6** *Se*  $A$  *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe*  $C_0$  *em um espaço de Banach*  $X$  *e*  $B$  *é o operador linear e limitado então*  $A + B$  *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe*  $C_0$  *em*  $X$ .

## Problema de Cauchy Abstrato

Seja  $X$  um espaço de Banach e  $A$  um operador linear de  $X$ . Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= AU(t) \\ U(0) &= U_0\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde  $U_0 \in X$  e  $t \geq 0$ .

**Definição 1.23** *Uma função  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ , contínua para  $t \geq 0$ , continuamente diferenciável para todo  $t > 0$ , tal que  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t > 0$  e que satisfaz (1.2) é dita solução forte do problema (1.2).*

**Teorema 1.7** *Se  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  então, para cada  $U_0 \in D(A)$  o problema (1.2) tem uma única solução forte*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, D(A)),$$

onde  $S$  é o semigrupo gerado por  $A$ .

Se  $U_0 \in X$  então dizemos que  $U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X)$  é uma solução fraca para o problema (1.2).

## Capítulo 2

# Existência e Unicidade de Soluções para o Sistema de Ondas Elásticas Linear

Neste capítulo, usando a teoria de semigrupos, vamos mostrar a existência e unicidade de solução do seguinte sistema linear de ondas elásticas:

$$u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(x) u_t = 0 \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (2.2)$$

$$u_t(0, x) = u_1(x) \quad (2.3)$$

onde  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ ,  $u = u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x))$  é o vetor de deformações com  $n$  componentes, os coeficientes  $a > 0$  e  $b > 0$  satisfazem  $0 < a^2 < b^2$  e a função potencial  $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . De fato, os coeficientes  $a$  e  $b$  estão relacionados com os coeficientes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  da seguinte forma:  $b^2 = \lambda + 2\mu$  e  $a^2 = \lambda + \mu$ .

Fazendo o produto interno usual em  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$  da equação (2.1) com  $u_t$  temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(x) u_t) dx = 0,$$

que, formalmente, implica em

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\|^2 \} + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) |u_t|^2 dx = 0.$$

A identidade anterior motiva definir a energia total do sistema (2.1)

por:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\|^2).$$

Nota-se da referida identidade acima que a energia  $\mathcal{E}(t)$  é uma função decrescente do tempo  $t$ , o que caracteriza o sistema (2.1)-(2.3) como dissipativo.

Neste trabalho consideramos o seguinte espaço de Hilbert:

$$X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$$

com o produto interno definido por

$$\begin{aligned} (U, V)_X &= \int_{\mathbb{R}^n} u_1 \cdot v_1 \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u_1^i \cdot \nabla v_1^i \, dx \\ &+ (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_1) \operatorname{div}(v_1) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_2 \cdot v_2 \, dx \end{aligned}$$

para todo  $U = (u_1, u_2)$  e  $V = (v_1, v_2)$  em  $X$ .

**Observação 2.1** *Vamos considerar a norma em  $(H^1(\Omega))^n$  como sendo*

$$\|u\|_{(H^1(\Omega))^n} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} |\operatorname{div}(u)|^2 \, dx$$

dado pelas três primeiras integrais do produto interno em  $X$  definido acima.

Escrevendo o sistema (2.1)-(2.3) na forma matricial temos

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = AU(t) + BU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in X$ ,  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$ , o operador

$A : D(A) \rightarrow X$  é dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ a^2 \Delta + (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} - I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

com  $D(A) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e o operador  $B : X \rightarrow X$  é dado por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & -V(x) \end{pmatrix}.$$

Queremos mostrar que existe um único  $U(t)$  que satisfaz o problema

(2.4), conseqüentemente, existe uma única função  $u = u(t, x)$  que satisfaz o sistema (2.1)-(2.3), ou seja, queremos mostrar o seguinte teorema:

**Teorema 2.1** *Considere o sistema (2.1)-(2.3) com as seguintes condições  $a > 0$  e  $b > 0$  tal que  $0 < a^2 < b^2$  e a função potencial  $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Então se  $(u_0, u_1) \in X$  existe uma única solução fraca  $u(t, x)$  tal que*

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n)^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n)^n)).$$

Para provar o Teorema 2.1 vamos mostrar que  $A + B$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . Pela teoria de semigrupos isso ocorre se  $B$  é linear e limitado e  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ .

**Lema 2.1** *O operador  $B : X \rightarrow X$  definido acima é um operador linear e limitado.*

**Demonstração:** Dados  $U = (u_1, u_2)$  e  $V = (v_1, v_2)$  no espaço energia  $X$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
B(U + V) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & -V(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 + v_1 - V(x)u_2 - V(x)v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 - V(x)u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - V(x)v_2 \end{pmatrix} \\
&= BU + BV,
\end{aligned}$$

o que mostra que  $B$  é linear.

Para mostrar que  $B$  é limitado vamos estimar a norma de  $BU$  em  $X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ . Seja  $U = (u_1, u_2)$  então

$$\begin{aligned}
\|BU\|_X^2 &= \|(0, u_1 - V(x)u_2)\|_X^2 \\
&= \|u_1 - V(x)u_2\|^2 \\
&\leq 2\|u_1\|^2 + 2\|V\|_{L^\infty}^2\|u_2\|^2 \\
&\leq \max\{2, 2\|V\|_{L^\infty}^2\}\|U\|_X^2.
\end{aligned}$$

Logo,  $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \max\{2, 2\|V\|_{L^\infty}^2\}^{1/2}$ .

■

Para mostrar que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  vamos usar o Teorema de Lumer-Phillips, ou seja, vamos mostrar que  $A$  é  $m$ -dissipativo e densamente definido.

Como  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$  é denso em  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^2(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^1(\mathbb{R}^n))^n$$

temos que  $(H^2(\mathbb{R}^n))^n$  é denso em  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ . Também  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$  é denso em  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$  e

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^1(\mathbb{R}^n))^n \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Logo,  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$  é denso em  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ .

Portanto, o domínio de  $A$ ,  $D(A)$ , é denso no espaço energia  $X$ .

**Lema 2.2** *O operador  $A$  definido em (2.5) é  $m$ -dissipativo.*

**Demonstração:** Para que  $A$  seja um operador  $m$ -dissipativo é suficiente mostrar que  $A$  é dissipativo e que  $Im(I - A) = X$ .

Seja  $U = (u, v) \in D(A)$  então

$$\begin{aligned}
(AU, U)_X &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ a^2 \Delta u + (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u - u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot u \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla v^i \cdot \nabla u^i \, dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v \operatorname{div} u \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot v \, dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \operatorname{div} u \cdot v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \, dx,
\end{aligned}$$

pela definição do produto interno em  $X$  e  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ .

Usando o Lema 1.1, o Teorema da Divergência e a identidade  $\operatorname{div}(v \operatorname{div} u) = (\nabla \operatorname{div} u \cdot v) + \operatorname{div} v \operatorname{div} u$  temos

$$\begin{aligned}
(AU, U)_X &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla v^i \cdot \nabla u^i \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v \operatorname{div} u \, dx \\
&\quad + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(v : \nabla u) \, dx - a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla v^i \cdot \nabla u^i \, dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(v \operatorname{div} u) \, dx - (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v \operatorname{div} u \, dx = 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que  $A : D(A) \rightarrow X$  é dissipativo.

Resta provar que  $\operatorname{Im}(I - A) = X$ .

Um dos lados da continência é fácil de mostrar. Dado

$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \text{Im}(I - A)$  então existe  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$  tal que

$$(I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Como  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A) \subset X$  e  $A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$  temos  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$ .

Portanto,  $\text{Im}(I - A) \subset X$ .

Já a outra inclusão será dividida em etapas. Dado  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$

queremos encontrar  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$  tal que

$$(I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Vamos definir a aplicação

$$\alpha : (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(u, \varphi) &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi dx. \end{aligned}$$

Na sequência vamos mostrar que a função  $\mathfrak{a}(\cdot, \cdot)$  é bilinear, contínua e coerciva.

a) Bilinearidade de  $\mathfrak{a}(\cdot, \cdot)$ . Dado  $\varphi$  e  $\phi$  em  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(u, \varphi + \lambda\phi) &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla (\varphi + \lambda\phi)^i dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} (\varphi + \lambda\phi) dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot (\varphi + \lambda\phi) dx \\ &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i dx + \lambda a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \phi^i dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi dx + \lambda (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \phi dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi dx + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \phi dx \\ &= \mathfrak{a}(u, \varphi) + \lambda \mathfrak{a}(u, \phi), \end{aligned}$$

pois, os operadores  $\nabla$  e  $\operatorname{div}$  são lineares.

A prova da linearidade em relação a primeira componente é provada de maneira completamente análoga. Assim, a função  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  é bilinear.

b) Coercividade de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ . Seja  $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ , então

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(u, u) &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla u^i \, dx \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} u \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot u \, dx \\
 &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\nabla u^i|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx \\
 &\geq a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx \\
 &= \|u\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n}^2.
 \end{aligned}$$

c) Continuidade de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ . Dado  $u$  e  $\varphi$  em  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$  temos

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a}(u, \varphi)| &\leq a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \right| \, dx \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} |\operatorname{div} u| |\operatorname{div} \varphi| \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u| |\varphi| \, dx \\
 &\leq a^2 \sum_{i=1}^n \|\nabla u^i\| \|\nabla \varphi^i\| + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\| \|\operatorname{div} \varphi\| + 2 \|u\| \|\varphi\| \\
 &\leq C \|u\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n} \|\varphi\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n}.
 \end{aligned}$$

Agora, consideramos o funcional  $L : (H^1(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g)\varphi \, dx.$$

Vamos mostrar que  $L$  é linear e contínua.

d) Linearidade de  $L$ . Dado  $\varphi$  e  $\phi$  em  $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \langle L, (\varphi + \lambda\phi) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f + g)(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f + g)\varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} (f + g)\phi \, dx \\ &= \langle L, \varphi \rangle + \lambda \langle L, \phi \rangle. \end{aligned}$$

e) Continuidade de  $L$ . Como  $(f, g) \in X$  tem-se que  $f$  e  $g$  pertencem a  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ . Assim, dado  $\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$  temos

$$\begin{aligned} |\langle L, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f + g)\varphi \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f + g)\varphi| \, dx \\ &\leq \|f + g\| \|\varphi\| \\ &\leq \|f + g\| \|\varphi\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram existe  $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$  tal que

$$\mathfrak{a}(u, \varphi) = \langle L, \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi dx \\ + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g) \varphi dx \end{aligned}$$

para todo  $\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ .

Em particular

$$\begin{aligned} a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi dx \\ + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g) \varphi dx \end{aligned}$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , onde  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  é o espaço das funções  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Isso implica que

$$f + g = -a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + 2u$$

no sentido das distribuições,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Como  $f \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e  $g \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ , aplicando o teorema da regularidade elíptica para o operador elíptico de segunda ordem

$$-a^2\Delta - (b^2 - a^2)\nabla\operatorname{div} + 2I$$

concluimos que  $u \in (H^2(\mathbb{R}^n))^n$  e

$$f + g = -a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla\operatorname{div} u + 2u \quad \text{em } (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Seja  $v = u - f$ . Então tem-se que  $v \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$  e

$$g = -a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla\operatorname{div} u + u + v.$$

Dessa forma, provamos que  $U = (u, v) \in D(A)$  satisfaz

$$(I - A)U = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\operatorname{Im}(I - A) = X$  e o lema está provado. ■

Usando os Lemas 2.1 e 2.2, segue da Proposição 1.6 que  $A + B$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . Seja

$$S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo gerado por  $A+B$  então  $U(t) = S(t)U_0$  é a solução da equação

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t)U_0 = (A+B)S(t)U_0 \\ S(0)U_0 = U_0. \end{cases}$$

Também se  $U_0 = (u_0, u_1) \in X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$  temos que

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X)$$

logo, a primeira componente  $u(t)$  de  $U(t) = S(t)U_0$  satisfaz

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

e é a única solução fraca do sistema linear de ondas elásticas (2.1)-(2.3).

Além disso, se  $U_0 = (u_0, u_1) \in D(A) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n$

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^2(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^2(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

é única solução forte do mesmo sistema.

## Capítulo 3

# Taxas de Decaimento para a Energia Total do Sistema Linear

Neste capítulo vamos encontrar taxas de decaimento para a energia total associada ao sistema de ondas elásticas linear para diferentes condições sobre a função potencial  $V(t, x)$ .

Para encontrar essas taxas de decaimento para a energia total do sistema vamos usar o método dos multiplicadores. Para começar vamos multiplicar formalmente a equação (2.1) por  $gu$ , onde  $g(t)$  é uma função que depende somente de  $t$ :

$$\begin{aligned} & gu \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(t, x) u_t) \\ &= g(u \cdot u_{tt}) - a^2 g(u \cdot \Delta u) - (b^2 - a^2) g(u \cdot \nabla \operatorname{div} u) + gV(t, x)(u \cdot u_t) = 0. \end{aligned}$$

Usando os itens a) e c) do Lema 1.1 e o fato de que

$$\frac{d}{dt}(u \cdot u_t) = (u \cdot u_{tt}) + |u_t|^2$$

temos

$$\begin{aligned} & gu \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(t, x) u_t) \\ &= g \frac{d}{dt}(u \cdot u_t) - g|u_t|^2 - a^2 g \operatorname{div}(u : \nabla u) + a^2 g |\nabla u|^2 \tag{3.1} \\ & - (b^2 - a^2) g \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) + (b^2 - a^2) g (\operatorname{div} u)^2 + \frac{g}{2} V(t, x) \frac{d}{dt} |u|^2 = 0, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Agora vamos multiplicar formalmente a equação (2.1) por  $fu_t$ , onde

$f(t)$  é uma função que depende somente de  $t$ :

$$\begin{aligned} & f u_t \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(t, x) u_t) \\ &= f(u_t \cdot u_{tt}) - a^2 f(u_t \cdot \Delta u) - (b^2 - a^2) f(u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u) + fV(t, x)|u_t|^2 = 0. \end{aligned}$$

Usando os itens b) e d) do Lema 1.1 obtemos

$$\begin{aligned} & f u_t \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(t, x) u_t) \\ &= \frac{f}{2} \frac{d}{dt} |u_t|^2 - a^2 f \operatorname{div}(u_t : \nabla u) + \frac{a^2 f}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 \tag{3.2} \\ & - (b^2 - a^2) f \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) + \frac{(b^2 - a^2) f}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} u)^2 + fV(t, x)|u_t|^2 = 0, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Somando as igualdades (3.1) e (3.2) temos

$$\begin{aligned} & (g u + f u_t) \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(t, x) u_t) \\ &= \frac{f}{2} \frac{d}{dt} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2) + g \frac{d}{dt} (u \cdot u_t) \\ & + \frac{g}{2} V(t, x) \frac{d}{dt} |u|^2 - g |u_t|^2 - a^2 g \operatorname{div}(u : \nabla u) + a^2 g |\nabla u|^2 \\ & - (b^2 - a^2) g \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) + (b^2 - a^2) g (\operatorname{div} u)^2 - a^2 f \operatorname{div}(u_t : \nabla u) \\ & - (b^2 - a^2) f \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) + fV(t, x)|u_t|^2 = 0, \tag{3.3} \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Vamos considerar a função

$$\begin{aligned}
 e(t, x) &= \frac{f}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) \\
 &\quad + g(u \cdot u_t) + \frac{g}{2} V(t, x)|u|^2 - \frac{g_t}{2} |u|^2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} e(t, x) &= \frac{f_t}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) \\
 &\quad + \frac{f}{2} \frac{d}{dt} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) \\
 &\quad + g_t(u \cdot u_t) + g \frac{d}{dt} (u \cdot u_t) + \frac{g_t}{2} V(t, x)|u|^2 + \frac{g}{2} V_t(t, x)|u|^2 \\
 &\quad + \frac{g}{2} V(t, x) \frac{d}{dt} |u|^2 - \frac{g_{tt}}{2} |u|^2 - \frac{g_t}{2} \frac{d}{dt} |u|^2.
 \end{aligned}$$

Como  $g_t(u \cdot u_t) = \frac{g_t}{2} \frac{d}{dt} |u|^2$ , temos

$$\begin{aligned}
 &\frac{f}{2} \frac{d}{dt} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) + g \frac{d}{dt} (u \cdot u_t) + \frac{g}{2} V(t, x) \frac{d}{dt} |u|^2 \\
 &= \frac{d}{dt} e(t, x) - \frac{f_t}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) \\
 &\quad - \frac{g_t}{2} V(t, x)|u|^2 - \frac{g}{2} V_t(t, x)|u|^2 + \frac{g_{tt}}{2} |u|^2,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Substituindo a igualdade (3.5) na igualdade (3.3) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}e(t, x) - \frac{f_t}{2} (|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) - \frac{g_t}{2} V(t, x)|u|^2 \\
& - \frac{g}{2} V_t(t, x)|u|^2 + \frac{g_{tt}}{2}|u|^2 - g|u_t|^2 - a^2g \operatorname{div}(u : \nabla u) + a^2g|\nabla u|^2 \\
& - (b^2 - a^2)g \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) + (b^2 - a^2)g (\operatorname{div} u)^2 - a^2f \operatorname{div}(u_t : \nabla u) \\
& - (b^2 - a^2)f \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) + fV(t, x)|u_t|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos acima de forma adequada encontramos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}e(t, x) + \left( fV(t, x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 + \left( \frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} V(t, x) - \frac{g}{2} V_t(t, x) \right) |u|^2 \\
& + a^2 \left( g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) \left( g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 - a^2g \operatorname{div}(u : \nabla u) \\
& - (b^2 - a^2)g \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) - a^2f \operatorname{div}(u_t : \nabla u) - (b^2 - a^2)f \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) \\
& = \frac{d}{dt}e(t, x) + G(t, x) = 0, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ , onde

$$\begin{aligned}
G(t, x) &= \left( fV(t, x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 + \left( \frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} V(t, x) - \frac{g}{2} V_t(t, x) \right) |u|^2 \\
&+ a^2 \left( g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) \left( g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 - a^2 g \operatorname{div}(u : \nabla u) \\
&- (b^2 - a^2) g \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) - a^2 f \operatorname{div}(u_t : \nabla u) - (b^2 - a^2) f \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Integrando em relação a  $x$ , obtemos que

$$\frac{d}{dt} E(t) + F(t) = 0 \tag{3.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
E(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e(t, x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2) \, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} g(u \cdot u_t) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g}{2} V(t, x) |u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g_t}{2} |u|^2 \, dx
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( fV(t, x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} V(t, x) - \frac{g}{2} V_t(t, x) \right) |u|^2 dx \\
&+ a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left( g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \left( g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

para todo  $t \geq 0$ , pois, pelo Teorema da Divergência temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u : \nabla u) dx &= 0 \\
\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t : \nabla u) dx &= 0 \\
\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) dx &= 0 \\
\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) dx &= 0.
\end{aligned}$$

**Observação 3.1** *Tomando  $f = 1$  e  $g = 0$  em (3.8) obtemos a identidade da energia*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \mathcal{F}(t) = 0$$

onde

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} V(t, x) |u_t|^2 dx \quad (3.11)$$

é o termo dissipativo e

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2) dx \quad (3.12)$$

é a energia total do sistema.

Usando a propriedade da velocidade finita de propagação (ver [5],[8]) temos que  $u(t, x) = 0$  fora de  $\Omega(t)$ , onde

$$\Omega(t) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$$

com  $R$  o raio do suporte dos dados iniciais.

Assim, para todo  $t \geq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{\Omega(t)} \frac{f}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2) dx \\ &+ \int_{\Omega(t)} g(u \cdot u_t) dx + \int_{\Omega(t)} \frac{g}{2} V(t, x) |u|^2 dx - \int_{\Omega(t)} \frac{g_t}{2} |u|^2 dx \quad (3.13) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{\Omega(t)} \left( fV(t, x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 dx \\
&+ \int_{\Omega(t)} \left( \frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} V(t, x) - \frac{g}{2} V_t(t, x) \right) |u|^2 dx \\
&+ a^2 \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 dx + (b^2 - a^2) \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Nas próximas seções assumiremos diferentes condições para a função potencial  $V(t, x)$ . Para cada condição encontraremos taxas de decaimento para a energia total do sistema linear (2.1)-(2.3).

O roteiro da prova será o seguinte: Pela identidade (3.8) temos que

$$\frac{d}{dt} E(t) + F(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.15}$$

Vamos encontrar funções  $f$  e  $g$  de tal forma que:

i)  $F(t) \geq 0, \quad \forall t \geq t_0.$

ii)  $(1+t)^\kappa \mathcal{E}(t) \leq CE(t), \quad \forall t \geq t_0,$

com  $C$  e  $t_0$  constantes positivas, onde  $\mathcal{E}(t)$  é a energia total do sistema definida em (3.12).

Dessa forma, integrando (3.15) em  $(t, t_0)$  e usando os itens i) e ii)

acima concluímos que a energia total decai para zero mais rápido que a função  $(1+t)^{-\kappa}$ .

### 3.1 Função potencial $V(x) \geq \frac{C_0}{1+|x|}$

Consideramos o potencial  $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$V(x) \geq \frac{C_0}{1+|x|} \quad (3.16)$$

onde  $C_0$  é uma constante positiva.

Também consideramos as seguintes funções positivas:

$$h(t) = 1+t, \quad f(t) = (1+t)^{1-\delta} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}$$

com  $t \geq 0$  e  $\delta \geq 0$  tal que:

$$1 - \frac{C_0}{b} < \delta < 1 \quad \text{se} \quad 0 < C_0 \leq b$$

$$0 \leq \delta < 1 \quad \text{se} \quad 0 < b < C_0.$$

Vamos supor as seguintes hipóteses sobre os dados iniciais

$$[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n \text{ e}$$

$$\text{supp}(u_0) \cup \text{supp}(u_1) \subset \{|x| \leq R\},$$

onde  $R > 0$  é um número real fixo.

**Lema 3.1** *Considerando as hipóteses acima, existe  $t_0 > 0$  tal que as funções  $h(t)$ ,  $f(t)$  e  $g(t)$  satisfazem:*

$$i) \quad 2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

$$ii) \quad 2g(t) - f_t(t) = 0;$$

$$iii) \quad g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) - g(t)V_t(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

$$iv) \quad g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

para todo  $t \geq t_0$  e  $\Omega(t) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$  onde  $R$  é o raio do suporte dos dados iniciais.

**Demonstração:**

i) Usando as definições de  $f(t)$  e  $g(t)$  temos

$$\begin{aligned} & 2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \\ &= 2(1+t)^{1-\delta}V(x) - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} \\ &= 2(1+t)^{-\delta}((1+t)V(x) - 1 + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 2(1+t)^{-\delta} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+|x|} - 1 + \delta \right) \\ &\geq 2(1+t)^{-\delta} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+bt+R} - 1 + \delta \right), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$ .

Observe que  $(1+t)^{-\delta} > 0$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+bt+R} - 1 + \delta \right) = \frac{C_0}{b} - 1 + \delta > 0,$$

pois, se  $0 < C_0 \leq b$  temos que  $1 - \frac{C_0}{b} < \delta$  e, portanto,  $\frac{C_0}{b} - 1 + \delta > 0$ .

Se  $0 < b < C_0$  temos que  $0 < \frac{C_0}{b} - 1$  e assim  $0 < \delta < \frac{C_0}{b} - 1 + \delta$ .

Portanto, existe  $t_0 > 0$  tal que

$$2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \quad \text{para todo } t \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega(t).$$

ii)  $2g(t) - f_t(t) = (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} = 0$ , para todo  $t \geq 0$ ,

isto é, ii) é trivial.

iii) Da definição de  $g(t)$  e sendo  $V_t(x) = 0$  temos

$$\begin{aligned}
& g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) - g(t)V_t(x) \\
&= g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) \\
&= \frac{1-\delta}{2}(-\delta)(-1-\delta)(1+t)^{-2-\delta} + \frac{1-\delta}{2}\delta(1+t)^{-1-\delta}V(x) \\
&= \delta\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-2-\delta}(1+\delta+(1+t)V(x)) \geq 0,
\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ , pois  $\delta < 1$ .

iv) Usando as definições de  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  temos

$$\begin{aligned}
& g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \\
&= \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}V(x) + \delta\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} - \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} \\
&= \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}V(x) - (1-\delta)\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} \\
&= \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}((1+t)V(x) - 1 + \delta) \\
&\geq \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} \left( (1+t)\frac{C_0}{1+bt+R} - 1 + \delta \right),
\end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$  e  $t \geq 0$ .

Analogamente ao que foi feito no item i) concluímos que existe  $t_0 > 0$

tal que

$g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0$ , para todo  $t \geq t_0$  e  $x \in \Omega(t)$ .

■

Usando o Lema 3.1 concluímos que

$$F(t) \geq 0, \tag{3.17}$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $F(t)$  foi definido em (3.10).

Por (3.8) temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -F(t) \leq 0,$$

para todo  $t \geq t_0$ . Integrando de  $t_0$  a  $t$ , temos,

$$E(t) \leq E(t_0), \tag{3.18}$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Nos próximos dois lemas provaremos que  $(1+t)^{1-\delta} \mathcal{E}(t) \leq CE(t)$ ,

para todo  $t \geq t_0$ .

**Lema 3.2** *Com as hipóteses do início da seção temos que*

$$\int_{\Omega(t)} \left( (g(t)V(x) - g_t(t))|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \right) dx \geq 0,$$

para todo  $t \geq t_0$ .

**Demonstração:** Pelo item iv) do Lema 3.1 temos

$$g(t)V(x) - g_t(t) \geq h^{-1}(t)g(t),$$

para todo  $t \geq t_0$  e  $x \in \Omega(t)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} \left( (g(t)V(x) - g_t(t))|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \right) dx \\ & \geq \int_{\Omega(t)} \left( h^{-1}(t)g(t)|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \right) dx \geq 0, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_0$ , pois,

$$\int_{\Omega(t)} -2g(t)(h^{-\frac{1}{2}}(t)u \cdot h^{\frac{1}{2}}(t)u_t) dx \leq \int_{\Omega(t)} \left( g(t)h^{-1}(t)|u|^2 + g(t)h(t)|u_t|^2 \right) dx.$$

■

**Lema 3.3** *Seja  $u = u(t, x)$  uma solução fraca do sistema linear de ondas*

elásticas. Assumindo as hipóteses do início da seção temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} (f(t) - h(t)g(t)) |u_t|^2 + f(t)(a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) dx \leq E(t)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{\Omega(t)} \frac{f}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) dx \\ &\quad + \int_{\Omega(t)} g(u \cdot u_t) dx + \int_{\Omega(t)} \frac{g}{2} V(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega(t)} \frac{g_t}{2} |u|^2 dx \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e pelo Lema 3.2

$$\int_{\Omega(t)} (gV(x) - g_t) |u|^2 dx + 2 \int_{\Omega(t)} g(u \cdot u_t) dx \geq - \int_{\Omega(t)} hg |u_t|^2 dx,$$

para todo  $t \geq t_0$  e  $x \in \Omega(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} (f (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) - hg |u_t|^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} ((f - hg) |u_t|^2 + f (a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2)) dx, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_0$ .

■

**Teorema 3.1** *Seja  $u = u(t, x)$  uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3).*

*Assumindo as hipóteses do início da seção tem-se que*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-(1-\delta)} E(t_0) \quad (3.19)$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $k^{-1} = \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\}$ .

**Demonstração:** Substituindo  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  na conclusão do Lema 3.3 e usando (3.18) temos

$$\begin{aligned} E(t_0) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \left( (1+t)^{1-\delta} - \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{1-\delta} \right) |u_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \int_{\Omega(t)} a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div}(u))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \int_{\Omega(t)} \left( 1 - \frac{1-\delta}{2} \right) |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div}(u))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \int_{\Omega(t)} \frac{1+\delta}{2} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\} \int_{\Omega(t)} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2 dx \\ &= (1+t)^{1-\delta} \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\} \mathcal{E}(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Portanto,

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{\delta-1}E(t_0)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

■

Como o funcional  $\mathcal{E}(t)$  é contínuo existe  $C > 0$  tal que

$$\mathcal{E}(t) \leq CE(t_0)(1+t)^{\delta-1}$$

para todo  $t \geq 0$ .

## 3.2 Função potencial $V(t, x) \geq \frac{C_0}{1 + |x| + t}$

Consideramos o potencial  $V(t, x) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$  tal que

$$V(t, x) \geq \frac{C_0}{1 + |x| + t} \tag{3.20}$$

onde  $C_0$  é uma constante positiva.

Também vamos precisar de uma condição sobre a derivada de  $V(t, x)$ .

Assumindo que  $V_t(t, x) \leq 0$ , para todo  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ .

Consideramos também as seguintes funções positivas:

$$h(t) = 1 + t, \quad f(t) = (1 + t)^{1-\delta} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{1-\delta}{2}(1 + t)^{-\delta}$$

com  $t \geq 0$  e  $\delta \geq 0$  tal que

$$1 - \frac{C_0}{b+1} < \delta < 1 \quad \text{se} \quad 0 < C_0 \leq b+1$$

$$0 \leq \delta < 1 \quad \text{se} \quad 0 < b+1 < C_0.$$

As hipóteses sobre os dados iniciais são as mesmas da seção anterior.

**Lema 3.4** *Com as hipóteses acima temos que existe  $t_0 > 0$  tal que as funções  $h(t)$ ,  $f(t)$  e  $g(t)$  satisfazem:*

$$i) \quad 2f(t)V(t, x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

$$ii) \quad 2g(t) - f_t(t) = 0;$$

$$iii) \quad g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) - g(t)V_t(t, x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$iv) \quad g(t)V(t, x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

para todo  $t \geq t_0$  e  $\Omega(t) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$  onde  $R$  é o raio do suporte dos dados iniciais.

**Demonstração:**

i) Substituindo  $f(t)$  e  $g(t)$  temos

$$\begin{aligned}
 & 2f(t)V(t, x) - f_t(t) - 2g(t) \\
 &= 2(1+t)^{1-\delta}V(t, x) - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} \\
 &= 2(1+t)^{-\delta}((1+t)V(t, x) - 1 + \delta) \\
 &\geq 2(1+t)^{-\delta} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+|x|+t} - 1 + \delta \right) \\
 &\geq 2(1+t)^{-\delta} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+(b+1)t+R} - 1 + \delta \right),
 \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$ .

Tem-se que  $(1+t)^{-\delta} > 0$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+(b+1)t+R} - 1 + \delta \right) = \frac{C_0}{b+1} - 1 + \delta > 0,$$

devido as hipóteses sobre  $\delta$  no início desta seção.

Portanto, existe  $t_0 > 0$  tal que

$$2f(t)V(t, x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega(t), \text{ com } t \geq t_0.$$

ii)  $2g(t) - f_t(t) = (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} = 0$ , para todo  $t \geq 0$ .

iii) Como  $V_t(t, x) \leq 0$  temos da limitação inferior de  $V(t, x)$  que

$$\begin{aligned}
 & g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) - g(t)V_t(t, x) \\
 & \geq g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) \\
 & = \frac{1-\delta}{2}(-\delta)(-1-\delta)(1+t)^{-2-\delta} + \frac{1-\delta}{2}\delta(1+t)^{-1-\delta}V(t, x) \\
 & = \delta\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-2-\delta}(1+\delta+(1+t)V(t, x)) \geq 0,
 \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ , pois  $\delta < 1$ .

iv) Usando a definição de  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  temos da hipótese da limitação sobre  $V(t, x)$  que

$$\begin{aligned}
 & g(t)V(t, x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \\
 & = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}V(t, x) + \delta\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} - \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} \\
 & = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}V(t, x) - (1-\delta)\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} \\
 & = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}((1+t)V(t, x) - 1 + \delta) \\
 & \geq \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} \left( (1+t) \frac{C_0}{1+(b+1)t+R} - 1 + \delta \right),
 \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$ , com  $t \geq 0$ .

Analogamente ao que foi feito na prova do item i) deste lema concluí-

mos que

$$g(t)V(t, x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \text{ para todo } t \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega(t).$$

■

Usando o Lema 3.4 concluímos que

$$F(t) \geq 0, \tag{3.21}$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $F(t)$  foi definido em (3.10).

Logo, por (3.8),

$$\frac{d}{dt}E(t) = -F(t) \leq 0,$$

para todo  $t \geq t_0$ . Integrando de  $t_0$  a  $t$ , temos,

$$E(t) \leq E(t_0) \tag{3.22}$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, vamos encontrar taxas de decaimento para a energia total do sistema linear. As demonstrações

dos dois próximos lemas são análogas as demonstrações dos Lemas 3.2 e 3.3, respectivamente.

**Lema 3.5** *Com as hipóteses do Lema 3.4 temos que*

$$\int_{\Omega(t)} \left( (g(t)V(t, x) - g_t(t))|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \right) dx \geq 0,$$

para todo  $t \geq t_0$ .

**Lema 3.6** *Supondo que  $u = u(t, x)$  é uma solução fraca do sistema com as hipóteses do Lema 3.4 temos que*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \left( (f(t) - h(t)g(t))|u_t|^2 + f(t)(a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) \right) dx \leq E(t) \tag{3.23}$$

para todo  $t \geq t_0$ .

**Teorema 3.2** *Seja  $u = u(t, x)$  uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3).*

*Assumindo as hipóteses do Lema 3.4 tem-se a seguinte estimativa para a energia total*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-(1-\delta)}E(t_0), \quad \forall t \geq t_0, \tag{3.24}$$

onde  $k^{-1} = \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\}$ .

A demonstração do Teorema 3.2 é análoga a demonstração do Teorema 3.1.

### 3.3 Função potencial $V(x) \geq \frac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$

Vamos agora considerar o potencial  $V(t, x) = V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$V(x) \geq \frac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$$

com  $C_0 > 0$  uma constante e  $\alpha \in (0, 1)$ .

Observamos que pela propriedade da velocidade finita de propagação tem-se

$$V(x) \geq \frac{C_0}{(1+bt+R)^\alpha} \tag{3.25}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$ .

Para conseguir estimar a energia do sistema vamos começar estimando a função  $F(t)$  escolhendo funções  $f(t)$  e  $g(t)$  adequadas de tal forma que

tenhamos

$$F(t) \geq 0.$$

Escolhamos as funções positivas:

$$h(t) = 1 + t, \quad f(t) = 1 + t \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{1}{2}$$

com  $t \geq 0$ .

As hipóteses sobre os dados iniciais são as mesmas da seção anterior.

**Lema 3.7** *Com as hipóteses acima temos que existe  $t_0 > 0$  tal que as funções  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  satisfazem:*

$$i) \quad 2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

$$ii) \quad 2g(t) - f_t(t) = 0;$$

$$iii) \quad g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) - g(t)V_t(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$iv) \quad g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(t);$$

para todo  $t \geq t_0$  com  $\Omega(t) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$  onde  $R$  é o raio do suporte dos dados iniciais.

**Demonstração:** Notamos que a demonstração dos itens ii) e iii) são imediatas.

i) Usando a limitação inferior sobre  $V(t, x)$  e as definições das funções  $f(t)$  e  $g(t)$  combinadas com (3.25) temos que

$$\begin{aligned}
 & 2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \\
 &= 2(1+t)V(x) - 2 \\
 &\geq \frac{2(1+t)C_0}{(1+bt+R)^\alpha} - 2 \\
 &\geq 2(1+t)^{1-\alpha} \left( \frac{C_0(1+t)^\alpha}{(1+bt+R)^\alpha} - (1+t)^{\alpha-1} \right),
 \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$ , com  $t \geq 0$ .

Como  $0 < \alpha < 1$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{C_0(1+t)^\alpha}{(1+bt+R)^\alpha} - (1+t)^{\alpha-1} \right) = \frac{C_0}{b^\alpha} > 0.$$

Portanto, existe  $t_0 > 0$  tal que

$$2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega(t), \text{ com } t \geq t_0.$$

iv) Substituindo  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  e usando (3.25) temos

$$\begin{aligned} g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \\ \geq \frac{C_0}{2(1+bt+R)^\alpha} - \frac{1}{2}(1+t)^{-1} \\ = \frac{1}{2}(1+t)^{-\alpha} \left( \frac{C_0(1+t)^\alpha}{(1+bt+R)^\alpha} - (1+t)^{\alpha-1} \right) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega(t)$ , com  $t \geq 0$ .

Analogamente ao que foi feito no item i) concluímos que

$$g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega(t), \text{ com } t \geq t_0.$$

■

**Observação 3.2** Usando o Lema 3.7 concluímos que

$$F(t) \geq 0, \tag{3.26}$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $F(t)$  foi definido em (3.10).

Logo, por (3.8),

$$\frac{d}{dt}E(t) = -F(t) \leq 0,$$

para todo  $t \geq t_0$ . Integrando de  $t_0$  a  $t$ , temos,

$$E(t) \leq E(t_0). \quad (3.27)$$

**Lema 3.8** *Com as hipóteses do Lema 3.7 temos que para todo  $t \geq t_0$ , vale que*

$$\int_{\Omega(t)} \left( (g(t)V(x) - g_t(t))|u|^2 + h(t)g(t)|u_i|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \right) dx \geq 0.$$

**Lema 3.9** *Supondo que  $u = u(t, x)$  é uma solução fraca do sistema e assumindo as hipóteses do Lema 3.7 temos que para todo  $t \geq t_0$*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} (f(t) - h(t)g(t))|u_t|^2 + f(t)(a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) dx \leq E(t).$$

As demonstrações dos Lemas 3.8 e 3.9 são análogas as demonstrações dos Lemas 3.2 e 3.3, respectivamente.

**Teorema 3.3** *Seja  $u = u(t, x)$  uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3) com as hipóteses do Lema 3.7. Então*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-1}E(t_0) \quad (3.28)$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $k^{-1} = \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\}$ .

A demonstração do Teorema 3.3 é análogo ao Teorema 3.1

## 3.4 Função potencial de Euler-Poisson - Darboux

Nesta seção vamos considerar a função potencial  $V(t, x)$  de Euler-Poisson-Darboux. Com as hipóteses sobre  $V(t, x)$  vamos obter taxas de decaimento da energia total sem a necessidade de dados iniciais com suporte compacto.

Esse potencial satisfaz a hipótese  $V(t, x) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$  com

$$(1+t)V(t, x) \geq A(x),$$

onde  $A(x)$  é uma função regular limitada em  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} A(x) > 0.$$

Além disso, assumimos a condição de que  $V_t(t, x) \leq 0$ , para todo

$(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ .

Escolhemos  $\delta \geq 0$  tal que

$$1 - \alpha \leq \delta < 1 \quad \text{se } 0 < \alpha < 1$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \quad \text{se } \alpha \geq 1.$$

Neste caso precisamos refazer o Lema 3.1 e os outros lemas terão demonstrações análogas.

**Lema 3.10** *Supondo que  $V(t, x)$  é uma função potencial de Euler-Poisson-Darboux, temos que as funções*

$$h(t) = 1 + t, \quad f(t) = (1 + t)^{1-\delta} \quad e \quad g(t) = \frac{1-\delta}{2}(1 + t)^{-\delta},$$

satisfazem:

$$i) \quad 2f(t)V(t, x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$ii) \quad 2g(t) - f_t(t) = 0;$$

$$iii) \quad g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) - g(t)V_t(t, x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$iv) \quad g(t)V(t, x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Note que a demonstração do item ii) é imediata.

i) Usando as definições de  $f(t)$  e  $g(t)$  temos, para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ , que

$$\begin{aligned}
 & 2f(t)V(t, x) - f_t(t) - 2g(t) \\
 &= 2(1+t)^{1-\delta}V(t, x) - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} \\
 &= 2(1+t)^{-\delta}((1+t)V(t, x) - 1 + \delta) \\
 &\geq 2(1+t)^{-\delta}(A(x) - 1 + \delta) \\
 &\geq 2(1+t)^{-\delta}(\alpha - 1 + \delta) \geq 0,
 \end{aligned}$$

pois, se  $0 < \alpha < 1$  temos que  $1 - \alpha \leq \delta < 1$  portanto  $0 \leq \alpha - 1 + \delta$  e se

$\alpha \geq 1$  temos que  $\alpha - 1 \geq 0$  e assim  $\alpha - 1 + \delta \geq 0$ .

iii) Da definição de  $g(t)$  e como  $V_t(t, x) \leq 0$  temos para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$  que

$$\begin{aligned}
 & g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) - g(t)V_t(t, x) \\
 &\geq g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) \\
 &= \frac{1-\delta}{2}(-\delta)(-1-\delta)(1+t)^{-2-\delta} + \frac{1-\delta}{2}\delta(1+t)^{-1-\delta}V(t, x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-2-\delta} (1+\delta + (1+t)V(t, x)) \\
&\geq \delta \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-2-\delta} (1+\delta + A(x)) \\
&\geq \delta \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-2-\delta} (1+\delta + \alpha) \geq 0.
\end{aligned}$$

iv) As definições de  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  implicam, para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ , que

$$\begin{aligned}
&g(t)V(t, x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \\
&= \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-\delta} V(t, x) + \delta \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-1-\delta} - \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-1-\delta} \\
&= \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-\delta} V(t, x) - (1-\delta) \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-1-\delta} \\
&= \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-1-\delta} ((1+t)V(t, x) - 1 + \delta) \\
&\geq \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-1-\delta} (A(x) - 1 + \delta) \\
&\geq \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{-1-\delta} (\alpha - 1 + \delta) \geq 0,
\end{aligned}$$

pela definição de  $\delta$ .

Isso conclui a prova deste lema. ■

Usando o lema anterior e procedendo como na demonstração do Teorema 3.1 podemos facilmente provar o seguinte resultado.

**Teorema 3.4** *Seja  $[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ . Seja  $u = u(t, x)$  uma solução fraca global para o sistema (2.1)-(2.3) com  $V(t, x)$  o potencial de Euler-Poisson-Darboux. Então para todo  $t \geq 0$  é válido que*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-(1-\delta)} E(t_0) \quad (3.29)$$

onde  $k^{-1} = \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\}$ .

## Capítulo 4

# Sistema Semilinear de Ondas Elásticas

Neste capítulo vamos estudar a existência de soluções globais e o comportamento assintótico da energia total associada ao seguinte sistema semilinear de ondas elásticas em  $\mathbb{R}^n$ :

$$u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(x) u_t = |u|^{p-1} u \quad (4.1)$$

$$u(0, x) = \epsilon u_0(x) \quad (4.2)$$

$$u_t(0, x) = \epsilon u_1(x) \quad (4.3)$$

onde  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$  com  $0 < a^2 < b^2$  e  $\epsilon > 0$ . E ainda, assumimos a seguinte condição sobre a potência  $p$  que aparece no termo não linear:

$$\begin{aligned} \text{se } n = 2 \quad \text{então } 1 + \frac{4}{n-1} < p < \infty \\ \text{se } n \geq 3 \quad \text{então } 1 + \frac{4}{n-1} < p < \frac{n+2}{n-2}. \end{aligned}$$

Considere  $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$V(x) \geq \frac{C_0}{1 + |x|},$$

onde  $C_0$  é uma constante positiva.

Vamos supor as seguintes hipóteses sobre os dados iniciais

$$[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n \text{ e}$$

$$\text{supp}(u_0) \cup \text{supp}(u_1) \subset \{|x| \leq R\},$$

onde  $R > 0$  é um número real fixo.

A constante  $\epsilon > 0$  que aparece nas condições iniciais será usada na prova da existência de solução global. Para  $[u_0, u_1]$  fixos, vamos provar que existe  $\epsilon_2$  tal que o problema (4.1)-(4.3) possui solução global, desde que,  $\epsilon < \epsilon_2$ , ou seja, provaremos a existência de solução global somente para dados iniciais pequenos.

Observe que o termo não linear não aparece na energia. Isso dificulta a análise matemática do problema.

## 4.1 Existência de soluções locais

Nesta seção, vamos apresentar o resultado de existência de solução local para o sistema (4.1)-(4.3).

Considerando a mesma notação usada no Capítulo 2, podemos reescrever o sistema (4.1)-(4.3) da forma:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = (A + B)U(t) + F(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $U(t) = (u(t), u_t(t))$ ,  $U_0 = (u_0, u_1)$ ,  $F(U(t)) = (0, |u|^{p-1}u)$  e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  e  $B : X \rightarrow X$  são os operadores lineares definidos no Capítulo 2.

Usando a teoria de semigrupos obtém-se o seguinte resultado:

**Teorema 4.1** *Suponha que  $p$  e  $V = V(x)$  satisfazem as condições apresentadas no início deste capítulo. Então, para dados iniciais  $(u_0, u_1) \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$  com suporte contido no conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq R\}$ ,  $R > 0$  fixo, o problema (4.1)-(4.3) admite uma única solução local fraca  $u = u(t, x)$ , definida em algum intervalo maximal de existência  $(0, T_m)$ , tal que*

$$u \in C([0, T_m]; (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1([0, T_m]; (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

e satisfaz a propriedade da velocidade finita de propagação

$$u(t, x) = 0 \quad \text{para} \quad |x| \geq bt + R, \quad 0 \leq t < T_m.$$

**Observação 4.1** *O tempo  $T_m$  depende dos dados iniciais e de  $\epsilon > 0$ .*

*Assim,  $T_m = T_m(\epsilon)$  e*

$$T_m(\epsilon) \geq \frac{C}{\epsilon}$$

com  $C > 0$  uma constante dependendo dos dados iniciais.

Além disso, se  $T_m(\epsilon) < \infty$  então,

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} \{ \|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\|^2 \} = +\infty. \quad (4.5)$$

## 4.2 Existência de soluções globais e taxas de decaimento para a energia

Na seção anterior mostramos que o sistema (4.1)-(4.3) tem solução local. Nesta seção, vamos provar a existência de soluções globais para dados iniciais pequenos e encontrar taxas de decaimento para a energia total associada ao sistema semilinear (4.1)-(4.3). Nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 4.2** *Assumindo as hipóteses do início do capítulo, supondo a condição de que*

$$F(n, p) = \frac{n(p-1) - p - 3}{p-1} > 1 - \frac{C_0}{b}$$

se  $0 < C_0 \leq b$  e considerando  $\delta$  um número satisfazendo

$$1 - \frac{C_0}{b} < \delta < F(n, p) \quad \text{se } 0 < C_0 \leq b$$

$$0 \leq \delta < F(n, p) \quad \text{se } C_0 > b,$$

então existe  $\epsilon_2 > 0$  tal que para todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$  o problema (4.1)-(4.3) tem uma única solução global

$$u \in C([0, \infty), (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1([0, \infty), (L^2(\mathbb{R}^n))^n),$$

satisfazendo

$$\mathcal{E}(t) \leq KI_0(1+t)^{-(1-\delta)},$$

para todo  $t \geq 0$  com  $K$  uma constante positiva dependendo de  $\delta$ ,  $R$ ,  $p$  e  $\|V\|_{L^\infty}$ , onde  $I_0 = \|u_1\|^2 + a^2\|\nabla u_0\|^2 + (b^2 - a^2)\|\operatorname{div} u_0\|^2$  e

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2)\|\operatorname{div} u\|^2)$$

é a energia total do sistema.

**Observação 4.2** Para todo  $n \geq 2$  tem-se que  $0 < F(n, p) < 1$ .

De fato, por hipótese  $p - 1 > \frac{4}{n - 1}$ , assim,

$$F(n, p) = \frac{n(p - 1) - p - 3}{p - 1} = \frac{(p - 1)(n - 1) - 4}{p - 1} > 0$$

para todo  $n \geq 2$ .

Se  $n = 2$  temos  $F(2, p) = \frac{2(p - 1) - p - 3}{p - 1} = \frac{p - 5}{p - 1} < 1$ , pois  $p - 5 < p - 1$ .

Agora, se  $n \geq 3$  temos por hipótese que  $p < \frac{n + 2}{n - 2}$ . Assim,  $n(p - 1) - p - 3 < p - 1$  e, portanto,

$$F(n, p) = \frac{n(p - 1) - p - 3}{p - 1} < 1.$$

Antes de demonstrar o Teorema 4.2 vamos encontrar algumas identidades e provar alguns lemas.

Multiplicando a equação (4.1) por  $(fu_t + gu)$  obtemos

$$\begin{aligned} & (fu_t + gu) \cdot (u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + V(x)u_t) \\ &= f|u|^{p-1}(u \cdot u_t) + g|u|^{p+1} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{p+1} |u|^{p+1} \right) - \frac{f_t}{p+1} |u|^{p+1} + g|u|^{p+1}, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde foi usado que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{f}{p+1} |u|^{p+1} \right) = \frac{f_t}{p+1} |u|^{p+1} + f |u|^{p-1} (u \cdot u_t).$$

Observe que o termo que aparece a esquerda na igualdade acima é o mesmo termo que apareceu no Capítulo 3. Assim, integrando em relação a  $x$  obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) + F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( g - \frac{f_t}{p+1} \right) |u|^{p+1} + \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx \quad (4.6)$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f}{2} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} g(u \cdot u_t) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g}{2} V(x) |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g_t}{2} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{\Omega(t)} \left( fV(x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 dx \\
&+ \int_{\Omega(t)} \left( \frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} V(x) - \frac{g}{2} V_t(x) \right) |u|^2 dx \\
&+ a^2 \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 dx + (b^2 - a^2) \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 dx
\end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , com  $E(t)$  e  $F(t)$  os mesmos funcionais usados no Capítulo 3.

Considere as seguintes funções positivas:

$$h(t) = 1 + t, \quad f(t) = (1 + t)^{1-\delta} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{1-\delta}{2} (1 + t)^{-\delta}$$

com  $t \geq 0$  e  $\delta \geq 0$ , com  $\delta$  satisfazendo a hipótese do Teorema 4.2, ou seja,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{C_0}{b} < \delta < F(n, p) < 1 \quad \text{se} \quad 0 < C_0 \leq b \\
0 \leq \delta < F(n, p) < 1 \quad \text{se} \quad C_0 > b.
\end{aligned}$$

Vimos na Seção 4.1 que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_m(\epsilon) = +\infty$ . Assim, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $t_0 < T_m$ , para todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , onde  $t_0$  é a constante que aparece no Lema 3.1. Os próximos resultados são válidos para  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ .

Sabemos pelo Lema 3.1 que  $F(t) \geq 0$ , para todo  $t_0 \leq t < T_m$ . Assim, pela igualdade (4.6) temos

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{p+1} \right) |u|^{p+1} + \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx,$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ . Integrando de  $t_0$  a  $t$ , temos,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{p+1} \right) |u|^{p+1} dx ds \\ &\quad + \frac{f}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx - \frac{f(t_0)}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u(t_0)|^{p+1} dx \end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Usando o Lema 3.2 temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} (f - hg) |u_t|^2 + f(a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) dx \\ &\leq E(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{\Omega(t)} \left( g - \frac{f_t}{p+1} \right) |u|^{p+1} dx ds \\ &\quad + \frac{f}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx - \frac{f(t_0)}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u(t_0)|^{p+1} dx, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Como  $f(t_0) > 0$  temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} (f - hg)|u_t|^2 + f(a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2) dx \\ & \leq E(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{\Omega(s)} \left( g - \frac{f_t}{p+1} \right) |u|^{p+1} dx ds + \frac{f}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx, \end{aligned} \quad (4.9)$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Os dois próximos lemas serão importantes na demonstração do Teorema 4.2.

**Lema 4.1** *Seja  $u = u(t, x)$  uma solução local em  $[0, T_m)$ . Então para cada  $t \in [0, T_m)$*

$$E(t) \leq C_R(t)\mathcal{E}(t)$$

onde  $C_R(t)$  é uma função positiva dependendo de  $t$ ,  $R$  e  $\|V\|_{L^\infty}$ , onde  $E(t)$  foi definido em (3.13).

**Demonstração:** Inicialmente vamos estimar algumas integrais que aparecem no funcional  $E(t)$  por termos da energia total do sistema.

Usando a desigualdade de Young tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} g(u \cdot u_t) dx &\leq \int_{\Omega(t)} g |u| |u_t| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} g |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} g |u_t|^2 dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré temos

$$\int_{\Omega(t)} g(u \cdot u_t) dx \leq \frac{C_p^2}{2} (bt + R)^2 \int_{\Omega(t)} g |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} g |u_t|^2 dx,$$

para todo  $0 \leq t < T_m$ .

Usando novamente a desigualdade de Poincaré tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} gV(x) |u|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} g \|V\|_{L^\infty} |u|^2 dx \\ &\leq \frac{g}{2} \|V\|_{L^\infty} C_p^2 (bt + R)^2 \int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} g_t |u|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} |g_t| |u|^2 dx \\ &\leq \frac{|g_t|}{2} C_p^2 (bt + R)^2 \int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
 E(t) &\leq \frac{1}{2} (f + g) \int_{\Omega(t)} |u_t|^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} (a^2 f + (g + g \|V\|_{L^\infty} + |g_t|) C_p^2 (bt + R)^2) \int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) f \int_{\Omega(t)} (\operatorname{div} u)^2 dx \\
 &\leq C_R(t) \mathcal{E}(t),
 \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde

$$C_R(t) = \max\{(f + g), a^{-2}(a^2 f + (g + g \|V\|_{L^\infty} + |g_t|) C_p^2 (bt + R)^2)\}.$$

■

**Lema 4.2** *Seja  $u = u(t, x)$  a solução fraca local do sistema (4.1)-(4.3).*

*Então existe  $T = T(\epsilon) \in [0, T_m)$  tal que para todo  $t \in [0, T]$  temos*

$$\mathcal{E}(t) \leq 2\mathcal{E}(0) = \epsilon^2 \{\|u_1\|^2 + a^2 \|\nabla u_0\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u_0\|^2\} = \epsilon^2 I_0$$

com

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = \infty.$$

**Demonstração:** Usando a identidade da energia

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \int_{\Omega(t)} V(x) |u_t|^2 dx = \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx$$

e integrando de 0 a  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) + \int_0^t \int_{\Omega(s)} V(x) |u_t|^2 dx ds \\ = \mathcal{E}(0) + \frac{1}{p+1} \left( \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx - \int_{\Omega(0)} |u(0)|^{p+1} dx \right) \\ \leq \mathcal{E}(0) + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx, \end{aligned} \quad (4.10)$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ .

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (ver Capítulo 1 - Seção 1.5) com  $m = 1$ ,  $k = 0$ ,  $z = p + 1$ ,  $r = 2$  e  $q = 2$ , podemos estimar a

última integral da forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx &\leq \left( C_g \left( \int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{\theta}{2}} \left( \int_{\Omega(t)} |u|^2 dx \right)^{\frac{1-\theta}{2}} \right)^{p+1} \\
 &= (C_g)^{p+1} \left( \int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{\theta(p+1)}{2}} \left( \int_{\Omega(t)} |u|^2 dx \right)^{\frac{(1-\theta)(p+1)}{2}} \\
 &= (C_g)^{p+1} \|\nabla u\|^{\theta(p+1)} \|u\|^{(1-\theta)(p+1)},
 \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde  $\theta = \frac{n(p-1)}{2(p+1)}$ . Pelas hipóteses sobre  $p$  é fácil ver que  $0 < \theta < 1$ .

Usando agora a desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx &\leq (C_g)^{p+1} \|\nabla u\|^{\theta(p+1)} (C_p(bt+R) \|\nabla u\|)^{(1-\theta)(p+1)} \\
 &= (C_g)^{p+1} (C_p(bt+R))^{(1-\theta)(p+1)} \|\nabla u\|^{\theta(p+1)+(1-\theta)(p+1)} \\
 &= (C_g)^{p+1} (C_p(bt+R))^{(1-\theta)(p+1)} \|\nabla u\|^{p+1}, \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ .

Usando a desigualdade acima em (4.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &+ \int_0^t \int_{\Omega(s)} V(x)|u_t|^2 dx ds \\
&\leq \mathcal{E}(0) + \frac{1}{p+1} (C_g)^{p+1} (C_p(bt+R))^{(1-\theta)(p+1)} \|\nabla u\|^{p+1} \\
&= \mathcal{E}(0) + C(p,n)(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)} \|\nabla u\|^{p+1},
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde  $C(p,n) = \frac{1}{p+1} (C_g)^{p+1} (C_p)^{(1-\theta)(p+1)} > 0$ .

Como  $V(x) > 0$  e

$$a^2 \|\nabla u\|^2 \leq \|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2 = 2\mathcal{E}(t),$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq \mathcal{E}(0) + C(p,n)(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)} (2a^{-2}\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}} \\
&= \mathcal{E}(0) + C(p,n)a^{-(p+1)} 2^{\frac{p+1}{2}} (bt+R)^{(1-\theta)(p+1)} \mathcal{E}(t)^{\frac{p+1}{2}} \\
&= \mathcal{E}(0) + C_1(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)} \mathcal{E}(t)^{\frac{p+1}{2}} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde  $C_1 = C(p,n)a^{-(p+1)} 2^{\frac{p+1}{2}}$ .

Considere o primeiro  $T > 0$  tal que  $\mathcal{E}(T) = 2\mathcal{E}(0)$ , como  $\mathcal{E}(0)$  depende de  $\epsilon$ ,  $T = T(\epsilon)$  também depende.

Caso não exista tal  $T$  o lema está demonstrado, basta escolher  $T < T_m$ , pois neste caso,  $\mathcal{E}(t) < 2\mathcal{E}(0)$  para todo  $t \in [0, T_m)$ .

Assim,  $\mathcal{E}(t) < 2\mathcal{E}(0)$  para todo  $t \in [0, T)$ . Aplicando  $t = T$  na desigualdade (4.12) temos

$$2\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(0) + C_1(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)} \mathcal{E}(T)^{\frac{p+1}{2}},$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) &\leq C_1(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)} \mathcal{E}(T)^{\frac{p+1}{2}} \\ &= C_1(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)} 2^{\frac{p+1}{2}} \mathcal{E}(0)^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)} \geq C_1^{-1} 2^{-\frac{p+1}{2}} \mathcal{E}(0)^{1-\frac{p+1}{2}}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{b} \left( \left( C_1^{-1} 2^{-\frac{p+1}{2}} \right)^{\frac{1}{(1-\theta)(p+1)}} \mathcal{E}(0)^{\frac{1-p}{2(1-\theta)(p+1)}} - R \right) \\ &= C_2 I_0^{\frac{1-p}{2(1-\theta)(p+1)}} \epsilon^{\frac{(1-p)}{(1-\theta)(p+1)}} - \frac{R}{b} \end{aligned}$$

onde

$$C_2 = \frac{(2C_1)^{-\frac{1}{(1-\theta)(p+1)}}}{b}.$$

Note que  $T \rightarrow \infty$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , pois  $\frac{(1-p)}{(1-\theta)(p+1)} < 0$ , já que o denominador é positivo e o numerador é negativo. ■

Pelo Lema 4.1 temos que  $E(t_0) \leq C_R(t_0)\mathcal{E}(t_0)$ . Precisamos estimar  $\mathcal{E}(t_0)$ . Pelo Lema 4.2,  $\mathcal{E}(t) \leq 2\mathcal{E}(0)$  para todo  $t \in [0, T]$  com  $T \rightarrow +\infty$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Observação 4.3** *Dessa forma, existe  $\epsilon_1 \leq \epsilon_0$  tal que para todo  $s \leq t_0$  e todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$  temos que  $\mathcal{E}(s) \leq 2\mathcal{E}(0)$ .*

Assim,

$$E(t_0) \leq 2C_R(t_0)\mathcal{E}(0) = I_0C_R(t_0)\epsilon^2,$$

para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_1$ .

Usando as definições de  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  e a desigualdade acima em (4.9) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+t)^{1-\delta}}{2} \int_{\Omega(t)} \frac{1+\delta}{2} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2 dx \\
& \leq I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + \int_{t_0}^t \int_{\Omega(t)} \left( \frac{(1-\delta)(p-1)}{2(p+1)} (1+s)^{-\delta} \right) |u|^{p+1} dx ds \\
& + \frac{(1+t)^{1-\delta}}{p+1} \int_{\Omega(t)} |u|^{p+1} dx = I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 \tag{4.13} \\
& + \frac{(1-\delta)(p-1)}{2(p+1)} \int_{t_0}^t (1+s)^{-\delta} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} ds + \frac{(1+t)^{1-\delta}}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Na seqüência vamos obter estimativas para os dois últimos termos da desigualdade acima.

Pela desigualdade (4.11)

$$\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq (C_g)^{p+1} (C_p(bt + R))^{(1-\theta)(p+1)} \|\nabla u\|^{p+1}.$$

Considerando  $D = \max\{b, R\}$  temos

$$\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq (C_g)^{p+1} (DC_p(1+t))^{(1-\theta)(p+1)} \|\nabla u\|^{p+1}.$$

Usando o fato que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^{p+1} &\leq a^{-(p+1)} (\|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\|^2)^{\frac{p+1}{2}} \\ &= a^{-(p+1)} (2\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} &\leq (C_g)^{p+1} (DC_p(1+t))^{(1-\theta)(p+1)} a^{-(p+1)} (2\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}} \\ &= \tilde{C} (1+t)^{(1-\theta)(p+1)} (2\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned}$$

onde  $\tilde{C} = (C_g)^{p+1} (DC_p)^{(1-\theta)(p+1)} a^{-(p+1)}$ .

Considerando

$$M(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} (1+s)^{1-\delta} (2\mathcal{E}(s)), \quad (4.15)$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ , temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} &\leq \tilde{C} (1+t)^{(1-\theta)(p+1)} ((1+t)^{\delta-1} M(t))^{\frac{p+1}{2}} \\ &= \tilde{C} (1+t)^{(1-\theta)(p+1) + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2}} M(t)^{\frac{p+1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Usando a igualdade (4.16) temos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t (1+s)^{-\delta} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} ds \\
& \leq \tilde{C} M(t)^{\frac{p+1}{2}} \int_{t_0}^t (1+s)^{-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}} ds \quad (4.17) \\
& \leq C_\delta \tilde{C} M(t)^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ , onde

$$C_\delta = \int_{t_0}^t (1+s)^{-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}} ds < \infty.$$

**Justificativa de que  $C_\delta < \infty$ :**

Como  $\theta = \frac{n(p-1)}{2(p+1)}$  temos que

$$\begin{aligned}
& (1-\theta)(p+1) - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
& = \left(1 - \frac{n(p-1)}{2(p+1)}\right) (p+1) - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
& = \frac{2(p+1) - n(p-1)}{2} - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
& = \frac{2p+2 - np + n - 2\delta + \delta p + \delta - p - 1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p+1 - np + n + \delta p - \delta}{2} \\
&= \frac{\delta(p-1) - n(p-1) + p+1}{2},
\end{aligned}$$

como  $\delta < F(n, p)$  temos

$$\begin{aligned}
&(1-\theta)(p+1) - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
&= \frac{\delta(p-1) - n(p-1) + p+1}{2} \\
&< \frac{\left(\frac{n(p-1) - p - 3}{p-1}\right)(p-1) - n(p-1) + p+1}{2} \\
&= \frac{n(p-1) - p - 3 - n(p-1) + p+1}{2} \\
&= \frac{-2}{2} = -1.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $-\delta + (1-\theta)(p+1) + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} < -1$ .

Usando as estimativas (4.16) e (4.17) em (4.13) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+t)^{1-\delta}}{2} \int_{\Omega(t)} \frac{1+\delta}{2} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2 dx \\
&\leq I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + \frac{(1-\delta)(p-1)C_\delta \tilde{C}}{2(p+1)} M(t)^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tilde{C}}{p+1} (1+t)^{1-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}} M(t)^{\frac{p+1}{2}} \\
& \leq I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + \left( \frac{(1-\delta)(p-1)C_\delta \tilde{C}}{2(p+1)} + \frac{\tilde{C}}{p+1} \right) M(t)^{\frac{p+1}{2}} \\
& = I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}},
\end{aligned}$$

pois como foi visto na justificativa acima,

$$1 - \delta + (1 - \theta)(p + 1) + \frac{(p + 1)(\delta - 1)}{2} < 0,$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$  onde

$$C_1^* = \frac{(1 - \delta)(p - 1)C_\delta \tilde{C}}{2(p + 1)} + \frac{\tilde{C}}{p + 1}.$$

Como, por hipótese  $\delta < 1$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+t)^{1-\delta}}{2} \frac{1+\delta}{2} \int_{\Omega(t)} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2) (\operatorname{div} u)^2 dx \\
& \leq I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}},
\end{aligned}$$

para todo  $t \in (t_0, T_m)$  com  $I_0 = \|u_1\|^2 + a^2 \|\nabla u_0\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u_0\|^2$ .

Usando a desigualdade acima temos que

$$\sup_{t_0 \leq s \leq t} (1+s)^{1-\delta} (2\mathcal{E}(s)) \leq \frac{4}{1+\delta} \left( I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}} \right),$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Assim conseguimos a seguinte estimativa:

$$M(t) \leq \frac{4}{1+\delta} \left( I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}} \right), \quad (4.18)$$

para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

**Lema 4.3** *Seja  $M(t)$  a função dada por (4.15). Então existe  $M_0 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ , com  $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$  tal que  $M(t) \leq M_0$  para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_2$  e  $t \in [t_0, T_m)$ .*

**Demonstração:** Da desigualdade (4.18) temos que

$$M(t) \leq \frac{4}{1+\delta} \left( I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}} \right), \quad \forall t \in [t_0, T_m),$$

com  $\epsilon > 0$  fixo tal que  $0 < \epsilon < \epsilon_1$ .

Como  $M(t) \geq 0$ , para todo  $t \in [t_0, T_m)$ , vamos definir a função

$$F_\epsilon(M) = \frac{4}{1+\delta} \left( I_0 C_R(t_0) \epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}} \right) - M$$

para  $M \in \mathbb{R}^+$ . A função  $F_\epsilon(M) \geq 0$  para todo  $M \in \mathbb{R}^+$ .

Temos que a derivada da função  $F_\epsilon$  é

$$\frac{dF_\epsilon}{dM} = \frac{p+1}{2} \frac{4C_1^*}{1+\delta} M^{\frac{p-1}{2}} - 1.$$

Assim, o único ponto crítico de  $F_\epsilon$  é

$$M_0 = \left( \frac{2(1+\delta)}{4C_1^*(p+1)} \right)^{\frac{2}{p-1}}.$$

Mas  $\frac{d^2}{dM^2}(F_\epsilon(M_0)) = \frac{(p+1)(p-1)}{4} \frac{4C_1^*}{1+\delta} M_0^{\frac{p-3}{2}} \geq 0$ , pois,  $C_1^* > 0$ ,  $p > 1$  e  $M_0 > 0$ . Logo,  $M_0$  é ponto de mínimo global da função contínua  $F_\epsilon(M)$ .

Como  $F_\epsilon(0) = \frac{4}{1+\delta} I_0 C_R(t_0) \epsilon^2$ , existe um  $\epsilon_1^* \leq \epsilon_1$  tal que  $F_\epsilon(M_0) < 0$  se  $0 < \epsilon < \epsilon_1^*$ .

Pela Observação 4.3 temos que  $\mathcal{E}(s) \leq 2\mathcal{E}(0)$  para todo  $0 \leq s \leq t_0$ .

Assim

$$\begin{aligned} M(t_0) &\leq (1 + t_0)^{1-\delta} 4\mathcal{E}(0) \\ &= (1 + t_0)^{1-\delta} 4\epsilon^2 I_0. \end{aligned}$$

Agora, fixando  $\epsilon_2 > 0$  satisfazendo  $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1^*$  de modo que a desigualdade  $(1 + t_0)^{1-\delta} 4\epsilon^2 I_0 < M_0$  ocorra para todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ , temos que  $M(t_0) < M_0$ . Como  $F_\epsilon(M(t)) \geq 0$  para todo  $t \in [t_0, T_m)$  e  $F_\epsilon(M_0) < 0$  temos pela continuidade de  $M(t)$  temos que

$$M(t) \leq M_0 \text{ para todo } t_0 \leq t < T_m.$$

Portanto, para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_2$  temos que  $M(t) \leq M_0$  para todo  $t_0 \leq t < T_m$ .

■

Escolha  $C > 0$  suficientemente grande de tal forma que  $M_0 \leq CI_0$ , assim pelo Lema 4.3 acima concluímos que existe um  $\epsilon_2 > 0$  tal que

$$M(t) \leq CI_0, \quad t \in [0, T_m). \quad (4.19)$$

Portanto, pela definição de  $M(t)$  em (4.15) e usando a desigualdade (4.19) temos que  $\mathcal{E}(t) \leq \frac{CI_0}{2}(1+t)^{\delta-1}$ , para todo  $t \in [t_0, T_m)$ .

Note que  $\mathcal{E}(t)$  também é limitado no intervalo  $[0, t_0]$ , pois, como a solução  $u = u(t, x)$  é uma função contínua, no intervalo  $[0, t_0]$  ela é limitada, ou seja, existe uma constante  $M_1$  positiva tal que  $\mathcal{E}(t) \leq M_1 I_0 (1+t)^{\delta-1}$  para todo  $t \in [0, t_0]$ .

Portanto,  $\mathcal{E}(t) \leq KI_0(1+t)^{\delta-1}$ , para todo  $t \in [0, T_m)$ , onde  $K = \max\{M_1, \frac{C}{2}\}$ .

Como a energia é limitada em todo intervalo maximal de existência temos que

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} \{ \|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\|^2 \} < \infty,$$

então pela Observação 4.1 concluímos que  $T_m = \infty$ , ou seja,  $u = u(t, x)$  é uma solução global e

$$\mathcal{E}(t) \leq KI_0(1+t)^{\delta-1},$$

para todo  $t \geq 0$  e  $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ , o que prova o Teorema 4.2.

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] Agmon, S., Douglis, H., Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.
- [3] Brezis, H., *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid, 1983.
- [4] Charão, R. C., Ikehata, R., *Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity*. Nonlinear Analysis 67, 398-429, 2007.
- [5] Charão, R. C., *Ondas elásticas 3D: princípio de Huygens, princípio da amplitude limite e ressonâncias*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil 1992.

- [6] Charão, R. C., Ikehata, R., *Energy decay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping*. J. Math. Anal. Appl. 380, 46-56, 2011.
- [7] Charão, R. C., Ikehata, R., *The semilinear system of elastic waves in  $\mathbb{R}^n$  with nonabsorption and a critical damping potential*. VII Workshop of Partial Differential Equations (LNCCV/UFRJ).
- [8] Ferreira, M. V., *Ondas elásticas e eletromagnéticas em domínios exteriores: propriedades assintóticas*. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil 2005.
- [9] Gomes, A. M., *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [10] Ikehata, R., Todorova, G., Yordanov, B., *Critical Exponent for Semilinear Wave Equations with Space-Dependent Potential*. Funkcialaj Ekvacioj, 52, 411-435, 2009.
- [11] Kesavan, S., *Topics in functional analysis and applications*. Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.
- [12] Matsumura, A., *Energy decay of solutions of dissipative wave equations*. Proc. Japan Acad. 53, 232-236, 1977.

- [13] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., *Iniciação aos espaços de Sobolev*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.
- [14] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*. Textos de Métodos Matemáticos No. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.
- [15] Mochizuki, K., *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 12, 383-390, 1976.
- [16] Mochizuki, k., Nakazawa, H., *Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 32, 401-414, 1996.
- [17] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [18] Todorova, G., Yordanov B., *Nonlinear dissipative wave equations with potential*. AMS Contemporary Math. 426, 317-337, 2007.
- [19] Todorova, G., Yordanov, B., *Weighted  $L^2$ -estimates for dissipative wave equations with variable coefficients*. J. Diff. Eqns. 242, 4497 - 4518, 2009.

- [20] Uesaka H., *The total energy decay of solutions for the wave equation with a dissipative term*. J. Math. Kyoto Univ. 20, 57-65, 1979.