Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Existência de Soluções e Comportamento Assintótico Ótimo para Equações Dissipativas tipo Placas/Boussinesq Generalizadas em $\mathbb{R}^n$

Jaqueline Luiza Horbach

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Coorientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis
16 de Dezembro de 2016

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Existência de Soluções e Comportamento Assintótico Ótimo para Equações Dissipativas Generalizadas tipo Placas/Boussinesq em $\mathbb{R}^n$

Tese submetido(a) ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática Pura e Aplicada, com área de concentração em Equações Diferenciais Parciais.
Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coorientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Jaqueline Luiza Horbach
Florianópolis
16 de Dezembro de 2016

Existência de Soluções e Comportamento Assintótico Ótimo para Equações Dissipativas Generalizadas tipo Placas/Boussinesq em $\mathbb{R}^n$

por

Jaqueline Luiza Horbach

Esta Tese foi julgada para a obtenção do Título de "Doutor em Matemática Pura e Aplicada", área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Prof. Dr. **Ruy Coimbra Charão**
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. **Ruy Coimbra Charão**
Orientador: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. **Ryo Ikehata**
Universidade de Hiroshima, Japão

Prof. Dr. **Gustavo Alberto Perla Menzala**
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

Prof. Dr. **Marcelo Moreira Cavalcanti**
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Prof. Dr. **Jáuber Cavalcante de Oliveira**
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. **Matheus Cheque Bortolan**
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, 16 de Dezembro de 2016.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Ao meu orientador Ruy e ao meu coorientador Cleverson pelos muitos dias de estudos, pela paciência e pela dedicação. A todos os professores do departamento de matemática que de alguma forma contribuíram nessa caminhada.

A minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir em frente. Pai, seus conselhos e confiança em mim significou segurança e certeza de que não estou sozinha nessa caminhada. Juliano, o seu carinho é muito importante, você tem a capacidade de sempre me fazer sorrir.

Agradeço também ao meu companheiro, Fabrício, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades.

A todos os amigos e aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

A Fapesc e a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência e unicidade de soluções e taxas de decaimento para a energia e para a norma L^2 da solução de uma equação semilinear do tipo placas/Boussinesq com termo de amortecimento (dissipação) fracionário e sob efeitos, para o caso de placas, de um termo de inércia rotacional generalizado. Mostramos que as taxas de decaimento dependem das potências fracionárias dos operadores e usando uma expansão assintótica da solução do problema linear provamos a otimalidade das taxas obtidas, sobre certas condições sobre as potências fracionárias do modelo.

Palavras-Chave: Equação tipo Placas/Boussinesq. Laplaciano fracionário. Inércia rotacional generalizada. Dissipação fracionária. Existência e unicidade de solução. Perfil assintótico. Taxa de decaimento ótima.

Abstract

In this work we study existence, uniqueness of a global solution and decay rates for the total energy and the L^2-norm of a solution for a semilinear plate/Boussinesq type equation with fractional damping and under effects of a generalized rotational inertia term in the case of plate equation. We show that decay rates depend on the fractional powers of the operators and using an asymptotic expansion of the solution to the linear problem, we prove in some cases the optimality of the decay rates under suitable conditions on the fractional powers in the model.

Keywords: Plate/Boussinesq type equation. Fractional Laplacian. Generalized rotational inertia. Fractional dissipation. Existence and uniqueness. Asymptotic profile. Optimal decay rates.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Consideramos neste trabalho o seguinte problema de Cauchy para uma equação do tipo placas/Boussinesq com um amortecimento (damping) fracionário e um termo de inércia rotacional generalizado (tipo fracionário) em $\mathbb{R}^n$, a saber

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + \alpha\Delta^2 u - \Delta u + (-\Delta)^{\theta} u_t = \beta(-\Delta)^{\gamma}\big(u^p\big), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

com $u = u(t,x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p > 1$ inteiro. As potências do Laplaciano δ, θ e γ são tais que $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

A função $u = u(t,x)$, por exemplo, no caso $\delta = 1$ e $\beta = 0$, descreve o deslocamento transversal da placa sem efeitos não lineares, mas sujeita a efeitos de inércia rotacional e uma dissipação fracionária representada pelo termo $(-\Delta)^{\theta} u_t$. No caso $\delta = 0$ e $\beta = 0$ a equação linear em (1.1) modela o deslocamento da placa sem efeitos de inércia rotacional. No caso $\delta = 2$, $\beta \neq 0$ e $\gamma = 1$ a equação em (1.1) é uma equação tipo Boussinesq, por exemplo, para modelos hidrodinâmicos de sexta ordem sobre efeitos dissipativos (ver [46], [13]). Se $\delta = \alpha = 0$, $\gamma = 1$, $\beta \neq 0$ e sem o termo dissipativo a equação em (1.1) é uma equação de Boussinesq generalizada.

Se a não linearidade é da forma $\Delta(u^2)$, a equação é chamada de equação de Boussinesq (Bq). Com esse tipo de não linearidade, $\delta = 1$, $\alpha = 0$ e sem o termo dissipativo, a equação em (1.1) é chamada de equação de Boussinesq melhorada (IBq). Essa mesma equação com linearidade mais geral como aparece acima em (1.1) é chamada de equação MIBq (Modified IBq) (ver [44]). Todas essas variantes de Boussinesq têm muitas aplicações físicas, como a propagação de ondas longitudinais de deformação em uma haste elástica no caso da dimensão $n = 1$, propagação de ondas de superfície em águas rasas (shallow-water waves). A equação de Boussinesq de sexta ordem foi derivada no estudo de camadas superficiais de plasmas e cadeias atômicas não-lineares ([4], [11]). Em [30], Maugin propôs tal tipo de modelo de Boussinesq para modelar a dinâmica de redes não-lineares em cristais elásticos.

Algumas Equações Diferenciais Parciais de quarta ordem surgem em problemas de mecânica dos sólidos. Em particular, Equações Diferenciais Parciais de Evolução de quarta ordem aparecem na teoria das placas finas e vigas. Modelos para estudar as vibrações de chapas finas ($n = 2$), dadas pelo Sistema Pleno de von Kármán foram estudados por vários autores, em particular por Puel-Tucsnak [37], Ciarlet [8], Lasiecka-Benabdallah [26] e Koch-Lasiecka [25]. Perla Menzala e Zuazua estudaram em [33] o Sistema Pleno de von Kármán e mostraram que o modelo do Timoshenko

$$u_{tt} - \gamma\Delta u_{tt} + \Delta^2 u + u = 0, \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \tag{1.2}$$

pode ser obtido sob a forma de um limite total do Sistema de von Kármán, quando os parâmetros adequados vão para zero. O termo $-\gamma\Delta u_{tt}$ na equação placa (1.2) é absorvido no modelo com os efeitos de inércia de rotação no ponto x da placa em um momento positivo t. É bem conhecido que a equação de placa (1.2) com esse termo é uma equação hiperbólica com velocidade finita da propagação, enquanto que o modelo de placa (1.1) para o caso $\delta = 0$ e $\theta = 1$ ou 2 tem a propriedade de velocidade infinita de propagação. Além disso, tanto quanto sabemos, a classificação do modelo (1.1) para $\delta \in (0, 1)$ ainda está em aberto, mesmo para $\theta = 0$ ou $\theta = 1$. Conjecturamos que para δ próximo de $\delta = 1$ a equação continua a ser hiperbólica.

Um modelo mais geral para estudar as vibrações de uma placa fina é dado por

$$u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + g_0(u_t) - \operatorname{div} g_1(\nabla u_t) = 0. \tag{1.3}$$

Tal modelo tem sido estudado por diversos autores como ([14], [12], [5], [38]) e, em particular, por Sugitani-Kawashima [40] que considerou em $\mathbb{R}^n$ o caso $g_1 = 0$ e $g_0 = Id - f$.

Além disso, existem alguns trabalhos em que um damping forte do tipo $(-\Delta)^2 u_t$ é considerado no modelo (1.3), no lugar do damping dado por $g_0(u_t) - \operatorname{div} g_1(\nabla u_t)$ (ver, por exemplo [42], [28], [47] e outras referências citadas).

Problemas do tipo (1.1) lineares ($\beta = 0$) com $\delta = 0$ ou $\delta = 1$ têm sido extensivamente estudados para os casos $\theta = 0$, $\theta = 1$ e $\theta = 2$. Recentemente, vários autores estudaram equações de evolução com operador Laplaciano fracionário $(-\Delta)^\theta$. Para a equação placa podemos citar os trabalhos de Ikehata-Soga [21], Charão-da Luz-Ikehata [7] e Astaburuaga-Fernandez-Menzala [2] que estudaram a dinâmica das equações de von Kármán na presença de dissipação fracionária.

Portanto, é muito importante do ponto de vista matemático estudar a equação de placas com o termo de inércia rotacional fracionário sob os efeitos de um damping intermediário como em nosso modelo (1.1), com $\delta \geq 0$ e $\theta \geq 0$. Em particular, os casos $\theta \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ combinados com o caso $\delta \in \{0, 1\}$ também têm importante motivação física. Além disso, na mecânica dos sólidos as derivadas espaciais do vetor deslocamento definem os componentes do tensor de tensão e a derivada no tempo é uma taxa de deformação, isto é, esta funciona como uma dissipação no modelo. Por exemplo, na dimensão $n = 1$ o termo de rotacional $-\Delta u_{tt}$ modela pequenas rotações das seções transversais do feixe. Observamos também que o modelo tipo hiperbólico (1.1), com $\delta > 0$ é mais complicado de ser investigado do que o não-hiperbólico (o caso $\delta = 0$). Devido a isso, é necessário impor regularidade adicional sobre os dados iniciais para controlar as vibrações do modelo no caso $\theta \in [0, 1)$. Devido ao forte damping dado no caso $\theta = 1$ nenhuma regularidade adicional nos dados iniciais é necessária neste caso. O mesmo ocorre para o caso equação de placa ($n = 2$). Assim, por exemplo, a partir do ponto de vista da engenharia, as derivadas espaciais do vetor de velocidade são muito importantes para controlar a dissipação de modelos de vibrações, mesmo no caso de derivadas fracionárias espaciais. Derivadas espaciais fracionárias também podem ser introduzidas para controlar os efeitos de inércia de rotação fraca na placa como no nosso modelo (1.1) no caso $0 < \delta < 1$ e $\beta = 0$. Finalmente, observamos que em trabalhos anteriores autores estudaram damping fracionário apenas no caso $\theta \in [0, 1]$, e neste trabalho consideramos também casos com $\theta > 1$.

Citamos vários trabalhos relacionados ao problema (1.1). No caso em que $\delta = \alpha = \beta = 0$ e $\theta \in [0, 1]$ (isto é, o caso da equação de onda amortecida), o problema de Cauchy correspondente é estudado por Ikehata e Natsume em [20], e eles não obtiveram estimativas de decaimento precisos para a energia total do sistema e para a norma L^2 da solução baseados no método de energia no espaço de Fourier (ver [27]). Uma melhoria dos resultados de [20] foi dado em Charão-da Luz-Ikehata [6] através da introdução de um novo método de energia no espaço de Fourier.

No caso de $\delta = \alpha = \beta = 0$ e θ geral, para começar, é preciso citar três artigos importantes: um de Matsumura [29] ($\theta = 0$), um de Ponce [36] ($\theta = 1$) e um de Shibata [39] ($\theta = 1$), em que derivam as estimativas L^p-L^q de decaimento para as soluções. Recentemente, Ikehata-Todorova-Yordanov [22] estudaram a sua versão abstrata correspondente ao caso $\theta = 1$, e encontraram um perfil assintótico para as soluções em um ambiente bastante geral. Depois de [22], Ikehata [18] re-investigou um perfil assintótico da solução com base no método introduzido em [19] em um ambiente de análise de Fourier concreto e derivou taxas de decaimento ótimas para a norma L^2 das soluções, e este procedimento pode ser feito para o caso $\theta = 1$. Assim, é altamente desejável encontrar perfis assintóticos nos casos que $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, isto é, o caso da equação de placas. Neste caso, muito recentemente Ikehata-Soga [21] encontraram para $\delta = 0$ (equação de placa sem efeitos de inércia rotacional) os perfis assintóticos e taxas de decaimento ótimo (para $\theta = 1$) da norma L^2 das soluções baseadas no método de energia no espaço de Fourier, combinado com aquele que foi empregado em [18]. A motivação da pesquisa de [21] vem do artigo anterior de Takeda-Yoshikawa [41], em que estudaram a equação de placas ($\beta = 0$) com os parâmetros $\delta = 0$ e $\theta = 0$ (ou seja, caso damping fraco).

Como já comentamos quando $\delta = 1$ o termo $(-\Delta)^\delta u_{tt}$ é conhecido como o termo de inércia rotacional. Neste caso, pode-se citar o trabalho bastante recente de Charão-da Luz-Ikehata [7], onde foram encontradas as taxas de decaimento para a energia total e a norma L^2 das soluções quase ótimas, sendo que essas taxas foram encontradas usando o método desenvolvido em [6]. O método de [6] foi ainda aplicado para obter taxas de decaimento precisas de energia para as equações de evolução abstratas de segunda ordem no tempo em da Luz-Ikehata-Charão [10]. Estes estudos foram feitos em todo o espaço, enquanto da Luz-Charão [9] lidaram com o caso de domínio exterior para equações de placas amortecidas.

Nosso propósito neste trabalho é mostrar as seguintes propriedades da equação de placas (1.1): existência e unicidade de solução, taxas de decaimento, perfil assintótico e taxas ótimas. Essa propriedades são primeiramente mostradas para o problema linear, ou seja, quando $\beta = 0$ e usando as informações do caso linear provamos resultados semelhantes para o problema semilinear, com $\beta > 0$. Esperávamos provar essas propriedades para todas as potências fracionárias, mas alguns casos continuam em aberto. De qualquer maneira, os casos considerados são os que atualmente possuem a maior quantidade de aplicações físicas.

Este trabalho está dividido em 7 capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os resultados teóricos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Também neste capítulo mostramos vários lemas técnicos usados ao longo do texto.

No Capítulo 3, usando teoria de semigrupos, mostramos que o problema linear ($\beta = 0$) tem uma única solução, mas para isso foi preciso dividir o problema nos seguintes casos:

1) Caso $0 \le \theta < \delta$ e $0 \le \delta \le 2$;

2) Caso $0 \le \delta \le \theta$ e $0 \le \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$.

No Capítulo 4 estudamos o comportamento assintótico do problema linear ($\beta = 0$) e encontramos taxas de decaimento para $0 \le \delta \le 2$ e $0 \le \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$, usando o método da energia no espaço de Fourier. Com esse mesmo método é possível encontrar taxas de decaimento para as demais potências fracionárias maiores.

Usando ideias discutidas nos Capítulos 2 e 3, mostramos no Capítulo

5 que existe uma única solução para o problema semilinear ($\beta > 0$) se considerarmos os dados iniciais suficientemente pequenos. Como no Capítulo 3, aqui também precisamos dividir o estudo em alguns casos, e ainda mais, para cada caso é preciso primeiro estudar a existência local e depois a existência global. Para mostrar a existência e unicidade de solução do caso semilinear usamos técnicas padrões e estimativas tipo Sobolev, trabalhando no espaço de Fourier. Taxas de decaimento para o problema semilinear são também estudadas no Capítulo 6. A dificuldade para encontrar taxas para o problema semilinear é como estimar adequadamente o termo não linear u^p no espaço de Fourier.

Com o objetivo de mostrar que as taxas encontradas no Capítulo 4 são taxas ótimas, no Capítulo 7, encontramos perfis assintóticos para a equação linear usando o método da solução explícita no espaço de Fourier. No final desse capítulo, usando o perfil assintótico, mostramos que as taxas de decaimento encontradas no Capítulo 4 são ótimas em certos casos.

Os Capítulos 4 e 7 desta tese foram publicados em 2016 na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* com a colaboração dos Professores Ryo Ikehata da Universidade de Hiroshima, Japão, e o Professor Ruy Coimbra Charão da Universidade Federal de Santa Catarina (ver [17]). Também citamos aqui um artigo que publicamos em 2014 na revista *Electronic Journal of Differential Equations* com a colaboração de Naoki Nakabayashi da Universidade de Hiroshima, Japão, onde encontramos taxas de decaimento para a energia total do problema de Cauchy associado ao equação de ondas elásticas com coeficiente de dissipação tempo-dependente (ver [16]).

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos os principais resultados e lemas técnicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Algumas demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados bastante conhecidos. Sempre que necessário, citaremos as referências.

2.1 Notação

Neste trabalho vamos seguir a notação padrão da teoria de Equações Diferenciais Parciais.

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. $i := \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária dos números complexos.
3. $x \cdot \xi$ significa o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e $|x|$ é a norma usual de $x \in \mathbb{R}^n$.
4. $\|\cdot\|$ representa a norma usual em $L^2(\mathbb{R}^n)$.
5. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
6. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
7. Se $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ é um campo vetorial de classe C^1,

definimos o *divergente* de $F(x)$, denotado por $\operatorname{div}(F)$, como

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

8. O *laplaciano* de uma função f é definido como

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

e é denotado por Δf.

É bem conhecido que $-\Delta$ pode ser realizado como um operador definido positivo e auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R}^n)$ com domínio $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Nas estimativas deste trabalho o símbolo C pode representar, mesmo de uma linha para outra, diferentes constantes positivas.

2.2 Espaços Importantes

Nesta seção vamos definir todos os espaços de funções que serão usados ao longo do trabalho. Além disso, apresentaremos os principais resultados desses espaços. Os resultados apresentados abaixo podem ser encontrados nas seguintes referência Adams [1], Kesavan [24] e Brezis [3].

2.2.1 Espaço das Distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Sejam u uma função real definida em $\mathbb{R}^n$ mensurável e $(K_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de $\mathbb{R}^n$ tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então

$$u = 0 \quad \textit{quase sempre em } K.$$

Como consequência, define-se o *suporte* de u, que será denotado por *supp* (u), como sendo o subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$

$$\mathit{supp}\,(u) = \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Definição 2.2.1 *Representamos por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções*

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Os elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

A noção de convergência em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada pela definição abaixo.

Definição 2.2.2 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:*

i) $\exists\ K \subset \mathbb{R}^n$, K compacto, tal que $supp\,(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $supp\,(\varphi) \subset K$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha\varphi_k(x) \to D^\alpha\varphi(x)$ uniformemente para $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.3 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Usando o espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definido acima vamos definir o Espaço das Distribuições.

Definição 2.2.4 *Uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. O conjunto de todas as distribuições sobre $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \{T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K};\ \ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

Definição 2.2.5 *Dizemos que $T_k \to T$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ se $\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

2.2.2 Espaço de Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Uma função $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito se para cada $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ polinômio e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, vale o seguinte

$$\lim_{\|x\|\to\infty} P(x)(D^\alpha u)(x) = 0.$$

Define-se:

$$S(\mathbb{R}^n) = \Big\{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}\,;\, u \in C^\infty \text{ e } u \text{ é rapidamente decrescente no infinito}\Big\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.2.1 *Seja $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C = C_k$ tal que

$$(1 + |x|^2)^k |D^\alpha u(x)| \leq C_k$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k$.

Usando o lema acima concluímos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet sobre $\mathbb{K}$ cuja seminorma é dada por

$$\rho_m(u) = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\alpha u(x)|$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.2.6 *Seja u_ϑ uma sequência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diz-se que a sequência u_ϑ converge para u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se*

$$\rho_m(u_\vartheta - u) \to 0$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2.7 *Uma distribuição temperada sobre* $\mathbb{R}^n$ *é um funcional linear definido em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e contínuo em relação a noção de convergência definida em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *O conjunto de todas as distribuições temperadas sobre* $\mathbb{R}^n$ *é denotado por* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denotamos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

Definição 2.2.8 *Dizemos que* $T_k \to T$ *em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *se* $\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.3 Os Espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$

Neste trabalho as integrais realizadas sobre $\mathbb{R}^n$ são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 2.2.9 *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Indicamos por* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *tais que* $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$ *onde, as funções abaixo são as normas desses espaços,*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \qquad se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess\, |f(x)| \\ &= \inf \Big\{C \in \mathbb{R}^+ ;\, med\big(x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| > C\big) = 0\Big\} \\ &= \inf \Big\{C > 0 ; |f(x)| \leq C \ quase\ sempre\ em\ \mathbb{R}^n\Big\}\end{aligned}$$

onde $med(A)$ *significa a medida de Lebesgue de conjunto mensurável* A.

Na verdade $L^p(\mathbb{R}^n)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em $\mathbb{R}^n$.

Os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\mathbb{R}^n)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral, denotado por $(\cdot, \cdot)$. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo.

Teorema 2.2.1 (Interpolação dos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$) *Considere p e q tais que $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ então $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \, \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

com $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Teorema 2.2.2 (Desigualdade de Hölder) *Considere $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|fg\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Vamos também considerar o espaço de funções com peso para $0 < \kappa \leq 1$ definido da seguinte forma

$$L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \, ; \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^{\kappa})|f(x)|dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|f\|_{L^{1,\kappa}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^{\kappa})|f(x)|dx.$$

2.2.4 Transformada de Fourier

Como recurso para mostrar propriedades do Problema de Cauchy (1.1) vamos aplicar a Transformada de Fourier e encontrar um problema de Cauchy equivalente no espaço de Fourier associado ao problema (1.1). Assim, precisamos definir a Transformada de Fourier de uma função.

Definição 2.2.10 *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então denotamos por $\mathcal{F}u$ a Transformada de Fourier de u dada por*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Além disso, denotamos por $\mathcal{F}^{-1}\hat{u}$ a Transformada de Fourier inversa de $\hat{u}$

dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi$$

que está bem definida.

Usando o fato de que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos generalizar a Transformada de Fourier para toda função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Neste trabalho, para simplificar a notação, muitas vezes escrevemos $\hat{u}$ e $\hat{u}_t$ em vez de $\hat{u}(t,\xi)$ e $\hat{u}_t(t,\xi)$, respectivamente.

Teorema 2.2.3 (Identidade de Plancherel) *Para toda função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem-se que*

$$\|u\| = \|\mathcal{F}u\| = \|\hat{u}\|.$$

O Teorema de Plancherel faz uma relação entre a função $\hat{u}$ com a função u em termos da norma $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Os três próximos lemas nos fornecem uma caracterização e uma limitação para a Transformada de Fourier de uma função.

Lema 2.2.2 *Considere uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$\hat{f}(\xi) = A_f(\xi) - iB_f(\xi) + P_f,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ onde

- $A_f(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}(\cos(x\cdot\xi)-1)f(x)dx,$
- $B_f(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\sin(x\cdot\xi)f(x)dx,$
- $P_f = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx.$

Demonstração: Usando a Fórmula de Euler podemos reescrever a Transformada de Fourier de uma função f na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \cos(x\cdot\xi)f(x) - i\sin(x\cdot\xi)f(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(x\cdot\xi)-1)f(x) - i\sin(x\cdot\xi)f(x) + f(x)dx.
\end{aligned}$$

Então, se definirmos $A_f(\xi)$, $B_f(\xi)$ e P_f como acima, temos que

$$\hat{f}(\xi) = A_f(\xi) - iB_f(\xi) + P_f, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$\blacksquare$

Lema 2.2.3 *Considere uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$|A_f(\xi)| \leq L\|f\|_{L^1} \quad e \quad |B_f(\xi)| \leq N\|f\|_{L^1}.$$

ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ com $0 < \kappa < 1$, então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$|A_f(\xi)| \leq K|\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}} \quad e \quad |B_f(\xi)| \leq M|\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}}.$$

Com L, N, K e M constantes positivas dependo de n. As funções A_f e B_f estão definidas no Lema 2.2.2 e o espaço $L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ está definido na Subseção 2.2.3.

Demonstração:

i) A prova deste item segue dos cálculos abaixo

$$\begin{aligned} |A_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\cos(x \cdot \xi) - 1||f(x)|dx \\ &\leq \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = L\|f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |B_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sin(x \cdot \xi)||f(x)|dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = N\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

ii) Para provar este item é suficiente checar as desigualdades para $\xi \neq 0$.

Temos

$$
\begin{aligned}
|A_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\cos(x\cdot\xi) - 1|\, |f(x)| dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} |\cos(x\cdot\xi) - 1|\, |f(x)| \frac{|\xi|^\kappa |x|^\kappa}{|\xi|^\kappa |x|^\kappa} dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} |\xi|^\kappa \int_{|x|\geq\varepsilon} (1+|x|^\kappa)\, |f(x)| \frac{|\cos(x\cdot\xi) - 1|}{|\xi|^\kappa |x|^\kappa} dx \\
&\leq K \lim_{\varepsilon\to 0} |\xi|^\kappa \int_{|x|\geq\varepsilon} (1+|x|^\kappa)|f(x)| dx \\
&\leq K|\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}},
\end{aligned}
$$

com $K = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\sup_{x\neq 0, \xi\neq 0} \frac{|\cos(x\cdot\xi) - 1|}{|\xi|^\kappa |x|^\kappa} < \infty$, e similarmente segue que

$$
\begin{aligned}
|B_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sin(x\cdot\xi)|\, |f(x)| dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} |\sin(x\cdot\xi)|\, |f(x)| \frac{|\xi|^\kappa |x|^\kappa}{|\xi|^\kappa |x|^\kappa} dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} |\xi|^\kappa \int_{|x|\geq\varepsilon} (1+|x|^\kappa)|f(x)| \frac{|\sin(x\cdot\xi)|}{|\xi|^\kappa |x|^\kappa} dx \\
&\leq M \lim_{\varepsilon\to 0} |\xi|^\kappa \int_{|x|\geq\varepsilon} (1+|x|^\kappa)|f(x)| dx \\
&\leq M|\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}},
\end{aligned}
$$

com $M = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\sup_{x\neq 0, \xi\neq 0} \frac{|\sin(x\cdot\xi)|}{|\xi|^\kappa |x|^\kappa} < \infty$.

■

Lema 2.2.4 *Sejam $\kappa \in (0,1]$ e $f \in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$. Então existem constantes C_κ e C_n tal que*

$$
|\hat{f}(\xi)| \leq C_\kappa |\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}} + C_n \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\xi \right|.
$$

Demonstração: Pela definição de Transformada de Fourier (ver Subseção

2.2.4) temos que

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= A_f(\xi) - iB_f(\xi) + P_f \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(x\cdot\xi) - 1) f(x)\, d\xi \\ &- i\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sin(x\cdot\xi) f(x)\, d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\xi.\end{aligned}$$

Usando o item (ii) do Lema 2.2.3 temos que

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\cos(x\cdot\xi) - 1||f(x)|\, d\xi \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sin(x\cdot\xi)||f(x)|\, d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\xi \right| \\ &\le (K+M)|\xi|^{\kappa} \|f\|_{L^{1,\kappa}} + C_n \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\xi \right|.\end{aligned}$$

O lema segue com as constantes $C_\kappa = K + M$ e C_n dependo de n. ■

2.2.5 Os Espaços $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $H^m(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Estes espaços são conhecidos como espaços de Sobolev e os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [3], Kesavan [24] e Medeiros-Rivera [32], [31].

Definição 2.2.11 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \le p \le \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que para $|\alpha| \le m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } |\alpha| \le m \Big\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tem-se que

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \quad p = \infty,$$

define uma norma em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Observamos as seguintes propriedades dos espaços $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$:

1. $(W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W^{m,p}})$ é um espaço de Banach reflexivo e separável se $p < \infty$.
2. O espaço de Sobolev $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v)_{W^{m,2}} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad u, v \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n),$$

   e é denotado por $H^m(\mathbb{R}^n)$.
3. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são densos em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq m \leq \infty$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Vamos também considerar o espaço de funções onde apenas levamos em conta a derivada de maior ordem, ou seja, os espaços $\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ definidos da seguinte forma

$$\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\ \exists f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ com } u = (-\Delta)^{-m/2} f \right\},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ e $p \geq 1$. Podemos representar esse espaço como

$$\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = (-\Delta)^{-m/2} L^p(\mathbb{R}^n).$$

A norma nesse espaço é definida por

$$\|u\|_{\dot{W}^{m,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{m/2} u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.2.6 Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, com $s \in \mathbb{R}$

Neste trabalho vamos usar frequentemente a definição de espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \in \mathbb{R}$. Então definimos os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ da seguinte forma:

Definição 2.2.12 *Para $s \in \mathbb{R}$ define-se o espaço*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\, (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Define-se também sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$, a norma

$$\|u\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|.$$

Para conseguir nossos resultados precisamos ajustar o produto interno e a norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, de tal forma que o novo produto interno e a nova norma sejam equivalentes ao produto interno e a norma usual de $H^s(\mathbb{R}^n)$ e seja mais adequado para o nosso problema. Os próximos lemas vão garantir essa equivalência.

Lema 2.2.5 *Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$ temos que*

i) $\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s(1+|\xi|^{2s})$;

ii) $2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1}$.

Demonstração: i) Primeiro vamos considerar o caso $|\xi| \leq 1$ assim

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq 1 \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s \leq 2^s(1+|\xi|^{2s}).$$

No caso $|\xi| \geq 1$ segue que

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq |\xi|^{2s} \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s(1+|\xi|^{2s}).$$

ii) Similar ao item a) temos para $|\xi| \leq 1$ que

$$2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq 2^{-s} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 1 \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1},$$

pois $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s$ e $1+|\xi|^{2s} \leq 2$.

E para o caso $|\xi| \geq 1$ segue que

$$2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1},$$

pois temos as seguintes desigualdades $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s(1+|\xi|^{2s})$ e $(1+|\xi|^{2s}) \leq 2|\xi|^{2s} \leq 2(1+|\xi|^2)^s$.

$\blacksquare$

Concluímos então que a norma usual em $H^s(\mathbb{R}^n)$ é equivalente a

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})\, |\hat{u}|^2 \, d\xi.$$

Assim neste trabalho vamos usar como norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ quando $s > 0$ a norma dada por

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})\, |\hat{u}|^2 \, d\xi$$

e o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})\, \hat{u}\, \bar{\hat{v}} \, d\xi.$$

No caso $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ com $s > 0$ vamos usar a seguinte norma

$$\|u\|_{H^{-s}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})^{-1} \, |\hat{u}|^2 \, d\xi$$

e o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^{-s}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})^{-1} \, \hat{u}\bar{\hat{v}} \, d\xi.$$

Lema 2.2.6 *No caso $s = 2$ o produto interno em $H^2(\mathbb{R}^n)$ definido acima é equivalente ao seguinte produto interno*

$$(u, v)_{H^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4)\, \hat{u}\, \bar{\hat{v}} \, d\xi,$$

onde α é o mesmo da equação (1.1).

Demonstração: Precisamos mostrar que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1(1 + |\xi|^4) \leq 1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4 \leq C_2(1 + |\xi|^4).$$

Note que, a desigualdade por baixo segue ao considerarmos $C_1 = \min\{1, \alpha\}$, pois

$$1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4 \geq 1 + \alpha|\xi|^4 \geq \min\{1, \alpha\}(1 + |\xi|^4).$$

Falta ainda mostrar a desigualdade por cima, vamos considerar primeiro $|\xi| \leq 1$ assim $|\xi|^4 \leq |\xi|^2 \leq 1$ e portanto

$$1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4 \leq 2 + \alpha|\xi|^4 \leq \max\{\alpha, 2\}(1 + |\xi|^4).$$

Já se $|\xi| \geq 1$ temos $1 \leq |\xi|^2 \leq |\xi|^4$, logo

$$1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4 \leq 1 + (\alpha + 1)|\xi|^4 \leq \max\{\alpha + 1, 1\}(1 + |\xi|^4).$$

Se considerarmos $C_2 = \max\{2, \alpha + 1\}$ temos para todo ξ

$$1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4 \leq \max\{\alpha + 1, 2\}(1 + |\xi|^4).$$

Concluímos então que

$$\min\{1, \alpha\}(1 + |\xi|^4) \leq (1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4) \leq \max\{2, \alpha + 1\}(1 + |\xi|^4),$$

e portanto o lema está provado.

■

Usando o produto interno e a norma definidos acima mostraremos algumas propriedades envolvendo os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$. Essas propriedades são de fundamental importância para mostrar existência e unicidade de solução tanto para o caso linear quanto o semilinear.

Lema 2.2.7 *Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Se $s > \dfrac{n}{2}$ então*

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{H^s},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e alguma constante $C > 0$.

Demonstração: Sabendo que $u(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi$ vamos estimar o valor absoluto de u

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq C\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|d\xi \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)|d\xi. \end{aligned}$$

Usando desigualdade de Hölder (ver Teorema 2.2.2) temos que

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Temos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi$ é finita se $s > \dfrac{n}{2}$. Logo, resulta que

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{H^s},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

■

Quando $s > \dfrac{n}{2}$ concluímos do Lema 2.2.7 que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois a constante C não depende de u.

Um outro resultado muito importante para mostrarmos a existência e unicidade de solução e encontrarmos taxas de decaimento para o problema semilinear é o fato de $H^s(\mathbb{R}^n)$ ser uma álgebra para $s > \dfrac{n}{2}$, esse resultado pode ser visto em Kato-Ponce [23] e Wang-Chen [43].

Lema 2.2.8 *Seja $s > \dfrac{n}{2}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|uw\|_{H^s} \leq C\,\|u\|_{H^s}\|w\|_{H^s},$$

para quaisquer $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$, ou seja, nesse sentido $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra.

Usando o fato de $H^s(\mathbb{R}^n)$ ser uma álgebra, vamos mostrar os dois próximos lemas.

Lema 2.2.9 *Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $p \geq 1$ inteiro. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u^p\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}^p,$$

para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Se $p = 1$ o lema é trivial.

Notamos que, para $p > 1$ inteiro temos que

$$u^p = \underbrace{u \cdot u \cdot \ldots \cdot u}_{p \text{ vezes}}.$$

O Lema 2.2.8 diz que se $u \in H^s$ então $u^p \in H^s$ e aplicando-o p vezes temos que

$$\begin{aligned} \|u^p\|_{H^s} &= \|u^{p-1}u\|_{H^s} \\ &\leq C\|u^{p-1}\|_{H^s}\|u\|_{H^s} \\ &\leq \ldots \\ &\leq C\|u\|_{H^s}^p. \end{aligned}$$

■

Lema 2.2.10 *Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ inteiro. Se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u^p\|_{L^1} \leq C\|u\|_{H^s}^p.$$

Demonstração: Pela definição de norma L^1 temos que

$$\|u^p\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |u^p|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u^{p-1}u|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u^{p-1}|\,|u|dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder (Teorema 2.2.2) com $p = q = 2$ temos

$$\|u^p\|_{L^1} \leq \|u^{p-1}\|\|u\| \leq C\|u^{p-1}\|_{H^s}\|u\|_{H^s}.$$

Como p é inteiro maior que 1 e $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra se $s > \dfrac{n}{2}$, temos

$$\|u^p\|_{L^1} \leq C\|u\|_{H^s}^{p-1}\|u\|_{H^s} = C\|u\|_{H^s}^p.$$

■

Lema 2.2.11 *Sejam $s > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ inteiro. Se $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\|u^p - w^p\|_{H^s} \leq C\Big(\|u\|_{H^s}^{p-1} + \|w\|_{H^s}^{p-1}\Big)\|u - w\|_{H^s},$$

para alguma constante $C > 0$ fixa.

Demonstração: Definimos $h(\lambda) = \lambda^p$. Então $h'(\lambda) = p\,\lambda^{p-1}$.

Pelo Teorema do Valor Médio temos

$$u^p - w^p = p\,\lambda^{p-1}(u - w)$$

com $\lambda = (1-\epsilon)u + \epsilon w$, para algum $0 < \epsilon < 1$.

Logo, usando o Lema 2.2.7 e o fato que p é inteiro, temos

$$\begin{aligned}
\|u^p - w^p\|_{H^s} &= p\|\lambda^{p-1}(u-w)\|_{H^s} \\
&\leq C\|\lambda^{p-1}\|_{H^s}\;\|u-w\|_{H^s} \\
&\leq C\|\lambda\|_{H^s}^{p-1}\|u-w\|_{H^s} \\
&\leq C\|(1-\epsilon)u + \epsilon w\|_{H^s}^{p-1}\|u-w\|_{H^s} \\
&\leq C\Big(\|u\|_{H^s}^{p-1} + \|w\|_{H^s}^{p-1}\Big)\|u-w\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

com C uma constante positiva. ■

2.3 Problema Linear Abstrato: Existência de Solução

Nesta seção vamos fazer um pequeno resumo com os principais resultados necessários para mostrar a existência e unicidade do Problema de Cauchy (1.1) linear, ou seja, quando $\beta = 0$.

2.3.1 Teorema de Lax-Milgram

Definição 2.3.1 *Seja H um espaço de Hilbert real, com a norma $\|\cdot\|_H$. Uma aplicação*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

é chamada de forma bilinear se $B(\cdot, y)$ é linear para cada $y \in H$ e $B(x, \cdot)$ é linear para cada $x \in H$.

B é chamada de limitada (contínua) se existe uma constante C tal que

$$|B(x,y)| \leq C\,\|x\|_H\;\|y\|_H, \qquad \textit{para todo } x, y \in H.$$

B é chamada coerciva se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x,x) \geq \delta \|x\|_H^2, \qquad \textit{para todo } x \in H.$$

Teorema 2.3.1 (Teorema de Lax-Milgram) *Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então para cada funcional linear contínuo F em H, existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(x,u) = F(x), \qquad \textit{para todo } x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [3].

2.3.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências Gomes [15], Brezis [3] e Pazy [34].

Definição 2.3.2 *Sejam X um espaço de Banach, com a norma $\|\cdot\|_X$, e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação*

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

i) $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

ii) $S(t+s) = S(t)\,S(s), \qquad$ *para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

iii) $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)\,x\|_X = 0, \qquad$ *para todo $x \in X$.*

Teorema 2.3.2 *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \qquad \textit{para todo } x \in X.$$

Definição 2.3.3 *Se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, para todo $t > 0$, S é dito semigrupo de contrações de classe C_0.*

Definição 2.3.4 *O operador $B : D(B) \to X$ definido por*

$$D(B) = \left\{ \; x \in X \, ; \, \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} \, x \quad \textit{existe} \; \right\}$$

e

$$Bx = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} \, x, \qquad \textit{para todo } x \in D(B)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Teorema 2.3.3 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso de X.*

Teorema 2.3.4 *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e B o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(B)$, então $S(t)x \in D(B)$, para todo $t > 0$, a aplicação $t \longmapsto S(t)x$ é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx, \qquad \textit{para todo } t > 0.$$

Definição 2.3.5 *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e B seu gerador infinitesimal. Ponhamos $B^0 = I$, $B^1 = B$ e, supondo que B^{k-1} esteja definido, vamos definir B^k cujo domínio é*

$$D(B^k) = \left\{ x \in X \, ; \, x \in D(B^{k-1}) \textit{ e } B^{k-1}x \in D(B) \right\}$$

e definido por

$$B^k x = B(B^{k-1}x),$$

para todo $x \in D(B^k)$.

Teorema 2.3.5 *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e B seu gerador infinitesimal. Então:*

i) *$D(B^k)$ é um subespaço de X e B^k é um operador linear de X;*

ii) *Se $x \in D(B^k)$ então $S(t)\, x \in D(B^k)$, $t > 0$, a aplicação $t \longmapsto S(t)x$ é k-vezes diferenciável e*

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = B^k S(t)x = S(t)B^k x, \qquad \textit{para todo } t > 0;$$

iii) $\bigcap_{k\geq 1} D(B^k)$ *é denso em* X.

Lema 2.3.1 *Seja* B *um operador linear fechado de* X*. Para cada* $x \in D(B^k)$*, definimos*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|B^j x\|_X. \tag{2.1}$$

O funcional $|\cdot|_k$ *é uma norma em* $D(B^k)$ *munido da qual* $D(B^k)$ *é um espaço de Banach.*

Definição 2.3.6 *A norma (2.1) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo* $D(B^k)$ *da norma (2.1) será representado por* $[D(B^k)]$.

2.3.3 Teorema Lumer-Phillips

Definição 2.3.7 *Seja* B *um operador linear de* X*. O conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *para os quais o operador linear* $\lambda I - B$ *é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em* X *é dito conjunto resolvente de* B *e é representado por* $\rho(B)$.

O operador linear $(\lambda I - B)^{-1}$*, representado por* $R(\lambda, B)$*, é dito resolvente de* B.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \big\{x^* \in X^*\,;\, \langle x, x^*\rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\big\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$, para todo $x \in X$.

Imediatamente se vê que $\|j(x)\|_{X^*} = \|x\|_X$.

Definição 2.3.8 *Seja* X *um espaço de Banach. Diz-se que o operador linear* $B : D(B) \subset X \to X$ *é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade,* j*,*

$$Re\langle Bx, j(x)\rangle \leq 0, \qquad \text{para todo } x \in D(A).$$

Em espaços de Hilbert, a definição de operador dissipativo é:

Definição 2.3.9 *Seja H um espaço de Hilbert. Diz-se que o operador linear $B : D(B) \subset H \to H$ é dissipativo se,*

$$Re\langle Bx, x\rangle \leq 0, \quad \textit{para todo } x \in D(B).$$

Teorema 2.3.6 (Lumer-Phillips) *Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Banach X então:*

i) B é dissipativo;

ii) $Im(\lambda I - B) = X, \quad \lambda > 0 \qquad (Im(\lambda I - B) =$ imagem de $\lambda I - B)$.
Reciprocamente, se

i) $D(B)$ é denso em X;

ii) B é dissipativo;

iii) $Im(\lambda_0 I - B) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$,
então B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Teorema 2.3.7 (Teorema de Perturbação de Geradores) *Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em um espaço de Banach X e J é o operador linear e limitado então $B + J$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X.*

2.3.4 Problema de Cauchy Abstrato

Sejam X um espaço de Banach e B um operador linear de X. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $U_0 \in X$ e $t > 0$.

Definição 2.3.10 *Uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$, contínua para $t > 0$, continuamente diferenciável para todo $t > 0$, tal que $u(t) \in D(B)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (2.2) é dita solução forte do problema (2.2).*

Teorema 2.3.8 *Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, para cada $U_0 \in D(B)$ o problema (2.2) tem uma única solução forte*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, D(B)),$$

onde S é o semigrupo gerado por B.

Se $U_0 \in X$ então dizemos que $U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X)$ é uma solução fraca para o problema (2.2).

2.4 Problema Semilinear Abstrato: Existência de solução

Sejam X um espaço de Banach e B um operador linear de X. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU(t) + F(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $U_0 \in X$, $t > 0$ e F é uma função não linear.

Definição 2.4.1 *Uma função $F : D(B) \to D(B)$ é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de $D(B) \subset X$ se dado uma constante $M > 0$ existe uma constante $L_M > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} &\|F(U) - F(W)\|_X + \|B\big(F(U) - F(W)\big)\|_X \\ &\leq CL_M\Big(\|U - W\|_X + \|B(U - W)\|_X\Big) \end{aligned}$$

para todo U e W em $D(B)$ tal que tem-se $\|U\|_X + \|BU\|_X \leq M$ e $\|W\|_X + \|BW\|_X \leq M$.

No Capítulo 5 vamos mostrar que o problema semilinear tem uma única solução, para isso vamos usar o seguinte teorema, que pode ser encontrado em Pazy [34].

Teorema 2.4.1 *Seja $F : D(B) \to D(B)$ uma função Lipschitz contínua em conjuntos limitados de $D(B) \subset X$. Para todo $U_0 \in D(B)$, existe* *uma única solução forte U do problema de Cauchy (2.3) definido em um intervalo maximal $[0, T_m)$ tal que vale uma das seguintes condições*

i) $T_m = \infty$,

ii) $T_m < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T_m} \|U\|_X + \|BU\|_X = \infty$.

A solução U do Problema de Cauchy (2.3) pertence a seguinte classe

$$U \in C^1\big([0, T_m), X\big) \cap C\big([0, T_m), D(B)\big).$$

2.5 Lemas Técnicos

Nesta seção vamos demonstrar lemas que usaremos nas provas de existência e unicidade de solução bem como os lemas usados para encontrar taxas de decaimento e provar que as taxas são ótimas.

O lema abaixo é usado na alta frequência ($|\xi| \geq 1$) no caso $0 \leq \theta < \delta$. Usando este lema conseguimos a regularidade necessária nos dados iniciais.

Lema 2.5.1 *Sejam c, r números reais positivos e $a \in \mathbb{R}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$t^r e^{-c|\xi|^a t} \leq C|\xi|^{-ar}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$.

Demonstração: De fato, considere $s = c|\xi|^a t$ isso implica que

$$t^r = c^{-r} s^r |\xi|^{-ar}.$$

Portanto existe $C > 0$ tal que

$$t^r e^{-c|\xi|^a t} = c^{-r} s^r |\xi|^{-ar} e^{-s} \leq C|\xi|^{-ar},$$

pois a função $s^r e^{-s}$ é limitada no intervalo $0 \leq s < \infty$ para um $r > 0$ fixo. A constante C depende de r e c, isto é $C = C(r, c)$.

■

O lema abaixo é usado para encontrar taxas de decaimento tanto na baixa frequência quanto na alta frequência.

Lema 2.5.2 *Sejam $k > -n$, $\vartheta > 0$ e $C > 0$. Então existe uma constante $K > 0$ dependendo de n tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t}|\xi|^k d\xi \leq Kt^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Observamos que

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t}|\xi|^k d\xi = \int_0^\infty \int_{|\xi|=r} e^{-Cr^\vartheta t} r^k dS_\xi dr \\ &= \int_0^\infty e^{-Cr^\vartheta t} r^k \left(w_n r^{n-1}\right) dr = w_n \int_0^\infty e^{-Cr^\vartheta t} r^{k+n-1} dr, \end{aligned}$$

com a constante w_n definida por $w_n = \text{mes}\big(x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\big)_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Usando a seguinte mudança de variável $s = rt^{\frac{1}{\vartheta}}$, temos

$$\begin{aligned} I(t) &= w_n \int_0^\infty e^{-Cs^\vartheta} s^{k+n-1} t^{-\frac{n+k-1}{\vartheta}} t^{-\frac{1}{\vartheta}} ds \\ &= w_n t^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \int_0^\infty e^{-Cs^\vartheta} s^{k+n-1} ds. \end{aligned}$$

Notamos que para todo $k + n > 0$ temos que

$$\int_0^\infty e^{-Cs^\vartheta} s^{k+n-1} ds < \infty.$$

Portanto temos que

$$I(t) \leq Kt^{-\frac{k+n}{\vartheta}},$$

com $K > 0$ uma constante dependendo de n, k e ϑ.

■

O lema acima é muito importante para encontrar taxas de decaimento na baixa frequência do problema linear ($\beta = 0$), mas quando estamos no caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ esse lema não gera a taxa ótima. Trabalhos anteriores, como o de Charão-da Luz-Ikehata [10], encontram taxas de decaimento melhores na baixa frequência. Para encontrar essa taxa melhor vamos usar o Lema de Haraux-Komornik.

Lema 2.5.3 (Haraux-Komornik) *Seja $E : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função* *não-crescente e assuma que existem duas constantes $r > 0$ e $T_0 > 0$ tal que*

$$\int_S^\infty [E(t)]^{1+r} dt \leq T_0 [E(0)]^r E(S),$$

para todo $S \geq 0$. Então, para todo $t \geq T_0$, vale que

$$E(t) \leq E(0) T_0^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r}} t^{-\frac{1}{r}}.$$

Para encontrarmos taxas de decaimento do problema semilinear ($\beta > 0$) na baixa frequência ($|\xi| \leq 1$) vamos precisar do seguinte lema:

Lema 2.5.4 *Sejam $k > -n$, $\vartheta > 0$ e $C > 0$. Então existe uma constante $K > 0$ dependendo de n tal que*

$$\int_{|\xi| \leq 1} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k d\xi \leq K(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Definimos

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k d\xi.$$

Vamos primeiro mostrar que a desigualdade do lema vale para $t \in (0, 1]$. Como I é uma função contínua para $t \in [0, 1]$, existe uma constante positiva $C_1 > 0$ tal que

$$I(t) \leq C_1 \quad \text{para todo} \quad t \in (0, 1].$$

Seja C_2 uma constante positiva tal que $C_1(1+t)^{\frac{n+k}{\vartheta}} \leq C_1 2^{\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C_2$, logo

$$I(t) \leq C_1 \leq C_2(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}}$$

para todo $t \in (0, 1]$.

Vamos agora mostrar que o lema vale para $t \in [1, \infty)$. Pelo lema anterior temos, para $t \geq 1$

$$I(t) \leq C t^{-\frac{k+n}{\vartheta}}.$$

Basta mostrar que $Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq K(1+t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}}$. Observamos que

$$I(t) \leq Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C\, 2^{\frac{n+k}{\vartheta}}(2t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C\, 2^{\frac{n+k}{\vartheta}}(1+t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}},$$

pois $1+t \leq 2t$ para todo $t \in [1,\infty)$, portanto o lema está demonstrado. ■

Nosso próximo lema é uma estimativa por baixo (cota inferior) para um termo dado por uma integral que aparece na expansão assintótica. Esta estimativa é de fundamental importância para mostrar que a taxa encontrada é ótima, como veremos no Capítulo 7.

Lema 2.5.5 *Sejam $n \geq 3$ e $\theta > \frac{1}{2}$. Então existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \frac{|\sin(|\xi|t)|^2}{|\xi|^2}\, d\xi \geq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}},$$

com C uma constante positiva dependendo somente de n e θ.

Demonstração: Observamos que

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t} \left|\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right|^2 d\xi \\ &= \int_0^\infty \int_{|\xi|=r} e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} \left|\frac{\sin(tr)}{r}\right|^2 dS_\xi dr \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^2}} \left|\frac{\sin(tr)}{r}\right|^2 \left(\int_{|\xi|=r} dS_\xi\right) dr, \end{aligned}$$

com $w_n = \displaystyle\int_{|w|=1} dw$.

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^\infty e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} \left|\frac{\sin(tr)}{r}\right|^2 \left(w_n r^{n-1}\right) dr \\ &= w_n \int_0^\infty e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} r^{n-3}|\sin(tr)|^2 dr. \end{aligned}$$

Como $1 \leq 1+r^{2\delta}$ para todo $r \in \mathbb{R}$ temos $-r^{2\theta}t \leq -\dfrac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}$. Então segue que

$$I(t) \geq w_n \int_0^\infty e^{-r^{2\theta}t} r^{n-3}|\sin(tr)|^2 dr.$$

Considerando a seguinte mudança de variável $s = rt^{\frac{1}{2\theta}}$ obtemos

$$\begin{aligned} I(t) &\geq w_n \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} \left(st^{-\frac{1}{2\theta}}\right)^{n-3} \sin^2\left(t^{1-\frac{1}{2\theta}} s\right) t^{-\frac{1}{2\theta}} ds \\ &= w_n t^{-\frac{n-2}{2\theta}} \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-3} \sin^2\left(t^{1-\frac{1}{2\theta}} s\right) ds, \end{aligned}$$

para $\theta > \dfrac{1}{2}$.

Usando a identidade $\cos(2tr) = 1 - 2\sin^2(tr)$ segue que

$$\begin{aligned} I(t) &\geq \frac{1}{2} w_n t^{-\frac{n-2}{2\theta}} \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-3} \Big(1 - \cos\left(2t^{1-\frac{1}{2\theta}} s\right)\Big) ds \\ &= \frac{1}{2} w_n t^{-\frac{n-2}{2\theta}} (A_0 - F_n(t)), \end{aligned}$$

com $A_0 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-3} ds$ e $F_n(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-3} \cos\left(2t^{1-\frac{1}{2\theta}} s\right) ds.$

Como $f(s) = e^{-s^{2\theta}} s^{n-3} \in L^1(\mathbb{R})$ para $n \geq 3$, aplicando o Lema de Riemann-Lebesgue temos

$$F_n(t) \to 0$$

quando $t \to \infty$, portanto existe $t_0 > 0$ tal que $F_n(t) \leq \dfrac{A_0}{2}$ para todo $t \geq t_0$. Assim o lema está provado para $C = \dfrac{w_n A_0}{4}$.

■

No Capítulo 6 encontramos taxas de decaimento para a norma da energia e norma L^2 da solução. Para isso precisamos do lema de cálculo demonstrado abaixo.

Lema 2.5.6 *Sejam $a > 1$ e $p > 1$ inteiro. Então*

$$(1+t)^a \int_0^t (1+\tau)^{-pa} (1+t-\tau)^{-a} d\tau \leq C = C(a,p)$$

para todo $t > 0$ onde $C(a,p)$ é uma constante positiva.

Demonstração: Para calcular essa integral vamos separá-la em duas, sendo uma sobre o intervalo $\left[0, \frac{t}{2}\right]$ e a outra sobre $\left[\frac{t}{2}, t\right]$.

Primeiro observamos que se $0 \leq \tau \leq \dfrac{t}{2}$ temos

$$1 + t = 1 + 2t - t \leq 2 + 2t - 2\tau \leq 2(1 + t - \tau)$$

e isso implica que

$$(1+t-\tau)^{-a} \le 2^a(1+t)^{-a}$$

pois $a > 1$.

Então temos

$$(1+t)^a \int_0^{\frac{t}{2}} (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \le 2^a \int_0^{\frac{t}{2}} (1+\tau)^{-pa} d\tau$$

$$= 2^a \left. \frac{(1+\tau)^{1-pa}}{1-ap} \right|_0^{\frac{t}{2}} = -2^a \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-ap}}{ap-1} + 2^a \frac{1}{ap-1} \le \frac{2^a}{ap-1}$$

pois $ap > 1$.

Agora vamos estimar a integral para $\frac{t}{2} \le \tau \le t$. Nesse intervalo temos

$$1+t \le 2(1+\tau)$$

Logo

$$(1+\tau)^{-ap} \le 2^{ap}(1+t)^{-ap},$$

e obtemos

$$(1+t)^a \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \le 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1+t-\tau)^{-a} d\tau$$

$$= -2^{ap}(1+t)^{a-ap} \left. \frac{(1+t-\tau)^{1-a}}{1-a} \right|_{\frac{t}{2}}^{t}$$

$$= -2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{1}{1-a} + 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-a}}{1-a}$$

$$\le 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{1}{a-1} \le \frac{2^{ap}}{a-1},$$

já que $ap > a$, onde $\frac{2^{ap}}{a-1}$ é uma constante positiva, pois $a > 1$.

Finalmente, definindo $C(a,p) = \max\left\{\frac{2^{ap}}{a-1}, \frac{2^a}{ap-1}\right\}$, concluímos que

$$(1+t)^a \int_0^t (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \le C(a,p)$$

para todo $t \ge 0$ e portanto o lema está provado. ∎

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Solução: Problema Linear

Neste capítulo mostramos, através de Teoria de Semigrupos, a existência e unicidade de soluções para o seguinte problema de Cauchy associado a uma equação de placas com inércia rotacional estrutural e dissipação fracionária em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$:

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + \alpha \Delta^2 u - \Delta u + (-\Delta)^{\theta} u_t = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

com $u = u(t,x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ uma constante. As potências δ e θ do Laplaciano são tais que $0 \leq \delta \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Fazendo formalmente o produto interno usual em $L^2(\mathbb{R}^n)$ da equação diferencial em (3.1) com u_t temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\delta/2} u_t\|^2 + \alpha\|\Delta u\|^2 + \|\bigtriangledown u\|^2\Big) + \|(-\Delta)^{\theta/2} u_t\|^2 = 0,$$

para todo $t > 0$.

Definindo a energia total do sistema (3.1) por

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(\|u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\delta/2}u_t\|^2 + \alpha\|\Delta u\|^2 + \|\bigtriangledown u\|^2\Big), \tag{3.2}$$

temos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \|(-\Delta)^{\theta/2}u_t\|^2 = 0, \tag{3.3}$$

para todo $t > 0$.

Podemos ver que $E(t)$ é uma função decrescente no tempo e o termo $(-\Delta)^{\theta}u_t$ representa a dissipação do sistema (3.1).

Somos então levados a definir o seguinte espaço como sendo o espaço da energia

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Precisamos tomar cuidado, pois notamos que para $\delta \leq 2$ o espaço X definido acima está adequado. No caso $\delta > 2$ teríamos que $u_t \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, u_t seria mais regular que u. Nos casos em que $\delta > 2$ precisaríamos considerar um espaço para os dados iniciais mais regulares, mas isso não será feito neste trabalho. Para mostrar a existência e unicidade de solução, vamos dividir o problema em dois casos:

1) Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \delta \leq 2$;

2) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Observamos, novamente, que podemos mostrar existência e unicidade de solução para outras condições sobre δ e θ, mas para isso é necessário considerar um espaço para os dados iniciais mais regulares. Os casos citados acima são os mais importantes, e é onde são encontrados a maioria das aplicação físicas. Com essas condições a maior potência possível para o operador Laplaciano é 2, ou seja, teremos no máximo $(-\Delta)^2$.

Considerando o espaço da energia $X = H^2(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ vamos reduzir a ordem do problema (3.1) e escrevê-lo na forma matricial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = BU + J(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

com $U = (u, u_t)$, $U(0) = (u_0, u_1)$ e operadores B e J adequados para cada caso. Usando o Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 2.3.6), vamos mostrar que B é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e que J é um operador linear e limitado em X, ou seja, existirá uma única solução para o problema de Cauchy (3.1). Tal resultado pode ser resumido no seguinte teorema.

Teorema 3.0.1 *Sejam $n \geq 1$, $0 \leq \delta \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. Se*

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \ \textit{e} \ u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

então o problema de Cauchy (3.1) *tem uma única solução u na seguinte classe*

$$u \in C^2\big([0,\infty); H^\delta(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,\infty); H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Antes de mostrarmos a existência e unicidade de solução precisamos da definição de dois operadores importantes: os operadores A_2 e A_θ. Para o caso 1) vamos usar o operador A_2 para definir B, já no caso 2) vamos usar os dois operadores, A_2 e A_θ, para definir o operador B.

3.1 Operadores A_2 e A_θ

Os operadores A_2 e A_θ vão ser fundamentais para encontrarmos o operador B que será o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, porém como não são operadores usuais vamos definí-los de maneira formal. Os operadores A_2 e A_θ têm essencialmente a mesma definição, mas como vamos considerar um produto interno diferente em $H^2(\mathbb{R}^n)$ a definição de A_2 também precisa ser diferente.

3.1.1 Operador A_2

Para definir o operador A_2 primeiro definimos seu domínio como sendo um subespaço de $H^2(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$
\begin{aligned}
&D(A_2) = \Big\{ u \in H^2(\mathbb{R}^n)\,;\, \exists\, y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \quad \text{com} \\
&\alpha(\Delta u, \Delta\psi) + (\nabla u, \nabla\psi) + (u, \psi) = (y, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big), \\
&\text{para todo } \psi \in H^2(\mathbb{R}^n) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Da definição de $D(A_2)$ é natural definir o operador A_2, como:

$$
\begin{aligned}
A_2 : D(A_2) &\longrightarrow H^\delta(\mathbb{R}^n) \\
A_2 u = y_u, &\qquad u \in D(A_2).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Formalmente, o operador A_2 é dado por

$$
A_2 = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(\alpha\Delta^2 - \Delta + I).
$$

Mostraremos no Lema 3.1.1 que A_2 está bem definido.

Lema 3.1.1 *Para qualquer $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ existe no máximo um $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$
\alpha(\Delta u, \Delta\psi) + (\nabla u, \nabla\psi) + (u, \psi) = (y, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big), \tag{3.6}
$$

para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Se y_1 e y_2 pertencem a $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem a relação (3.6), temos

$$
(y_1, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} y_1, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big) = (y_2, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} y_2, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big),
$$

ou ainda,

$$
(y_1 - y_2, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2}(y_1 - y_2), (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big) = 0,
$$

para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ está densamente imerso em $H^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$(y_1 - y_2, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2}(y_1 - y_2), (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big) = 0, \tag{3.7}$$

para qualquer $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Considere $y = y_1 - y_2$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, existe $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim\limits_{\nu\longrightarrow\infty} \psi_\nu = y$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\|\psi_\nu - y\|_{H^\delta} \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \qquad \nu \longrightarrow \infty,$$

ou ainda,

$$\|\psi_\nu - y\|_{H^\delta}^2 = \|y\|_{H^\delta}^2 - 2(y, \psi_\nu)_{H^\delta} + \|\psi_\nu\|_{H^\delta}^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \nu \longrightarrow \infty. \tag{3.8}$$

Como $\big|\|\psi_\nu\| - \|y\|\big| \leq \|\psi_\nu - y\|$ temos também

$$\|\psi_\nu\|_{H^\delta} \longrightarrow \|y\|_{H^\delta} \qquad \text{quando} \qquad \nu \longrightarrow \infty. \tag{3.9}$$

Logo, usando (3.8) e (3.9), concluímos

$$\lim_{\nu\longrightarrow\infty} (y, \psi_\nu)_{H^\delta} = \|y\|_{H^\delta}^2. \tag{3.10}$$

Da equação (3.7) e da definição do produto interno em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos

$$0 = (y, \psi_\nu) + ((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi_\nu) = (y, \psi_\nu)_{H^\delta}. \tag{3.11}$$

Assim, de (3.10) e (3.11) concluímos

$$0 = \lim_{\nu\to\infty} (y, \psi_\nu)_{H^\delta} = \|y\|_{H^\delta}^2,$$

ou seja, $\|y\|_{H^\delta}^2 = 0$. Portanto, temos $y = 0$, o que implica em

$$y_1 = y_2.$$

■

Observação 3.1.1 *Como $u \equiv 0 \in D(A_2)$, então $D(A_2)$ é não vazio e segue do Lema 3.1.1 que A_2 está bem definido.*

Nosso próximo passo é encontrar uma caracterização para o domínio de A_2. Nos Lemas 3.1.2 e 3.1.3 mostraremos que

$$D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$$

para o caso $0 \leq \delta \leq 2$.

Lema 3.1.2 *Se $0 \leq \delta \leq 2$ então $D(A_2) \subset H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^{4-\delta}} \leq C\|A_2 u\|_{H^\delta},$$

para todo $u \in D(A_2)$.

Demonstração: Dado $u \in D(A_2)$, pela definição de $D(A_2)$ existe um $y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\alpha(\Delta u, \Delta\psi) + (\bigtriangledown u, \bigtriangledown \psi) + (u, \psi) = (y, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big), \tag{3.12}$$

para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Definimos agora o funcional $F_1 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle F_1, \psi\rangle = (y, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big),$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

É claro que F_1 está bem definido e é linear. Também temos F_1 contínuo, pois

$$\begin{aligned}|\langle F_1, \psi\rangle| &\leq |(y, \psi)| + \big|\big((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big)\big| \\ &\leq \|y\|\,\|\psi\| + \big\|(-\Delta)^{\delta/2} y\big\|\,\big\|(-\Delta)^{\delta/2}\psi\big\|.\end{aligned}$$

Usando a Identidade de Plancherel (Teorema 2.2.3) e a definição da norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}|\langle F_1, \psi\rangle| &\leq \|\hat{y}\|\,\|\hat{\psi}\| + \||\xi|^\delta \hat{y}\|\,\||\xi|^\delta \hat{\psi}\| \\ &\leq 2\big\|(1 + |\xi|^{2\delta})^{1/2}\hat{y}\big\|\,\big\|(1 + |\xi|^{2\delta})^{1/2}\hat{\psi}\big\| \\ &\leq 2\|y\|_{H^\delta}\,\|\psi\|_{H^\delta},\end{aligned}$$

para todo $\psi \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, isto é, mostramos que

$$\|F_1\| \leq 2\|y\|_{H^{\delta}}.$$

Então o problema variacional (3.1) toma a seguinte forma

$$\alpha(\Delta u, \Delta\psi) + (\bigtriangledown u, \bigtriangledown\psi) + (u, \psi) = \langle F_1, \psi\rangle, \tag{3.13}$$

para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Como vale em $H^2(\mathbb{R}^n)$ então vale em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e assim concluímos que a identidade

$$\alpha\Delta^2 u - \Delta u + u = F_1,$$

vale em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a Transformada de Fourier, temos da definição de F_1

$$\big(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2 + 1\big)\hat{u} = \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)\hat{y},$$

ou ainda,

$$\big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{-1/2}\big(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2 + 1\big)\hat{u} = \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\hat{y}. \tag{3.14}$$

Sendo $y = A_2 u$ temos

$$\hat{y} = \widehat{A_2 u} = \frac{1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4}{1 + |\xi|^{2\delta}}\hat{u}. \tag{3.15}$$

Calculando a norma L^2 para cada termo da igualdade (3.14) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})^{-1}(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2 + 1)^2|\hat{u}|^2\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{y}|^2\, d\xi.$$

Como $(1 + |\xi|^{2\delta})^{-1}(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2 + 1)^2$ é equivalente a $1 + |\xi|^{2(4-\delta)}$ (ver Lema 2.2.5), concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{u}|^2\, d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{y}|^2\, d\xi, \tag{3.16}$$

com C uma constante que depende de δ.

Logo de (3.16) e pela definição de A_2 em (3.15) temos

$$\|u\|_{H^{4-\delta}} \leq C\|y\|_{H^\delta} = C\|A_2 u\|_{H^\delta},$$

para todo $u \in D(A_2)$, isto é, $D(A_2) \subset H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Notamos que a condição de $0 \leq \delta \leq 2$ é necessária, pois $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ precisa estar contido em $H^2(\mathbb{R}^n)$.

■

Lema 3.1.3 *Se $0 \leq \delta \leq 2$ então $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \subseteq D(A_2)$, ou seja, dado $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ existe um $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\begin{aligned}
&-\alpha((-\Delta)^{1-\delta/2}(\Delta u), (-\Delta)^{\delta/2}\psi) - (\Delta u, \psi) + (u, \psi) \\
&= (y, \psi) + ((-\Delta)^{\delta/2} y, (-\Delta)^{\delta/2}\psi),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sejam $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $G_1 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle G_1, \psi \rangle = -\alpha((-\Delta)^{1-\delta/2}(\Delta u), (-\Delta)^{\delta/2}\psi) - (\Delta u, \psi) + (u, \psi).$$

Então G_1 está bem definido e é linear, pois $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$. Além disso G_1 é contínuo pois

$$\begin{aligned}
|\langle G_1, \psi \rangle| \leq& \alpha|((-\Delta)^{1-\delta/2}(\Delta u), (-\Delta)^{\delta/2}\psi)| + |(\Delta u, \psi)| + |(u, \psi)| \\
\leq& \alpha\| \, |\xi|^{4-\delta}\hat{u}\| \, \| \, |\xi|^{\delta}\hat{\psi}\| + \| \, |\xi|^2\hat{u}\| \, \|\hat{\psi}\| + \|\hat{u}\| \, \|\hat{\psi}\| \\
\leq& \Big(\alpha\| \, |\xi|^{4-\delta}\hat{u}\| + \| \, |\xi|^2\hat{u}\| + \|\hat{u}\|\Big) \, \|\psi\|_{H^\delta} \\
\leq& (\alpha + 2)\|u\|_{H^{4-\delta}} \, \|\psi\|_{H^\delta},
\end{aligned}$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Assim, por dualidade, temos $G_1 \in H^{-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $a_2 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma definida por

$$a_2(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) + ((-\Delta)^{\delta/2}\varphi, (-\Delta)^{\delta/2}\psi),$$

para todo $\psi, \varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Então $a_2(\cdot,\cdot)$ está bem definida e é bilinear, além disso é contínua, pois

$$\begin{aligned}|a_2(\varphi,\psi)| &\leq \|\hat{\varphi}\|\,\|\hat{\psi}\| + \||\xi|^\delta\hat{\varphi}\|\,\||\xi|^\delta\hat{\psi}\| \\ &\leq 2\|\varphi\|_{H^\delta}\,\|\psi\|_{H^\delta}.\end{aligned}$$

Também notamos que $a_2(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois

$$a_2(\varphi,\varphi) = \|\hat{\varphi}\|^2 + \|\,|\xi|^\delta\hat{\varphi}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{\varphi}|^2\,d\xi = \|\varphi\|^2_{H^\delta},$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Logo, o problema variacional

$$a_2(y,\psi) = \langle G_1,\psi\rangle, \quad \psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \tag{3.18}$$

tem, pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.3.1), uma única solução $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Em particular (3.18) vale para cada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe único $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned}&(y,\psi) + ((-\Delta)^{\delta/2}y,(-\Delta)^{\delta/2}\psi) \\ &= -\alpha((-\Delta)^{1-\delta/2}(\Delta u),(-\Delta)^{\delta/2}\psi) - (\Delta u,\psi) + (u,\psi),\end{aligned} \tag{3.19}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Mas se $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$-(\Delta u,\psi) = (\nabla u,\nabla\psi)$$

e

$$-((-\Delta)^{1-\delta/2}(\Delta u),(-\Delta)^{\delta/2}\psi) = (\Delta u,\Delta\psi).$$

Substituindo as identidades acima em (3.19) e usando a densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $H^2(\mathbb{R}^n)$ segue que a identidade na definição de $D(A_2)$ é válida.

Logo temos $u \in D(A_2)$, isto é, $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_2)$.

■

3.1.2 Operador A_θ

Da mesma forma que definimos o operador A_2 na Subseção 3.1.1 vamos definir o operador A_θ, se $0 \leq \delta \leq \theta$. Definimos o domínio de A_θ como sendo o subespaço de $H^\theta(\mathbb{R}^n)$ dado por:

$$
\begin{aligned}
&D(A_\theta) = \Big\{ v \in H^\theta(\mathbb{R}^n)\,;\, \exists\, z = z_v \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \quad \text{tal que} \\
&\big((-\Delta)^{\theta/2} v, (-\Delta)^{\theta/2}\psi\big) + (v,\psi) = (z,\psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} z, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big), \\
&\text{para todo } \psi \in H^\theta(\mathbb{R}^n) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Da definição de $D(A_\theta)$, o operador A_θ será definido como

$$
\begin{aligned}
A_\theta : D(A_\theta) &\longrightarrow H^\delta(\mathbb{R}^n) \\
A_\theta v = z_v, &\qquad v \in D(A_\theta).
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Formalmente o operador A_θ é dado por

$$
A_\theta = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(I + (-\Delta)^\theta).
$$

Mostraremos no Lema 3.1.4 que A_θ está bem definido.

Lema 3.1.4 *Dado $v \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$ existe no máximo um $z = z_v \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$
\big((-\Delta)^{\theta/2} v, (-\Delta)^{\theta/2}\psi\big) + (v,\psi) = (z,\psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} z, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big), \tag{3.21}
$$

para todo $\psi \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sejam $v \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$ e $z_1, z_2 \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a relação (3.21). Então devemos ter

$$
(z_1,\psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} z_1, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big) = (z_2,\psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2} z_2, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big),
$$

para todo $\psi \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ está densamente imerso em $H^\theta(\mathbb{R}^n)$ temos

$$
(z_1 - z_2,\psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2}(z_1 - z_2), (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big) = 0,
$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De forma análoga a demonstração do Lema 3.1.1 mostramos que $z_1 = z_2$.

$\blacksquare$

Observação 3.1.2 *Como $v \equiv 0 \in D(A_\theta)$, segue do Lema 3.1.4 que A_θ está bem definido.*

Lema 3.1.5 *Se $0 \leq \delta \leq \theta$ então $D(A_\theta) \subseteq H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|v\|_{H^{2\theta-\delta}} \leq C\|A_\theta v\|_{H^\delta},$$

para todo $v \in D(A_\theta)$.

Demonstração: Dado $v \in D(A_\theta)$, pela definição de $D(A_\theta)$ existe um $z \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\big((-\Delta)^{\theta/2}v, (-\Delta)^{\theta/2}\psi\big) + (v, \psi) = (z, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2}z, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big), \quad (3.22)$$

para todo $\psi \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Como no Lema 3.1.2, definimos $F_1 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle F_1, \psi\rangle = (z, \psi) + \big((-\Delta)^{\delta/2}z, (-\Delta)^{\delta/2}\psi\big),$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Formalmente temos

$$F_1 = z + (-\Delta)^\delta z.$$

Mostramos, como no Lema 3.1.2, que F_1 está bem definido, é linear e é contínuo, pois

$$|\langle F_1, \psi\rangle| \leq 2\|z\|_{H^\delta}\,\|\psi\|_{H^\delta},$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \subset H^\theta(\mathbb{R}^n)$, pois $0 \leq \delta \leq \theta$.

Então o problema variacional (3.22) toma a seguinte forma

$$\big((-\Delta)^{\theta/2}v, (-\Delta)^{\theta/2}\psi\big) + (v, \psi) = \langle F_1, \psi\rangle, \quad (3.23)$$

para todo $\psi \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$. Como vale em $H^\theta(\mathbb{R}^n)$ então vale em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e concluímos

$$(-\Delta)^{\theta} v + v = F_1 \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Aplicando a Transformada de Fourier temos

$$\big(1 + |\xi|^{2\theta}\big)\hat{v} = \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)\hat{z},$$

ou ainda,

$$\big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{-1/2}\big(1 + |\xi|^{2\theta}\big)\hat{v} = \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\hat{z}. \tag{3.24}$$

Sendo $z = A_\theta v$ temos

$$\hat{z} = \widehat{A_\theta v} = \frac{1 + |\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}}\hat{v}. \tag{3.25}$$

Calculando a norma L^2 para cada termo da igualdade (3.24) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})^{-1}(1 + |\xi|^{2\theta})^2 |\hat{v}|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{z}|^2 \, d\xi.$$

Como $(1 + |\xi|^{2\delta})^{-1}(1 + |\xi|^{2\theta})^2$ é equivalente a $1 + |\xi|^{2(2\theta-\delta)}$ (ver Lema 2.2.5), concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2(2\theta-\delta)}\big)|\hat{v}|^2 \, d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{z}|^2 \, d\xi. \tag{3.26}$$

Logo de (3.26) temos

$$\|v\|_{H^{2\theta-\delta}} \leq C\|z\|_{H^\delta} = C\|A_\theta v\|_{H^\delta},$$

para todo $v \in D(A_\theta)$.

Note que a condição de $\delta \leq \theta$ é necessária, pois $H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$ precisa estar contido em $H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

■

Lema 3.1.6 *Se $0 \leq \delta \leq \theta$ então $H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subseteq D(A_\theta)$, ou seja, dado $v \in H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$ existe um $z \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\big((-\Delta)^{\theta/2} v, (-\Delta)^{\theta/2}\psi\big) + (v, \psi) = (z, \psi) + ((-\Delta)^{\delta/2} z, (-\Delta)^{\delta/2}\psi), \tag{3.27}$$

para todo $\psi \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sejam $v \in H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $G_2 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle G_2, \psi\rangle = ((-\Delta)^{\theta-\delta/2}v, (-\Delta)^{\delta/2}\psi) + (v, \psi)$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Então G_2 está bem definido e é linear, pois $v \in H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$. Além disso G_2 é contínuo, pois

$$\begin{aligned}|\langle G_2, \psi\rangle| \leq& |((-\Delta)^{\theta-\delta/2}v, (-\Delta)^{\delta/2}\psi)| + |(v, \psi)| \\ \leq& \| \, |\xi|^{2\theta-\delta}\hat{v}\| \, \| \, |\xi|^\delta \hat{\psi}\| + \|\hat{v}\| \, \|\hat{\psi}\| \\ \leq& 2\|v\|_{H^{2\theta-\delta}} \, \|\psi\|_{H^\delta},\end{aligned}$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Seja $a_2 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a_2(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) + ((-\Delta)^{\delta/2}\varphi, (-\Delta)^{\delta/2}\psi),$$

para todos $\psi, \varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, como no Lema 3.1.3.

Sabemos que $a_2(\cdot, \cdot)$ está bem definida, é bilinear e também é contínua e coerciva, pois

$$|a_2(\varphi, \psi)| \leq \; 2\|\varphi\|_{H^\delta} \, \|\psi\|_{H^\delta} \qquad \text{e} \qquad a_2(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2_{H^\delta}.$$

Logo, o problema variacional

$$a_2(z, \psi) = \langle G_2, \psi\rangle, \qquad \text{para todo } \psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \tag{3.28}$$

tem, pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.3.1), uma única solução $z \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Em particular (3.28) vale para cada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe único $z \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(z, \psi) + ((-\Delta)^{\delta/2}z, (-\Delta)^{\delta/2}\psi) = ((-\Delta)^{\theta-\delta/2}v, (-\Delta)^{\delta/2}\psi) + (v, \psi),$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Ou ainda,

$$(z, \psi) + ((-\Delta)^{\delta/2} z, (-\Delta)^{\delta/2} \psi) = ((-\Delta)^{\theta/2} v, (-\Delta)^{\theta/2} \psi) + (v, \psi),$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Usando a densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $H^\theta(\mathbb{R}^n)$ segue que $v \in D(A_\theta)$, isto é, $H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_\theta)$.

■

Observação 3.1.3 *Pelos Lemas 3.1.5 e 3.1.6 temos $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$. Notamos que como $0 \leq \delta \leq \theta$, temos $\delta \leq \theta \leq 2\theta - \delta$ e assim*

$$H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\theta(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

3.2 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \delta \leq 2$

Nesta seção, como consideramos $0 \leq \delta \leq 2$, temos $H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Podemos então definir o espaço da energia como

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$$

com os seguintes produtos internos

$$(u, v)_{H^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \alpha |\xi|^4)\, \hat{u}\, \bar{\hat{v}}\, d\xi, \tag{3.29}$$

$$(u, v)_{H^\delta} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})\, \hat{u}\, \bar{\hat{v}}\, d\xi, \quad 0 \leq \delta < 2 \tag{3.30}$$

que são equivalentes aos produtos internos usuais, como mostramos na Subseção 2.2.6.

Como já comentamos, nosso objetivo nesta seção é definir operadores B_1 e J_1 tais que B_1 seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e J_1 seja um operador linear e limitado em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Vamos encontrar os operadores B_1 e J_1 associados com o problema de

Cauchy linear (3.1). Para $v = u_t$, de modo formal temos

$$v_t = u_{tt} = -\big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big(\alpha\Delta^2 - \Delta\big)u - \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}(-\Delta)^{\theta} v$$

com u sendo a solução do problema (3.1).

Na Seção 3.1 definimos o operador A_2 da seguinte forma

$$A_2 = \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big(\alpha\Delta^2 - \Delta + I\big).$$

Se somarmos e diminuirmos o termo $\big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}u$ temos a identidade abaixo

$$v_t = u_{tt} = -A_2 u - \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\Big((-\Delta)^{\theta} v - u\Big).$$

Escrevendo o sistema na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_1 U + J_1(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.31}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, $B_1 : D(A_2) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to X$ é dado por

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & 0 \end{pmatrix}$$

com $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e o operador $J_1 : X \to X$ é dado por

$$J_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^{\theta} v\big) \end{pmatrix}.$$

Na Subseção 3.2.1 mostraremos que B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e na Subseção 3.2.2 mostraremos que J_1 é um operador limitado em X. Pelo Teorema 2.3.7 concluímos que $B_1 + J_1$ é gerador de um semigrupo de classe C_0. Seja

$$S_1 : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo de classe C_0 em X gerado por $B_1 + J_1$. Então $U(t) = S_1(t)U_0$ é a solução para o Problema de Cauchy (3.31).

Assim podemos concluir, se os dados iniciais são tais que

$$U_0 = (u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n),$$

a solução $U(t)$ pertence a seguinte classe

$$U(t) = S_1(t)U_0 \in C\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)$$

ou ainda, $u(t)$, a primeira componente de $U(t) = S_1(t)U_0$, é a única solução fraca do sistema linear de placas (3.1) e satisfaz

$$u \in C\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big).$$

Além disso, se os dados iniciais são tais que

$$U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_1) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

então

$$u \in C\big([0,\infty), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^2\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)$$

é única solução forte de (3.1).

3.2.1 B_1 é Gerador Infinitesimal de um Semigrupo de Contração de Classe C_0

Nosso objetivo agora é mostrar que B_1 é um operador bem definido e é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Usando a definição do domínio do operador A_2 podemos realizar o operador B_1 sobre o domínio $D(B_1) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ e contradomínio o espaço $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\begin{aligned} &B_1 : H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \\ &(u,v) \longmapsto B_1(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (v, -A_2 u), \end{aligned} \tag{3.32}$$

pois pelos Lemas 3.1.2 e 3.1.3 temos $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.2.1 *O operador B_1 definido em (3.32) é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: A ideia da prova é mostrar que B_1 atende as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3.6). Então aqui consideramos $(u, v) \in D(B_1)$, ou seja, $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Para mostrar que B_1 é dissipativo usando as definições (3.29) e (3.30) de produto interno de $H^2(\mathbb{R}^n)$ e $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos

$$
\begin{aligned}
&\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^2\times H^\delta} = \big((v,-A_2u),(u,v)\big)_{H^2\times H^\delta}\\
&= (v,u)_{H^2} + (-A_2u, v)_{H^\delta}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_2u}\,\bar{\hat{v}}\,d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4}{1+|\xi|^{2\delta}}\hat{u}\,\bar{\hat{v}}\,d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\Big(\hat{v}\,\bar{\hat{u}} - \hat{u}\,\bar{\hat{v}}\Big)\,d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)2iImg\big(\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\big)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

pois $\widehat{A_2u} = \dfrac{1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4}{1+|\xi|^{2\delta}}\hat{u}$ conforme calculado em (3.15), onde $Img\big(\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\big)$ representa a parte imaginária de $\hat{v}\,\bar{\hat{u}}$.

Portanto B_1 é dissipativo já que $Re\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^2\times H^\delta} = 0$ para todo $(u, v) \in D(B_1)$.

Vamos mostrar agora que $Im(I - B_1) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Primeiro vamos mostrar que $Im(I - B_1) \subset H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Dado $(f, g) \in Im(I - B_1)$ existe $(u, v) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(I - B_1)(u, v) = (f, g).$$

Podemos ver que $B_1(u, v) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e também $(u, v) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ quando $0 \le \delta \le 2$ assim temos

$$(f, g) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Vamos agora mostrar que $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \subset Im(I - B_1)$. Dado $(f, g) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, queremos encontrar $(u, v) \in D(B_1)$ tal que $(I - B_1)(u, v) = (f, g)$, ou equivalentemente, pela definição de B_1, mostrar que existe $(u, v) \in D(B_1)$ satisfazendo

$$(u - v, v + A_2 u) = (f, g).$$

Assim, deve-se mostrar que existe $(u, v) \in D(B_1)$ que satisfaz

$$\begin{cases} u - v = f \\ v + A_2 u = g. \end{cases}$$

Da primeira igualdade temos $v = u - f$ e substituindo na segunda igualdade temos

$$A_2 u + u = g + f. \tag{3.33}$$

Precisamos mostrar que existe $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a identidade acima. Multiplicando por $\big(I + (-\Delta)^\delta\big)$ em ambos os lados da identidade (3.33) temos da definição de A_2

$$(\alpha\Delta^2 - \Delta + I)u + (I + (-\Delta)^\delta)u = (I + (-\Delta)^\delta)(g + f).$$

Definimos a forma $a(\cdot, \cdot) : H^2(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(\eta, \psi) = (\eta, \psi)_{H^2} + (\eta, \psi)_{H^\delta},$$

que está bem definida e é bilinear, pois $0 \leq \delta \leq 2$.

Vamos mostrar agora que $a(\cdot, \cdot)$ é contínua. De fato, para todo $\eta, \psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$, como $H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} |a(\eta, \psi)| &\leq |(\eta, \psi)_{H^2}| + |(\eta, \psi)_{H^\delta}| \\ &\leq \|\eta\|_{H^2}\|\psi\|_{H^2} + \|\eta\|_{H^\delta}\|\psi\|_{H^\delta} \\ &\leq 2\|\eta\|_{H^2}\|\psi\|_{H^2}. \end{aligned}$$

Também $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois para todo $\eta \in H^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} a(\eta,\eta) &= (\eta,\eta)_{H^2} + (\eta,\eta)_{H^\delta} \\ &= \|\eta\|_{H^2}^2 + \|\eta\|_{H^\delta}^2 \geq \|\eta\|_{H^2}^2. \end{aligned}$$

Agora seja $F : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle F, \psi \rangle = (g,\psi)_{H^\delta} + (f,\psi)_{H^\delta}.$$

Temos F linear e contínuo. De fato, a linearidade é imediata e a continuidade segue pois $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} |\langle F,\psi\rangle| &\leq |(g,\psi)_{H^\delta}| + |(f,\psi)_{H^\delta}| \\ &\leq \|g\|_{H^\delta}\|\psi\|_{H^\delta} + \|f\|_{H^\delta}\|\psi\|_{H^\delta} \\ &\leq \big(\|g\|_{H^\delta} + \|f\|_{H^\delta}\big)\|\psi\|_{H^\delta}, \end{aligned}$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Assim, por dualidade temos $F \in H^{-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-2}(\mathbb{R}^n)$.

Pelo Lema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.3.1), existe uma única $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,\psi) = \langle F,\psi\rangle,$$

para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Isto é, existe uma única $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a igualdade

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta u, \Delta\psi) + ((-\Delta)^{1/2}u, (-\Delta)^{1/2}\psi) + ((-\Delta)^{\delta/2}u, (-\Delta)^{\delta/2}\psi) \\ + 2(u,\psi) = (g,\psi)_{H^\delta} + (f,\psi)_{H^\delta}. \end{aligned}$$

Em particular temos

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta u, \Delta\psi) + ((-\Delta)^{1/2}u, (-\Delta)^{1/2}\psi) + ((-\Delta)^{\delta/2}u, (-\Delta)^{\delta/2}\psi) \\ + 2(u,\psi) = (g,\psi)_{H^\delta} + (f,\psi)_{H^\delta} \end{aligned}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, isso implica que

$$A_2 u + u = g + f$$

no sentido das distribuições, ou seja, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Observe que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a Transformada de Fourier em $A_2u + u = g + f$ temos

$$\widehat{A_2u} + \hat{u} = \hat{f} + \hat{g}.$$

Podemos reescrever a identidade acima da seguinte forma

$$\big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{A_2u} = \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\big(\hat{f} + \hat{g} - \hat{u}\big).$$

Usando (3.15) e o fato de $(1 + |\xi|^{2\delta})^{-\frac{1}{2}}(1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4)$ ser equivalente a $(1 + |\xi|^{2(4-\delta)})^{\frac{1}{2}}$ (ver Lema 2.2.2), concluímos que

$$(1 + |\xi|^{2(4-\delta)})^{\frac{1}{2}}\hat{u} = \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\big(\hat{f} + \hat{g} - \hat{u}\big).$$

Calculando a norma L^2 em cada lado da identidade acima temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\widehat{u}|^2\, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2\delta}\big)\big|\hat{f} + \hat{g} - \hat{u}\big|^2\, d\xi.$$

Obtemos assim que $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|u\|^2_{H^{4-\delta}} \leq C\big(\|f\|^2_{H^\delta} + \|g\|^2_{H^\delta} + \|u\|^2_{H^\delta}\big) < \infty.$$

Também temos $v = u - f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e vale a igualdade $v + A_2u = g$.

Portanto, para todo $(f, g) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ existe um par $(u, v) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(I - B_1)(u, v) = (f, g)$, ou seja,

$$(f, g) \in Im(I - B_1).$$

Também sabemos que o espaço $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ é denso no espaço $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, e pelo Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3.6), B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

$\blacksquare$

3.2.2 J_1 é um Operador Limitado

Queremos agora mostrar que, para todo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, o operador

$$J_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big) \end{pmatrix}$$

é linear e limitado, para então concluir que $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.2.2 *O operador $J_1 : H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \to H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ definido da seguinte forma*

$$J_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big) \end{pmatrix}$$

é linear e limitado.

Demonstração: É imediato ver que J_1 é um operador linear. Vamos agora mostrar que J_1 é limitado. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\|J_1(U)\|^2_{H^2 \times H^\delta} &= \left\| \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big) \right\|^2_{H^\delta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta}) \left| \frac{\hat{u} - |\xi|^{2\theta}\hat{v}}{1 + |\xi|^{2\delta}} \right|^2 d\xi \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \, d\xi + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{4\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}} |\hat{v}|^2 \, d\xi \\
&\leq 2\|u\|^2_{H^2} + 2\|v\|^2_{H^\delta} \\
&\leq 2\|U\|^2_{H^2 \times H^\delta},
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{|\xi|^{4\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}} \leq 1 + |\xi|^{2\delta}$ no caso $0 \leq \theta < \delta$.

■

3.3 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$

Observamos primeiramente que as condições sobre as potências fracionárias, $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, implicam em $0 \leq \delta \leq 2$. Então, como na Seção 3.1, temos $H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e podemos assim considerar o mesmo espaço da energia

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$$

com os mesmos produtos internos.

O objetivo desta seção é definir operadores B_2 e J_2, associados à equação (3.1), tal que B_2 seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e J_2 seja um operador linear e limitado no espaço X.

De modo formal, vamos encontrar os operadores B_2 e J_2. Considerando $v = u_t$ temos

$$v_t = u_{tt} = -\big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(\alpha\Delta^2 - \Delta\big)u - \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(-\Delta)^\theta v.$$

Na Seção 3.1 definimos os operadores

$$A_2 = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(\alpha\Delta^2 - \Delta + I\big)$$

e

$$A_\theta = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(I + (-\Delta)^\theta\big).$$

Sabemos que $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$. Note que se $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \delta \leq \theta$ temos

$$H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n). \tag{3.34}$$

Escrevendo o problema de Cauchy (3.1) na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_2U + J_2(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.35}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, $B_2 : D(A_2) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to X$ é o operador dado por

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & -A_\theta \end{pmatrix}$$

com $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e o operador $J_2 : X \to X$ é dado por

$$J_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u+v\big) \end{pmatrix}.$$

Na Subseção 3.3.1 mostraremos que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e na Subseção 3.3.2 mostraremos que J_2 é um operador limitado em X. Pelo Teorema 2.3.7 concluímos que $B_2 + J_2$ é gerador de um semigrupo de classe C_0. Seja

$$S_2 : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo gerado por $B_2 + J_2$. Então $U(t) = S_2(t)U_0$ é a solução do problema de Cauchy (3.35) para todo $t > 0$, no sentido em que se $U_0 = (u_0, u_1) \in X$, temos

$$U(t) = S_2(t)U_0 \in C\Big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Logo a primeira componente $u(t)$ de $U(t) = S_2(t)U_0$ satisfaz

$$u \in C\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)$$

e é a única solução fraca do sistema linear de placas (3.1). Além disso, se os dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$, então a solução de (3.1) satisfaz

$$u \in C\big([0,\infty), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^2\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)$$

e é única solução forte do problema de Cauchy (3.1).

3.3.1 B_2 é Gerador Infinitesimal de um Semigrupo de Contração de Classe C_0

Para completar a prova da existência e unicidade de solução do problema de Cauchy (3.1) precisamos mostrar que B_2 é um operador bem definido e é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Consideramos o operador B_2 definido no espaço X, com domínio dado por

$$D(B_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

e definido por

$$B_2(u,v) = (v, -A_2u - A_\theta v), \quad (u,v) \in D(B_2), \tag{3.36}$$

lembrando que $H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) = D(A_\theta)$ como em (3.34).

Lema 3.3.1 *O operador $B_2 : D(B_2) \longrightarrow X$ definido em (3.36) é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.*

Demonstração: Como no Lema 3.2.1, a ideia da prova é mostrar que B_2 atende as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips. Para fazer isso consideramos $(u,v) \in D(B_2)$, ou seja, $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Para mostrar que B_2 é dissipativo calculamos o seguinte produto interno em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\big(B_2(u,v),(u,v)\big)_{H^2\times H^\delta} = \big((v, -A_2u - A_\theta v),(u,v)\big)_{H^2\times H^\delta} \\
&= \alpha(\Delta v, \Delta u) + (\nabla v, \nabla u) + (v,u) \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_2 u}\,\bar{\hat{v}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_\theta v}\,\bar{\hat{v}}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4}{1+|\xi|^{2\delta}}\hat{u}\,\bar{\hat{v}}\,d\xi \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}\hat{v}\,\bar{\hat{v}}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\Big(\hat{v}\,\bar{\hat{u}} - \hat{u}\,\bar{\hat{v}}\Big)\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\theta})|\hat{v}|^2\,d\xi \\
&= 2i\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4) Img\big(\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\big)\,d\xi - \|v\|^2_{H^\theta},
\end{aligned}$$

pois $\widehat{A_2 u} = \dfrac{1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4}{1+|\xi|^{2\delta}}\hat{u}$ e $\widehat{A_\theta v} = \dfrac{1+|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}\hat{v}$ (ver Seção 3.1), onde $Img\big(\hat{v}\,\bar{\hat{u}}\big)$ é a parte imaginária de $\hat{v}\,\bar{\hat{u}}$.

Portanto B_2 é dissipativo, pois

$$Re\big(B_2(u,v),(u,v)\big)_{H^2\times H^\delta} = -\|v\|_{H^\theta}^2 \leq 0,$$

para todo $(u,v) \in D(B_2)$.

Vamos provar agora que $Im(I-B_2) = X$.

Primeiro vamos mostrar que $Im(I-B_2) \subset X$. Seja $(f,g) \in Im(I-B_2)$. Então existe $(u,v) \in D(B_2)$ tal que

$$(I-B_2)(u,v) = (f,g).$$

Como $B_2(u,v) \in X$ e $(u,v) \in D(B_2) \subset X$ temos $(f,g) \in X$.

Agora o objetivo é provar que $X \subset Im(I-B_2)$. Dado $(f,g) \in X$, vamos mostrar que existe $(u,v) \in D(B_2)$ tal que $(I-B_2)(u,v) = (f,g)$. Equivalentemente, da definição de B_2 provaremos

$$(u-v, v+A_2u+A_\theta v) = (f,g)$$

para algum $(u,v) \in D(B_2)$.

Assim, deve-se mostrar que existem $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{cases} u-v = f \\ v+A_2u+A_\theta v = g, \end{cases}$$

com $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Substituindo $v = u-f$ na segunda equação acima, devemos apenas mostrar que existe $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u - f + A_2u + A_\theta u - A_\theta f = g$$

ou que

$$A_2u + A_\theta u + u = g + f + A_\theta f. \tag{3.37}$$

Formalmente, multiplicando, os dois lados da identidade (3.37) por

$(I+(-\Delta)^{\delta})$ temos

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha\Delta^2-\Delta+I\big)u+\big(I+(-\Delta)^{\theta}\big)u+\big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)u\\
&=\big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)g+\big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)f+\big(I+(-\Delta)^{\theta}\big)f. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Para demonstrar que a equação (3.37) admite uma solução $u\in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$, definimos a forma $a(\cdot,\cdot):H^2(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$a(u,\psi)=(u,\psi)_{H^2}+(u,\psi)_{H^\theta}+(u,\psi)_{H^\delta}.$$

É fácil ver que a forma $a(\cdot,\cdot)$ está bem definida e é bilinear.

Vamos provar que $a(\cdot,\cdot)$ é contínua. De fato, para todo $u,\psi\in H^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
|a(u,\psi)|&\le\|u\|_{H^2}\|\psi\|_{H^2}+\|u\|_{H^\theta}\|\psi\|_{H^\theta}+\|u\|_{H^\delta}\|\psi\|_{H^\delta}\\
&\le C\|u\|_{H^2}\|\psi\|_{H^2},
\end{aligned}$$

pois $0\le\delta\le\theta$ e $0\le\theta\le\dfrac{2+\delta}{2}$ e isso implica que $0\le\theta\le 2$ e $0\le\delta\le 2$.

Também $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois para todo $u\in H^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
a(u,u)&=(u,u)_{H^2}+(u,u)_{H^\theta}+(u,u)_{H^\delta}\\
&=\|u\|^2_{H^2}+\|u\|^2_{H^\theta}+\|u\|^2_{H^\delta}\ge\|u\|^2_{H^2}.
\end{aligned}$$

Agora definimos o funcional $F:H^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R}$, baseados na equação (3.38), por

$$\langle F,\psi\rangle=(g,\psi)_{H^\delta}+(f,\psi)_{H^\delta}+(f,\psi)_{H^\theta}.$$

Notamos que F está bem definido pois $g\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $f\in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Tem-se que F é linear e contínuo e a continuidade segue do fato que

$$\begin{aligned}
|\langle F,\psi\rangle|&\le\|g\|_{H^\delta}\|\psi\|_{H^\delta}+\|f\|_{H^\theta}\|\psi\|_{H^\theta}+\|f\|_{H^\delta}\|\psi\|_{H^\delta}\\
&\le C\Big(\|g\|_{H^\delta}+\|f\|_{H^\delta}+\|f\|_{H^\theta}\Big)\|\psi\|_{H^2}
\end{aligned}$$

para todo $\psi\in H^2(\mathbb{R}^n)$, pois $0\le\delta\le\theta\le 2$.

Então pelo Lema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.3.1), existe única

$u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,\psi) = \langle F, \psi\rangle, \qquad \text{para todo } \psi \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Isto é, existe uma única $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ vale a identidade

$$(u,\psi)_{H^2} + (u,\psi)_{H^\theta} + (u,\psi)_{H^\delta} = (g,\psi)_{H^\delta} + (f,\psi)_{H^\delta} + (f,\psi)_{H^\theta}.$$

Em particular ela vale para toda $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Isso implica, que

$$\begin{aligned}&(I - \Delta + \alpha\Delta^2)u + (I + (-\Delta)^\delta)u + (I + (-\Delta)^\theta)u \\ &= (I + (-\Delta)^\delta)g + u(I + (-\Delta)^\delta)f + (I + (-\Delta)^\theta)f\end{aligned}$$

no sentido das distribuições, ou seja, em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a Transformada de Fourier na identidade acima temos

$$(1 + |\xi|^{2\delta})\big(\widehat{A_2u} + \widehat{A_\theta u} + \hat{u}\big) = (1 + |\xi|^{2\delta})\big(\hat{g} + \hat{f} + \widehat{A_\theta f}\big),$$

ou seja,

$$\widehat{A_2u} = \hat{g} + \hat{f} + \widehat{A_\theta f} - \widehat{A_\theta u} - \hat{u}. \tag{3.39}$$

Da desigualdade acima segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})|\widehat{A_2u}|^2\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta})\big|\hat{f} + \hat{g} + \widehat{A_\theta f} - \hat{u} - \widehat{A_\theta u}\big|^2\, d\xi$$

e isso implica da definição de A_θ que

$$\|A_2u\|^2_{H^\delta} \le C\big(\|f\|^2_{H^\delta} + \|g\|^2_{H^\delta} + \|u\|^2_{H^\delta} + \|f\|^2_{H^{2\theta-\delta}} + \|u\|^2_{H^{2\theta-\delta}}\big).$$

Observamos que $u \in H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e concluímos que $A_2u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Do Lema 3.1.2 concluímos que $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Finalizando, definimos $v = u - f$. Como $u \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ temos $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Da identidade (3.39) temos $\widehat{v} + \widehat{A_2u} + \widehat{A_\theta v} = \widehat{g}$. Assim $A_2u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, $A_\theta v \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Logo, aplicando a

Transformada de Fourier inversa concluímos que

$$v + A_2 u + A_\theta v = g \quad \text{em} \quad H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Portanto dado $(f, g) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ existe

$$(u, v) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

tal que $(I - B_2)(u, w) = (f, g)$, ou seja, $(f, g) \in Im(I - B_2)$.

Também $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Então, pelo Teorema de Lumer-Phillips, temos que B_2 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$. ■

3.3.2 J_2 é um Operador Limitado

Na seção anterior mostramos que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X, queremos agora mostrar que $J_2 : X \to X$ dado por

$$J_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u + v) \end{pmatrix}$$

é um operador linear e limitado, para assim concluir que $B_2 + J_2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X, com $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Lema 3.3.2 *O operador $J_2 : X \to X$ definido acima é linear e limitado.*

Demonstração: É fácil ver que J_2 é um operador linear. Vamos agora mostrar que J_2 é limitado. De fato para $U \in X$ temos

$$\begin{aligned} \|J_2(U)\|_X^2 &= \left\| \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u + v) \right\|_{H^\delta}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2\delta}) \left| \frac{\hat{u} + \hat{v}}{1 + |\xi|^{2\delta}} \right|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \, d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}|^2 \, d\xi \\ &\leq C\|u\|_{H^2}^2 + C\|v\|_{H^\delta}^2 \leq C\|U\|_X^2. \end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Taxas de Decaimento: Problema Linear

Nesta seção vamos encontrar taxas de decaimento do problema linear (3.1) para a norma da energia e para a norma L^2 da solução. Para encontrar as taxas de decaimento vamos trabalhar no espaço de Fourier, e para isso aplicamos a Transformada de Fourier em relação a variável x no problema de Cauchy (3.1). Encontramos assim o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\hat{u}_{tt} + \big(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2\big)\hat{u} + |\xi|^{2\theta}\hat{u}_t = 0, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases} \tag{4.1}$$

com $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$, $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Usando um método especial e multiplicadores no espaço Fourier, como em [20], para o problema (4.1) vamos obter estimativas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 da solução $\hat{u}$ do problema Cauchy (4.1) e consequentemente, via Teorema de Plancherel, para a solução u do problema (3.1).

Neste capítulo a constante C que aparece nas estimativas e nos lemas e teoremas é positiva e independe dos dados iniciais, podendo ter distintos valores mesmo de uma linha para outra.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em 2016 na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (ver [17]).

4.1 Estimativas Gerais

Antes de encontrar as estimativas de decaimento, vamos mostrar uma estimativa a priori, que nos ajudará a encontrar as taxas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 da solução.

Para começar nossas estimativas multiplicamos a equação (4.1) por $\bar{\hat{u}}_t$ e considerando a parte real obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\Big)+|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2=0,$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $t>0$ ou ainda

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_1+|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2=0, \tag{4.2}$$

com $E_1=E_1(t,\xi)$ a densidade de energia definida da seguinte forma

$$E_1(t,\xi)=(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2,$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $t>0$.

Agora, multiplicando a equação em (4.1) por $\bar{\hat{u}}$ e considerando a parte real, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2+2(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\,\bar{\hat{u}})\Big)+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2=(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2,$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $t>0$. Isto é

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2=(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2, \tag{4.3}$$

com $E_2=E_2(t,\xi)$ definido da seguinte forma

$$E_2(t,\xi)=|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2+2(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\,\bar{\hat{u}}),$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $t>0$.

Vamos considerar agora o funcional

$$E = E_1 + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_2,$$

com ρ_θ a função dada por

$$\rho_\theta(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2), & |\xi| \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2} \\ \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}, & |\xi| \leq 1 \quad \text{e} \quad \dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2} \\ \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}, & |\xi| \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2} \end{cases} \tag{4.4}$$

com ε um número positivo a ser escolhido adequadamente mais adiante. A escolha dessa função é muito importante para conseguir taxas de decaimento ótimas. No paper [10], da Luz-Ikehata-Charão mostram um método para encontrar essa função ρ_θ.

Então, usando as igualdades (4.2) e (4.3) temos a seguinte identidade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 = \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2,$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E + F = R, \tag{4.5}$$

com $F = F(t,\xi)$ e $R = R(t,\xi)$ funcionais definidos por

$$F(t,\xi) = |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2,$$

$$R(t,\xi) = \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2.$$

Lema 4.1.1 *Sejam $0 \leq \delta \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. Então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2(1+\alpha)}$ vale*

$$\rho_\theta(\xi) \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}},$$

com ρ_θ dada em (4.4).

Demonstração: Primeiro consideramos o caso $|\xi| \leq 1$ e $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e o caso $|\xi| \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. Para esses casos temos

$$\rho_\theta(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}},$$

se $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2(1+\alpha)} < 1$.

Note que o lema é trivial para $\xi = 0$. Para o caso $|\xi| \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$, com $\xi \neq 0$, temos

$$(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) \leq 2(1+\alpha) \leq 2(1+\alpha)|\xi|^{4\theta-2} \leq \frac{1}{\varepsilon}|\xi|^{4\theta-2},$$

pois $-2 \leq 4\theta - 2 \leq 0$ e $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2(1+\alpha)}$.

Isso implica que

$$\rho_\theta(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2) \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}$$

também para o caso $|\xi| \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$.

■

Lema 4.1.2 *Sejam $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2(1+\alpha)}$. Então*

$$R \leq \frac{1}{2}F,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, com F e R os funcionais em (4.5).

Demonstração: Pela definição de R, F e o Lema 4.1.1 segue que

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \\
&\leq \frac{1}{3}\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \\
&\leq \frac{1}{3}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 \\
&\leq \frac{1}{3}\Big(|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\Big) \leq \frac{1}{2}F,
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

■

Lema 4.1.3 *Sejam* $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2(1+\alpha)}$. *Então vale a estimativa*

$$\frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_1 \leq F,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$.

Demonstração: Pela definição de F e pelo Lema 4.1.1 segue que

$$\begin{aligned}
F &= |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 \\
&= \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)\left(\frac{3}{\rho_\theta(\xi)}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right) \\
&\geq \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)\left(\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\theta}}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right) \\
&\geq \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)\Big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\Big) \\
&= \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_1,
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

■

Agora, usando os Lemas 4.1.2 e 4.1.3 e a identidade (4.5), obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}E + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_1 \leq 0, \tag{4.6}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

Lema 4.1.4 *Sejam* $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \min\{1, \alpha\}$. *Então*

$$\rho_\theta(\xi) \leq |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Primeiro vamos considerar o caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ e $|\xi| \leq 1$. Para esse caso e $0 < \varepsilon \leq 1$ temos

$$\rho_\theta = \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2) \leq |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2).$$

Para o caso $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $|\xi| \leq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$ temos

$$(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) \geq 1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon|\xi|^{4\theta-2},$$

pois $4\theta - 2 > 0$. Isso implica que

$$\rho_\theta(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2).$$

Finalmente, vamos considerar o caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $|\xi| \geq 1$. Escolhendo $0 < \varepsilon \leq \alpha$ e do fato que $|\xi|^{4\theta-2} \leq |\xi|^{2+2\delta} \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\alpha|\xi|^{2+2\delta}$ temos

$$\rho_\theta(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2).$$

■

Lema 4.1.5 *Sejam* $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \min\left\{\dfrac{1}{2(1+\alpha)}, \alpha\right\}$. *Então*

$$\left|\frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_2\right| \leq \frac{2}{3}E_1,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$.

Demonstração: Usando as estimativas dos Lemas 4.1.1 e 4.1.4 temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_2\right| &\leq \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)\Big(|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + 2(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}||\hat{u}_t|\Big) \\
&\leq \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)\Big(|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t|^2\Big) \\
&\leq \frac{2}{3}\Big(\rho_\theta(\xi)|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + \rho_\theta(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t|^2\Big) \\
&\leq \frac{2}{3}\left(|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}(1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t|^2\right) \\
&\leq \frac{2}{3}\Big(|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2\Big) \\
&\leq \frac{2}{3}E_1,
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. ■

Lema 4.1.6 *Sejam* $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \min\left\{\alpha, \dfrac{1}{2(1+\alpha)}\right\}$. *Então*

$$
\begin{aligned}
&(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 \\
&\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\Big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}_0|^2\Big)
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$.

Demonstração: Como consequência do Lema 4.1.5 temos

$$-\frac{2}{3}E_1 \leq \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_2 \leq \frac{2}{3}E_1.$$

Assim obtemos

$$\frac{1}{3}E_1 \leq E_1 + \frac{1}{3}\rho_\theta(\xi)E_2 \leq \frac{5}{3}E_1$$

e usando a definição de $E(t,\xi)$ temos

$$\frac{1}{3}E_1 \leq E \leq \frac{5}{3}E_1, \tag{4.8}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

Pelas desigualdades (4.6) e (4.8) concluímos que

$$\frac{d}{dt}E + \frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)E \leq 0.$$

A desigualdade diferencial acima implica que

$$E \leq e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}E(0),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ com $E(0) = E(0,\xi)$.

Assim, de (4.8) segue que a densidade de energia para o problema (4.1) no espaço de Fourier é estimada por uma exponencial que depende de ξ, isto é

$$E_1 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}E_1(0)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e $E_1(0) = E_1(0,\xi)$.

A definição de E_1 diz que

$$(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2$$
$$\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\Big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}_0|^2\Big),$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $t>0$.

■

Queremos encontrar taxas de decaimento para a norma L^2 e taxas de decaimento para a norma da energia da solução. Para a norma da energia, basta integrar a desigualdade do Lema 4.1.6. Para a norma L^2 da solução vamos usar a seguinte estimativa obtida do Lema 4.1.6

$$|\hat{u}|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\left(\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_1|^2+|\hat{u}_0|^2\right) \tag{4.9}$$

que vale para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ $(\xi\neq 0)$ e $t>0$.

Usando as estimativas obtidas acima, vamos encontrar taxas de decaimento para o problema linear (4.1). Para isso vamos usar os Lemas 2.5.1 e 2.5.2 do Capítulo 2. O Lema 2.5.2 é usado na baixa frequência, e o Lema 2.5.1 é usado na alta frequência. A desigualdade dada no Lema 2.5.1 é muito importante porque vai proporcionar a regularidade necessária nos dados iniciais. Na verdade, a estrutura da equação placa (3.1) é do tipo de perda de regularidade no caso $0\leq\theta<\delta$. Isso quer dizer que para obter as mesmas taxas de decaimento na alta frequência como as obtidas na região de baixa frequência é necessário assumir mais regularidade nos dados iniciais. Veremos esse fato analisando as raízes características da equação associada (4.1) no espaço de Fourier dada por (7.2) no Capítulo 7 de expansão assintótica. Nesses casos a parte real das raízes características se aproxima de zero quando $|\xi|$ vai para o infinito. Assim, por causa deste efeito, é impossível obter as taxas de decaimento ótimas na alta frequência, sem impor regularidade adicional sobre os dados iniciais.

4.2 Taxas de Decaimento para $|\xi|\leq 1$

Nesta seção vamos estimar as desigualdades (4.7) e (4.9) na região de baixa frequência, ou seja, para $|\xi|\leq 1$. As estimativas para a baixa frequência em geral seguem diretamente do Lema 2.5.2.

4.2.1 Caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$

Para esse caso temos $\rho_\theta(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)$. Podemos estimar ρ_θ por baixo da seguinte forma

$$\rho_\theta(\xi) \geq \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}$$

e além disso temos

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq 2|\xi|^{-2}.$$

Com as desigualdades acima podemos provar o seguinte lema.

Lema 4.2.1 *Sejam $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ e $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

i) Se $n \geq 1$ e $u_1 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ então tem-se

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_0\|^2_{L^1}\right),$$

para todo $t > 0$. O espaço $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ está definido no Seção 2.2.5 do Capítulo 2.

ii) Se $n \geq 3$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então tem-se

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n-2}{2-2\theta}}\|u_1\|^2_{L^1} + Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\|u_0\|^2_{L^1},$$

para todo $t > 0$.

iii) Se $n \geq 1$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então tem-se

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right) d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\left(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\right),$$

para todo $t > 0$.

Demonstração:

i) Usando as estimativas anteriores ao lema e a estimativa (4.9) temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} \left(|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right) d\xi$$
$$\leq C\left(\||\xi|^{-1}\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 + \|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2\right) \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi,$$

para $u_1 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ e $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Agora usando o Lema 2.5.2 temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\||\xi|^{-1}\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 + \|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2\right)$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right),$$

para todo $t > 0$, pela definição de $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

ii) Usando o Lema 2.5.2 e considerando $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ também encontramos taxas de decaimento para $\hat{u}$, mas isso só é possível para $n \geq 3$. Temos de (4.9)

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} \left(|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right) d\xi$$
$$\leq C\|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t}|\xi|^{-2} d\xi + \|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{n-2}{2-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2,$$

para todo $t > 0$.

iii) Agora usando a desigualdade (4.7) e o Lema 2.5.2 temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} (1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1 + \alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} \Big((1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2(1 + \alpha|\xi|^2)|\hat{u}_0|^2\Big) d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right),$$

para todo $t > 0$ e $n \geq 1$.

■

Quando $n \geq 3$ a melhor taxa encontrada para a norma L^2 da solução com o método acima é $t^{-\frac{n-2}{2-2\theta}}$. Trabalhos anteriores como o de Charão-da

Luz-Ikehata [10] encontram a taxa $t^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}+\tau}$ para a norma L^2 da solução, com $\tau > 0$ fixado arbitrariamente. Essa taxa é melhor que a taxa obtida no Lema 4.2.1 para o caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ com dados iniciais $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para encontrar essa taxa iremos utilizar um método diferente do que foi usado acima.

Primeiramente vamos encontrar algumas identidades importantes para todo $|\xi| \leq 1$ e $\xi \neq 0$. Dividindo a expressão em (4.2) por $|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)$ encontramos a seguinte identidade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 + |\hat{u}|^2\right) + \frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 = 0.$$

Agora definimos

$$\mathbb{E}_1(t) = \left(\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 + |\hat{u}|^2\right).$$

Então integrando a identidade acima em $[S,T]$ temos

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_1(T) + \int_S^T \frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 dt = \frac{1}{2}\mathbb{E}_1(S). \tag{4.10}$$

Multiplicando a igualdade em (4.3) por $|\xi|^{-2\theta}$ e integrando em $[S,T]$ temos

$$\frac{1}{2}|\hat{u}(T)|^2 + |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t(T)\bar{\hat{u}}(T)) + \int_S^T |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 dt$$
$$= \int_S^T |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 dt + \frac{1}{2}|\hat{u}(S)|^2 + |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t(S)\bar{\hat{u}}(S)).$$

Observamos que para $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ e para $|\xi| \leq 1$ valem as seguintes estimativas

i) $|\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t(T)\bar{\hat{u}}(T)) \leq (1+\alpha)\mathbb{E}_1(S)$;

ii) $\displaystyle\int_S^T |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 dt \leq 2(1+\alpha)\mathbb{E}_1(S)$.

Para mostrar os itens (i) e (ii) usamos a igualdade em (4.10). É fácil verificar que

$$|\xi|^{-4\theta} \leq \frac{(1+\alpha)(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}$$

para todo $|\xi| \leq 1$.

Com isso podemos verificar facilmente as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
|\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t(T)\bar{\hat{u}}(T)) &\leq 2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t(T)|\,|\hat{u}(T)| \\
&\leq |\xi|^{-4\theta}|\hat{u}_t(T)|^2 + |\hat{u}(T)|^2 \\
&\leq \frac{(1+\alpha)(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t(T)|^2 + |\hat{u}(T)|^2 \\
&\leq (1+\alpha)\mathbb{E}_1(T) \leq (1+\alpha)\mathbb{E}_1(S).
\end{aligned}$$

que provam o item (i).

Para mostrar o item (ii) observamos que

$$|\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta}) \leq 2|\xi|^{-2\theta} \leq 2|\xi|^{2\theta-2} \leq 2(1+\alpha)\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\int_S^T |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 dt &\leq 2(1+\alpha)\int_S^T \frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 dt \\
&\leq 2(1+\alpha)\mathbb{E}_1(S).
\end{aligned}$$

Logo a estimativa do item (ii) também está provada.

Então, usando as duas estimativas acima concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|\hat{u}(T)|^2 + \int_S^T |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 dt \\
&\leq \int_S^T |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 dt - |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t(T)\bar{\hat{u}}(T)) \\
&+ \frac{1}{2}|\hat{u}(S)|^2 + |\xi|^{-2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t(S)\bar{\hat{u}}(S)) \\
&\leq 2(1+\alpha)\mathbb{E}_1(S) + \mathbb{E}_1(S) + 2(1+\alpha)\mathbb{E}_1(S) \\
&= 5(1+\alpha)\mathbb{E}_1(S). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Definimos agora o funcional $\mathbb{F}(t)$ por

$$\mathbb{F}(t) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2.$$

Usando as desigualdade (4.10) e (4.11) concluímos que

$$\int_S^T \int_{|\xi|\le 1} \mathbb{F}(t)d\xi dt \le 6(1+\alpha)\int_{|\xi|\le 1}\mathbb{E}_1(S)d\xi. \tag{4.12}$$

Nosso próximo objetivo é encontrar uma relação entre o funcional $\mathbb{E}_1$ e o funcional $\mathbb{F}$. Da definição de $\mathbb{E}_1$, temos

$$\left[\int_{|\xi|\le 1}\mathbb{E}_1(t)d\xi\right]^{1+r} \le \left[\int_{|\xi|\le 1} 2|\hat{u}|^2 d\xi\right]^{1+r} + \left[\int_{|\xi|\le 1}\frac{2(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 d\xi\right]^{1+r}$$
$$\le C\left[\int_{|\xi|\le 1}\Big(|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)\Big)^{-\frac{1}{1+r}}|\hat{u}|^{\frac{2r}{1+r}}\Big(|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\Big)^{\frac{1}{1+r}}d\xi\right]^{1+r}$$
$$+ C\left[\int_{|\xi|\le 1}\frac{(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{-\frac{2\theta}{1+r}}}{|\xi|^{\frac{2r}{1+r}}(1+\alpha|\xi|^2)^{\frac{r}{1+r}}}|\hat{u}_t|^{\frac{2r}{1+r}}\frac{|\xi|^{\frac{2\theta}{1+r}}}{|\xi|^{\frac{2}{1+r}}(1+\alpha|\xi|^2)^{\frac{1}{1+r}}}|\hat{u}_t|^{\frac{2}{1+r}}d\xi\right]^{1+r},$$

com $m>0$ e $r>0$ especificados mais a frente.

Usando a Desigualdade de Hölder com $L^{\frac{1+r}{r}}$ e L^{1+r} temos

$$\left[\int_{|\xi|\le 1}\mathbb{E}_1(t)d\xi\right]^{1+r} \tag{4.13}$$
$$\le C\left[\int_{|\xi|\le 1}|\xi|^{\frac{2\theta-2}{r}}(1+\alpha|\xi|^2)^{-\frac{1}{r}}|\hat{u}|^2 d\xi\right]^r \int_{|\xi|\le 1}|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 d\xi$$
$$+ C\left[\int_{|\xi|\le 1}\frac{(1+|\xi|^{2\delta})^{\frac{1+r}{r}}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\xi|^{-\frac{2\theta}{r}}|\hat{u}_t|^2 d\xi\right]^r \int_{|\xi|\le 1}\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 d\xi.$$

Pela definição do funcional $\mathbb{F}$ temos

i) $\displaystyle\int_{|\xi|\le 1}|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 d\xi \le \int_{|\xi|\le 1}\mathbb{F}(t)d\xi;$

ii) $\displaystyle\int_{|\xi|\le 1}\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\hat{u}_t|^2 d\xi \le \int_{|\xi|\le 1}\mathbb{F}(t)d\xi.$

Usando a desigualdade (4.13) e os itens (i) e (ii) acima temos

$$\left[\int_{|\xi|\le 1}\mathbb{E}_1(t)d\xi\right]^{1+r} \le C\big(I_1^r + I_2^r\big)\int_{|\xi|\le 1}\mathbb{F}(t)d\xi, \tag{4.14}$$

com

$$I_1 = \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{\frac{2\theta-2}{r}} (1+\alpha|\xi|^2)^{-\frac{1}{r}} |\hat{u}|^2 d\xi$$

e

$$I_2 = \int_{|\xi|\leq 1} \frac{(1+|\xi|^{2\delta})^{\frac{1+r}{r}}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} |\xi|^{-\frac{2\theta}{r}} |\hat{u}_t|^2 d\xi.$$

Precisamos agora estimar I_1^r e I_2^r em termos dos dados iniciais. Para isso vamos usar o seguinte lema.

Lema 4.2.2 *Sejam* $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ *e* $\hat{u}$ *a solução do problema de Cauchy* (4.1). *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

i) $|\hat{u}_t|^2 \leq C|\hat{u}_1|^2 + C|\xi|^2|\hat{u}_0|^2$,

ii) $|\hat{u}|^2 \leq C|\hat{u}_0|^2 + C|\xi|^{-4\theta}|\hat{u}_1|^2$,

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração:

i) Primeiro observando que se integrarmos a identidade (4.2) em $[0,t]$ teremos

$$\frac{1}{2}E_1(t) + \int_0^t |\xi|^{2\theta} |\hat{u}_t(s)|^2 ds = \frac{1}{2}E_1(0), \tag{4.15}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Da definição de $E_1(t,\xi)$ temos que

$$|\hat{u}_t|^2 \leq |\hat{u}_1|^2 + \frac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{1+|\xi|^{2\delta}} |\hat{u}_0|^2 \leq |\hat{u}_1|^2 + (1+\alpha)|\xi|^2|\hat{u}_0|^2$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$

ii) Agora, multiplicando a identidade (4.3) por $|\xi|^{2\theta}$ e integrando em $[0,t]$ temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} E_2(t) + \int_0^t |\xi|^{2+2\theta} (1+\alpha|\xi|^2) |\hat{u}(s)|^2 ds \\ &= \int_0^t (1+|\xi|^{2\delta}) |\xi|^{2\theta} |\hat{u}_t(s)|^2 ds + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} E_2(0), \end{aligned} \tag{4.16}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Da definição de $E_2(t,\xi)$, usando a identidade acima, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}(t)|^2 + \int_0^t |\xi|^{2+2\theta}(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}(s)|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}_0|^2 + 2(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\theta} Re(\hat{u}_1\bar{\hat{u}}_0) \\
&- 2(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\theta} Re(\hat{u}_t(t)\hat{u}(t)) + \int_0^t (1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t(s)|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{2}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}_0|^2 + 16|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{4}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}_0|^2 + 16|\hat{u}_t|^2 \\
&+ \frac{1}{4}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}|^2 + 2\int_0^t |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t(s)|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Assim concluímos que

$$
\frac{1}{4}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}(t)|^2 \leq \frac{3}{4}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}_0|^2 + 16|\hat{u}_1|^2 + 16|\hat{u}_t(t)|^2 + 2\int_0^t |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t(s)|^2 ds. \tag{4.17}
$$

Da igualdade (4.16) e da definição de $E_1(t,\xi)$ temos

$$
16|\hat{u}_t|^2 + 2\int_0^t |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t(s)|^2 ds \leq 16E_1(0) \leq 32|\hat{u}_1|^2 + 16(1+\alpha)|\xi|^{4\theta}|\hat{u}_0|^2. \tag{4.18}
$$

Substituindo (4.18) em (4.17) concluímos que

$$
\frac{1}{4}|\xi|^{4\theta}|\hat{u}(t)|^2 \leq \left(\frac{3}{4} + 16(1+\alpha)\right)|\xi|^{4\theta}|\hat{u}_0|^2 + 48|\hat{u}_1|^2 \tag{4.19}
$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$.

■

Lema 4.2.3 *Sejam $n \geq 3$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ e $r > \frac{2-2\theta}{n-4\theta}$. Então existe uma constante $C > 0$ dependendo de r tal que*

$$
\left[\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(t)d\xi\right]^{1+r} \leq C\big(\|u_0\|_{L^1}^{2r} + \|u_1\|_{L^1}^{2r}\big)\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{F}(t)d\xi,
$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Para provar esse lema, usando a desigualdade (4.14), mostramos que I_1^r e I_2^r são limitados em termos dos dados iniciais. Primeiramente vamos estimar I_1^r usando o item (ii) do Lema 4.2.2. Observamos que

$$
\begin{aligned}
I_1^r &= \left[\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{\frac{2\theta-2}{r}}(1+\alpha|\xi|^2)^{-\frac{1}{r}}|\hat{u}|^2 d\xi\right]^r \\
&\le C\left[\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{\frac{2\theta-2}{r}}(1+\alpha|\xi|^2)^{-\frac{1}{r}}\big(|\hat{u}_0|^2+|\xi|^{-4\theta}|\hat{u}_1|^2\big) d\xi\right]^r \\
&\le C\Big(\|u_0\|_{L^1}^{2r}+\|u_1\|_{L^1}^{2r}\Big)\left[\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{\frac{2\theta-2}{r}-4\theta} d\xi\right]^r \\
&\le C\Big(\|u_0\|_{L^1}^{2r}+\|u_1\|_{L^1}^{2r}\Big),
\end{aligned}
$$

para $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$, pois

$$
\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{\frac{2\theta-2}{r}-4\theta} d\xi \le C = C(r,n,\theta) < \infty,
$$

se $\dfrac{2-2\theta}{r} + 4\theta < n$.

Agora, usando o item (i) do Lema 4.2.2, vamos estimar I_2^r. Observamos que

$$
\begin{aligned}
I_2^r &= \left[\int_{|\xi|\le 1} \frac{(1+|\xi|^{2\delta})^{\frac{1+r}{r}}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\xi|^{-\frac{2\theta}{r}}|\hat{u}_t|^2 d\xi\right]^r \\
&\le C\left[\int_{|\xi|\le 1} \frac{(1+|\xi|^{2\delta})^{\frac{1+r}{r}}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\xi|^{-\frac{2\theta}{r}}\big(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^2|\hat{u}_0|^2\big) d\xi\right]^r \\
&\le C\Big(\|u_0\|_{L^1}^{2r}+\|u_1\|_{L^1}^{2r}\Big)\left[\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{-\frac{2\theta}{r}-2} d\xi\right]^r \le C\Big(\|u_0\|_{L^1}^{2r}+\|u_1\|_{L^1}^{2r}\Big),
\end{aligned}
$$

para $r > \dfrac{2\theta}{n-2}$, pois

$$
\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{\frac{-2\theta}{r}-2} d\xi \le C = C(r,n,\theta) < \infty
$$

se $\dfrac{2\theta}{r} + 2 < n$.

Para que as duas estimativas sejam válidas ao mesmo tempo, precisamos então que $r > \max\left\{\dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}, \dfrac{2\theta}{n-2}\right\}$.

Observamos que para $n \geq 3$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ temos

$$\frac{2-2\theta}{n-4\theta} \geq \frac{2\theta}{n-2}$$

ou que

$$2n - 4 - 2\theta n + 4\theta \geq 2\theta n - 8\theta^2$$

ou, ainda que

$$8\theta^2 - 4\theta(n-1) + 2(n-2) \geq 0.$$

As raízes desse polinômio são $\theta_1 = \dfrac{1}{2}$ e $\theta_2 = \dfrac{n}{2} - 1$. Assim, se $\dfrac{n}{2} - 1 \geq \dfrac{1}{2}$, ou seja, se $n \geq 3$ concluímos que precisamos assumir $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$.

Essa observação concluímos a prova do lema. ∎

Lema 4.2.4 *Sejam $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, $n \geq 3$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então existe $T_0 > 0$ tal que*

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C\Big(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\Big) t^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}+\tau}$$

para todo $t > T_0$ com $\tau > 0$ fixado arbitrariamente.

Demonstração: Da estimativa (4.12) e do Lema 4.2.3 concluímos que

$$\begin{aligned}\int_S^T \left[\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(t) d\xi\right]^{1+r} dt &\leq C\big(\|u_0\|^{2r}_{L^1} + \|u_1\|^{2r}_{L^1}\big) \int_S^T \int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{F}(t) d\xi dt \\ &\leq C\big(\|u_0\|^{2r}_{L^1} + \|u_1\|^{2r}_{L^1}\big) \int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(S) d\xi,\end{aligned}$$

para todo $0 \leq S < T < \infty$ e $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$.

Fazendo $T \to \infty$ temos

$$\int_S^\infty \left[\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(t) d\xi\right]^{1+r} dt \leq C\big(\|u_0\|^{2r}_{L^1} + \|u_1\|^{2r}_{L^1}\big) \int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(S) d\xi. \tag{4.20}$$

Seja $T_0 > 0$ dado por

$$T_0 \left[\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(0) d\xi \right]^r = C\big(\|u_0\|_{L^1}^{2r} + \|u_1\|_{L^1}^{2r}\big).$$

Então a desigualdade (4.20) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_S^\infty \left[\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(t) d\xi \right]^{1+r} dt \leq T_0 \left[\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(0) d\xi \right]^r \int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(S) d\xi$$

para $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$ e $0 \leq \theta \leq 1/2$.

Portanto, pelo Lema de Haraux-Komornik (Lema 2.5.3) temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} \mathbb{E}_1(t) d\xi \leq C t^{-\frac{1}{r}}, \tag{4.21}$$

para todo $t \geq T_0$ e $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$ com $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$.

Pela definição de $\mathbb{E}_1$ encontramos uma limitação para a norma L^2 da solução $\hat{u}$ na baixa frequência, ou seja,

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C t^{-\frac{1}{r}},$$

para todo $t \geq T_0$ e $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$ com $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$.

Por fim observando que precisamos ter $r > \dfrac{2-2\theta}{n-4\theta}$ ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{r} < \frac{n-4\theta}{2-2\theta},$$

podemos tomar r tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{n-4\theta}{2-2\theta} - \tau$$

com $\tau > 0$ fixado de modo arbitrário.

Substituindo isso em (4.21) segue a prova do lema.

$\blacksquare$

4.2.2 Caso $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$

Para este caso temos $\rho_\theta(\xi) = \varepsilon \dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}$ como podemos ver na definição de ρ_θ em (4.4). Neste caso estimamos ρ_θ por baixo da seguinte forma

$$\rho_\theta(\xi) \geq \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{2},$$

pois $|\xi| \leq 1$. Vale também a seguinte desigualdade elementar

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq 2|\xi|^{-2}.$$

Usando as duas desigualdades acima podemos concluir o seguinte lema.

Lema 4.2.5 *Sejam* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

i) Se $n \geq 1$ *e* $u_1 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ *então tem-se*

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_0\|^2_{L^1}\right),$$

para todo $t > 0$.

ii) Se $n \geq 3$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então tem-se*

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|^2_{L^1} + Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|^2_{L^1},$$

para todo $t > 0$.

iii) Se $n \geq 1$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então tem-se*

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right) d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\right),$$

para todo $t > 0$.

Demonstração:

i) Usando a limitação anterior para ρ_θ e a desigualdade (4.9) temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t} \left(|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right) d\xi.$$

Considerando que $u_1 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ e novamente usando o Lema 2.5.2 temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\||\xi|^{-1}\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 + \|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2\right)\\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Isso mostra a estimativa do item (i) para todo $n \geq 1$.

ii) Usando o Lema 2.5.2 e considerando $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ também encontramos taxas de decaimento, mas devemos ter $n \geq 3$. Assim temos pelo Lema 2.5.2

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq C\|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2}d\xi\\ &+ \|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi\\ &\leq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2.\end{aligned}$$

iii) Para este caso, usando a desigualdade (4.7) segue que

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\leq 1} \left((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right)d\xi\\ &\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $n \geq 1$.

■

4.3 Taxas de Decaimento para $|\xi| \geq 1$

Nesta região de alta frequência temos $\rho_\theta(\xi) = \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}$ para todo $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. Observamos que, dependendo da relação entre θ e δ, a exponencial que aparece no termo a ser limitado se comporta de maneira diferente. Para contornar essa situação vamos trabalhar com três casos

- $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$;
- $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$;
- $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

4.3.1 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$

Neste caso temos $1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\theta}$, pois $|\xi| \geq 1$. Isto resulta em

$$\rho_\theta(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

e também

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq \frac{2}{\alpha}|\xi|^{2\delta-4}.$$

Para este caso, a condição de ρ_θ ser maior que uma constante é fundamental para que não precisemos pedir mais regularidade no dados iniciais. Isso pode ser visto na demonstração do seguinte lema.

Lema 4.3.1 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$. *Então para todo* $n \geq 1$ *vale*

i) $\displaystyle\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{H^2}\Big)$,

ii) $\displaystyle\int_{|\xi|\geq 1} \big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\big)d\xi$
$\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{H^2}\Big)$,

para todo $t > 0$ *e* $n \geq 1$.

Demonstração:

i) Usando as estimativas anteriores para ρ_θ e a desigualdade (4.9) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(|\xi|^{2\delta-4}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_1\|^2_{H^{\delta-2}} + \|u_0\|^2\Big) \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_1\|^2_{H^{\delta}} + \|u_0\|^2_{H^2}\Big)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, pois $\delta - 2 \leq 0 \leq \delta$.

ii) Agora usando a desigualdade (4.7) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\big)d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}_0|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_1\|^2_{H^{\delta}} + \|u_0\|^2_{H^2}\Big)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $n \geq 1$.

■

4.3.2 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$

Sendo $|\xi| \geq 1$ temos que $1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta}$. Isto resulta em

$$\rho_\theta = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}$$

e também

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq \frac{2}{\alpha}|\xi|^{2\delta-4}. \tag{4.22}$$

Na Subseção 4.2.1 encontramos taxas de decaimento quando $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ e $|\xi| \leq 1$. Nesta seção vamos encontrar essas mesmas taxas, mas para isso precisamos de dados iniciais mais regulares. Isso porque, diferente do caso da Subseção 4.2.1, aqui temos $0 \leq \theta < \delta$, e essa condição requer mais regularidade nos dados iniciais, como veremos no lema abaixo.

Lema 4.3.2 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$.

i) *Se* $n \geq 1$, $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$ *então vale*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta-2}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}} \right),$$

para todo $t > 0$.

ii) *Se* $n \geq 3$, $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2-2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$ *tem-se*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}} \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2-2\theta}+\delta-2}} + Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}},$$

para todo $t > 0$.

iii) *Se* $n \geq 1$, $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+2}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$ *então vale*

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi|\geq 1} \big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\big) d\xi \\ &\qquad \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+2}} \right), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração:

i) Usando a estimativa por baixo para ρ_θ no início desta subseção e as desigualdades (4.9) e (4.10), temos

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^{2(\theta-\delta)}}{10}t} \left(|\xi|^{2\delta-4}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi.$$

Usando a estimativa do Lema 2.5.1 com $r = \dfrac{n}{2-2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$ temos para todo $n \geq 1$ e $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2-2\theta}} \left(|\xi|^{2\delta-4}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta-2}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}} \right). \end{aligned}$$

ii) Considere $n \geq 3$. Agora usando a desigualdade do Lema 2.5.1 com $r = \dfrac{n-4\theta}{2-2\theta}$ para o dado inicial u_1 e $r = \dfrac{n}{2-2\theta}$ para o dado inicial

u_0 e $a = 2(\theta - \delta)$ para os dois temos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2-2\theta}} |\xi|^{2\delta-4} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\quad + Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2-2\theta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}} \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2-2\theta}+\delta-2}} + Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}},
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $n \geq 3$.

iii) Para estimar a norma da energia vamos usar a desigualdade (4.7) e o Lema 2.5.1 com $r = \dfrac{n}{2-2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$. Sabemos que $\rho_\theta(\xi) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}$, então temos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right) d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^{2(\theta-\delta)}}{10}t} \left(|\xi|^{2\delta}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^4|\hat{u}_0|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2-2\theta}} \left(|\xi|^{2\delta}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^4|\hat{u}_0|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+2}}\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $n \geq 1$.

■

4.3.3 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$

Para $|\xi| \geq 1$ temos que $1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta}$. Isto resulta em

$$\rho_\theta = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}$$

e também

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq \frac{2}{\alpha}|\xi|^{2\delta-4}.$$

Na Subseção 4.2.2 encontramos taxas de decaimento para a norma da energia e norma L^2 da solução quando $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ na região de baixa frequência, $|\xi| \leq 1$. Nesta seção vamos encontrar as mesmas taxas. Para isso vamos precisar de dados iniciais mais regulares, como já observação na seção anterior.

Lema 4.3.3 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta$ *e* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

i) Se $n \geq 1$, $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$ *então tem-se*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-2}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} \right),$$

para todo $t > 0$.

ii) Se $n \geq 3$, $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2)}{2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$ *então tem-se*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2)}{2\theta}+\delta-2}} + Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}},$$

para todo $t > 0$.

iii) Se $n \geq 1$ *e* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+2}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$ *então tem-se*

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 d\xi \\ \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+2}} \right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração:

i) Usando a estimativa para ρ_θ e a desigualdade (4.9) temos

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^{2(\theta-\delta)}}{10}t} \left(|\xi|^{2\delta-4}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi,$$

usando a desigualdade do Lema 2.5.1 com $r = \dfrac{n}{2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$ temos para todo $n \geq 1$ e $t > 0$

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}} \left(|\xi|^{2\delta-4}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-2}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} \right).\end{aligned}$$

ii) Se $n \geq 3$ usando a desigualdade do Lema 2.5.1 com $r = \dfrac{n-2}{2\theta}$ para o dado inicial u_1 e $r = \dfrac{n}{2\theta}$ para o dado inicial u_0 e $a = 2(\theta - \delta)$ temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-2)}{2\theta}} |\xi|^{2\delta-4} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\ &\quad + Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2)}{2\theta}+\delta-2}} + Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

iii) Para estimar a norma da energia vamos usar a desigualdade (4.7) e o Lema 2.5.1 com $r = \dfrac{n}{2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$. Temos

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} \left((1 + |\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1 + \alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\right) d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^{2(\theta-\delta)}}{10}t} \left(|\xi|^{2\delta}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^4|\hat{u}_0|^2\right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}} \left(|\xi|^{2\delta}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^4|\hat{u}_0|^2\right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+2}}\right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $n \geq 1$.

$\blacksquare$

4.4 Resultados Principais para Decaimento

Resumindo: com os cálculos acima e usando o Teorema de Plancherel chegamos à estimativas de decaimento, que conjecturamos serem precisas no sentido de optimalidade, para a norma da energia e para a norma L^2 da solução do problema (3.1). Abaixo enunciamos quatro teoremas que seguem diretamente dos lemas anteriores. Os dois primeiros são referentes ao caso $0 \leq \theta < \delta$. Esse é caso onde aparece a influência da estrutura de perda de regularidade da equação em (3.1). Os dois últimos teoremas são referentes ao caso $0 \leq \delta \leq \theta$, que não tem propriedade de perda de regularidade. Esse fato pode ser visto no Capítulo 7 sobre expansão assintótica pela análise das raízes do polinômio característico associado à equação em (3.1).

Teorema 4.4.1 *Seja $0 \leq \theta < \delta$. Então valem as seguintes taxas de decaimento para a norma da energia da solução $u(t,x)$ do problema (3.1).*

i) Sejam $n \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$. Então para

$$u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+2}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2}u_t|^2 + \alpha|\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2}u|^2\Big)dx$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\Big(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+2}} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta}}\Big).$$

ii) Sejam $n \geq 1$ e $\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}$. Então para

$$u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+2}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2}u_t|^2 + \alpha|\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2}u|^2\Big)dx$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\Big(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+2}} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\Big).$$

Teorema 4.4.2 *Seja $0 \leq \theta < \delta$. Então valem as seguintes estimativas de decaimento para a norma L^2 da solução $u(t,x)$ do problema (3.1).*

i) Seja $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$. Se $n \geq 1$,

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$$

então tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\Big(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}+\delta-2}} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}}\Big).$$

Além disso, se $n \geq 3$,

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2-2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx &\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}+\tau}\left(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\right)\\ &+ Ct^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}}\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2-2\theta}+\delta-2}} + Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2-2\theta}}},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ com $\tau > 0$ fixado arbitrariamente.

ii) Seja $\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}$. Se $n \geq 1$,

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$$

então tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-2}} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}}\right).$$

Além disso, se $n \geq 3$,

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2)}{2\theta}+\delta-2}(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq& Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}}\left(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2)}{2\theta}+\delta-2}}\right)\\ &+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}}\right),\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Os Teoremas 4.4.1 e 4.4.2 são referentes ao caso $0 \leq \theta < \delta$, que exige mais regularidade no dados iniciais. Usando esses dois teoremas e o Teorema de Plancherel podemos concluir que a norma da energia e a norma L^2 da solução têm um decaimento com as seguintes taxas

i) Caso $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta < \delta$. Se $n = 1$ ou $n = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1)t^{-\frac{n}{2-2\theta}}.$$

Se $n \geq 3$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}}.$$

Se $n \geq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2} u_t|^2 + \alpha |\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2 \Big) dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2-2\theta}}.$$

ii) Caso $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \theta < \delta$. Se $n = 1$ ou $n = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2\theta}}.$$

Se $n \geq 3$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n-2}{2\theta}}.$$

Se $n \geq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2} u_t|^2 + \alpha |\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2 \Big) dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2\theta}}$$

com $C(u_0, u_1)$ uma constante positiva que depende dos dados iniciais. Neste caso precisamos de dados iniciais bem regulares.

Agora vamos enunciar os dois últimos teoremas desse capítulo, referentes ao caso $0 \leq \delta \leq \theta$.

Teorema 4.4.3 *Seja $0 \leq \delta \leq \theta$ e considere*

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \ \text{e} \ u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n).$$

Então valem as seguintes taxas de decaimento para a norma da energia da solução $u(t,x)$ do problema (3.1).

i) Sejam $n \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2} u_t|^2 + \alpha |\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2 \Big) dx$$
$$\leq C t^{-\frac{n}{2-2\theta}} \Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \Big) + e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \Big(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2 \Big).$$

ii) *Sejam* $n \geq 1$ *e* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. *Então*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2}u_t|^2 + \alpha|\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2}u|^2\Big)dx \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\Big) + e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big).\end{aligned}$$

Teorema 4.4.4 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta$. *Então valem as seguintes estimativas de decaimento para a norma* L^2 *da solução* $u(t,x)$ *do problema (3.1).*

i) *Seja* $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$. *Se* $n \geq 1$,

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

então tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2-2\theta}}\Big(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big) + e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big).$$

para todo $t > 0$. *Além disso, se* $n \geq 3$,

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}+\tau}\big(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\big) + e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big),$$

para todo $t > 0$ *e qualquer* $\tau > 0$ *fixado.*

ii) *Seja* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. *Se* $n \geq 1$,

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

então tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\Big(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big) + e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big),$$

para todo $t > 0$. *Além disso, se* $n \geq 3$,

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 + e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\Big),$$

para todo $t > 0$.

Os Teoremas 4.4.3 e 4.4.3 são referentes ao caso $0 \leq \delta \leq \theta$. Usando esses dois teoremas podemos concluir que a norma da energia e a norma L^2 da solução têm um decaimento com as seguintes taxas:

i) Caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ e $0 \leq \delta \leq \theta$. Se $n = 1$ ou $n = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2-2\theta}}.$$

Se $n \geq 3$ e $\tau > 0$ qualquer temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n-4\theta}{2-2\theta}+\tau}.$$

Se $n \geq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + \alpha|\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2\Big) dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2-2\theta}}.$$

ii) Caso $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \delta \leq \theta$. Se $n = 1$ ou $n = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2\theta}}.$$

Se $n \geq 3$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n-2}{2\theta}}.$$

Se $n \geq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^\delta u_t|^2 + \alpha|\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2\Big) dx \leq C(u_0, u_1) t^{-\frac{n}{2\theta}}$$

com $C(u_0, u_1)$ uma constante positiva que depende dos dados iniciais. Aqui não é necessário impor mais regularidade nos dados iniciais.

Capítulo 5

Existência e Unicidade de Solução: Problema Semilinear

Consideramos o seguinte problema de Cauchy para uma equação semilinear em $\mathbb{R}^n$ do tipo placas/Boussinesq com um amortecimento fracionário e, para o caso de placas, com um termo do tipo inércia rotacional generalizado

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + \alpha \Delta^2 u - \Delta u + (-\Delta)^{\theta} u_t = \beta(-\Delta)^{\gamma}\big(u^p\big), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $u = u(t,x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ e $p > 1$ inteiro. As potências fracionárias do operador Laplaciano são consideradas da seguinte forma

$$0 \leq \delta \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2+\delta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{2+\delta}{2}.$$

No caso $\delta = 2$ temos uma equação de Boussinesq de sexta ordem, quando $\theta = 1$ temos a equação de Boussinesq sob efeitos de uma dissipação hidrodinâmica. Podemos citar vários artigos sobre equação de Boussinesq e suas características como, por exemplo, Wang - Xue [46], Esfahani - Farah - Wang [13], Wang - Xu [45] e Polat - Ertas [35]. Se $\theta = 0$, $\delta = 1$, $\gamma = 0$ e $n = 2$ temos uma equação (linear se $\beta = 0$) para vibrações de uma placa sob efeitos de uma dissipação friccional (ver [7], [9] e [40]).

Como no problema linear, para estudar a existência de soluções precisamos dividir o problema em dois casos

1) Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \delta \leq 2$;

2) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Para ambos os casos consideramos o espaço da energia dado por

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Reduzimos a ordem do problema de Cauchy (5.1) e o reescrevemos na seguinte forma matricial

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU + F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

com $U = (u, u_t)$, $U_0 = (u_0, u_1)$ e o operador B está definido no Capítulo 3 em acordo com cada um dos dois casos acima mencionados, e conforme demonstrado naquele capítulo, é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X. O operador F é definido adequadamente e contém o termo semilinear.

5.1 Existência Local

Para cada caso B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço X. Nosso objetivo é mostrar que o operador F está definido como um operador $F : D(B) \to D(B)$ e é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados. Assim, dado $U_0 \in D(B)$, podemos usar o Teorema 2.4.1 para concluir que existe uma única solução U em intervalo maximal $[0, T_m)$ tal que vale uma e somente uma das condições abaixo

a) $T_m = \infty$,

b) $T_m < \infty$ e $\lim\limits_{t \to T_m} \Big(\|U\|_X + \|BU\|_X \Big) = \infty$.

Além disso, teremos que a solução U pertence à seguinte classe

$$U \in C^1\big([0,T_m),X\big) \cap C\big([0,T_m),D(B)\big).$$

5.1.1 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \delta \leq 2$

Para mostrar a existência local de solução precisamos considerar que a potência fracionária γ esteja no seguinte intervalo $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, e vamos reescrever, assim como no Capítulo 3, o sistema na seguinte forma matricial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_1 U + F_1(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$. O operador B_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, com

$$B_1 : D(A_2) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to X \quad \text{dado por} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Neste caso, o operador F_1 é dado por

$$F_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\Big(u - (-\Delta)^\theta v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p\Big) \end{pmatrix}.$$

Na Seção 3.1, onde inicialmente definimos B_1, mostramos que B_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

Vamos agora mostrar que o operador F_1 está bem definido como um operador em $D(B_1)$ e que F_1 é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $D(B_1)$, com $D(B_1) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$.

Para isso, primeiramente vamos mostrar que F_1 está bem definido, ou seja, considerando $U = (u,v) \in D(B_1) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ vamos mostrar que $F_1(u,v) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$.

Da definição de F_1, temos

$$
\begin{aligned}
&\|F_1(u,v)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\\
&= \big\|(I+(-\Delta)^\delta)^{-1}\big(u-(-\Delta)^\theta v+\beta(-\Delta)^\gamma u^p\big)\big\|^2_{H^2}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\big|\hat{u}-|\xi|^{2\theta}\hat{v}+\beta|\xi|^{2\gamma}\widehat{u^p}\big|^2\,d\xi\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\big(|\hat{u}|^2+|\xi|^{4\theta}|\hat{v}|^2+|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}|^2\big)\,d\xi\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(2-2\delta)}\big)|\hat{u}|^2+\big(1+|\xi|^{2(2+2\theta-2\delta)}\big)|\hat{v}|^2\,d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(2+2\gamma-2\delta)}\big)|\widehat{u^p}|^2\,d\xi\\
&\le C\|u\|^2_{H^{2-2\delta}}+C\|v\|^2_{H^{2+2\theta-2\delta}}+C\|u^p\|^2_{H^{2+2\gamma-2\delta}}.
\end{aligned}
$$

Observamos que no caso que estamos considerando, temos

- $2-2\delta\le 4-\delta$, pois $0\le\delta\le 2$;
- $2+2\theta-2\delta<2$, pois $0\le\theta<\delta$;
- $2+2\gamma-2\delta\le 4-\delta$, pois $0\le\gamma\le\dfrac{2+\delta}{2}$.

Com isso, usando a definição de norma em H^s e a imersão natural de H^s em H^r para $s\ge r$, temos a seguinte estimativa para F_1

$$\|F_1(u,v)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\le C\|u\|^2_{H^{4-\delta}}+C\|v\|^2_{H^2}+C\|u^p\|^2_{H^{4-\delta}}.$$

Agora usamos o Lema 2.2.9 com $s=4-\delta$, para $n<8-2\delta$, temos

$$\|F_1(u,v)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\le C\|u\|^2_{H^{4-\delta}}+C\|v\|^2_{H^2}+C\|u\|^{2p}_{H^{4-\delta}}<\infty.$$

Portanto concluímos que

$$F_1: H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)\to H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)$$

está bem definido, desde que se assuma $0\le\gamma\le\dfrac{2+\delta}{2}$ e $n<8-2\delta$.

A seguir, vamos agora mostrar que F_1 é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $D(B_1)$.

Lema 5.1.1 *Sejam* $1 \leq n < 8 - 2\delta$, $0 \leq \theta < \delta$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $p > 1$ *inteiro. Considere* $U = (u, v)$ *e* $W = (w, z)$ *tais que*

$$U, W \in D(B_1) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n).$$

Então vale

$$\|F_1(U) - F_1(W)\|_X \leq C\Big(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\Big)\|B_1(U - W)\|_X.$$

Demonstração: Inicialmente vamos calcular a norma de F_1 no espaço da energia X e não em $D(B_1)$.

Dado $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}
&\big\|F_1(U) - F_1(W)\big\|_X^2 \leq \big\|(I + (-\Delta)^{\delta})^{-1}\big((u - w) - (-\Delta)^{\theta}(v - z)\big)\big\|_{H^\delta}^2 \\
&+ \big\|\beta(I + (-\Delta)^{\delta})^{-1}(-\Delta)^{\gamma}(u^p - w^p)\big\|_{H^\delta}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^{2\delta})}\big|(\hat{u} - \hat{w}) - |\xi|^{2\theta}(\hat{v} - \hat{z})\big|^2\, d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^{2\delta})}\big|\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})\big|^2\, d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} - \hat{w}|^2 + \big(1 + |\xi|^{2(2\theta-\delta)}\big)|\hat{v} - \hat{z}|^2\, d\xi \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2(2\gamma-\delta)}\big)\big|\widehat{u^p} - \widehat{w^p}\big|^2\, d\xi \\
&\leq C\|u - w\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^2}^2 + C\|u^p - w^p\|_{H^{4-\delta}}^2,
\end{aligned}$$

pois valem as duas desigualdades abaixo

- $2\theta - \delta < 2$, pois $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \delta \leq 2$;
- $2\gamma - \delta \leq 4 - \delta$, pois $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \delta \leq 2$.

Usando o Lema 2.2.11 com $s = 4 - \delta$, para $n < 8 - 2\delta$, temos

$$\begin{aligned}
\|F_1(U) - F_1(W)\|_X^2 &\leq C\|u - w\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^2}^2 \\
&+ C\Big(\|u\|_{H^{4-\delta}}^{p-1} + \|w\|_{H^{4-\delta}}^{p-1}\Big)^2\|u - w\|_{H^{4-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

No Lema 3.1.2 mostramos, para todo $u \in D(A_2)$ e $0 \leq \delta \leq 2$, que vale

$$\|u\|_{H^{4-\delta}} \leq C\|A_2 u\|_{H^\delta}.$$

Usando esse fato e a definição do operador B_1 (ver (3.32) e Lema 3.2.1) concluímos que

$$\begin{aligned}
&\big\|F_1(U) - F_1(W)\big\|_X^2 \le C\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2 + C\|v-z\|_{H^2}^2 \\
&+ C\Big(\|A_2u\|_{H^\delta}^{p-1} + \|A_2w\|_{H^\delta}^{p-1}\Big)^2\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2 \\
&\le C\|B_1(U-W)\|_X^2 + C\Big(\|B_1U\|_X^{p-1} + \|B_1W\|_X^{p-1}\Big)^2\|B_1(U-W)\|_X^2 \\
&\le C\Big(1 + \|B_1U\|_X^{p-1} + \|B_1W\|_X^{p-1}\Big)^2\|B_1(U-W)\|_X^2.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lema 5.1.2 *Sejam* $1 \le n < 8 - 2\delta$, $0 \le \theta < \delta$, $0 \le \delta \le 2$, $0 \le \gamma \le \dfrac{2+\delta}{2}$ *e* $p > 1$ *inteiro. Considere* $U = (u, v)$ *e* $W = (w, z)$ *tais que*

$$U, W \in D(B_1) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n).$$

Então vale

$$\|B_1\big(F_1(U) - F_1(W)\big)\|_X \le C\Big(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\Big)\|B_1(U-W)\|_X,$$

com $C > 0$ *uma constante.*

Demonstração: Dados $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
&\big\|B_1\big(F_1(U) - F_1(W)\big)\big\|_X^2 \le \big\|(I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\big((u-w) - (-\Delta)^\theta(v-z)\big)\big\|_{H^2}^2 \\
&+ \big\|\beta(I + (-\Delta)^\delta)^{-1}(-\Delta)^\gamma\big(u^p - w^p\big)\big\|_{H^2}^2 \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}(1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4)\Big|\mathcal{F}\Big((I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\big((u-w) - (-\Delta)^\theta(v-z)\big)\Big)\Big|^2 d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n}(1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4)\Big|\mathcal{F}\Big(\beta(I + (-\Delta)^\delta)^{-1}(-\Delta)^\gamma\big(u^p - w^p\big)\Big)\Big|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Sabemos que que a Transformada de Fourier das funções acima é dada por

- $\mathcal{F}\Big((I+(-\Delta)^\delta)^{-1}\big((u-w)-(-\Delta)^\theta(v-z)\big)\Big) = \dfrac{(\hat{u} - \hat{w}) - |\xi|^{2\theta}(\hat{v} - \hat{z})}{(1 + |\xi|^{2\delta})}$;
- $\mathcal{F}\Big(\beta(I + (-\Delta)^\delta)^{-1}(-\Delta)^\gamma\big(u^p - w^p\big)\Big) = \dfrac{\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})}{(1 + |\xi|^{2\delta})}$,

logo

$$
\begin{aligned}
&\big\|B_1\big(F_1(U)-F_1(W)\big)\big\|_X^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\big|(\hat{u}-\hat{w})-|\xi|^{2\theta}(\hat{v}-\hat{z})\big|^2\,d\xi\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\big|\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\big|^2\,d\xi\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(2-2\delta)}\big)|\hat{u}-\hat{w}|^2+\big(1+|\xi|^{2(2+2\theta-2\delta)}\big)|\hat{v}-\hat{z}|^2\,d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(2+2\gamma-2\delta)}\big)\big|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}\big|^2\,d\xi\\
&=C\|u-w\|_{H^{2-2\delta}}^2+C\|v-z\|_{H^{2+2\theta-2\delta}}^2+C\|u^p-w^p\|_{H^{2+2\gamma-2\delta}}^2.
\end{aligned}
$$

Agora observamos que

- $2-2\delta\leq 4-\delta$, pois $0\leq\delta\leq 2$;
- $2+2\theta-2\delta<2$, pois $0\leq\theta<\delta$;
- $2+2\gamma-2\delta\leq 4-\delta$, pois $0\leq\gamma\leq\dfrac{2+\delta}{2}$.

Da estimativa acima e considerando os Lemas 2.2.11 e 3.1.2, temos

$$
\begin{aligned}
&\big\|B_1\big(F_1(U)-F_1(W)\big)\big\|_X^2\\
&\leq C\|u-w\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|v-z\|_{H^2}^2+C\|u^p-w^p\|_{H^{4-\delta}}^2\\
&\leq C\|u-w\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|v-z\|_{H^2}^2+C\Big(\|u\|_{H^{4-\delta}}^{p-1}+\|w\|_{H^{4-\delta}}^{p-1}\Big)^2\|u-w\|_{H^{4-\delta}}^2\\
&\leq C\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2+C\|v-z\|_{H^2}^2\\
&+C\Big(\|A_2u\|_{H^\delta}^{p-1}+\|A_2w\|_{H^\delta}^{p-1}\Big)^2\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2\\
&\leq C\|B_1(U-W)\|_X^2+C\Big(\|B_1U\|_X^{p-1}+\|B_1W\|_X^{p-1}\Big)^2\|B_1(U-W)\|_X^2\\
&\leq C\Big(1+\|B_1U\|_X^{p-1}+\|B_1W\|_X^{p-1}\Big)^2\|B_1(U-W)\|_X^2
\end{aligned}
$$

que é válida para $n<8-2\delta$. Assim, o lema está demonstrado.

■

Combinando os Lemas 5.1.1 e 5.1.2 podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&\big\|F_1(U)-F_1(W)\big\|_X+\big\|B_1\big(F_1(U)-F_1(W)\big)\big\|_X\\
&\leq C\Big(1+\|B_1(U)\|_X^{p-1}+\|B_1(W)\|_X^{p-1}\Big)\|B_1(U-W)\|_X.
\end{aligned}
$$

Portanto, dado uma constante $M > 0$ e considerando

$$U, W \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

tais que

$$\|U\|_X + \|B_1(U)\|_X \leq M \quad \text{ e } \quad \|W\|_X + \|B_1(W)\|_X \leq M,$$

vale a seguinte estimativa

$$\|F_1(U) - F_1(W)\|_X + \|B_1\big(F_1(U) - F_1(W)\big)\|_X \leq CL_M\|B_1(U - W)\|_X$$

com L_M constante definida por $L_M = 1 + 2M^{p-1}$.

Assim, concluímos que F_1 é Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados de $D(B_1)$.

Como B_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e F_1 é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $D(B_1)$ concluímos, usando o Teorema 2.4.1, o seguinte teorema de existência e unicidade de solução:

Teorema 5.1.1 *Sejam $0 \leq \theta < \delta$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ inteiro e a dimensão n satisfazendo $1 \leq n < 8 - 4\delta$. Então, para dados iniciais satisfazendo*

$$(u_0, u_1) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

existe uma única solução para o problema de Cauchy semilinear (5.1) definido em um intervalo maximal $[0, T_m)$ na classe

$$u \in C^2\big([0, T_m), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0, T_m), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0, T_m), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big)$$

com uma e somente uma das duas seguintes condições verdadeira

i) $T_m = \infty$,

ii) $T_m < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T_m} \Big(\|U\|_X + \|B_1 U\|_X\Big) = \infty.$

5.1.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$

Como observado na seção anterior para mostrar a existência local de solução precisamos considerar que a potência fracionária γ esteja no seguinte intervalo $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Nesta seção também vamos considerar o espaço usual da energia

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$$

e reescrevendo o sistema na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_2U + F_2(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

com $U = U(t) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$.

O operador matricial B_2 é definido como

$$B_2 : D(A_2) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to X \quad \text{é dado por} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & -A_\theta \end{pmatrix}$$

com $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$, pois estamos considerando $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

O operador $F_2 : X \to X$ é definido por

$$F_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\Big(u + v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p\Big) \end{pmatrix}.$$

Pelas condições impostas sobre θ e δ temos que

$$D(A_\theta) = H^{2\theta-2}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) = D(A_2)$$

devido ao fato que $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ isso implica que $0 \leq \theta \leq 2$.

Na Seção 3.3 definimos o operador B_2 e mostramos que ele é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X. Vamos agora mostrar que o operador F_2 está bem definido e que F_2 é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de $D(B_2)$.

Dado $U=(u,v)\in D(B_2)=H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)$ vamos mostrar que F_2 está bem definido sobre $D(B_2)$, ou seja, mostrar que $F_2(u,v)\in D(B_2)=H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)$.

Da definição de F_2 temos

$$
\begin{aligned}
&\|F_2(u,v)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} = \left\|\left(I+(-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(u+v+\beta(-\Delta)^\gamma u^p\right)\right\|^2_{H^2}\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\left|\hat{u}+\hat{v}+\beta|\xi|^{2\gamma}\widehat{u^p}\right|^2 d\xi\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\left(|\hat{u}|^2+|\hat{v}|^2+|\xi|^{4\gamma}\left|\widehat{u^p}\right|^2\right)d\xi\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2-2\delta)}\right)|\hat{u}|^2+\left(1+|\xi|^{2(2-2\delta)}\right)|\hat{v}|^2\,d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2+2\gamma-2\delta)}\right)|\widehat{u^p}|^2\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Notamos que usando as condições consideradas sobre θ e δ temos

- $2-2\delta\le 4-\delta$, pois $0\le\delta\le 2$;
- $2+2\gamma-2\delta\le 4-\delta$, pois $0\le\gamma\le\dfrac{2+\delta}{2}$.

Usando isso e aplicando o Lema 2.2.9 para $1\le n<8-2\delta$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|F_2(u,v)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} &\le C\|u\|^2_{H^{2-2\delta}}+C\|v\|^2_{H^{2-2\delta}}+C\|u^p\|^2_{H^{2+2\gamma-2\delta}}\\
&\le C\|u\|^2_{H^{4-\delta}}+C\|v\|^2_{H^2}+C\|u\|^{2p}_{H^{4-\delta}}<\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto concluímos que

$$F_2: D(B_2)=H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)\to D(B_2)=H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)$$

está bem definido.

Vamos agora mostrar que F_2 é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de $D(B_2)$.

Lema 5.1.3 *Sejam $0\le\delta\le\theta$, $0\le\theta\le\dfrac{2+\delta}{2}$, $0\le\gamma\le\dfrac{2+\delta}{2}$, $p>1$ inteiro e $1\le n<8-2\delta$. Então, para todo $U=(u,v)$ e $W=(w,z)$ tais que*

$$U,W\in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n),$$

vale a estimativa

$$\|F_2(U)-F_2(W)\|_X \le C\Big(1+\|B_2(U)\|_X^{p-1}+\|B_2(W)\|_X^{p-1}\Big)\|B_2(U-W)\|_X.$$

com C uma constante positiva.

Demonstração: A demonstração deste lema é análoga a demonstração do Lema 5.1.1. Dados $U=(u,v)$ e $W=(w,z)$ em $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
&\|F_2(U)-F_2(W)\|_X^2 \le \Big\|\big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big((u-w)+(v-z)\big)\Big\|_{H^\delta}^2\\
&+\Big\|\beta\big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}(-\Delta)^{\gamma}\big(u^p-w^p\big)\Big\|_{H^\delta}^2\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|^{2\delta})}\big|(\hat{u}-\hat{w})+(\hat{v}-\hat{z})\big|^2\,d\xi\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|^{2\delta})}\big|\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p}-\widehat{w^p})\big|^2\,d\xi\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}-\hat{w}|^2+|\hat{v}-\hat{z}|^2\,d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(2\gamma-\delta)}\big)|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2\,d\xi\\
&=C\|u-w\|^2+C\|v-z\|^2+C\|u^p-w^p\|_{H^{2\gamma-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

Notamos que $2\gamma-\delta\le 4-\delta$ para $0\le\gamma\le\dfrac{2+\delta}{2}$. Então usando o Lema 2.2.9 com $n<8-2\delta$ temos

$$\begin{aligned}
&\|F_2(U)-F_2(W)\|_X^2 \le C\|u-w\|_{H^2}^2+C\|v-z\|_{H^\delta}^2+C\|u^p-w^p\|_{H^{4-\delta}}^2\\
&\le C\|u-w\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|v-z\|_{H^2}^2+C\Big(\|u\|_{H^{4-\delta}}^{p-1}+\|w\|_{H^{4-\delta}}^{p-1}\Big)^2\|u-w\|_{H^{4-\delta}}^2.
\end{aligned}$$

No Lema 3.1.2 mostramos que $\|u\|_{H^{4-\delta}}\le C\|A_2u\|_{H^\delta}$. Usando esse fato e a definição do operador B_2 obtemos

$$\begin{aligned}
&\|F_2(U)-F_2(W)\|_X^2 \le C\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2+C\|v-z\|_{H^2}^2\\
&+C\Big(\|A_2u\|_{H^\delta}^{p-1}+\|A_2w\|_{H^\delta}^{p-1}\Big)^2\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2\\
&\le C\|B_2(U-W)\|_X^2+C\Big(\|B_2U\|_X^{p-1}+\|B_2W\|_X^{p-1}\Big)^2\|B_2(U-W)\|_X^2\\
&\le C\Big(1+\|B_2U\|_X^{p-1}+\|B_2W\|_X^{p-1}\Big)^2\|B_2(U-W)\|_X^2,
\end{aligned}$$

que conclui a prova do lema. $\blacksquare$

Lema 5.1.4 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 8 - 2\delta$*. Então, para todo* $U = (u, v)$ *e* $W = (w, z)$ *tais que*

$$U,\, W \in D(B_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

vale a estimativa

$$\big\|B_2\big(F_2(U) - F_2(W)\big)\big\|_X \leq C\Big(1 + \|B_2(U)\|_X^{p-1} + \|B_2(W)\|_X^{p-1}\Big)\|B_2(U-W)\|_X,$$

com $C > 0$ *uma constante.*

Demonstração: Dados $U = (u, v)$ e $W = (w, z)$ em $D(B_2)$ temos

$$\begin{aligned}
&\big\|B_2\big(F_2(U) - F_2(W)\big)\big\|_X^2 \\
&\leq \big\|\big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big((u-w) + (v-z) + (-\Delta)^\gamma(u^p - w^p)\big)\big\|_{H^2}^2 \\
&+ \big\|A_\theta\big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big((u-w) + (v-z) + (-\Delta)^\gamma(u^p - w^p)\big)\big\|_{H^\delta}^2. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

A primeira norma do lado direito da desigualdade (5.2) é estimada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \big\|\big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big((u-w) + (v-z) + (-\Delta)^\gamma\big(u^p - w^p\big)\big\|_{H^2}^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4)}{(1 + |\xi|^{2\delta})^2}\big|(\hat{u} - \hat{w}) + (\hat{v} - \hat{z})\big|^2\, d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4)}{(1 + |\xi|^{2\delta})^2}|\beta|\xi|^{2\gamma}(\widehat{u^p} - \widehat{w^p})|^2\, d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2(2-2\delta)}\big)|\hat{u} - \hat{w}|^2 + \big(1 + |\xi|^{2(2-2\delta)}\big)|\hat{v} - \hat{z}|^2\, d\xi \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |\xi|^{2(2+2\gamma-2\delta)}\big)|\widehat{u^p} - \widehat{w^p}|^2\, d\xi \\
&= C\|u - w\|_{H^{2-2\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^{2-2\delta}}^2 + C\|u^p - w^p\|_{H^{2+2\gamma-2\delta}}^2.
\end{aligned}$$

Sabemos que

- $2 - 2\delta \leq 2 \leq 4 - \delta$ se $0 \leq \delta \leq 2$;
- $2 + 2\gamma - 2\delta \leq 4 - \delta$ se $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Usando o Lema 2.2.9 com $1 \leq n < 8 - 2\delta$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq C\|u-w\|^2_{H^{4-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^2} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{4-\delta}} \\
&\leq C\|u-w\|^2_{H^{4-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^2} + C\Big(\|u\|^{p-1}_{H^{4-\delta}} + \|w\|^{p-1}_{H^{4-\delta}}\Big)^2 \|u-w\|^2_{H^{4-\delta}}.
\end{aligned}
$$

A segunda norma do lado direito da desigualdade (5.2) é estimada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left\| A_\theta\big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big((u-w) + (v-z) + (-\Delta)^\gamma\big(u^p - w^p\big)\right\|^2_{H^\delta} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta}) \frac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^4} \big|(\hat{u}-\hat{w}) + (\hat{v}-\hat{z})\big|^2 \, d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta}) \frac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^4} |\beta|\xi|^{2\gamma} (\widehat{u^p} - \widehat{w^p})|^2 \, d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\big)|\hat{u}-\hat{w}|^2 + \big(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\big)|\hat{v}-\hat{z}|^2 \, d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2(2\theta+2\gamma-3\delta)}\big)|\widehat{u^p} - \widehat{w^p}|^2 \, d\xi \\
&= C\|u-w\|^2_{H^{2\theta-3\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^{2\theta-3\delta}} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{2\theta+2\gamma-3\delta}}.
\end{aligned}
$$

Sabemos que

- $2\theta - 3\delta \leq 2 - 2\delta \leq 2 \leq 4 - \delta$ se $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$;
- $2\theta + 2\gamma - 3\delta \leq 4 - \delta$ se $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Usando o Lema 2.2.9 com $1 \leq n < 8 - 2\delta$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq C\|u-w\|^2_{H^{4-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^2} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{4-\delta}} \\
&\leq C\|u-w\|^2_{H^{4-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^2} + C\Big(\|u\|^{p-1}_{H^{4-\delta}} + \|w\|^{p-1}_{H^{4-\delta}}\Big)^2 \|u-w\|^2_{H^{4-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando as estimativas de I_1 e I_2 acima, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\big\|B_2\big(F_2(U) - F_2(W)\big)\big\|^2_X &\leq C\|u-w\|^2_{H^{4-\delta}} + C\|v-z\|^2_{H^2} \\
&+ C\Big(\|u\|^{p-1}_{H^{4-\delta}} + \|w\|^{p-1}_{H^{4-\delta}}\Big)^2 \|u-w\|^2_{H^{4-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Usando novamente o Lema 3.1.2 e a definição do operador B_2 concluímos que

$$\left\|B_2\big(F_2(U)-F_2(W)\big)\right\|_X^2 \le C\|A_2(u-w)\|_{H^\delta}^2 + C\|v-z\|_{H^2}^2$$
$$+ C\Big(\|A_2u\|_{H^\delta}^{p-1} + \|A_2w\|_{H^\delta}^{p-1}\Big)^2 \|A_2(u-w)\|_{H^{4-\delta}}^2$$
$$\le C\|B_2(U-W)\|_X^2 + C\Big(\|B_2U\|_X^{p-1} + \|B_2W\|_X^{p-1}\Big)^2 \|B_2(U-W)\|_X^2$$
$$\le C\Big(1 + \|B_2U\|_X^{p-1} + \|B_2W\|_X^{p-1}\Big)^2 \|B_2(U-W)\|_X^2.$$

■

Combinando os Lemas 5.1.3 e 5.1.4 obtemos

$$\|F_2(U)-F_2(W)\|_X + \left\|B_2\big(F_2(U)-F_2(W)\big)\right\|_X$$
$$\le C\Big(1 + \|B_2(U)\|_X^{p-1} + \|B_2(W)\|_X^{p-1}\Big)\|B_2(U-W)\|_X.$$

Agora, dado M uma constante positiva e considerando $U, W \in D(B_2)$ tais que

$$\|U\|_X^{p-1} + \left\|B_2(U)\right\|_X^{p-1} \le M \quad \text{e} \quad \|W\|_X^{p-1} + \left\|B_2(W)\right\|_X^{p-1} \le M$$

temos

$$\|F_2(U)-F_1(W)\|_X + \|B_2\big(F_2(U)-F_2(W)\big)\|_X \le CL_M\|B_2(U-W)\|_X$$

com $L_M > 0$ a constante definida por $L_M = 1 + 2M^{p-1}$.

Concluímos também neste caso que F_2 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados de $D(B_2)$.

Como B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e F_2 é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de $D(B_2)$, usando o Teorema 2.4.1 concluímos o seguinte teorema de existência e unicidade de solução:

Teorema 5.1.2 *Sejam* $0 \le \delta \le \theta$, $0 \le \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$, $0 \le \gamma \le \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \le n < 8 - 2\delta$. *Então para todo dado inicial*

$$(u_0, u_1) \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$$

existe uma única solução para o problema de Cauchy semilinear (5.1) de-

finido em um intervalo maximal $[0, T_m)$ *na classe*

$$u \in C^2\big([0,T_m), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,T_m), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,T_m), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big)$$

com uma e somente uma das duas condições verdadeira

i) $T_m = \infty$,

ii) $T_m < \infty$ *e* $\lim_{t \to T_m} \Big(\|U\|_X + \|B_2 U\|_X \Big) = \infty.$

5.2 Existência Global

Nesta seção vamos mostrar que o intervalo maximal de existência nos casos anteriores é $[0,\infty)$, ou seja, mostraremos que $T_m = \infty$. Para isso, vamos supor que $T_m < \infty$ e mostrar que $\|U\|_X + \|BU\|_X < \infty$ assim concluímos que $T_m = \infty$.

Aplicando a Transformada de Fourier na variável x no problema de Cauchy (5.1) encontramos o seguinte problema de Cauchy equivalente no espaço de Fourier

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\hat{u}_{tt} + \big(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2\big)\hat{u} + |\xi|^{2\theta}\hat{u}_t = \beta|\xi|^{2\gamma}\widehat{u^p}, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases} \tag{5.3}$$

Usando o princípio de Duhamel, sabemos que a solução do problema de Cauchy (5.3) é dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_h(t,\xi) + \int_0^t \hat{w}(t-\tau,\tau,\xi)d\tau$$

com $\hat{u}_h(t,\xi)$ solução do problema homogêneo

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\hat{u}_{tt}(t,\xi) + \big(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2\big)\hat{u}(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}\hat{u}_t(t,\xi) = 0, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases} \tag{5.4}$$

e $\hat{w}(t,\tau,\xi)$ solução do problema

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\hat{w}_{tt}(t,\tau,\xi) + \big(\alpha|\xi|^4 + |\xi|^2\big)\hat{w}(t,\tau,\xi) + |\xi|^{2\theta}\hat{w}_t(t,\tau,\xi) = 0, \\ \hat{w}(0,\tau,\xi) = 0, \\ \hat{w}_t(0,\tau,\xi) = \beta\dfrac{|\xi|^{2\gamma}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u^p}(\tau,\xi). \end{cases} \tag{5.5}$$

Observamos que o problema homogêneo (5.4) é uma EDO de segunda ordem e assim as soluções são da forma $e^{\lambda t}$ com λ raiz do polinômio

$$(1+|\xi|^{2\delta})\lambda^2 + |\xi|^{2\theta}\lambda + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) = 0,$$

que são dadas por

$$\lambda_\pm = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm \sqrt{|\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^2(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}. \tag{5.6}$$

Então a solução do problema homogêneo (5.4) é da forma

$$\hat{u}_h(t,\xi) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t},$$

onde $a = a(\xi)$, $b = b(\xi)$ dependem dos dados iniciais. Aplicando as condições iniciais temos

$$\hat{u}_h(0,\xi) = a + b = \hat{u}_0(\xi), \quad (\hat{u}_h)_t(0,\xi) = a\lambda_+ + b\lambda_- = \hat{u}_1(\xi),$$

e assim

$$a = \frac{\hat{u}_1 - \lambda_-\hat{u}_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{\lambda_+\hat{u}_0 - \hat{u}_1}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

e portanto temos

$$\hat{u}_h(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\hat{u}_0 + \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\hat{u}_1$$

solução do problema (5.4).

Definimos as seguintes funções

$$\hat{G}(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \qquad \text{e} \qquad G(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{G}(t,\cdot))(x),$$

$$\hat{H}(t,\xi)=\frac{\lambda_+e^{\lambda_-t}-\lambda_-e^{\lambda_+t}}{\lambda_+-\lambda_-} \qquad \text{e} \qquad H(t,x)=\mathcal{F}^{-1}(\hat{H}(t,\cdot))(x).$$

Então a solução do problema (5.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) &= \hat{H}(t,\xi)\hat{u}_0+\hat{G}(t,\xi)\hat{u}_1\\ &+\beta\int_0^t \hat{G}(t-\tau,\xi)\frac{|\xi|^{2\gamma}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u^p}(\tau,\xi)d\tau \end{aligned} \tag{5.7}$$

e ainda temos

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,\xi) &= \hat{H}_t(t,\xi)\hat{u}_0+\hat{G}_t(t,\xi)\hat{u}_1\\ &+\beta\int_0^t \hat{G}_t(t-\tau,\xi)\frac{|\xi|^{2\gamma}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u^p}(\tau,\xi)d\tau, \end{aligned} \tag{5.8}$$

devido ao fato de $G(0,\xi)=0$.

Consideramos agora a seguinte estimativa do problema linear obtida no Capítulo 4, Lema 4.1.6,

$$\begin{aligned}&(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2\\ &\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\Big((1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}_0|^2\Big)\end{aligned} \tag{5.9}$$

com ρ_θ definido em (4.4).

Usando essa estimativa podemos mostrar o lema abaixo.

Lema 5.2.1 *Sejam $\hat{G}(t,\xi)$ e $\hat{H}(t,\xi)$ soluções fundamentais do problema (5.4) definidas acima. Então temos as seguintes estimativas:*

i) $|\hat{G}_t|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}$;

ii) $|\hat{G}|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\dfrac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}$;

iii) $|\hat{H}_t|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\dfrac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})}$;

iv) $|\hat{H}|^2\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}$.

Demonstração: Para mostrar os itens (i) e (ii) se considera a solução do problema homogêneo (5.4) com $\hat{u}_0=0$. Assim, nesse caso tem-se que

$$\hat{u}(t,\xi)=\hat{G}(t,\xi)\hat{u}_1 \qquad \text{e} \qquad \hat{u}_t(t,\xi)=\hat{G}_t(t,\xi)\hat{u}_1.$$

Substituindo essas expressões no Lema 4.1.6 temos

$$(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{G}_t||\hat{u}_1|^2+|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{G}||\hat{u}_0|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2.$$

Da estimativa acima segue o resultado para (i) e (ii).

As demonstrações dos itens (iii) e (iv) são análogas.

■

Para mostrar que $\|U(t)\|_X+\|BU(t)\|_X<\infty$ para todo $t\in(0,T_m)$ precisamos considerar dois casos sobre δ e θ como no caso da prova de existência local.

5.2.1 Caso $0\leq\theta<\delta$ e $0\leq\delta\leq 2$

Neste caso vamos considerar o operador B_1 definido na Subseção 3.2.1.

Queremos encontrar uma limitação em $X=H^2(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ para $\|U(t)\|_X+\|B_1U(t)\|_X$ para todo $t\in[0,T_m)$, com $U=(u,u_t)$ e u a solução de (5.1) dada pelo Teorema 5.1.1.

Da definição de X e de $B_1(u,u_t)=(u_t,-A_2u)$ com

$$A_2=\big(I+(-\Delta)^\delta\big)^{-1}(\alpha\Delta^2-\Delta+I)$$

dado na Subseção 3.1.1, temos

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2+\|B_1U\|_X^2=\|u\|_{H^2}^2+\|u_t\|_{H^\delta}^2+\|u_t\|_{H^2}^2+\|A_2u\|_{H^\delta}^2\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}|^2\,d\xi+\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{A_2u}|^2\,d\xi\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u_t}|^2\,d\xi+\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u_t}|^2\,d\xi\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})}(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}|^2\,d\xi\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u_t}|^2\,d\xi,
\end{aligned}$$

pois, $\widehat{A_2u}=\dfrac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})}\hat{u}$.

Agora, usando o Lema 2.2.5, observamos que

i) $\dfrac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})}(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\leq C\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}$

ii) $(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\leq C\big(1+|\xi|^2\big)^2.$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Usando a estimativas (i) e (ii) acima obtemos

$$\|U\|_X^2+\|B_1U\|_X^2\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}|\hat{u}|^2\,d\xi+C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^2|\hat{u}_t|^2\,d\xi.$$

Substituindo $\hat{u}$ e $\hat{u}_t$, dadas, respectivamente, por (5.7) e (5.8), na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2+\|B_1U\|_X^2\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^2\Big(|\hat{H}_t|^2|\hat{u}_0|^2+|\hat{G}_t|^2|\hat{u}_1|^2\Big)\,d\xi\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^2\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}_t|^2|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}\Big(|\hat{H}|^2|\hat{u}_0|^2+|\hat{G}|^2|\hat{u}_1|^2\Big)\,d\xi\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}|^2|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos acima encontramos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2+\|B_1U\|_X^2\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}|\hat{H}|^2+(1+|\xi|^2)^2|\hat{H}_t|^2\Big)\,|\hat{u}_0|^2\,d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}|\hat{G}|^2+(1+|\xi|^2)^2|\hat{G}_t|^2\Big)\,|\hat{u}_1|^2\,d\xi\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^{4-3\delta}|\xi|^{4\gamma}|\hat{G}|^2|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2\big)^{2-2\delta}|\xi|^{4\gamma}|\hat{G}_t|^2|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas para $\hat{H}$, $\hat{H}_t$, $\hat{G}$ e $\hat{G}_t$ dadas pelo Lema 5.2.1, como

$e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t} \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X^2 + \|B_1U\|_X^2 &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{4-\delta} + (1+|\xi|^2)^2\frac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})}\right)|\hat{u}_0|^2\,d\xi \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{4-\delta}\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} + (1+|\xi|^4)\right)|\hat{u}_1|^2\,d\xi \\
&+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{4-3\delta}|\xi|^{4\gamma}\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau \qquad (5.10)\\
&+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{2-2\delta}|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Observamos que no termo que acompanha o dado inicial $\hat{u}_1$ aparece um $|\xi|^2$ no denominador, este termo é complicado de lidarmos quando estamos na baixa frequência, pois $\dfrac{1}{|\xi|^2} \to \infty$ quando $|\xi| \to 0$.

Agora, usando o Lema 2.2.5, notamos que:

i) Se $|\xi| \geq 1$ temos

$$\left(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\right)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq C\left(1+|\xi|^4\right),$$

pois $|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) \geq \min\{1,\alpha\}(1+|\xi|^4)$.

ii) Se $0 < |\xi| \leq 1$ temos

$$\left(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\right)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq 4|\xi|^{-2}.$$

Então, usando essas estimativas, vamos limitar a integral onde aparece o dado inicial $\hat{u}_1$ em (5.10) trabalhando na baixa frequência e na alta frequência. A parte de alta frequência vai ser limitada por $\|u_1\|_{H^2}^2$ e a parte da baixa frequência vamos estimar pela norma de u_1 em $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Os demais temos que aparecem na desigualdade acima podem ser limitados usando equivalência de norma, para $0 \leq \theta < \delta$, $0 \leq \delta \leq 2$ e $\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, da seguinte forma,

i) $\left(1+|\xi|^2\right)^{4-\delta} + (1+|\xi|^4)\dfrac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})} \leq C(1+|\xi|^2)^{4-\delta}$;

ii) $\left(1+|\xi|^2\right)^{4-3\delta}|\xi|^{4\gamma}\dfrac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta}$;

iii) $\left(1+|\xi|^2\right)^{2-2\delta}|\xi|^{4\gamma} \leq C\left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta}$.

Como $2+2\gamma-2\delta\leq 4-\delta$, usando o Lema 2.2.5 e a definição do espaço $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ (ver Subseção 2.2.5) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2+\|B_1U\|_X^2\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|u_1\|_{H^2}^2+C\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2d\xi\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau\\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|u_1\|_{H^2}^2+C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2+C\int_0^t\|u^p\|_{H^{4-\delta}}^2d\tau\\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|u_1\|_{H^2}^2+C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2+C\int_0^t\|u^p\|_{H^{4-\delta}}^2d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 2.2.9 com $s=4-\delta$, $1\leq n<8-2\delta$ e para $p>1$ inteiro temos

$$
\begin{aligned}
&\|U(t)\|_X^2+\|B_1U(t)\|_X^2\\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|u_1\|_{H^2}^2+C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2+C\int_0^t\|u\|_{H^{4-\delta}}^{2p}d\tau\\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2+C\|u_1\|_{H^2}^2+\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2+T_m\sup_{0\leq\tau\leq t}\|u(\tau)\|_{H^{4-\delta}}^{2p} \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

para $t\in[0,T_m)$ com o tempo máximo de existência de solução T_m assumido ser finito.

Usando o Lema 3.1.2 e a desigualdade (5.11) temos

$$
\begin{aligned}
&\|U(t)\|_X^2+\|B_1U(t)\|_X^2\\
&\leq C\|A_2u_0\|_{H^\delta}^2+C\|u_1\|_{H^2}^2+\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2+T_m\sup_{0\leq\tau\leq t}\|A_2u\|_{H^\delta}^{2p}\\
&\leq C\|B_1U_0\|_X^2+C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2+CT_m\sup_{0\leq\tau\leq t}\|B_1U(\tau)\|_X^{2p}.
\end{aligned}
$$

Definimos a função

$$
M_1(t)=\sup_{0\leq\tau\leq t}\Big(\|U(\tau)\|_X^2+\|B_1U(\tau)\|_X^2\Big) \qquad (5.12)
$$

para $0\leq t\leq T_m$.

Da desigualdade anterior temos

$$
M_1(t)\leq C\Big(\|B_1U_0\|_X^2+\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2\Big)+CT_mM_1(t)^p \qquad (5.13)
$$

para todo $t \in [0, T_m)$ com $T_m < \infty$.

Para mostrar que a solução obtida do problema de Cauchy (5.1) é global, isto é, que $T_m = \infty$, vamos precisar do lema de cálculo elementar descrito a seguir.

Lema 5.2.2 *Sejam $p > 1$ e F uma função contínua e positiva definida da seguinte forma $F(M) = aI_0 + bTM^p - M$, com a, b, I_0, T constantes positivas e $M \geq 0$.*

Então, existe um único $M_0 > 0$ ponto de mínimo absoluto de $F(M)$ em $[0, \infty)$. Além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < I_0 \leq \varepsilon$ então $F(M_0) < 0$.

Demonstração: É fácil verificar que o único ponto crítico de F é

$$M_0 = \left(\frac{1}{bTp}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

e que ele é ponto de mínimo global. Além disso, $F(0) = aI_0 > 0$. Portanto, se I_0 for suficientemente pequeno, digamos $I_0 \leq \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, então $F(M_0) < 0$.

■

Agora, notamos que a função $M_1(t)$ definida em (5.12) é não negativa e satisfaz $F(M_1(t)) \geq 0$ para todo $t \in [0, T_m)$ devido a desigualdade (5.13) com $F(M)$ a função dada no Lema 5.2.2 com $a = b = C$, $T = T_m$ e com

$$I_0 = \|B_1 U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2.$$

Portanto, se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ dado pelo Lema 5.2.2, devido a continuidade da função $M_1(t)$, existem somente duas possibilidades:

$$\textbf{(i)} \;\; M_1(t) < M_0, \quad \text{para todo } \; t \in [0, T_m)$$

ou

$$\textbf{(ii)} \;\; M_1(t) > M_0, \quad \text{para todo } \; t \in [0, T_m).$$

Entretanto, notamos que

$$M_1(0) = \|U_0\|_X^2 + \|B_1 U_0\|_X^2.$$

Então, assumindo uma outra condição sobre os dados iniciais, de que

$M_1(0) < M_0$ (M_0 o ponto de mínimo global do Lema 5.2.2), segue que $M_1(t) \leq M_0$ para todo $t \in [0, T_m)$, ou seja, a condição que é válida é a condição (**i**) acima.

Portanto, se T_m finito segue que $\|U\|_X^2 + \|B_1 U\|_X^2$ também é limitado para todo $t \in [0, T_m)$. Isso contradiz a condição do Teorema 5.1.1, ou seja, devemos ter que $T_m = \infty$. Com isso provamos o seguinte resultado de existência global de solução.

Teorema 5.2.1 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta$, $0 \leq \delta \leq 2$, $\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 8 - 2\delta$. *Considere os dados iniciais*

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

satisfazendo

$$0 < I_0 \leq \varepsilon \ \text{e} \ M_1(0) < M_0$$

com ε, I_0, M_0, $M_1(0)$ *dados acima e no Lema 5.2.2.*

Então existe uma única solução global $u = u(t,x)$ *para o problema de Cauchy semilinear (5.1), que satisfaz*

$$u \in C^2\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,\infty), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big).$$

5.2.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$

Queremos encontrar uma limitação em $X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ para $\|U\|_X + \|B_2 U\|_X$.

O operador B_2 (ver início da Subseção 3.3.1) foi definido como

$$B_2 : D(A_2) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to X \quad \text{com} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & -A_\theta \end{pmatrix}$$

onde $D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Com isso, usando a definição de X, temos

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 = \|u\|_{H^2}^2 + \|u_t\|_{H^\delta}^2 + \|u_t\|_{H^2}^2 + \|A_2 u\|_{H^\delta}^2 + \|A_\theta u_t\|_{H^\delta}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{A_2 u}|^2\, d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}_t|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2\, d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{A_\theta u_t}|^2\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})}(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}|^2\, d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \left(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4+\frac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{1+|\xi|^{2\delta}}\right)|\hat{u}_t|^2\, d\xi,
\end{aligned}
$$

pois $\widehat{A_2 u} = \dfrac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})}\hat{u}$ e $\widehat{A_\theta u_t} = \dfrac{(1+|\xi|^{2\theta})}{(1+|\xi|^{2\delta})}\hat{u}_t$.

Precisamos das duas desigualdades a seguir, válidas para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

i) $\dfrac{(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)}{(1+|\xi|^{2\delta})}(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4) \le C\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}$

ii) $(2+|\xi|^{2\delta}+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4) + \dfrac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{1+|\xi|^{2\delta}} \le C\big(1+|\xi|^2\big)^2.$

A segunda desigualdade vale pois $4\theta - 2\delta \le 4$ se $0 \le \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$.

Usando as estimativas acima temos

$$
\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 \le C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}|\hat{u}|^2\, d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^2|\hat{u}_t|^2\, d\xi.
$$

Substituindo as expressões (5.7) e (5.8) para $\hat{u}$ e $\hat{u}_t$ na identidade acima temos

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2 \le C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^2\Big(|\hat{H}_t|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{G}_t|^2|\hat{u}_1|^2\Big)\, d\xi \\
&+ C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^2 \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}_t|^2|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}\Big(|\hat{H}|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{G}|^2|\hat{u}_1|^2\Big)\, d\xi \\
&+ C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta} \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}|^2|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Reorganizando os termos acima encontramos

$$\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}|\hat{H}|^2 + (1+|\xi|^2)^2|\hat{H}_t|^2\Big)\, |\hat{u}_0|^2\, d\xi$$
$$+ C\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}|\hat{G}|^2 + (1+|\xi|^2)^2|\hat{G}_t|^2\Big)\, |\hat{u}_1|^2\, d\xi$$
$$+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{4-3\delta}|\xi|^{4\gamma}|\hat{G}|^2|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau$$
$$+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{2-2\delta}|\xi|^{4\gamma}|\hat{G}_t|^2|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau.$$

Usando as estimativas para $\hat{H}$, $\hat{H}_t$, $\hat{G}$ e $\hat{G}_t$ encontradas no Lema 5.2.1, como $e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t} \leq 1$, temos

$$\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2$$
$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left(\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta} + (1+|\xi|^2)^2\frac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})}\right) |\hat{u}_0|^2\, d\xi$$
$$+ C\int_{\mathbb{R}^n} \left(\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta}\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} + (1+|\xi|^2)^2\right) |\hat{u}_1|^2\, d\xi$$
$$+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{4-3\delta}|\xi|^{4\gamma}\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau$$
$$+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^{2-2\delta}|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau.$$

Da mesma forma que na subseção anterior, no termo que acompanha o dado inicial $\hat{u}_1$ aparece um $|\xi|^2$ no denominador. Para estimar essa parte notamos que:

i) Se $|\xi| \geq 1$ temos

$$\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq C\big(1+|\xi|^4\big),$$

pois $|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) \geq \min\{1,\alpha\}(1+|\xi|^2)^2$;

ii) Se $|\xi| \leq 1$ temos

$$\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq 4|\xi|^{-2}.$$

Então, usando essas estimativas, vamos limitar a integral onde aparece o dado inicial $\hat{u}_1$ na baixa frequência e na alta frequência. A parte de alta frequência notamos que pode ser limitada por $\|u_1\|_{H^2}^2$. A parte da baixa frequência estimamos pela norma em $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Os demais termos que aparecem na desigualdade acima podem ser limitados usando equivalência de norma, para $0 \leq \delta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, da seguinte forma

i) $\big(1+|\xi|^2\big)^{4-\delta} + (1+|\xi|^2)^2 \dfrac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})} \leq C(1+|\xi|^2)^{4-\delta}$;

ii) $\big(1+|\xi|^2\big)^{4-3\delta}|\xi|^{4\gamma} \dfrac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq C\big(1+|\xi|^2\big)^{2+2\gamma-2\delta}$;

iii) $\big(1+|\xi|^2\big)^{2-2\delta}|\xi|^{4\gamma} \leq C\big(1+|\xi|^2\big)^{2+2\gamma-2\delta}$.

Como $2+2\gamma-2\delta \leq 4-\delta$, usando o Lema 2.2.5 e a definição do espaço $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ (ver Subseção 2.2.5) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|u_1\|_{H^2}^2 + C\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau \\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|u_1\|_{H^2}^2 + C\||\xi|^{-1}\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 + C\int_0^t \|u^p\|_{H^{4-\delta}}^2 d\tau \\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|u_1\|_{H^2}^2 + C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + C\int_0^t \|u^p\|_{H^{4-\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 2.2.9, do mesmo modo que no caso anterior se $s = 4-\delta$, $1 \leq n < 8-2\delta$ e para todo $t \in [0, T_m)$ temos

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|u_1\|_{H^2}^2 + C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + C\int_0^t \|u\|_{H^{4-\delta}}^{2p} d\tau \\
&\leq C\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2 + C\|u_1\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + T_m \sup_{0\leq\tau\leq t} \|u\|_{H^{4-\delta}}^{2p} \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

com $p > 1$ inteiro e $T_m < \infty$ o tempo máximo de existência de solução.

Aqui novamente, usamos a estimativa $\|u\|_{H^{4-\delta}} \leq C\|A_2u\|_{H^\delta}$ do Lema

3.1.2. Com isso e a desigualdade (5.14) temos

$$\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \\
&\leq C\|A_2u_0\|_{H^\delta}^2 + C\|u_1\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + T_m \sup_{0\leq\tau\leq t} \|A_2u\|_{H^\delta}^{2p} \\
&\leq C\|B_2U_0\|_X^2 + C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + CT_m \sup_{0\leq\tau\leq t} \|B_2U\|_X^{2p}.
\end{aligned}$$

Agora para o caso em consideração definimos a função

$$M_2(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t} \Big(\|U(\tau)\|_X^2 + \|B_2U(\tau)\|_X^2\Big) \tag{5.15}$$

para $0 \leq t < T_m$.

Da desigualdade anterior temos

$$M_2(t) \leq C\Big(\|B_2U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2\Big) + CT_mM_2(t)^p \tag{5.16}$$

para todo $t \in [0, T_m)$ com $T_m < \infty$.

Para mostrar que a solução obtida do problema de Cauchy (5.1) é global, isto é, que $T_m = \infty$ vamos precisar do Lema 5.2.2.

Notamos que a função $M_2(t)$ definida em (5.15) é não negativa e satisfaz $F(M_2(t)) \geq 0$ para todo $t \in [0, T_m)$ devido à desigualdade (5.16) com $F(M)$ a função dada no Lema 5.2.2 com $a = b = C$, $T = T_m$ e com

$$I_0 = \|B_2U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2.$$

Portanto, se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ dado pelo Lema 5.2.2, devido a continuidade da função $M_2(t)$, existem somente duas possibilidades:

$$\textbf{(i)}\ \ M_2(t) < M_0, \quad \text{para todo}\ \ t \in [0, T_m)$$

ou

$$\textbf{(ii)}\ \ M_2(t) > M_0, \quad \text{para todo}\ \ t \in [0, T_m).$$

Entretanto, notamos que

$$M_2(0) = \|U_0\|_X^2 + \|B_2U_0\|_X^2.$$

Então, assumindo uma outra condição sobre os dados iniciais, de que

$M_2(0) < M_0$ (M_0 o ponto de mínimo global de F(M) do Lema 5.2.2), segue que $M_2(t) \leq M_0$ para todo $t \in [0, T_m)$, ou seja, a condição que é válida é a condição (**i**) acima.

Portanto, se T_m finito segue que $\|U\|_X^2 + \|B_2 U\|_X^2$ também é limitado para todo $t \in [0, T_m)$. Isso contradiz a condição do Teorema 5.1.2, ou seja, devemos ter $T_m = \infty$. Com isso provamos o seguinte resultado de existência global de solução.

Teorema 5.2.2 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 8 - 2\delta$. *Considere os dados iniciais*

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

satisfazendo

$$0 < I_0 \leq \varepsilon \ e \ M_2(0) < M_0$$

com ε, I_0, M_0, $M_2(0)$ *dados acima e no Lema 5.2.2.*

Então existe uma única solução global $u = u(t, x)$ *para o problema de Cauchy semilinear (5.1) e tal solução está na classe*

$$u \in C^2\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,\infty), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Capítulo 6

Taxas de Decaimento: Problema Semilinear

Sabemos dos Teoremas 5.2.1 e 5.2.2 que o problema semilinear (5.1) tem uma única solução global

$$u \in C^2\big([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,\infty), H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\big)$$

para todo $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ inteiro e $1 \leq n < 8 - 2\delta$, se o dados iniciais

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad \text{ e } \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

são suficientemente pequenos.

Neste capítulo encontramos taxas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 da solução do problema semilinear (5.1) usando estimativas parecidas com as estimativas feitas na Seção 5.2.

Observe que se encontrarmos estimativas para $\|(u,u_t)\|_{H^{4-\delta}\times H^2}$ encontraremos também taxas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 da solução de (5.1), pois

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)|\hat{u}|^2 + |\hat{u}|^2\right] d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} \left[2(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}_t|^2 + (1+\alpha)(1+|\xi|^{2(4-\delta)})|\hat{u}|^2\right] d\xi \\
&+ \int_{|\xi|\geq 1} \left[\max\left\{1, \frac{1}{\alpha}\right\}(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}_t|^2 + (1+\alpha)(1+|\xi|^{2(4-\delta)})|\hat{u}|^2\right] d\xi \\
&\leq C\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}, \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

pois para $0 \leq \delta \leq 2$ temos

i) $1+|\xi|^{2\delta} \leq 2 \leq 2(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)$ se $|\xi| \leq 1$;

ii) $1+|\xi|^{2\delta} \leq 1+|\xi|^4 \leq \max\left\{1, \dfrac{1}{\alpha}\right\}(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)$ se $|\xi| \geq 1$;

iii) $|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) \leq 1+\alpha \leq (1+\alpha)(1+|\xi|^{4-\delta})$ se $|\xi| \leq 1$;

iv) $|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) \leq (1+\alpha)|\xi|^{2(4-\delta)} \leq (1+\alpha)(1+|\xi|^{4-\delta})$ se $|\xi| \geq 1$.

Vamos agora encontrar uma estimativa para $\|(u,u_t)\|_{H^{4-\delta}\times H^2}$. Na Seção 5.2 encontramos expressões para a solução $\hat{u}$ do problema semilinear (5.1) e para a sua derivada $\hat{u}_t$ (ver (5.7) e (5.8)). Substituindo-as temos

$$
\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}_t|^2 + \left(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\right)|\hat{u}|^2 \, d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\right)\left(|\hat{H}_t|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{G}_t|^2|\hat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&+ C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}_t(t-\tau)|^2|\widehat{u^p}|^2 \, d\xi d\tau \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\right)\left(|\hat{H}|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{G}|^2|\hat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&+ C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\right)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}(t-\tau)|^2|\widehat{u^p}|^2 \, d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Reorganizando os termos acima encontramos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{H}|^2+(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{H}_t|^2\Big)\,|\hat{u}_0|^2\,d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{G}|^2+(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{G}_t|^2\Big)\,|\hat{u}_1|^2\,d\xi\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}(t-\tau)|^2|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{G}_t(t-\tau)|^2|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas para $\hat{H}$, $\hat{H}_t$, $\hat{G}$ e $\hat{G}_t$ encontradas no Lema 5.2.1 temos

$$\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\left(\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)+(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\frac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})}\right)|\hat{u}_0|^2\,d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\left(\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}+(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\right)|\hat{u}_1|^2\,d\xi\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)(t-\tau)}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)(1+|\xi|^{2\delta})}|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau\\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)(t-\tau)}\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Observamos aqui que os termos que aparecem na desigualdade acima podem ser estimados, para $0\leq\delta\leq 2$, $0\leq\theta\leq\dfrac{2+\delta}{2}$ e $\dfrac{1}{2}\leq\gamma\leq\dfrac{2+\delta}{2}$, da seguinte forma:

i) $\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)+(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)\dfrac{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)}{(1+|\xi|^{2\delta})}\leq C(1+|\xi|^{2(4-\delta)})$;

ii) $\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\dfrac{|\xi|^{4\gamma}}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)(1+|\xi|^{2\delta})}\leq C(1+|\xi|^2)^{2+2\gamma-2\delta}$;

iii) $\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)\dfrac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\leq C(1+|\xi|^2)^{2+2\gamma-2\delta}$,

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Por último observamos que no termo que acompanha o dado inicial $\hat{u}_1$ aparece um $|\xi|^2$ no denominador. Este termo é complicado de lidarmos quando estamos na baixa frequência, pois $\dfrac{1}{|\xi|^2}\to\infty$ quando $|\xi|\to 0$. Esse termo também aparece na terceira integral na última estimativa acima. Entretanto, ele foi compensado com o termo $|\xi|^{4\gamma}$ que aparece no numerador, conforme se vê na estimativa (ii) logo acima.

Agora, para estimar o coeficiente de $|\hat{u}_1|^2$, percebemos que para $|\xi| \geq 1$ temos

$$\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq C\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big),$$

pois $|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) \geq (1+\alpha|\xi|^4)$.

Se $0 < |\xi| \leq 1$ temos

$$\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2)} \leq 4|\xi|^{-2}.$$

Usando as estimativas acima, concluímos que $\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}$ é limitada por quatro integrais, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}(1+|\xi|^{2(4-\delta)})|\hat{u}_0|^2\,d\xi \\
&+C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}_1|^2\,d\xi + C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)(t-\tau)}\big(1+|\xi|^2\big)^{2+2\gamma-2\delta}|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Neste ponto definimos as seguintes integrais, dependentes de t, que aparecem na estimativa acima

- $L_1(t) = C\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{u}_0|^2\,d\xi;$
- $L_2(t) = C\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4)|\hat{u}_1|^2\,d\xi;$
- $L_3(t) = C\displaystyle\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi;$
- $N_1(t) = C\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)(t-\tau)}\big(1+|\xi|^2\big)^{2+2\gamma-2\delta}|\widehat{u^p}|^2\,d\xi d\tau.$

Com isso concluímos que

$$\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} \leq L_1(t)+L_2(t)+L_3(t)+N_1(t). \tag{6.2}$$

Portanto para encontrarmos uma estimativa para $\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}$

basta estimarmos as funções L_1, L_2, L_3 e N_1. Como a função ρ_θ definida no Capítulo 4 depende de θ, dividimos o problema em quatro casos:

i) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$;

ii) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$;

iii) Caso $0 \leq \theta < \delta \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$;

iv) Caso $0 \leq \theta < \delta \leq 2$ e $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Observamos aqui que as estimativas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 da solução dos casos (i) e (ii) são apresentados nas seções abaixo. Estes casos são referentes à $0 \leq \delta \leq \theta$, em que não precisamos impor mais regularidade nos dados iniciais, além do que já foi pedido no caso linear para obter taxas de decaimento. Os casos (iii) e (iv) referentes à $0 \leq \theta < \delta$, precisamos mais regularidade nos dados iniciais, o que dificulta a tarefa de encontrar taxas de decaimento e por esse motivo não apresentaremos neste trabalho estimativas de decaimento para estes dois casos.

6.1 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$

Nesta seção encontramos taxas de decaimento para a norma L^2 e para a norma da energia para o problema semilinear. Para fazer isso, vamos estimar as funções L_1, L_2, L_3 e N_1 que aparecem na estimativa (6.2).

Pela definição de $\rho_\theta = \rho_\theta(\xi)$ em (4.4) para o caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ em consideração, temos

$$\rho_\theta(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}(1+\alpha|\xi|^2), & |\xi| \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2} \\ \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}, & |\xi| \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Como $\rho_\theta = \rho_\theta(\xi)$ também depende de ξ, vamos estimar $e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t}$ na baixa frequência e na alta frequência da seguinte forma:

i) Se $|\xi| \leq 1$ temos $\rho_\theta(\xi) \geq \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}$. Com isso segue que

$$e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t} \leq e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t}. \tag{6.3}$$

ii) Se $|\xi| \geq 1$ temos $\rho_\theta(\xi) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pois estamos considerando $\theta \geq \delta$.

Assim, temos também

$$e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t} \leq e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}. \tag{6.4}$$

Lema 6.1.1 *Sejam $p > 1$ inteiro e $1 \leq n < 8 - 2\delta$. Sejam θ, δ e γ tais que*

$$0 \leq \delta \leq \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{2+\delta}{2}$$

Então, para dados iniciais

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} \\
&\leq C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}} \\
&+ C\int_0^t \|(u,u_t)\|^{2p}_{H^{4-\delta}\times H^2}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}}\,d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Vamos começar estimando L_1. Primeiro dividimos a integral em duas integrais: uma na baixa frequência ($|\xi| \leq 1$) e outra na alta frequência ($|\xi| \geq 1$), então usando as estimativas para ρ_θ em (6.3) e (6.4) temos

$$\begin{aligned}
L_1 &= C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{u}_0|^2\,d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{u}_0|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Usamos o Lema 2.5.4 para estimar a integral na baixa frequência e usando a definição de norma H^s para estimar a integral na alta frequência encontramos

$$
\begin{aligned}
L_1 &\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \int_{|\xi|\geq 1} \big(1+|\xi|^{2(4-\delta)}\big)|\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2 \\
&\leq C\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{H^{4-\delta}}^2\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}},
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$.

Da mesma forma vamos estimar L_2. Usando as estimativas para ρ_θ em (6.3), (6.4) e o Lema 2.5.4 temos

$$
\begin{aligned}
L_2 &= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)|\hat{u}_1|^2\, d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t}\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \int_{|\xi|\geq 1} \big(1+|\xi|^2+\alpha|\xi|^4\big)|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\|u_1\|_{H^2}^2 \\
&\leq C\Big(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{H^2}^2\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}},
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$.

A estimativa para L_3 segue da definição do espaço $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$ e do Lema 2.5.4, como apresentamos abaixo

$$
\begin{aligned}
L_3 &= C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&= C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}},
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$.

Vamos agora estimar N_1. Novamente dividimos a estimativa na baixa frequência e na alta frequência. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
N_1 &= C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(t-\tau)}\left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta}|\widehat{u^p}|^2\, d\xi d\tau \\
&\leq C\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}(t-\tau)}\left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta}|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau \\
&+ C\int_0^t \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)}\left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta}|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Na baixa frequência, usando os Lemas 2.5.4 e 2.2.7 e o fato de

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta} \leq C,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
N_1 &\leq C\int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{5}|\xi|^{2-2\theta}(1+t-\tau)} d\xi d\tau \\
&+ C\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \int_{|\xi|\geq 1} \left(1+|\xi|^2\right)^{2+2\gamma-2\delta}|\widehat{u^p}(\tau)|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}} d\tau + C\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(1+t-\tau)}\|u^p(\tau)\|_{H^{2+2\gamma-2\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Como $2+2\gamma-2\delta \leq 4-\delta$ concluímos que

$$N_1 \leq C\int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}} d\tau + C\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(1+t-\tau)}\|u^p(\tau)\|_{H^{4-\delta}}^2 d\tau.$$

Agora usando o Lema 2.2.9 e 2.2.10 com $1 \leq n < 8-2\delta$ e $p > 1$ inteiro, temos estimativas para a norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ e para a norma $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ de u^p. Assim a estimativa para N_1 fica

$$\begin{aligned}
N_1 &\leq C\int_0^t \|u\|_{H^{4-\delta}}^{2p} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}} d\tau + C\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(1+t-\tau)}\|u\|_{H^{4-\delta}}^{2p} d\tau \\
&\leq C\int_0^t \|u\|_{H^{4-\delta}}^{2p} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}} d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Substituindo as estimativas para L_1, L_2, L_3 e N_1 na desigualdade (6.2) temos, para $p > 1$ inteiro e $n < 8 - 2\delta$,

$$\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} \leq C\Big(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{H^{4-\delta}}\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}} \\
&+ C\Big(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{H^2} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}}\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}} \\
&+ C\int_0^t \|u\|^{2p}_{H^{4-\delta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}}\,d\tau \\
&\leq C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}} \\
&+ C\int_0^t \|(u,u_t)\|^{2p}_{H^{4-\delta}\times H^2}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}}\,d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

■

Multiplicando a desigualdade do lema anterior por $(1+t)^{\frac{n}{2-2\theta}}$ encontramos a seguinte desigualdade válida para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{2-2\theta}}\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} \\
&\leq C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big) \\
&+ C\int_0^t \|(u,u_t)\|^{2p}_{H^{4-\delta}\times H^2}(1+t)^{\frac{n}{2-2\theta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Para todo $t \geq 0$ definimos a função

$$M_1(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t}(1+\tau)^{\frac{n}{2-2\theta}}\|(u(\tau),u_t(\tau))\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}. \tag{6.5}$$

Da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}
M_1(t) &\leq C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big) \\
&\quad + CM_1(t)^p\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{np}{2-2\theta}}(1+t)^{\frac{n}{2-2\theta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}}\,d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Pelo Lema 2.5.6 temos

$$\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{np}{2-2\theta}}(1+t)^{\frac{n}{2-2\theta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2-2\theta}}\,d\tau \leq C(n,p,\theta)$$

quando $\dfrac{n}{2-2\theta} > 1$, ou seja, $2-2\theta < n$, com $C(n,p,\theta)$ uma constante positiva.

Portanto encontramos a seguinte desigualdade

$$M_1(t) \leq C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big) + CM_1(t)^p, \tag{6.6}$$

para todo $t > 0$.

Para finalmente encontrarmos taxas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 do problema de Cauchy (5.1) vamos precisar de um lema, análogo ao Lema 5.2.2, que está demonstrado abaixo.

Lema 6.1.2 *Sejam $p > 1$ e $F(M)$ uma função contínua e positiva definida da seguinte forma*

$$F(M) = aI_0 + bM^p - M,$$

para $M \geq 0$, sendo a, b, I_0 constantes positivas.

Então, existe um único $M_0 > 0$ ponto de mínimo absoluto de $F(M)$ em $[0,\infty)$. Além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < I_0 \leq \varepsilon$ então $F(M_0) < 0$.

Demonstração: É fácil verificar que o único ponto crítico de F é

$$M_0 = \left(\frac{1}{bp}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

e que ele é ponto de mínimo global. Além disso, $F(0) = aI_0 > 0$. Portanto, se I_0 for suficientemente pequeno, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $I_0 \leq \varepsilon$ então $F(M_0) < 0$.

■

Agora, notamos que a função $M = M_1(t)$ definida em (6.5) é não-negativa e satisfaz $F(M_1(t)) \geq 0$ para todo $t > 0$, devido a desigualdade (6.6) com $F(M)$ a função dada no Lema 6.1.2 com $a = b = C$ e com

$$I_0 = \|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}.$$

Portanto se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ dado pelo Lema 6.1.2, devido à continuidade da função $M_1(t)$, existem somente duas possibilidades:

$$\textbf{(i)}\;\; M_1(t) < M_0, \quad \text{para todo}\;\; t > 0$$

ou

$$\textbf{(ii)} \ \ M_1(t) > M_0, \quad \text{para todo } \ t > 0.$$

Entretanto, notamos que

$$M_1(0) = \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2}.$$

Então, assumindo que $M_1(0) < M_0$ (M_0 o ponto de mínimo global do Lema 6.1.2), segue que $M_1(t) \leq M_0$ para todo $t > 0$, ou seja, a condição que é válida é a condição (**i**) acima.

Escolhendo uma constante $K > 0$ suficientemente grande tal que

$$M_0 \leq K\big(\|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2}\big),$$

concluímos da validade do item (**i**) que

$$\|(u, u_t)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2} \leq K I_0 (1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}}$$

para todo $t > 0$.

Substituindo a estimativa da desigualdade acima em (6.1) e usando o Teorema de Plancherel concluímos que a norma da energia mais a norma L^2 da solução do problema (1.1) decai polinomialmente, ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2} u_t|^2 + \alpha |\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2 + |u|^2\Big) dx \\ &\leq C I_0 (1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Pelas estimativas acima temos o teorema abaixo provado.

Teorema 6.1.1 *Sejam* $0 \leq \delta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $2 - 2\theta < n < 8 - 2\delta$. *Considere os dados iniciais*

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad \textit{e} \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

satisfazendo

$$0 < I_0 \leq \varepsilon \ \textit{e} \ \ M_1(0) < M_0$$

com ε, I_0, M_0, $M_1(0)$ *dados acima e no Lema 6.1.2. Então a seguinte esti-*

mativa para a norma da energia mais a norma L^2 da solução é verdadeira

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2} u_t|^2 + \alpha |\Delta u|^2 + |(-\Delta)^{1/2} u|^2 + |u|^2 \Big) dx$$
$$\leq C I_0 (1+t)^{-\frac{n}{2-2\theta}},$$

para todo $t > 0$.

Observamos aqui que a taxa encontrada acima é a mesma taxa encontrada para a norma L^2 da solução e para a norma da energia do problema linear (3.1), como vemos nos Teoremas 4.4.3 e 4.4.4 nos itens (i).

6.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}$

Da mesma forma que na seção anterior, aqui encontramos taxas de decaimento para a norma L^2 e para a norma da energia. Para fazer isso vamos novamente usar a desigualdade (6.2).

Pela definição de $\rho_\theta = \rho_\theta(\xi)$ em (4.4) temos

$$\rho_\theta(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ no caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}$.

Assim, estimamos $e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t}$ na baixa frequência e na alta frequência da seguinte forma

i) Se $|\xi| \leq 1$ temos $\rho_\theta(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2\theta}$ e desse modo temos

$$e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t} \leq e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta} t}. \tag{6.7}$$

ii) Se $|\xi| \geq 1$ temos $\rho_\theta(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 \leq \delta \leq \theta$.
Então,

$$e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t} \leq e^{-\frac{\varepsilon}{10} t}, \quad \text{para} \quad |\xi| \geq 1. \tag{6.8}$$

Observamos aqui que a diferença nas estimativas para $e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta t}$ neste com o caso da seção anterior ocorre na zona baixa frequência mas, mesmo assim, as estimativas são bem similares. Na alta frequência temos a mesma estimativa, pois nos dois casos a definição de $\rho_\theta = \rho_\theta(\theta)$ é a mesma na zona de alta frequência. Então de forma análoga ao Lema 6.1.1 obtemos o lema a seguir .

Lema 6.2.1 *Sejam $p > 1$ inteiro e $1 \leq n < 8 - 2\delta$. Então para as potências fracionárias satisfazendo*

$$0 \leq \delta \leq \theta, \quad \frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{2+\delta}{2}$$

e dados iniciais satisfazendo

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&\|(u, u_t)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2} \\
&\leq C\Big(\|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2}\Big)(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \\
&+ C\int_0^t \|(u, u_t)\|^{2p}_{H^{4-\delta} \times H^2}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}}\, d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Agora, multiplicando a estimativa do Lema 6.2.1 por $(1+t)^{\frac{n}{2\theta}}$ temos

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{2\theta}}\|(u, u_t)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2} \\
&\leq C\Big(\|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2}\Big) \\
&+ C\int_0^t \|(u, u_t)\|^{2p}_{H^{4-\delta} \times H^2}(1+t)^{\frac{n}{2\theta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Para $t \geq 0$ definimos a função

$$M_2(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} (1+\tau)^{\frac{n}{2\theta}} \big\|\big(u(\tau), u_t(\tau)\big)\big\|^2_{H^{4-\delta} \times H^2}. \tag{6.9}$$

A função M_2 definida acima é muito parecida com a função M_1 definida na seção anterior, a diferença entre elas é a taxa de decaimento.

Da estimativa anterior e a definição de $M_2(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
&M_2(t) \le C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot W^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big)\\
&+ CM_2(t)^p \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{np}{2\theta}}(1+t)^{\frac{n}{2\theta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}}\,d\tau\\
&\le C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot W^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big) + CM_2(t)^p,
\end{aligned}
$$

para todo $t>0$ onde C é uma constante positiva, pois do Lema 2.5.6 temos

$$\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{np}{2\theta}}(1+t)^{\frac{n}{2\theta}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}}\,d\tau \le C = C(n,p,\theta)$$

quando $\dfrac{n}{2\theta} > 1$, ou seja, $2\theta < n$ com $C(n,p,\theta)$ uma constante positiva.

Portanto encontramos a seguinte desigualdade

$$M_2(t) \le C\Big(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot W^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}\Big) + CM_2(t)^p, \tag{6.10}$$

para todo $t>0$.

Para encontrarmos taxas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 do problema de Cauchy (5.1) vamos usar o Lema 6.1.2 demonstrado na seção anterior.

Agora notamos que a função $M_2(t)$ definida em (6.9) é não-negativa e satisfaz $F(M_2(t)) \ge 0$ para todo $t>0$ devido a desigualdade (6.10) com $F(M)$ a função dada no Lema 6.1.2 com $a=b=C$ e com

$$I_0 = \|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot W^{-1,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2}.$$

Análogo ao final da seção anterior existe $\varepsilon>0$ dado pelo Lema 6.1.2, tal que para $0<I_0\le\varepsilon$ e

$$M_2(0) = \|\big(u_0,u_1\big)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} < M_0. \tag{6.11}$$

onde M_0 é o ponto de mínimo global da função $F(M)$ do Lema 6.1.2, segue que $M_2(t)\le M_0$ para todo $t>0$.

Escolhendo uma constante $K>0$ suficientemente grande tal que

$$M_0 \le KI_0,$$

concluímos que

$$\|(u,u_t)\|^2_{H^{4-\delta}\times H^2} \le K I_0 (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}$$

para todo $t > 0$.

Substituindo essa estimativa em (6.1) e usando o Teorema de Plancherel concluímos que a norma da energia mais a norma L^2 decai polinomialmente. Esses resultados são registrados no teorema a seguir.

Teorema 6.2.1 *Sejam* $0 \le \delta \le \theta$, $\dfrac{1}{2} < \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$, $\dfrac{1}{2} \le \gamma \le \dfrac{2+\delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $2\theta < n < 8 - 2\delta$. *Considere os dados iniciais*

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

satisfazendo

$$0 < I_0 \le \varepsilon \ e \ M_2(0) < M_0$$

com ε, I_0, M_0, $M_2(0)$ *estão definidos acima. Então a seguinte estimativa para a norma da energia mais a norma* L^2 *da solução é verdadeira*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta/2} u_t|^2 + \alpha |\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2\Big) dx$$
$$\le C I_0 (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}},$$

para todo $t > 0$.

Novamente observamos que a taxa encontrada acima, para as condições sobre δ, θ consideradas nesta seção, é a mesma taxa encontrada para a norma da energia do problema linear (3.1), como podemos ver no Teorema 4.4.3 item (ii).

Capítulo 7

Expansão Assintótica e Taxa Ótima: Problema Linear

Neste capítulo encontramos uma expansão assintótica para o problema de Cauchy linear (3.1) e usando essa expansão mostramos que as taxas de decaimento da norma L^2 da solução do problema linear encontradas no Capítulo 4 são ótimas.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em 2016 na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (ver [17]).

Lembramos que no Capítulo 5, Seção 5.2 encontramos a solução do problema linear (4.1) no espaço de Fourier e a solução é dada da seguinte forma

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{H}(t,\xi)\hat{u}_0 + \hat{G}(t,\xi)\hat{u}_1 \tag{7.1}$$

com

$$\hat{G}(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

$$\hat{H}(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

Aqui λ_+ e λ_- são as raízes características que satisfazem a identidade

$$(1+|\xi|^{2\delta})\lambda^2 + |\xi|^{2\theta}\lambda + |\xi|^2(1+\alpha|\xi|^2) = 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e são dadas por

$$\lambda_{\pm} = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm \sqrt{|\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^2(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}. \tag{7.2}$$

Notamos que para $|\xi| \leq 1$ e $\theta > \dfrac{1}{2}$ temos $|\xi|^{4\theta} \leq |\xi|^2$. Então

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^2(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) \\
&= |\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^2 - 4|\xi|^{2\delta+2} - 4\alpha|\xi|^4 - 4\alpha|\xi|^{4+2\delta} \\
&\leq -3|\xi|^2 - 4|\xi|^{2\delta+2} - 4\alpha|\xi|^4 - 4\alpha|\xi|^{4+2\delta} < 0
\end{aligned}$$

para $\xi \neq 0$.

Com isso concluímos que $\lambda_{\pm}$ são complexas, ou seja,

$$\lambda_{\pm} = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm i|\xi|\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) - |\xi|^{4\theta-2}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}. \tag{7.3}$$

Quando $0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2}$ não conseguimos afirmar se $\lambda_{\pm}$ são complexas ou reais. Portanto, nesta seção vamos considerar as seguintes condições sobre as potências fracionárias

$$0 < \delta \leq \theta \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}.$$

7.1 Expansão Assintótica

Na Subseção 7.1.1 vamos construir uma expansão assintótica para a solução $\hat{u}(t,\xi)$ na baixa frequência e mostraremos que a norma L^2 da diferença entre a solução $\hat{u}(t,\cdot)$ e a expansão assintótica decai no tempo com certa taxa. Na Subseção 7.1.2 também mostraremos que a norma L^2 da diferença da solução e a expansão assintótica encontrada na Subseção 7.1.1 decai, na região de alta frequência, com certa taxa no tempo.

7.1.1 Zona de Baixa Frequência ($|\xi| \leq 1$)

Sabemos que as raízes características, associadas a equação (4.1) no espaço de Fourier são complexas e dadas por (7.3).

Para simplificar as expressões, vamos definir

$$a(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})} \quad \text{e} \quad b(\xi) = \frac{|\xi|\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) - |\xi|^{4\theta-2}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}$$

e assim podemos reescrever $\lambda_\pm$ da seguinte forma

$$\lambda_\pm = -a(\xi) \pm ib(\xi).$$

Vamos encontrar a solução explícita $\hat{u}(t,\xi)$ como aparece no início deste capítulo, usando a expressão acima para $\lambda_\pm$. Notamos que

$$\lambda_+ - \lambda_- = \big(-a(\xi) + ib(\xi)\big) - \big(-a(\xi) - ib(\xi)\big) = 2ib(\xi),$$

e que

$$\begin{aligned} e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} &= e^{(-a(\xi)+ib(\xi))t} - e^{(-a(\xi)-ib(\xi))t} \\ &= e^{-a(\xi)t}\left(e^{ib(\xi)t} - e^{-ib(\xi)t}\right) \\ &= e^{-a(\xi)t} 2i \sin\left(b(\xi)t\right). \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} \lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t} &= \big(-a(\xi)+ib(\xi)\big)e^{(-a(\xi)-ib(\xi))t} \\ &- \big(-a(\xi)-ib(\xi)\big)e^{(-a(\xi)+ib(\xi))t} \\ &= e^{-a(\xi)t}a(\xi)\left(e^{ib(\xi)t} - e^{-ib(\xi)t}\right) \\ &+ e^{-a(\xi)t}ib(\xi)\left(e^{ib(\xi)t} + e^{-ib(\xi)t}\right) \\ &= e^{-a(\xi)t}2ia(\xi)\sin\big(b(\xi)t\big) + e^{-a(\xi)t}2ib(\xi)\cos\left(b(\xi)t\right). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin\left(b(\xi)t\right)$$

e também que

$$\frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t) + e^{-a(\xi)t}\cos\left(b(\xi)t\right).$$

Portanto a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do problema de Cauchy (4.1) no espaço de Fourier, conforme (7.1), é dada da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}\cos\left(b(\xi)t\right)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0\\ &\quad + e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin\left(b(\xi)t\right)\hat{u}_1. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Observação 7.1.1 *Usando o Teorema do Valor Médio encontramos as seguintes identidades*

(i) $$\cos\left(b(\xi)t\right) - \cos(|\xi|t) = -t\left(b(\xi) - |\xi|\right)\sin(\eta(t,\xi)),$$

com

$$\eta(t,\xi) = b(\xi)t\beta' + |\xi|t(1-\beta')$$

para algum $\beta' \in [0,1]$,

(ii) $$\sin\left(b(\xi)t\right) - \sin(|\xi|t) = t\left(b(\xi) - |\xi|\right)\cos(\varepsilon(t,\xi)),$$

com

$$\varepsilon(t,\xi) = b(\xi)t\beta'' + |\xi|t(1-\beta'')$$

para algum $\beta'' \in [0,1]$.

Usando as identidades da Observação 7.1.1 podemos reescrever a solução dada em (7.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0\\ &\quad - e^{-a(\xi)t}t\left(b(\xi) - |\xi|\right)\sin(\eta(t,\xi))\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin(|\xi|t)\hat{u}_1\\ &\quad + e^{-a(\xi)t}t\frac{(b(\xi) - |\xi|)}{b(\xi)}\cos(\varepsilon(t,\xi))\hat{u}_1.\end{aligned}$$

O termo da expansão assintótica é determinado por uma combinação linear dos termos

$$e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t) \quad \text{e} \quad e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}.$$

Agora, podemos reescrever a solução $\hat{u}(t,\xi)$ na seguinte forma

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\hat{u}_1\\
&+ e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0 - e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi)-|\xi|\big)\sin(\eta(t,\xi))\hat{u}_0\\
&+ e^{-a(\xi)t}\left(\frac{1}{b(\xi)}-\frac{1}{|\xi|}\right)\sin(|\xi|t)\hat{u}_1 + e^{-a(\xi)t}t\frac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\cos(\varepsilon(t,\xi))\hat{u}_1.
\end{aligned}$$

Observação 7.1.2 *Usando a Transformada de Fourier podemos decompor os dados iniciais $\hat{u}_0$ e $\hat{u}_1$ na seguinte forma*

$$\hat{u}_j(\xi) = A_j(\xi) - iB_j(\xi) + P_j, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $j = 0, 1$ (de modo similar como aparece no Lema 2.2.2 para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$), sendo P_j, A_j, B_j definidos por

$$P_j := P_{u_j} = \int_{\mathbb{R}^n} u_j(x)dx, \quad A_j := A_{u_j}, \quad B_j := B_{u_j}.$$

Usando a observação acima vamos considerar a seguinte desejada expansão assintótica

$$P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t) + P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}.$$

Portanto, concluímos que a diferença da solução $\hat{u}(t,\xi)$ do problema de Cauchy (4.1) e a expansão assintótica é dada por

$$\begin{aligned}
&\hat{u}(t,\xi) - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\\
&= \Big(A_0(\xi) - iB_0(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t) + \Big(A_1(\xi) - iB_1(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\\
&+ e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0 - e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi)-|\xi|\big)\sin(\eta(t,\xi))\hat{u}_0\\
&+ e^{-a(\xi)t}\left(\frac{1}{b(\xi)}-\frac{1}{|\xi|}\right)\sin(|\xi|t)\hat{u}_1 + e^{-a(\xi)t}t\frac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\cos(\varepsilon(t,\xi))\hat{u}_1.
\end{aligned}$$

Nomeamos agora as seis expressões que aparecem no lado direito da igualdade acima por

- $K_1(t,\xi) = \Big(A_1(\xi) - iB_1(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\dfrac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|};$
- $K_2(t,\xi) = \Big(A_0(\xi) - iB_0(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t);$
- $K_3(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}\dfrac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0;$
- $K_4(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi) - |\xi|\big)\sin(\eta(t,\xi))\hat{u}_0;$
- $K_5(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}\left(\dfrac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\right)\dfrac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\hat{u}_1;$
- $K_6(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}t\left(\dfrac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\right)\cos(\varepsilon(t,\xi))\hat{u}_1.$

A seguir vamos mostrar que é possível estimar a norma L^2, na baixa frequência, dessas seis funções por uma taxa que seja melhor que a taxa $t^{-\frac{n-2}{2\theta}}$ encontrada no Capítulo 4 para a norma L^2 da solução.

Teorema 7.1.1 *Sejam $\alpha > 0$ com $\dfrac{1}{2} < \theta < \min\left\{\dfrac{3}{2}, \delta + \dfrac{1}{2}\right\}$ e $0 < \delta \leq 2$. Considere os dados iniciais*

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$$

com $\kappa \in (0, \min\{1,\delta\}]$. Então existe ϵ_0 positivo tal que a solução $\hat{u}(t,\xi)$ para o problema (4.1) satisfaz

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\leq 1}\left|\hat{u}(t,\xi) - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos\left(|\xi|t\right) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin\left(|\xi|t\right)}{|\xi|}\right|^2 d\xi \\ &\leq C\Big(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^{1,\kappa}}^2\Big)t^{-\frac{n-2+\varepsilon_0}{2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$.

Demonstração: Mostraremos que a taxa de decaimento para a norma L^2 na baixa frequência, da diferença entre a solução no espaço de Fourier e a expansão assintótica, é da ordem $t^{-\frac{n-2+\varepsilon_0}{2\theta}}$ para t suficientemente grande ($t >> 1$). Precisamos estimar a norma L^2 das funções K_1, K_2 K_3, K_4, K_5 e K_6.

Para estimar $K_1(t,\xi)$, usando os Lemas 2.5.2 e 2.2.3 temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le 1} |K_1(t,\xi)|^2 d\xi &\le \int_{|\xi|\le 1} |A_1(\xi) - iB_1(\xi)|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{1+|\xi|^{2\delta}}} |\xi|^{-2} d\xi \\ &\le 2(K^2+M^2)\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} \int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{2\kappa-2} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{2}} d\xi \\ &\le 2(K^2+M^2)\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n+2\kappa-2}{2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Agora vamos estimar $K_2(t,\xi)$. Usando os Lemas 2.5.2 e 2.2.3 para todo $t \ge 1$ temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le 1} |K_2(t,\xi)|^2 d\xi &\le \int_{|\xi|\le 1} |A_0(\xi) - iB_0(\xi)|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{1+|\xi|^{2\delta}}} d\xi \\ &\le 2(L^2+N^2)\|u_0\|^2_{L^1} \int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{2}} d\xi \\ &\le 2(L^2+N^2)\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n}{2\theta}} \\ &\le 2(L^2+N^2)\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+2\kappa-2}{2\theta}},\end{aligned}$$

pois $\dfrac{n+2\kappa-2}{2\theta} \le \dfrac{n}{2\theta}$, já que $0 < \kappa < 1$.

Para estimar $K_3(t,\xi)$, primeiro notemos que

$$\begin{aligned}&4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) - |\xi|^{4\theta-2} \\ &\ge 4 + 4|\xi|^{2\delta} + 4\alpha|\xi|^2 + 4\alpha|\xi|^{2\delta+2} - 1 \ge 3,\end{aligned} \tag{7.5}$$

pois temos $|\xi|^{4\theta-2} \le 1$, para todo $|\xi| \le 1$ e $\dfrac{1}{2} < \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$.

Então para $\dfrac{1}{2} < \theta \le \dfrac{2+\delta}{2}$ temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le 1} |K_3(t,\xi)|^2 d\xi &\le \int_{|\xi|\le 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta} t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \frac{|\xi|^{4\theta-2}}{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2) - |\xi|^{4\theta-2}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &\le \frac{1}{3}\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty} \int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{2}} |\xi|^{4\theta-2} d\xi \\ &\le \frac{1}{3}\|u_0\|^2_{L^1}\, t^{-\frac{n+4\theta-2}{2\theta}} \le \frac{1}{3}\|u_0\|^2_{L^1}\, t^{-\frac{n+2\kappa-2}{2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t \ge 1$, pois $\dfrac{n+2\kappa-2}{2\theta} \le \dfrac{n+4\theta-2}{2\theta}$ já que $2\kappa-2 < 0 \le 4\theta-2$

e $0<\kappa<1$.

Para estimar $K_4(t,\xi)$, notamos que para $|\xi|\leq 1$ e $\dfrac{1}{2}<\theta\leq\dfrac{2+\delta}{2}$ temos pela desigualdade (7.5)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2(1+|\xi|^{2\delta})-\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\right)^2\\
&=\frac{4(1+|\xi|^{2\delta})^2-4(1+|\xi|^{2\delta})\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}{4(1+|\xi|^{2\delta})^2}\\
&+\frac{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}{4(1+|\xi|^{2\delta})^2}\\
&\leq\frac{(2+|\xi|^{2\delta}+\alpha|\xi|^2)-\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}{1+|\xi|^{2\delta}}\\
&\leq\frac{(2+|\xi|^{2\delta}+\alpha|\xi|^2)^2-4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)+|\xi|^{4\theta-2}}{(2+|\xi|^{2\delta}+\alpha|\xi|^2)+\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}\\
&\leq\frac{|\xi|^{4\delta}+\alpha^2|\xi|^4+|\xi|^{4\theta-2}-2\alpha|\xi|^{2+2\delta}}{2+\sqrt{3}}\\
&\leq C\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^4+|\xi|^{4\theta-2}\Big).
\end{aligned}$$

Então concluímos da definição de $b(\xi)$ dada no início desta subseção que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1}|K_4(t,\xi)|^2d\xi\\
&\leq\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}|\xi|^2t^2\left(1-\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\right)^2|\hat{u}_0|^2d\xi\\
&\leq C\|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2t^2\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^2\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^4+|\xi|^{4\theta-2}\Big)e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}d\xi\\
&\leq C\|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2t^2\int_{|\xi|\leq 1}\Big(|\xi|^{4\delta+2}+|\xi|^6+|\xi|^{4\theta}\Big)e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}d\xi\\
&\leq C\|u_0\|_{L^1}^2t^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta+2}{2\theta}}+t^{-\frac{n+6}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4\theta}{2\theta}}\Big)\\
&=C\|u_0\|_{L^1}^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta+2-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+6-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n}{2\theta}}\Big).
\end{aligned}$$

Notamos aqui que para todo $t\geq 1$ temos na estimativa para K_4 que

$$t^{-\frac{n}{2\theta}}\leq t^{-\frac{n+2\kappa-2}{2\theta}}\text{ e }t^{-\frac{n+4\delta+2-4\theta}{2\theta}}\leq t^{-\frac{n+2\kappa-2}{2\theta}},$$

pois

$$4\delta + 2 - 4\theta \geq 4\delta - 2 - 2\delta = 2\delta - 2 \geq 2\kappa - 2$$

para $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 < \kappa < \delta$.

Para a taxa de decaimento $t^{-\frac{n+6-4\theta}{2\theta}}$ notamos que $-2 < 6 - 4\theta$ pois $\dfrac{1}{2} < \theta < \dfrac{2+\delta}{2}$, com $0 \leq \delta \leq 2$, o que implica $\theta < 2$. Aqui foi preciso restringir a condição sobre θ para encontrarmos uma estimativa boa para K_4. Então podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que $-2+\varepsilon \leq 6 - 4\theta$ e portanto temos

$$t^{-\frac{n+6-4\theta}{2\theta}} \leq t^{-\frac{n-2+\varepsilon}{2\theta}}.$$

Assim, para $\dfrac{1}{2} < \theta < \dfrac{2+\delta}{2}$, temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} |K_4(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2+\varepsilon_1}{2\theta}},$$

com $\varepsilon_1 = \min\{2\kappa, \varepsilon\}$.

Agora vamos estimar $K_5(t,\xi)$. Temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\right|^2 &= \left|\frac{2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}} - 1\right|^2 \\
&\leq \left|\frac{2+2|\xi|^{2\delta} - \sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}\right|^2 \\
&\leq \left|\frac{2+2|\xi|^{2\delta} - \sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}{\sqrt{3}}\right|^2
\end{aligned}$$

pois para todo $\xi \leq 1$

$$\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}} \geq \sqrt{3}.$$

Agora, multiplicando a última estimativa pelo conjugado de seu numerador obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\right|^2 &\leq \left|\frac{4+8|\xi|^{2\delta}+4|\xi|^{4\delta}-(4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2})}{\sqrt{3}(2+2|\xi|^{2\delta}+\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}})}\right|^2 \\
&\leq \left|\frac{8|\xi|^{2\delta}+4|\xi|^{4\delta}-4|\xi|^{2\delta}-4\alpha|\xi|^2-4\alpha|\xi|^{2+2\delta}+|\xi|^{4\theta-2}}{2\sqrt{3}}\right|^2 \\
&\leq \left(\frac{8|\xi|^{2\delta}+4|\xi|^{4\delta}+4|\xi|^{2\delta}+4\alpha|\xi|^2+4\alpha|\xi|^{2+2\delta}+|\xi|^{4\theta-2}}{2\sqrt{3}}\right)^2 \\
&\leq C\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^4+|\xi|^{8\theta-4}\Big),
\end{aligned}
$$

para todo $|\xi|\leq 1$.

Então, encontramos a seguinte estimativa para $K_5(t,\xi)$

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1}|K_5(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}|\xi|^{-2}\left|\frac{b(\xi)-|\xi|}{b(\xi)}\right|^2|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}|\xi|^{-2}\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^4+|\xi|^{8\theta-4}\Big)d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}\Big(|\xi|^{4\delta-2}+|\xi|^2+|\xi|^{8\theta-6}\Big)d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta-2}{2\theta}}+t^{-\frac{n+2}{2\theta}}+t^{-\frac{n+8\theta-6}{2\theta}}\Big).
\end{aligned}
$$

A condição $0<\kappa<1$ implica que $\dfrac{n-2+2\kappa}{2\theta}\leq\dfrac{n+2}{2\theta}$, ou seja, temos $t^{-\frac{n+2}{2\theta}}\leq t^{-\frac{n-2+2\kappa}{2\theta}}$ para todo $t\geq 1$.

Também temos $t^{-\frac{n-2+4\delta}{2\theta}}<t^{-\frac{n-2+2\kappa}{2\theta}}$ para todo $t\geq 1$, pois $-2+2\kappa<-2+2\delta\leq -2+4\delta$, se considerarmos $0<\kappa<\delta$.

Como $\dfrac{1}{2}<\theta\leq\dfrac{2+\delta}{2}$ temos $8\theta-6>-2$ ou $8\theta-6\geq -2+\varepsilon$ para um $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno. Então

$$
\frac{n+8\theta-6}{2\theta}\geq\frac{n-2+\varepsilon}{2\theta}
$$

ou seja, $t^{-\frac{n+8\theta-6}{2\theta}}\leq t^{-\frac{n-2+\varepsilon}{2\theta}}$, para todo $t\geq 1$.

Portanto, definindo $\varepsilon_2=\min\{2\kappa,\varepsilon\}$ temos

$$
\int_{|\xi|\leq 1}|K_5(t,\xi)|^2 d\xi\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2+\varepsilon_2}{2\theta}}.
$$

Finalmente, sobre $K_6(t,\xi)$ precisamos de uma estimativa um pouco mais delicada. Vamos usar o Teorema do Valor Médio conforme segue

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}\right)^2=\Big(|f'(\beta_0|\xi|)|\,|\xi|\Big)^2\\&\leq C\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^4+|\xi|^{8\theta-4}\Big),\end{aligned}$$

com

$$f(r)=\frac{2(1+r^{2\delta})}{\sqrt{4(1+r^{2\delta})(1+\alpha r^2)-r^{4\theta-2}}}$$

pois $f(0)=1$, onde $\beta_0\in[0,1]$.

Notamos que derivando f em relação a r temos $f'(r)$ dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}f'(r)=&\ \frac{4\delta r^{2\delta-1}\Big(4(1+r^{2\delta})(1+\alpha r^2)-r^{4\theta-2}\Big)}{\Big(4(1+r^{2\delta})(1+\alpha r^2)-r^{4\theta-2}\Big)^{\frac{3}{2}}}\\&-\frac{(1+r^{2\delta})\Big(8\delta r^{2\delta-1}+8\alpha r+8\alpha(2+\delta)r^{2\delta+1}-(4\theta-2)r^{4\theta-3}\Big)}{\Big(4(1+r^{2\delta})(1+\alpha r^2)-r^{4\theta-2}\Big)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Então é fácil verificar que

$$|f'(r)|\leq C\Big(r^{2\delta-1}+r+r^{4\theta-3}\Big)$$

para $0\leq r\leq 1$.

Concluímos então que

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\leq 1}|K_6(t,\xi)|^2d\xi\\&\leq t^2\int_{|\xi|\leq 1}e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}\left(1-\frac{2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})(1+\alpha|\xi|^2)-|\xi|^{4\theta-2}}}\right)^2|\hat{u}_1|^2d\xi\\&\leq Ct^2\|u_1\|_{L^1}^2\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^4+|\xi|^{8\theta-4}\Big)d\xi\\&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2\,t^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4}{2\theta}}+t^{-\frac{n+8\theta-4}{2\theta}}\Big)\\&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4\theta-4}{2\theta}}\Big).\end{aligned}$$

Como estamos considerando $\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}$ temos, para todo $t \geq 1$, $t^{-\frac{n+4\theta-4}{2\theta}} \leq t^{-\frac{n-2+\varepsilon}{2\theta}}$ com $\varepsilon > 0$ escolhido de modo que $4\theta \geq 2+\varepsilon$.

Também, para $\frac{1}{2} < \theta < \delta + \frac{1}{2}$ segue que $4\delta + 2 > 4\theta$ e disso resulta que $4\delta - 4\theta > -2$. Então podemos fixar $\bar{\varepsilon}$ tal que $4\delta - 4\theta \geq -2 + \bar{\varepsilon}$. Portanto temos

$$t^{-\frac{n+4\delta-4\theta}{2\theta}} \leq t^{-\frac{n-2+\bar{\varepsilon}}{2\theta}}$$

para todo $t \geq 1$.

Agora, considerando a condição $\frac{1}{2} < \theta < \frac{3}{2}$ segue que $4 - 4\theta > -2$ ou $4 - 4\theta \geq -2 + \tilde{\varepsilon}$ para algum $\tilde{\varepsilon} > 0$. Com isso obtemos

$$t^{-\frac{n+4-4\theta}{2\theta}} \leq t^{-\frac{n-2+\tilde{\varepsilon}}{2\theta}}$$

para todo $t \geq 1$.

Finalmente, tomando $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}\}$ e restringindo θ de modo que $\frac{1}{2} < \theta < \min\left\{\frac{3}{2}, \delta + \frac{1}{2}\right\}$, obtemos a seguinte estimativa para $K_6(t,\xi)$

$$\int_{|\xi|\leq 1} |K_6(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2+\varepsilon_3}{2\theta}}.$$

Combinando as estimativas acima concluímos a demonstração desse teorema. ■

Para conseguirmos boas estimativas para K_4 e K_6 tivemos que restringir a condição sobre θ. Gostaríamos de retirar essa condição e mostrar que o Teorema 7.1.1 vale para $\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{2+\delta}{2}$, mas usando esse método, isso não foi possível.

7.1.2 Zona de Alta Frequência ($|\xi| \geq 1$)

Para mostrar que a norma L^2 da diferença entre a solução $\hat{u}(t,\xi)$ com o perfil assintótico encontrado na subseção anterior decai com uma taxa boa na alta frequência, vamos usar a seguinte estimativa encontrada no Lema 4.3.1 do Capítulo 4:

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\eta}{5}t}\left(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2\right), \tag{7.6}$$

que vale para $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$ e $0 \leq \delta \leq \theta$.

Agora considerando $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$ e as definições de P_0 e P_1 temos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|t) + P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \right|^2 d\xi \\
\leq &\int_{|\xi|\geq 1} |P_1|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \frac{\sin^2(|\xi|t)}{|\xi|^2} + |P_0|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \cos^2(|\xi|t) d\xi \\
\leq &\big(|P_1|^2 + |P_0|^2\big) \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}} d\xi \\
\leq &\big(|P_1|^2 + |P_0|^2\big) \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}t}{2}} d\xi \\
\leq &\big(|P_1|^2 + |P_0|^2\big) e^{-\frac{t}{4}} \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}t}{4}} d\xi.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.5.2 temos a seguinte estimativa para o perfil assintótico

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|t) + P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \right|^2 d\xi \\
\leq &C\big(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\big) e^{-\frac{t}{4}} t^{-\frac{n}{2\theta-2\delta}},
\end{aligned} \tag{7.7}$$

para todo $t > 0$, com C uma constante positiva dependendo de θ, δ e n.

A estimativa acima permite provar o próximo teorema.

Teorema 7.1.2 *Sejam* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e*

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n).$$

Então a solução $\hat{u}(t,\xi)$ *do problema (4.1) satisfaz*

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| \hat{u}(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} - P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|t) \right|^2 d\xi \\
&\leq C\Big(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big) e^{-kt},
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$, *com* C *e* k *constantes positivas.*

Demonstração: A prova é obtida usando as estimativas (7.6) e (7.7) para concluir que

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\left|\hat{u}(t,\xi)-P_1e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}-P_0e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right|^2 d\xi\\
\leq&\int_{|\xi|\geq 1}|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi+\int_{|\xi|\geq 1}\left|P_1e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}+P_0e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right|^2 d\xi\\
\leq& Ce^{-\frac{\eta}{5}t}\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta}+\|u_0\|^2_{H^2}\Big)+C\Big(\|u_1\|^2_1+\|u_0\|^2_1\Big)e^{-\frac{t}{4}}t^{-\frac{n}{2\theta-2\delta}}\\
\leq& C\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta}+\|u_0\|^2_{H^2}+\|u_1\|^2_1+\|u_0\|^2_1\Big)e^{-kt},
\end{aligned}
$$

para todo $t\geq 1$, com $k=\min\left\{\frac{\eta}{5},\frac{1}{4}\right\}$. ■

7.2 Taxas Ótimas

Para mostrar que as taxas encontradas no Capítulo 4 para a norma L^2 da solução são ótimas, vamos usar as estimativas para a diferença entre a solução $\hat{u}$ e o perfil assintótico, feitas na Seção 7.1.

Nosso objetivo é mostrar o seguinte resultado:

Teorema 7.2.1 *Sejam $n\geq 3$, $P_1\neq 0$ com $\frac{1}{2}<\theta<\min\left\{\frac{3}{2},\delta+\frac{1}{2}\right\}$, $0<\delta\leq\theta$, $\kappa\in(0,\min\{1,\delta\})$ e*

$$u_0\in H^2(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1\in H^\delta(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n).$$

Então, existem constantes $C_1>0$, $C_2>0$ e $t_0>0$ suficientemente grande tal que para todo $t\geq t_0$ vale

$$C_1|P_1|t^{-\frac{n-2}{4\theta}}\leq\|u(t,\cdot)\|\leq C_2t^{-\frac{n-2}{4\theta}},$$

sendo $u(t,x)$ a única solução do problema de Cauchy (3.1).

Demonstração: Pelo Teorema 4.4.4 temos

$$\|u(t,\cdot)\|\leq C_2t^{-\frac{n-2}{4\theta}},$$

com $C_2>0$ uma constante que depende dos dados iniciais.

Usando os Teoremas 7.1.1 e 7.1.2 obtemos

$$
\begin{aligned}
& -\left\|\hat{u}(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right\| \\
& \geq -C\Big(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big)e^{-\frac{kt}{2}} \\
& - C\Big(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^{1,\kappa}}^2\Big)t^{-\frac{n-2+\varepsilon_0}{4\theta}},
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

com k e ε_0 constantes positivas.

Também, pelo Lema 2.5.2, temos

$$
\begin{aligned}
& |P_0|^2\left\|e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right\|^2 \\
& = |P_0|^2\int_{|\xi|\leq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}\cos^2(|\xi|t)d\xi + |P_0|^2\int_{|\xi|\geq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}\cos^2(|\xi|t)d\xi \\
& \leq |P_0|^2\int_{|\xi|\leq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}d\xi + |P_0|^2\int_{|\xi|\geq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}d\xi \\
& \leq C|P_0|^2\Big(t^{-\frac{n}{2\theta}} + t^{-\frac{n}{2\theta-2\delta}}\Big) \leq C|P_0|^2 t^{-\frac{n}{2\theta}},
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

pois estamos considerando $0 < \delta \leq \theta$.

Além disso, pelo Lema 2.5.5, temos a seguinte estimativa

$$
|P_1|\left\|e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right\| \geq C|P_1|t^{-\frac{n-2}{4\theta}}, \tag{7.10}
$$

para todo $t \geq t_0$ com $t_0 > 0$ suficientemente grande.

Para conseguir a estimativa por baixo, usando Teorema de Plancherel, notamos que valem as seguintes estimativas na norma L^2:

$$
\begin{aligned}
& \|u(t,\cdot)\| = \|\hat{u}(t,\cdot)\| \geq \left\|P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} + P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right\| \\
& - \left\|\hat{u}(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right\| \\
& \geq |P_1|\left\|e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right\| - |P_0|\left\|e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right\| \\
& - \left\|\hat{u}(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|t)\right\|.
\end{aligned}
$$

Combinando as estimativas (7.8), (7.9) e (7.10), finalmente chegamos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\| \geq & \; C|P_1|t^{-\frac{n-2}{4\theta}} - C|P_0|t^{-\frac{n}{4\theta}} \\ & - C\Big(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} + \|u_0\|^2_1\Big)t^{-\frac{n-2+\varepsilon_0}{4\theta}} \\ & - C\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{H^2} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\Big)e^{-\frac{kt}{2}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

para todo $t \geq t_0$ com $t_0 > 0$ suficientemente grande e com $0 < \delta \leq \theta$ e $\dfrac{1}{2} < \theta < \min\left\{\dfrac{3}{2}, \delta + \dfrac{1}{2}\right\}$. Assim, da estimativa (7.11) e da hipótese que $P_1 \neq 0$, concluímos que existe uma constante positiva C_1, tal que

$$\|u(t,\cdot)\| \geq C_1|P_1|t^{-\frac{n-2}{4\theta}}$$

para t suficientemente grande.

$\blacksquare$

Conclusão: O Teorema 7.2.1 nos diz que a taxa de decaimento polinomial $\dfrac{n-2}{4\theta}$ para a norma L^2 da solução $u(t,x)$ do problema de Cauchy (3.1) é ótima no caso em que $n \geq 3$, $0 < \delta \leq \theta$ e $\dfrac{1}{2} < \theta < \min\left\{\dfrac{3}{2}, \delta + \dfrac{1}{2}\right\}$. Para outros casos envolvendo n, δ e θ a otimalidade das taxas de decaimento da norma L^2 da solução do problema linear encontradas no Capítulo 4, permanece um problema em aberto.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] ASTABURUAGA, M. A., FERNANDEZ, C. e MENZALA, G. P. Energy decay rates and the dynamical von Kármán equations. **Applied Mathematics Letters**, v. 7, n. 2, p. 7-10, 1994.

[3] BREZIS, H. **Análisis funcional: Teoria y aplicaciones**. Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[4] CHRISTOV, C. I., MAUGIN, G. A. e VELARDE, M. G. Well-posed Boussinesq paradigm with purely spatial higher-order derivatives. **Physical Review E**, v. 54, n. 4, p. 3621-3638, 1996.

[5] CHUESHOV, I. e LASIECKA, I. **Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping**. Memoirs of the American Mathematical Society, v. 195, n. 912, August 2008.

[6] CHARÃO, R. C., DA LUZ, C. R. e IKEHATA, R. Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 408, n. 1, p. 247-255, 2013.

[7] CHARÃO, R. C., DA LUZ, C. R. e IKEHATA, R. New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping. **Journal of Hyperbolic Differential Equations**, v. 10, n. 3, p. 563-575, 2013.

[8] CIARLET, P. G. A justification of the von Kármán equations. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 73, n. 4, p. 349-389, 1980.

[9] DA LUZ, C. R. e CHARÃO, R. C. Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains. **Journal of Hyperbolic Differential Equations**, v. 6, n. 2, p. 269-294, 2009.

[10] DA LUZ, C. R., IKEHATA, R. e CHARÃO, R. C. Asymptotic behavior for abstract evolution differential equations of second order. **Journal of Differential Equations**, v. 259, n. 10, p. 5017-5039, 2015.

[11] DARIPA, P. e HUA, W. A numerical study of an ill-posed Boussinesq equation arising in water waves and nonlinear lattices: Filtering and regularization techniques. **Applied Mathematics and Computation**, v. 101, n. 2-3, p. 159-207, 1999.

[12] DENK, R. e SCHNAUBELT, R. A structurally damped plate equation with Dirichlet-Neumann boundary conditions. **Journal of Differential Equations**, v. 259, n. 4, p. 1323-1353, 2015.

[13] ESFAHANI, A., FARAH, L. G. e WANG, H. Global existence and blow-up for the generalized sixth-order Boussinesq equation. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, v. 75, n. 11, p. 4325-4338, 2012.

[14] GEREDELI, P. G. e LASIECKA, I. Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von Kármán plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, v. 91, p. 72-92, 2013.

[15] GOMES, A. M. **Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

[16] HORBACH, J. L., IKEHATA, R. e CHARÃO, R. C. Optimal Decay Rates and Asymptotic Profile for the Plate Equation with Structural Damping. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 440, n. 2, p. 529-560, 2016.

[17] HORBACH, J. L. e NAKABAYASHI, N. Energy decay for elastic wave equations with critical damping. **Electronic Journal of Diferential Equations**, v. 2014, n. 127, p. 1-12, 2014.

[18] IKEHATA, R. Asymptotic profiles for wave equations with strong damping. **Journal of Differential Equations**, v. 257, n. 6, p. 2159-2177, 2014.

[19] IKEHATA, R. New decay estimates for linear damped wave equations and its application to nonlinear problem. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 27, n. 8, p. 865-889, 2004.

[20] IKEHATA, R. e NATSUME, M. Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping. **Differential and Integral Equations**, v. 25, n. 9-10, p. 939-956, 2012.

[21] IKEHATA, R. e SOGA, M. Asymptotic profiles for a strongly damped beam equation with a lower order perturbation. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 14, n. 5, p. 1759-1780, 2015.

[22] IKEHATA, R., TODOROVA, G. e YORDANOV, B. Wave equations with strong damping in Hilbert spaces. **Journal of Differential Equations**, v. 254, n. 8, p. 3352-3368, 2013.

[23] KATO, T. e PONCE, G. Commutator estimates and the euler and navier-stokes equations. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 41, n. 7, p. 891-907, 1988.

[24] KESAVAN, S. **Topics in functional analysis and applications**. Wiley, Universidade de Michigan, 1989.

[25] KOCH, H. e LASIECKA, I. Hadamard wellposedness of weak solutions in nonlinear dynamical elasticity-full von Kármán systems. **Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications**, v. 50, p. 197-216, 2002.

[26] LASIECKA, I. e BENABDALLAH, A. Exponential decay rates for a full von Kármán thermoelasticity system with nonlinear thermal coupling. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v. 8, p. 13-88, 2000.

[27] LIU, Y. e KAWASHIMA, S. **Decay property for a plate equation with memory-type dissipation**, **Kinetic and Related Models**, v. 4, n. 2, p. 531-547, 2011.

[28] MA, Q., YANG, Y. e ZHANG, X. Existence of exponential attractors for the plate equations with strong damping. **Electronic Journal of Diferential Equations**, v. 2013, n. 114, p. 1-10, 2013.

[29] MATSUMURA, A. On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**, v. 12, n. 1, p. 169-189, 1976-1977.

[30] MAUGIN, G. A. **Nonlinear Waves in Elastic Crystals**. Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1999.

[31] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H. **Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais**. Textos de Métodos Matemáticos n°9, IM-UFRJ. Rio de Janeiro, 1975.

[32] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H. **Iniciação aos espaços de Sobolev**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[33] MENZALA, G. P. e ZUAZUA, E. Timoshenko's plate equations as a singular limit of the dynamical von Kármán system. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 79, n. 1, p. 73-94, 2000.

[34] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.

[35] POLAT, N. ERTAS, A. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation. **Journal of Mathematical Analysis and Applications** , v. 349, n. 1, p. 10-20, 2009.

[36] PONCE, G. Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, v. 9, n. 5, p. 399-418, 1985.

[37] PUEL, J. P. e TUCSNAK, M. Global existence for the full von Kármán system. **Applied Mathematics and Optimization**, v. 34, n. 2, p. 139-160, 1996.

[38] SCHNAUBELT, R. e VERAAR, M. Structurally damped plate and wave equations with random point force in arbitrary space dimensions. **Differential and Integral Equations**, v. 23, n. 9-10, p. 957-988, 2010.

[39] SHIBATA, Y. On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 23, n. 3, p. 203-226, 2000.

[40] SUGITANI, Y. e KAWASHIMA, S. Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation. **Journal of Hyperbolic Differential Equations**, v. 7, n. 3, p. 471-501, 2010.

[41] TAKEDA, H. e YOSHIKAWA, S. On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping II, Asymptotic profiles. **Journal of Differential Equations**, v. 253, n. 11, p. 3061-3080, 2012.

[42] WANG, Y. Asymptotic behavior of solutions to the damped nonlinear hyperbolic equation. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, p. 1-8, 2013.

[43] WANG, S. e CHEN, G. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 274, n. 2, p. 846-866, 2002.

[44] WANG, S. e CHEN, G. The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 266, n. 1, p. 38-54, 2002.

[45] WANG, S. e XU, H. On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term. **Journal of Differential Equations**, v. 252, n. 7, p. 4243-4258, 2012.

[46] WANG, S. e XUE, H. Global Solution for a Generalized Boussinesq Equation. **Applied Mathematics and Computation**, v. 204, n. 1, p. 130-136, 2008.

[47] XU, L. e MA, Q. Existence of random attractors for the floating beam equation with strong damping and white noise. **Boundary Value Problems**, v. 2015, n. 1, p. 1687-2770, 2015.