

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Reconstrução de Dados de Fronteira Associados à Equação de Poisson

Jonathan Ruiz Quiroz

Orientador: Prof. Dr. Fermín Sinfiriano Viloche Bazán

Coorientador: Prof. Dr. Luciano Bedin

Florianópolis, 15 de Março de 2018

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Reconstrução de Dados de Fronteira Associados à Equação de Poisson

Tese submetida ao Curso de Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada, do Centro
de Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina,
para a obtenção do grau de Doutor em
Matemática Pura e Aplicada, com área de
concentração em Problemas Inversos.
Orientador: Prof. Dr. Fermín S. Viloche Bazán
Co-orientador: Prof. Dr. Luciano Bedin

Jonathan Ruiz Quiroz
Florianópolis, Fevereiro de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ruiz Quiroz, Jonathan

Reconstrução de Dados de Fronteira Associados à
Equação de Poisson / Jonathan Ruíz Quiroz ;
orientador, Fermín Sinforiano Viloche Bazán,
coorientador, Luciano Bedín, 2018.
106 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e
Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Problema
inverso de calor. 3. análise de Fourier. 4. método
de Galerkin. 5. regularização. I. Viloche Bazán,
Fermín Sinforiano. II. Bedín, Luciano . III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV.
Título.

Reconstrução de dados de fronteira associados à equação de Poisson

por

Jonathan Ruiz Quiroz

Esta Tese foi julgada para a obtenção do Título de Doutor,
em Matemática, Área de Concentração em Matemática Aplicada,
e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Fermín S. Viloche Bazán
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen (UFRGS)

Prof. Dr. Roger Behling (UFSC-Blumenau)

Prof. Dr. Juliano de Bem Francisco (UFSC)

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira (UFSC)

Florianópolis, 14 de Março de 2018.

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus Pai de nosso Senhor Jesus Cristo, por ter estendido sua graça imerecida sobre minha vida.

À meus pais Irma e José que são exemplos de amor, perseverança, e fé. À minhas irmãs Mônica e Paola pelo apoio incondicional nestes anos.

À minha noiva Lila, obrigado por compartilhar comigo estes anos de lutas e vitórias. Temos experimentado juntos o verdadeiro significado da palavra amor, em toda sua extensão.

Agradeço ao professor Dr. Luciano Bedin, pelos comentários e recomendações para a melhora deste trabalho.

Também quero agradecer especialmente ao Professor Dr. Fermín Bazán, meu orientador. Obrigado pelo apoio, sugestões e idéias para a conclusão deste trabalho, e sobretudo a sabedoria e sazone na suas palavras nos momentos difíceis.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da UFSC pela oportunidade.

À Elisa pelo atendimento e boa disposição.

Ao programa de bolsas Capes pelo auxílio financeiro nestes quatro anos.

Resumo

Nesta tese, estudamos métodos de reconstrução do coeficiente de transferência de calor convectivo, embutido como condição de fronteira do tipo Robin associada à equação de Poisson numa região anular. A reconstrução é realizada utilizando-se informações da temperatura na borda externa da região como dado de entrada, por meio de uma técnica de linearização, a qual consiste em obter o coeficiente convectivo de calor através da determinação do fluxo de calor na borda interna da região. Neste contexto, estudamos o problema direto empregando as seguintes abordagens: o método de colocação pseudoespectral de Chebyshev, a análise de Fourier e o método de Galerkin.

Para o problema inverso, usando a técnica pseudoespectral, mostramos que as aproximações do fluxo são recuperadas através da resolução de um sistema linear mal condicionado. Para contornar as dificuldades decorrentes dos dados de entrada serem inexatos e do mal condicionamento do sistema, as estimativas do fluxo serão recuperadas via técnicas de regularização: a decomposição em valores singulares truncados e regularização de Tikhonov. Em todos os casos, os parâmetros de regularização são determinados pelo Princípio da Discrepância.

Na segunda parte da tese, usando a análise de Fourier, mostramos resultados de existência e unicidade da solução do problema direto assim como, uma relação linear entre o fluxo e a temperatura na parede externa do tubo. Com base nestes resultados, utilizamos a expansão truncada de valores singulares e regularização de Tikhonov como métodos para construir aproximações do fluxo de calor.

A última parte da tese aborda a reconstrução do fluxo de calor e do coeficiente convectivo através do método de Galerkin. Mostramos que este método é apropriado para casos práticos em que os dados de entrada são discretos. Para validar o modelo matemático, utilizamos dados sintéticos e experimentais encontrados na literatura. Os resultados numéricos são comparados em termos de aproximação e tempo de

execução.

Palavras-chave: Problema inverso de calor, tubos enrolados, método pseudoespectral de Chebyshev, Análise de Fourier, Método de Galerkin, regularização, Princípio da Discrepância.

Abstract

In this thesis, we study reconstruction methods for the convective heat transfer coefficient inserted as a Robin boundary condition of a Poisson equation in an annular region. The reconstruction is carried out using temperature information on the external boundary as input data. Our main tool is a linearization technique, which replaces the problem of reconstructing the convective heat transfer coefficient for that of reconstructing the heat flux distribution. With the heat flux at hand, the heat transfer coefficient is readily obtained. For this we study the direct problem using the following approaches: a collocation pseudospectral Chebyshev method, a Fourier analysis and an approach based on the Galerkin method.

For the inverse problem, using the pseudospectral technique, we show that heat flux approximations can be recovered by solving an ill-conditioned linear system. To overcome the difficulties arising from both the input data being inaccurate and the ill-conditioning of the system, the flow estimates are recovered through truncated Singular Value Decomposition (TSVD) and Tikhonov regularization (TR). In all cases, the regularization parameters are determined by the Discrepancy Principle (DP).

The second part of the thesis describes Fourier analysis results about existence and uniqueness of solutions of the direct problem as well as, a linear relation between the heat flux and the temperature on the external boundary. Then, using these results, we derive reconstruction methods for heat flux based on the truncated singular value expansion (TSVE) and Tikhonov regularization.

The last part of the thesis presents a reconstruction method for the heat flux and the convective coefficient based on the Galerkin method. We show that the method is appropriate for practical cases where input data are discrete. To validate the mathematical model, we used synthetic and experimental data found in the literature. The numerical results

are compared in terms of approximation quality and execution time.

Keywords: Inverse heat problem, coiled tubes, Chebyshev pseudospectral method, Fourier analysis, Galerkin method, regularization, Principle of discrepancy.

Lista de Figuras

1.1	Seção transversal do tubo.	2
2.1	Distribuição dos pontos r_i, ϕ_j de Gauss-Lobato e Fourier respectivamente.	9
2.2	Esquerda: Temperatura exata e estimada na fronteira interior e exterior respectivamente. Direita: Erro de temperatura nas fronteiras.	14
2.3	Esquerda: comparação entre o fluxo exato \mathbf{Q}_{ex} e o fluxo $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^\dagger(\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))$. Direita: valores singulares da matriz \mathbf{J}	19
2.4	Splines \hat{B}_i	24
2.5	Esquerda: Dado de entrada exato e perturbado. Centro: Fluxo exato e reconstruído via TGSVD. Direita: Fluxo exato e reconstruído via RT.	27
2.6	Fluxo exato e estimado usando o método TSVD com níveis de ruído $NL = 1 \times 10^{-4}$ e $NL = 2.5 \times 10^{-3}$ respectivamente.	29
2.7	Coefficiente convectivo exato e estimado utilizando os métodos TSVD (esquerda) e regularização de Tikhonov (direita). Parte superior: regularização com base de splines. Parte inferior: regularização com base de Fourier.	31
3.1	Esquerda: Função de temperatura exata G e temperatura perturbada G_δ . Direita: Fluxo exato Q e recuperado $Q_{1,\delta}$ pelo método TSVE.	68
3.2	Comparação entre o fluxo exato e estimado para $r_i = 0.012$ e nível de ruído $NL = 7.5 \times 10^{-4}$	70
3.3	Funções $R^{(n)}(\lambda)$ para $n = 0, 10$ e 20 , $\tau\delta = 1.96$ com $r_i = 0.012$ (esquerda) e ampliação das raízes λ_n^* (direita). Sequência $\{\lambda_n^*\}_{n=0}^{20}$ (parte inferior).	71

4.1	Comportamento dos coeficientes $ \widehat{a}_k $ e $ \widehat{v}_k(r) $ para $k = 0, \dots, 30$	77
4.2	Esquerda: Valores da temperatura aproximada obtidas com $V_{10}(r, \theta)$ em $[r_i, r_e] \times [0, 2\pi]$. Direita: Erro discreto entre $\ V_{10}(r_i, \theta_j) - V_{20}(r_i, \theta_j)\ _2$ soluções aproximadas.	78
4.3	Decaimento dos valores singulares σ_k para 25 termos.	82
4.4	Fluxo de calor exato e aproximado para $r_i = 0.012$ e nível de ruído $NL = 2.5 \times 10^{-4}$ (esquerda), $NL = 2.5 \times 10^{-2}$ (direita).	85
4.5	Comparação entre as estimativas do fluxo de calor (esquerda), coeficiente convectivo (direita) e temperatura na fronteira interna (abaixo).	89
4.6	Esquerda: Temperatura experimental. Direita: Temperatura recuperada nas fronteiras interna e externa.	91
4.7	Estimativas do fluxo Q (esquerda) e do coeficiente h (direita) a partir de medidas experimentais.	92
4.8	Dados experimentais (esquerda) e dados estimados (direita) para o caso assimétrico.	93
4.9	Fluxo estimado Q (esquerda) e coeficiente de transferência de calor h (direita) a partir da temperatura experimental para o caso assimétrico.	93

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros físicos.	14
2.2	Erro relativo médio E_Q associado aos métodos TGSVD e Tikhonov na reconstrução do fluxo Q_1	26
2.3	Parâmetros de regularização TGSVD e Tikhonov para a reconstrução do fluxo Q_1	26
2.4	Erro relativo na reconstrução do coeficiente \mathbf{h} e tempo médio \bar{t} gasto associados a Q_1	27
2.5	Erro relativo médio dos métodos TSVD e Tikhonov para Q_2	28
2.6	Parâmetros de regularização k, λ para a reconstrução do fluxo Q_2	28
2.7	Erro relativo $E_{\mathbf{h}}$ e tempo médio \bar{t} associados a Q_2	29
2.8	Erro relativo médio obtido pelo método Splines-TSVD e Splines-Tikhonov para Q_1	30
2.9	Erro médio e tempo médio associado aos métodos Splines-TSVD e Splines-Tikhonov na reconstrução do coeficiente convectivo.	30
2.10	Erro relativo médio obtido pelo método Fourier-TSVD e Fourier-Tikhonov para Q_1	30
2.11	Erro médio e tempo médio associado aos métodos Fourier-TSVD e Fourier-Tikhonov na reconstrução do coeficiente convectivo \mathbf{h}	31
2.12	Comparação do tempo gasto pelos métodos propostos.	32
3.1	Erro relativo médio do fluxo de distribuição de calor $Q_{k,\delta}(\theta)$	67
3.2	Média do tempo de execução do método TSVE.	68
3.3	Erro relativo médio do fluxo de distribuição de calor $Q(\theta)$	69
3.4	Média do Parâmetro de regularização, do parâmetro de truncamento e do tempo de execução.	69

4.1	Erro relativo médio calculado pelo método TSVD. . . .	85
4.2	Índice de truncamento n_{\max}^* , média de tempo de execução (em segundos) do método TSVD e do erro E_h para $r_i = 0.012$	86
4.3	Erro relativo médio na reconstrução do fluxo de calor calculado pelo método RT.	86
4.4	Média do parâmetro de regularização $\bar{\lambda}$, tempo de execução e Erro do coeficiente h para $r_i = 0.012$	87
4.5	Erro relativo médio na reconstrução do fluxo de calor calculado pelo método TSVD.	88
4.6	Média do parâmetro de truncamento n_{\max}^* , tempo de execução e Erro do coeficiente h para $r_i = 0.6$	89
4.7	Erro relativo médio da distribuição do fluxo de calor calculado pelo método de Tikhonov.	90
4.8	Média do parâmetro de regularização $\bar{\lambda}$, tempo de execução e Erro do coeficiente h para $r_i = 0.6$	90

Notações

CPS	Colocação Pseudo-espectral
DP	Princípio da Discrepância
GSVD	Decomposição em Valores Singulares Generalizados
NL	Nível de ruído
RT	Regularização de Tikhonov
SVD	Decomposição em Valores Singulares
TGSVD	Decomposição em Valores Singulares Generalizados Truncada
TSVD	Decomposição em Valores Singulares Truncada
TSVE	Expansão truncada em Valores Singulares

Sumário

1	Introdução	1
2	Método de estimação baseado em técnica pseudoespectral	6
2.1	Problema direto: método de colocação pseudoespectral	6
2.1.1	Exemplo numérico	13
2.2	Problema inverso: abordagem da matriz de sensibilidade	14
2.2.1	Problema de minimização: método da matriz de sensibilidade	16
2.2.2	Custo computacional	21
2.3	Método de aproximações contínuas em subespaços de dimensão finita	21
2.3.1	Base de Splines lineares	23
2.3.2	Base de Fourier	24
2.4	Resultados numéricos	24
2.4.1	Desempenho do método descrito no Algoritmo 1	26
2.4.2	Desempenho do método baseado em subespaços .	29
3	Reconstrução do fluxo baseada em análise de Fourier	33
3.1	Sumário e notação	33
3.2	Problema direto: análise de Fourier	34
3.2.1	Solução do problema de valor de fronteira homogêneo	35
3.2.2	Solução do problema não homogêneo	46
3.3	Problema inverso	48
3.3.1	Expansão truncada de valores singulares	49
3.3.2	Análise de erro e taxas de convergência para TSVE	50
3.3.3	Regularização de Tikhonov	59
3.3.4	Custo computacional	65
3.3.5	Resultados numéricos	66

4	Abordagem via método de Galerkin	72
4.1	Problema direto	73
4.2	Problema inverso	79
4.3	Reconstrução do coeficiente de transferência de calor . .	82
4.3.1	Resultados numéricos	83
4.4	Reconstrução do fluxo de calor e coeficiente convectivo a partir de dados experimentais	90
5	Conclusões e trabalho futuro	94
A		97
A.1	Método de truncamento de valores singulares: TSVD . .	98
A.2	Regularização de Tikhonov	99

Capítulo 1

Introdução

A estimação de dados de fronteira associados à equações diferenciais parciais elípticas é um problema recorrente em aplicações industriais, tais como sistema de ar condicionado, corrosão, componentes eletrônicos, pasteurização de alimentos e reatores nucleares, entre outros [1, 20, 22, 23, 28, 29, 47, 49, 53, 62]. Essencialmente, podemos separar os problemas de reconstrução de dados de fronteira em dois tipos: dados de fronteira do tipo Dirichlet e dados de fronteira do tipo Neumann/Robin [17, 24, 25, 57, 58]. Nesta tese, estudamos um problema de reconstrução de dados de fronteira do tipo Robin, vinculado a um modelo descrito pela equação de Poisson em coordenadas polares e proveniente da área de problemas inversos em condução de calor. O dado de fronteira de interesse é o coeficiente de transferência de calor, que devido aos efeitos da geometria do duto, pode sofrer mudanças significativas que são cruciais em certas aplicações. Exemplos que mostram grande variabilidade do coeficiente de transferência de calor em tubos espiralados podem ser vistos em [18, 19, 52–54, 62]. A dificuldade encontrada na estimativa desse coeficiente é que ele não pode ser medido experimentalmente devido à impossibilidade de se colocar sondas no interior do duto.

O objetivo de esta tese é estimar o coeficiente de transferência de calor através de técnicas da área de problemas inversos, baseados em dados de temperatura acessíveis na fronteira exterior. Apesar da abordagem via técnicas de problema inversos ser interessante, uma vez que o monitoramento da temperatura na parede interna do duto é evitada, vale enfatizar que ela acarreta outro tipo de dificuldade: o problema de reconstrução é mal posto no sentido de Hadamard [14]. Em ou-

tras palavras, a solução pode ser muito sensível a pequenas variações nos dados e a resposta oferecida por métodos tradicionais é de pouco ou nenhum significado físico, sendo necessário o uso de métodos de regularização. Pesquisas nessa direção têm sido desenvolvidas por muitos autores em diferentes áreas. Por exemplo, trabalhos baseados no método de regularização de Tikhonov podem ser encontrados em [10, 20, 22, 23, 27, 28, 30, 54]. O uso de outras técnicas de regularização também é frequente na literatura especializada. Martin e Dulikravich [45] descrevem o Método de elemento de fronteira (BEM) inverso para determinar o coeficiente de transferência de calor em superfícies de forma arbitrária; métodos baseados em BEM também são utilizados em [48, 63]; métodos que combinam transformada de Laplace, diferenças finitas e quadrados mínimos para estimar o coeficiente de transferência de calor em domínios retangulares são abordados via linearização em [28, 29]. Estimativas de aproximação da temperatura de fluidos na seção transversal de um tubo, baseadas no método de gradiente conjugado, são apresentadas em [43].

Neste trabalho, estudamos o modelo bidimensional da equação do calor na seção transversal de um tubo com domínio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, r_i < \|x\|_2 < r_e\}$, como mostrado na Figura 1.1, sendo as fronteiras interior e exterior denotadas por $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = r_i\}$ e $\Gamma_e = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = r_e\}$, respectivamente.

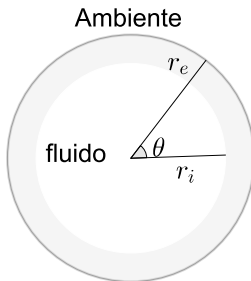


Figura 1.1: Seção transversal do tubo.

O modelo matemático envolve uma equação de Poisson, em coordenadas polares (\mathbf{r}, θ) , com condições de fronteira do tipo Robin

$$\lambda_w \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\mathbf{r} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) + \lambda_w \frac{1}{\mathbf{r}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + q_g = 0, \quad (\mathbf{r}, \theta) \in (r_i, r_e) \times [0, 2\pi] \quad (1.1)$$

$$\lambda_w \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}(r_e, \theta) = \alpha(T_{env} - T(r_e, \theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1.2)$$

$$-\lambda_w \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}(r_i, \theta) = h(\theta)(T_b - T(r_i, \theta)). \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.3)$$

Na área de transferência de calor, λ_w denota a condutividade térmica do material, q_g é uma fonte de calor que depende da posição (\mathbf{r}, θ) , o parâmetro α é a resistência à transferência de calor na fronteira exterior Γ_e com a temperatura ambiente T_{env} . O coeficiente de transferência de calor convectivo na região interior do tubo é representado por $h(\theta)$ e T_b é a temperatura do fluido no interior do tubo.

Usando o modelo (1.1)-(1.3) como base, estudaremos o problema de estimar o coeficiente de transferência convectivo $h(\theta)$ a partir das informações de temperatura no meio externo Γ_e , isto é, $T_e = T(r_e, \theta)$, onde T é a solução do problema (1.1)-(1.3). Note que, devido à condição (1.3), o problema pode ser abordado por meio de técnicas de otimização não linear, pois $h(\theta)$ não depende linearmente de T . Para contornar as dificuldades que aparecem no uso dessas técnicas (existência de vários mínimos, por exemplo), nesta tese usaremos uma técnica de linearização, proposta inicialmente por Engl *et. al* [32], que consiste em substituir a condição de fronteira (1.3) por

$$-\lambda_w \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}(r_i, \theta) = Q(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1.4)$$

em que $Q(\theta)$ representa o fluxo de calor na parede interior Γ_i . Com isso, lidamos com o problema de estimar Q , o qual é abordado via solução de um problema linear [14, 22, 23]. Assim, a técnica de linearização para estimar h consiste em, primeiro, estimar Q a partir de medições $T(r_e, \theta)$ na fronteira exterior Γ_e e, em seguida, estimar h por meio da relação

$$h(\theta) = \frac{Q(\theta)}{T_b - T(r_i, \theta)}. \quad (1.5)$$

onde assumimos que $T_b \neq T(r_i, \theta)$. Os objetivos do trabalho envolvem os seguintes pontos

1. Resultados teóricos do problema direto (1.1)-(1.3) para determinar a existência, unicidade e as propriedades da solução.
2. Desenvolver métodos numéricos robustos para o problema inverso, incluindo a análise de erro associado às soluções calculadas.
3. Testar os métodos desenvolvidos usando dados experimentais obtidos em laboratório.

No segundo capítulo, abordamos a solução numérica do problema (1.1), (1.2) e (1.4), através do método de colocação pseudo espectral de Chebyshev (CPS) [61]. Para tanto, discretizamos o domínio anular Ω nos pontos (r_i, θ_j) , $i = 0, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$, com $N + 1$ pontos de Gauss-Lobatto na direção de r , e M pontos uniformemente espaçados na direção de θ . Usando o método de colocação pseudo-espectral (CPS), aproximamos a solução T em qualquer ponto da malha via uma equação linear que envolve o fluxo Q e a temperatura na malha $T(r_i, \theta_j)$. Com esta relação, estabelecemos o problema inverso de determinar o fluxo discreto \mathbf{Q} a partir das informações discretas de temperatura, obtidas na fronteira exterior Γ_e via um problema de minimização. Devido ao mal condicionamento da matriz coeficiente, faremos uso de métodos de regularização: o método da TGSVD e regularização de Tikhonov, baseado na GSVD da matriz (\mathbf{J}, L) , sendo \mathbf{J} a matriz coeficiente do sistema e $L \in \mathbb{R}^{p \times M}$, $M \geq p$ a matriz de diferenciação discreta. Também introduzimos a base de splines lineares e a base de Fourier para estimar o fluxo Q . Acoplamos esta estratégia aos métodos de regularização mencionados. Por fim, comparamos estes métodos propostos em termos da qualidade da solução regularizada e do tempo de execução computacional.

No terceiro capítulo, estudamos o problema (1.1), com as condições de fronteira (1.2) e (1.4), em espaços funcionais apropriados. Estudamos condições de existência e unicidade para determinar a função temperatura T a partir do fluxo Q . A estratégia utilizada será particionar este problema em dois subproblemas com soluções V e W , respectivamente, sendo a solução escrita como $T = V + W$. Assim, estabelecemos uma relação entre o fluxo $Q(\theta)$ e a temperatura na fronteira $G(\theta) = T(r_e, \theta) - W(r_e, \theta)$ via uma equação $A(Q) = G$, sendo A um operador linear, compacto, auto-adjunto e injetor. Esta relação deriva numa expansão em séries que posteriormente será utilizada no problema inverso, especialmente quando os dados de entrada contêm ruído. Com os resultados obtidos para o problema direto, definimos o problema inverso de determinar estimativas do fluxo Q a partir das informações inexatas da temperatura na borda exterior. Para tanto, utilizamos método de truncamento e regularização de Tikhonov, sendo os parâmetros de regularização obtidos pelo Princípio da Discrepância. Ilustramos a eficiência destes métodos fazendo uso de dados sintéticos que simulam informações de entrada obtidas experimentalmente [20]. Mostraremos a qualidade da aproximação das soluções obtidas e o tempo de execução dos métodos empregados.

No capítulo seguinte, utilizamos o método de Galerkin para apro-

ximar a função de temperatura G , definida no capítulo anterior, em subespaços de polinômios a partir dos dados discretos do fluxo \mathbf{Q} , com $\mathbf{Q}_j = Q(\phi_j)$. Além disso, demonstramos que a existência da solução \mathbf{G} depende das características do fluxo Q . Assim, geramos um sistema linear mal condicionado, que relaciona o fluxo discreto \mathbf{Q} e a temperatura discreta na fronteira \mathbf{G} . Além disso, mostramos que a SVD da matriz do sistema pode ser determinada explicitamente e construída de forma simples.

No problema inverso, fazemos uso da equação linear para estimar o fluxo discreto, utilizando os métodos TSVD e Regularização de Tikhonov, quando os dados de entrada \mathbf{G}_δ apresentam diferenças com respeito à solução exata \mathbf{G} . No experimento numérico, usamos o problema direto para gerar a solução exata \mathbf{G} a partir de um fluxo exato \mathbf{Q} . Os dados a serem utilizados são construídos da forma $\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + \epsilon$, sendo ϵ o vetor de incertezas, tal que o erro é estimado da forma $\|\mathbf{G}_\delta - \mathbf{G}\|_2 \leq \delta$.

As conclusões finais do trabalho são apresentadas no capítulo 4. Os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 desta tese serão publicados em revistas internacionais ¹ ².

Por fim, alguns resultados técnicos relativos a regularização para problemas em dimensão finita, são organizados num apêndice.

¹Um artigo sobre o método descrito no Capítulo 3 foi aceito para publicação na revista *Journal of Computational and Applied Mathematics (JCAM)* [11].

²Um artigo que trata sobre o método descrito no Capítulo 4 foi submetido à revista *Numerical Algorithms (NUMAL)* [8].

Capítulo 2

Método de estimação baseado em técnica pseudoespectral

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem do problema inverso baseado no método de colocação pseudoespectral de Chebyshev e técnicas de regularização. Além de construir soluções numéricas para o problema direto baseado em informações pontuais do fluxo Q , mostramos que a técnica pseudoespectral permite estabelecer uma transformação linear entre o fluxo e a temperatura na borda externa do domínio. Baseado nessa transformação, desenvolvemos métodos para reconstruir o fluxo a partir de dados da temperatura contaminados por erros utilizando técnicas de regularização. A eficiência dos métodos é ilustrada utilizando dados artificiais.

2.1 Problema direto: método de colocação pseudoespectral

Neste seção, vamos fornecer aproximações numéricas para calcular a temperatura T do problema (1.1) sujeito às condições de fronteira (1.2) e (1.4). Para tanto, usaremos o método de colocação pseudoespectral de Chebyshev (CPS). A escolha do método é motivada pela sua potencialidade de produzir soluções numéricas para equações diferenciais parciais com alta precisão [16, 50]. Se, por simplicidade, consideramos

um problema unidimensional, o método CPS pode ser descrito como segue. Seja \mathcal{F} um operador diferencial, munido de condições de contorno, e g uma função definida num intervalo (a, b) tal que a seguinte equação tem uma única solução

$$\mathcal{F}u(x) = g(x), \quad a < x < b. \quad (2.1)$$

O método CPS constrói soluções aproximadas para o problema acima num espaço de polinômios de grau fixo, tal que (2.1) é satisfeita em pontos do domínio chamados de pontos de colocação, os quais estão relacionados a uma família de polinômios ortogonais. Seguindo este método, definimos a solução aproximada U_N como combinação linear da base $\{l_0, \dots, l_N\}$, formada por polinômios de Lagrange de grau N [21], isto é

$$U_N(x) = \sum_{k=0}^N \widehat{U}_k l_k(x), \quad (2.2)$$

sendo os coeficientes $\widehat{U}_k := u(x_k)$, as incógnitas a serem determinadas. Note que, a p -ésima derivada $u^{(p)}$ de u , é aproximada diferenciando (2.2) p -vezes, isto é

$$U_N^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^N \widehat{U}_k l_k^{(p)}(x), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Assim, a partir de (2.3), obtemos uma representação na forma matricial utilizando os pontos de colocação x_j como

$$\mathbf{U}^{(p)} = \mathbf{D}^p \mathbf{U}, \quad (2.4)$$

sendo $\mathbf{U}^{(p)} = [U_N^{(p)}(x_0), \dots, U_N^{(p)}(x_N)]^T$, $\mathbf{U} = [U_N(x_0), \dots, U_N(x_N)]^T$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ é a matriz de diferenciação, cujas entradas são $D_{j,k} = l'_k(x_j)$ para $0 \leq j, k \leq N$.

Note que a equação (2.4) fornece aproximações da p -ésima derivada discreta $U_N^{(p)}(x_k)$ a partir de produtos matriz-vetor usando o vetor de incógnitas \mathbf{U} .

Resumindo, para construir soluções numéricas para o problema descrito acima via o método CPS, basta resolver um problema linear/não linear decorrente de exigir que (2.1) seja satisfeita nos pontos de colocação, onde as derivadas pontuais são aproximadas por meio da relação (2.4). O método CPS para problemas bidimensionais é análogo.

Vamos supor, nesta seção, que as funções Q e q_g são suaves e que há uma única solução clássica T para o problema (1.1), (1.2) e (1.4). Baseados no método CPS, resolveremos numericamente o problema (1.1),

(1.2) e (1.4), usando o domínio de referência $[-1, 1] \times [0, 2\pi]$ através do operador

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(r) &= r_i + \frac{1}{2}(r+1)(r_e - r_i), \quad -1 \leq r \leq 1 \\ \phi(\theta) &= \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

Utilizando esta mudança de variáveis, obtemos o problema de valores de fronteira

$$\lambda_w \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\zeta}{\mathbf{r}(r)} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{[\mathbf{r}(r)]^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + q_g = 0, \quad (-1, 1) \times [0, 2\pi] \quad (2.5)$$

$$\lambda_w \zeta \frac{\partial T}{\partial r}(r_e, \phi) = \alpha (T_{env} - T(r_e, \phi)), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (2.6)$$

$$-\lambda_w \zeta \frac{\partial T}{\partial r}(r_i, \phi) = Q(\phi), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (2.7)$$

sendo $\zeta = \frac{2}{r_e - r_i}$. Começaremos fazendo a discretização no domínio $[-1, 1] \times [0, 2\pi]$ como mostrado a seguir: no intervalo $[-1, 1]$ empregaremos o método de colocação pseudo-espectral de Chebyshev o qual utiliza os pontos de Gauss-Lobato r_j definidos como

$$r_j = -\cos \frac{j\pi}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

junto com os polinômios de interpolação l_k .

Por outro lado, considerando que o problema (2.5)-(2.6) está num domínio anular, vamos supor que a temperatura T e sua derivada T_ϕ sejam funções 2π -periódicas na variável ϕ , i.e.,

$$T(\mathbf{r}, 0) = T(\mathbf{r}, 2\pi), \quad \frac{\partial T}{\partial \phi}(\mathbf{r}, 0) = \frac{\partial T}{\partial \phi}(\mathbf{r}, 2\pi) \quad r_i < \mathbf{r} < r_e,$$

assim, na direção azimutal utilizamos M pontos uniformemente espaçados

$$\phi_j = 2\pi j/M, \quad j = 1, \dots, M$$

associados à base $\{S_M(\phi - \phi_1), \dots, S_M(\phi - \phi_M)\}$ [61, Capítulo 3], sendo

$$S_M(\phi) = \frac{\sin(\pi\phi/\kappa)}{(2\pi/\kappa) \tan(\phi/2)}, \quad \kappa = 2\pi/M.$$

Logo, as matrizes de diferenciação obtidas são $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$, na direção r , e a matriz discreta de segundas derivadas $\mathcal{D}^{(2)}$ na variável ϕ , respectivamente.

A distribuição dos $(N + 1) \times M$ pontos da malha é colocada na ordem lexicográfica como mostra a Figura 2.1.

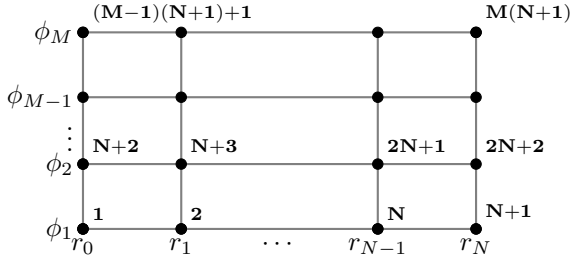


Figura 2.1: Distribuição dos pontos r_i, ϕ_j de Gauss-Lobato e Fourier respectivamente.

Primeiramente, aproximaremos as derivadas parciais da equação (2.5) na direção r como segue. Para j fixo, o vetor de incógnitas é denotado por

$$\bar{T}_j = [T(r_0, \phi_j), T(r_1, \phi_j), \dots, T(r_N, \phi_j)]^T, \quad j = 1, \dots, M$$

e representamos a matriz de diferenciação D , na forma de linhas e colunas como sendo

$$D = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_N] = [l_0 \ \dots \ l_N]^T \quad d_i, l_i \in \mathbb{R}^{N+1}. \quad (2.8)$$

Note que a matriz de diferenciação D^2 pode ser expressada como $D^2 = d_0 l_0^T + d_1 l_1^T + \dots + d_N l_N^T$, logo obtemos que as derivadas segundas de T , com respeito à r , são aproximadas por

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r_0, \phi_j) \\ T_{rr}(r_1, \phi_j) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_N, \phi_j) \end{bmatrix} \approx D^2 \begin{bmatrix} T(r_0, \phi_j) \\ T(r_1, \phi_j) \\ \vdots \\ T(r_N, \phi_j) \end{bmatrix} = d_0 l_0^T \bar{T}_j + D_1 D_2 \bar{T}_j + d_N l_N^T \bar{T}_j, \quad (2.9)$$

sendo $D_1 = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{N-1}]$, $D_2 = [l_1 \ \dots \ l_{N-1}]^T$.

Passamos a incorporar as condições de fronteira (2.6)-(2.7) utilizando a relação $l_i^T \bar{T}_j \approx T_r(r_i, \phi_j)$, ($i = 0, \dots, N$). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} l_0^T \bar{T}_j &\approx T_r(r_0, \phi_j) = -\frac{Q(\phi_j)}{\zeta \lambda_w} \\ l_N^T \bar{T}_j &\approx T_r(r_N, \phi_j) = \frac{Q(\phi_j)}{\zeta \lambda_w} (T_{env} - T(r_N, \phi_j)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agora, substituindo (2.10) em (2.9), temos a aproximação para o vetor de segundas derivadas

$$\lambda_w \zeta^2 \begin{bmatrix} T_{rr}(r_0, \phi_j) \\ T_{rr}(r_1, \phi_j) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_N, \phi_j) \end{bmatrix} \approx \mathbf{E} \bar{\mathbf{T}}_j + \alpha \zeta T_{env} \mathbf{d}_N - \zeta Q_j \mathbf{d}_0, \quad (2.11)$$

sendo $\mathbf{E} = \lambda_w \zeta^2 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 - \alpha \zeta \mathbf{d}_N \mathbf{e}_{N+1}^T$, \mathbf{e}_i denota o i -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^{N+1} e $Q_j = Q(\phi_j)$. De forma análoga, o vetor $\frac{\lambda \zeta}{\mathbf{r}_i} T_r(r_i, \phi_j)$, ($i = 0, \dots, N$) é descrito como

$$\lambda_w \zeta \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{r}_0} T_r(r_0, \phi_j) \\ \frac{1}{\mathbf{r}_1} T_r(r_1, \phi_j) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_N} T_r(r_N, \phi_j) \end{bmatrix} \approx \lambda_w \zeta \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_0^T \bar{\mathbf{T}}_j \\ \mathbf{D}_2 \bar{\mathbf{T}}_j \\ \mathbf{l}_N^T \bar{\mathbf{T}}_j \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{T}}_j + \tilde{\mathbf{Q}}_j, \quad (2.12)$$

em que $\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_N)$, $\tilde{\mathbf{Q}}_j = \mathbf{R}^{-1} (\alpha T_{env} \mathbf{e}_{N+1} - Q_j \mathbf{e}_1)$ e

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \lambda_w \zeta \mathbf{D}_2 \\ -\alpha \mathbf{e}_{N+1}^T \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N+1}$ sendo o vetor nulo. Por (2.11) e (2.12), obtemos

$$\lambda_w \zeta^2 \begin{bmatrix} T_{rr}(r_0, \phi_1) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_N, \phi_1) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_0, \phi_M) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_N, \phi_M) \end{bmatrix} + \lambda_w \zeta \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{r}_0} T_r(r_0, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_N} T_r(r_N, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_1} T_r(r_0, \phi_M) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_N} T_r(r_N, \phi_M) \end{bmatrix} \approx (\mathbf{l}_M \otimes \mathbf{A}) \bar{\mathbf{T}} - \mathbf{f}, \quad (2.13)$$

em que $\mathbf{l}_M \in \mathbb{R}^M$ é a matriz identidade, $\mathbf{A} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{D}}$, com \mathbf{E} , $\tilde{\mathbf{D}}$ definidos acima, $\bar{\mathbf{T}} = [\bar{\mathbf{T}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{T}}_M^T]^T$ é o vetor de temperatura na malha, \otimes é o

produto Kronecker ¹, e o vetor $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \dots, \mathbf{f}_M^T]^T$, com componentes

$$\mathbf{f}_j = Q_j (\zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1) - \alpha T_{env} (\zeta \mathbf{d}_N + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_{N+1}). \quad (2.14)$$

O vetor de segundas derivadas com respeito à variável ϕ é aproximado de forma similar. Para cada $i = 0, \dots, N$, denotamos o vetor $\tilde{\mathbf{T}}_i = [T(r_i, \phi_1), \dots, T(r_i, \phi_M)]^T \in \mathbb{R}^M$. Assim, utilizando a matriz de diferenciação $\mathcal{D}^{(2)} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, obtemos que a segunda derivada de T com respeito à ϕ é aproximada como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{r}_i^2} T_{\phi\phi}(r_i, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_i^2} T_{\phi\phi}(r_i, \phi_M) \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\mathbf{r}_i^2} \mathcal{D}^{(2)} \tilde{\mathbf{T}}_i. \quad (2.15)$$

Consequentemente, o vetor $\frac{\lambda_w}{\mathbf{r}_i^2} T_{\phi\phi}(r_i, \theta_j)$ ($0 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$) pode ser aproximado como

$$\lambda_w \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{r}_0^2} T_{\phi\phi}(r_0, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_0^2} T_{\phi\phi}(r_0, \phi_M) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_N^2} T_{\phi\phi}(r_N, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathbf{r}_N^2} T_{\phi\phi}(r_N, \phi_M) \end{bmatrix} \approx \lambda_w (\mathbf{R}^{-2} \otimes \mathcal{D}^{(2)}) \tilde{\mathbf{T}}, \quad (2.16)$$

sendo $\tilde{\mathbf{T}} = [\tilde{\mathbf{T}}_0^T, \dots, \tilde{\mathbf{T}}_N^T]^T$. Para uniformizar as componentes dos vetores nas equações (2.13) e (2.16), utilizamos a matriz de permutações $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(N+1)M \times (N+1)M}$ tal que

$$\mathbf{P} \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}. \quad (2.17)$$

¹Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, o produto Kronecker $A \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ e definido por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{m,n}B \end{bmatrix}$$

Então, multiplicamos a equação (2.13) pela matriz \mathbf{P} , e utilizando as propriedades do produto Kronecker tem-se

$$\lambda_w \zeta^2 \begin{bmatrix} T_{rr}(r_0, \phi_1) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_0, \phi_M) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_N, \phi_1) \\ \vdots \\ T_{rr}(r_N, \phi_M) \end{bmatrix} + \lambda_w \zeta \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} T_r(r_0, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{r_0} T_r(r_0, \phi_M) \\ \vdots \\ \frac{1}{r_N} T_r(r_N, \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{r_N} T_r(r_N, \phi_M) \end{bmatrix} \approx (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_M) \tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{P}\mathbf{f}. \quad (2.18)$$

Finalmente, desprezando o erro de aproximação, obtemos, pelas equações (2.16) e (2.18), o sistema linear

$$\widehat{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{g}}, \quad (2.19)$$

sendo

$$\widehat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_M) + \lambda_w (R^{-2} \otimes \mathcal{D}^{(2)}), \quad \widehat{\mathbf{g}} = \mathbf{P}(\mathbf{f} - \mathbf{q})$$

com

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_M^T]^T, \quad \mathbf{q}_j = [q_g(r_0, \phi_j), \dots, q_g(r_N, \phi_j)]^T.$$

Para resolver numericamente o problema direto que procura estimar a temperatura $\tilde{\mathbf{T}}$ nos pontos da malha a partir do fluxo de calor Q , isolaremos o vetor de temperaturas usando a pseudoinversa da matriz $\widehat{\mathbf{A}}$. Pela análise desenvolvida por Bazán e Bedin [9], temos que a matriz $\mathbf{P}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{P}^T$ é singular. Além disso, se decomposmos o vetor $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ na forma

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\text{impar}} + \mathbf{1}_{\text{par}}, \quad (2.20)$$

então, para N par, as entradas do vetor $\mathbf{1}_{\text{impar}}$ são definidas como

$$(\mathbf{1}_{\text{impar}})_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, 2, \dots, N, \\ 1 & \text{se } i = 1, 3, \dots, N-1, \end{cases}$$

enquanto para N ímpar

$$(\mathbf{1}_{\text{impar}})_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, 2, \dots, N-1, \\ 1 & \text{se } i = 1, 3, \dots, N, \end{cases}$$

então, prova-se que a dimensão do núcleo $\mathcal{N}(\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{P}^T)$ é unidimensional e é gerada pelo vetor

$$\mathcal{N}(\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{P}^T) = \begin{cases} \text{span}(\underbrace{[\mathbf{1}_{\text{impar}}^T, \mathbf{1}_{\text{impar}}^T, \dots, \mathbf{1}_{\text{impar}}^T]^T}_{M \text{ vezes}}) & \text{se } N \text{ é par,} \\ \text{span}(\underbrace{[\mathbf{1}_{\text{par}}^T, \mathbf{1}_{\text{par}}^T, \dots, \mathbf{1}_{\text{par}}^T]^T}_{M \text{ vezes}}) & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Para nossos propósitos, consideramos N par e, então, obtemos que

$$\mathcal{N}(\widehat{\mathbf{A}}) = \text{span}(\underbrace{[\mathbf{0}^T, \mathbf{1}^T, \dots, \mathbf{1}^T, \mathbf{0}^T]^T}_{N+1 \text{ vezes}}),$$

com $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^M$. Baseado na caracterização do núcleo $\mathcal{N}(\widehat{\mathbf{A}})$ e do fato de que o conjunto de todas as soluções do sistema linear (2.19) são da forma

$$\tilde{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{A}}), \quad (2.21)$$

podemos concluir que as aproximações para a temperatura na borda interna e na borda externa podem ser extraídas a partir de uma solução do sistema (2.19), desde que tal solução seja expressa como em (2.21), independentemente da componente \mathbf{w} escolhida. Ou seja, os sub-blocos $\tilde{\mathbf{T}}_0$ e $\tilde{\mathbf{T}}_N$ do vetor de temperaturas $\tilde{\mathbf{T}}$ ao longo da malha bidimensional sempre poderão ser extraídos a partir de uma solução do sistema descrito na forma (2.21).

2.1.1 Exemplo numérico

Para mostrar o grau de precisão do sistema linear (2.21), baseado no método CSP, utilizamos a função de temperatura T definida por [9]

$$T(r, \theta) = \frac{-q_g(r^2 - r_e^2)}{4\lambda_w} + \frac{q_g}{2\lambda_w} r_e^2 \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) + T_{env} + C \cos(\theta) \left(r + \frac{D}{r}\right).$$

Cálculos elementares mostram que T é a solução exata da equação (1.1) para o caso em que a função de fonte q_g é constante. Com a função temperatura definida, o fluxo de calor associado Q é obtido usando a condição de fronteira (1.4), isto é

$$Q(\theta) = 0.5 \times q_g(r_i - r_e^2 r_i^{-1}) - \lambda_w C(1 - D r_i^{-2}) \cos(\theta),$$

sendo $D = \frac{r_e^2(\lambda_w + \alpha r_e)}{\lambda_w - \alpha r_e}$ e as quantidades físicas restantes mostradas na Tabela 2.1.

r_e	λ_w	α	q_g	T_{env}	T_b	C
0.015	15	5	4.8×10^6	294.2	295.2	-200

Tabela 2.1: Parâmetros físicos.

Neste exemplo, geramos aproximações discretas de temperatura \tilde{T} a partir das informações pontuais do fluxo Q via a equação (2.21). Em particular, na Figura 2.2 mostramos a temperatura estimada nas paredes internas e externas do tubo, bem como o erro entre as temperaturas.

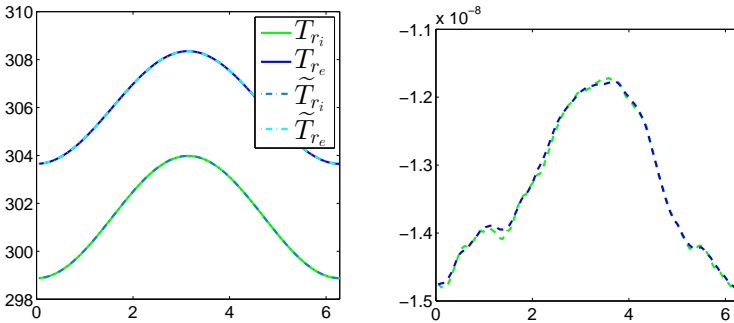


Figura 2.2: Esquerda: Temperatura exata e estimada na fronteira interior e exterior respectivamente. Direita: Erro de temperatura nas fronteiras.

Com estes resultados, podemos constatar que o método CPS é muito útil para resolver este tipo de problema, pois proporciona aproximações numéricas com alto grau de precisão.

2.2 Problema inverso: abordagem da matriz de sensibilidade

Nesta seção, abordaremos o problema de estimar o coeficiente do fluxo de calor discreto $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_M]^T$, a partir das informações de temperatura obtidas na borda exterior do tubo $T(r_e, \phi_j)$, $j = 1, \dots, M$, baseado no fato de que aproximações para a temperatura na malha podem ser determinadas por meio do método CPS via equação (2.21).

Começamos observando, pela estrutura do vetor $\tilde{\mathbf{T}} = [\tilde{\mathbf{T}}_0^T, \dots, \tilde{\mathbf{T}}_N^T]^T$, que os sub-blocos $\tilde{\mathbf{T}}_0$ e $\tilde{\mathbf{T}}_N$ contêm informação estimada das temperatu-

ras nas fronteiras internas e externas do tubo, respectivamente. Logo, pela estrutura do vetor $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{A}})$, segue que o primeiro e o último bloco de $\widetilde{\mathbf{T}}$ podem ser calculados da seguinte maneira:

1. o vetor $\widetilde{\mathbf{T}}_0$ é obtido multiplicando a solução $\widetilde{\mathbf{T}}$ pela matriz $\mathbf{S}_i = [\mathbf{I}_M, \mathbf{0}]$, isto é,

$$\widetilde{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{S}_i \widetilde{\mathbf{T}}.$$

2. de maneira similar, a temperatura discreta na borda externa é calculada pelo produto de $\widetilde{\mathbf{T}}$ com a matriz $\mathbf{S}_e = [\mathbf{0}, \mathbf{I}_M]$, ou seja

$$\widetilde{\mathbf{T}}_N = \mathbf{S}_e \widetilde{\mathbf{T}}, \quad (2.22)$$

sendo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{M \times NM}$ em ambos os casos.

Agora, é importante observarmos que (2.22) pode ser reescrita como

$$\widetilde{\mathbf{T}}_N = \mathbf{S}_e \widehat{\mathbf{A}}^\dagger \widehat{\mathbf{g}}, \quad (2.23)$$

e que o coeficiente discreto \mathbf{Q} está embutido no vetor $\widehat{\mathbf{g}}$, como pode ser observado em (2.19). Esta observação é crucial para a solução do problema inverso. De fato, ela estabelece uma conexão entre o vetor $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^M$ e o vetor de temperatura na borda externa $\widetilde{\mathbf{T}}_N$ através de uma transformação

$$\mathbf{T} : \mathbf{Q} \mapsto \widetilde{\mathbf{T}}_N(\mathbf{Q}), \quad (2.24)$$

no sentido de que, para cada vetor de fluxo \mathbf{Q} , existe um único vetor de temperaturas $\widetilde{\mathbf{T}}_N$. Para analisarmos a recíproca, primeiro, vamos introduzir os vetores

$$\mathbf{f}_j^{(a)} = Q_j (\zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{f}_j^{(b)} = -\alpha T_{env} (\zeta \mathbf{d}_N + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_{N+1}) \quad (2.25)$$

e, em seguida, observamos que as componentes bloco do vetor \mathbf{f} em (2.14) podem ser decompostas como

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j^{(a)} + \mathbf{f}_j^{(b)}.$$

Assim, o vetor $\widehat{\mathbf{g}}$ em (2.19) pode ser decomposto como

$$\widehat{\mathbf{g}} = \mathbf{P} \mathbf{f}^{(a)} + \mathbf{P} (\mathbf{f}^{(b)} - \mathbf{q}),$$

em que $\mathbf{f}^{(a)}$ e $\mathbf{f}^{(b)}$ tem componentes bloco definidas em (2.25). Agora, visto que a primeira componente de $\widehat{\mathbf{g}}$ pode ser expressa como

$$\mathbf{P} \mathbf{f}^{(a)} = \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{G} = \text{diag} (\zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1, \dots, \zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1) \mathbf{Q},$$

e, que a segunda componente do vetor $\hat{\mathbf{g}}$ não depende do fluxo Q , a equação (2.23) pode ser expressa como

$$\tilde{\mathbf{T}}_N - \tilde{\mathbf{T}}^{(b)} = S_e \hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{P} \mathbf{f}^{(a)} = S_e \hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{Q},$$

em que

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(b)} = S_e \hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{P} (\mathbf{f}^{(b)} - \mathbf{q}) \quad (2.26)$$

é um vetor determinado univocamente e, mais importante, que depende apenas dos parâmetros do modelo. Portanto, introduzindo a matriz $\hat{\mathbf{B}} = S_e \hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{P} \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, a existência e unicidade do vetor de fluxo \mathbf{Q} satisfazendo (2.23) dependerá da não singularidade da matriz $\hat{\mathbf{B}}$. Portanto, temos mostrado o seguinte resultado.

Proposição 2.2.1. *Admita que o vetor de fluxo \mathbf{Q} e a temperatura discreta na malha $\tilde{\mathbf{T}}$ satisfazem o sistema linear (2.19). Então o fluxo \mathbf{Q} é univocamente determinado a partir de informações de temperatura na borda externa, $\tilde{\mathbf{T}}_N$, se e somente se a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ é não singular.*

Visto que, em aplicações reais, o vetor de temperaturas na borda externa é contaminado por ruídos, veremos a seguir que o problema inverso pode ser abordado por meio de uma técnica de otimização que incorpora métodos de regularização.

2.2.1 Problema de minimização: método da matriz de sensibilidade

Definido o operador (2.24) que relaciona cada vetor do fluxo \mathbf{Q} com o vetor de temperatura $\tilde{\mathbf{T}}_N(\mathbf{Q})$, nesta subseção estabeleceremos o problema inverso de obter estimativas do fluxo a partir das informações de temperatura obtidas na fronteira externa.

Para tanto, denotamos por $\mathbf{Q}_{ex} = [Q_1, \dots, Q_M]^T$ o vetor associado ao fluxo exato e desconhecido com componentes $Q_j = Q(\phi_j)$ e $\tilde{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^M$ o vetor de temperaturas obtidas experimentalmente na fronteira Γ_e , em que $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_N + \mathbf{e}$, sendo \mathbf{e} um vetor que denota erros de medição ou erros provenientes de outras fontes. Obviamente, $\|\tilde{\mathbf{T}}_N(\mathbf{Q}_{ex}) - \tilde{\mathbf{T}}_N\|_2 = 0$, portanto, uma estimativa $\tilde{\mathbf{Q}}$ para o fluxo \mathbf{Q}_{ex} pode ser obtida definindo o problema de minimização

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^M} \frac{1}{2} \|\mathbf{T}(\mathbf{Q}) - \tilde{\mathbf{T}}\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^M} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M (T_j(\mathbf{Q}) - \tilde{T}_j)^2 \quad (2.27)$$

sendo \mathbf{T} definido em (2.24), o vetor que depende de \mathbf{Q} e contém as informações da temperatura na borda exterior satisfazendo (2.23). O problema definido acima, procura pontos do domínio $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^M$ que minimizam a diferença entre $\mathbf{T}(\mathbf{Q})$ e os dados inexatos $\tilde{\mathbf{T}}$.

Calculando as derivadas parciais da função objetivo em (2.27), concluímos que uma condição necessária para a existência de mínimo é

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{Q}}) - \tilde{\mathbf{T}}) = 0, \quad (2.28)$$

em que $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, conhecida como matriz de sensibilidade, tem componentes definidas como

$$[\mathbf{J}]_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{T}_i(\mathbf{Q})}{\partial Q_j}, \quad i, j = 1, \dots, M.$$

A matriz \mathbf{J} pode ser calculada como segue. Visto que a matriz $\hat{\mathbf{A}}$ em (2.19) não depende do fluxo Q , passamos a calcular as colunas de \mathbf{J} aplicando as derivadas parciais com respeito à Q_j ($j = 1, \dots, M$) em (2.19). Neste caso, obtemos

$$\hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j} = \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} (\mathbf{e}_j \otimes (\zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1)) \quad (2.29)$$

com $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^M$. Ou seja, as derivadas $\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j}$ são soluções do sistema linear

$$\hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j} = \mathbf{P} [\mathbf{e}_j \otimes (\zeta \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1)]. \quad (2.30)$$

Portanto, para calcularmos as colunas de \mathbf{J} , basta multiplicar as soluções do problema (2.30) pela matriz \mathbf{S}_e , isto é,

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{S}_e \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j}, \quad \text{para } j = 1, \dots, M.$$

Seguindo o procedimento descrito acima segue que as segundas derivadas de $\mathbf{T}(\mathbf{Q})$ com respeito à Q_j são nulas. Logo, pelo teorema de

Taylor, para a função \mathbf{T} no ponto $\mathbf{Q} = 0$ obtemos

$$\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{Q}}) = \mathbf{T}(0) + \mathbf{J}\tilde{\mathbf{Q}}. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) em (2.28), temos a equação normal

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{Q} = \mathbf{J}^T (\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))$$

a qual é associada ao problema de minimização

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \underset{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^M}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{J}\mathbf{Q} - (\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))\|_2^2. \quad (2.32)$$

Note que, para definirmos o problema de minimização (2.32), além da temperatura $\tilde{\mathbf{T}}$ na fronteira exterior, precisamos do vetor $\mathbf{T}(0)$, o qual é calculado utilizando (2.23) com $\mathbf{Q} = 0$. Na verdade, baseado em (2.26), é evidente que $\mathbf{T}(0) = \tilde{\mathbf{T}}^{(b)}$.

Porém, a dificuldade de estimar o fluxo a partir do problema de minimização (2.32) é que a matriz \mathbf{J} é mal condicionada, isto é, seus valores singulares σ_i decrescem rapidamente para zero. Consequentemente, as incertezas presentes nas informações de temperatura $\tilde{\mathbf{T}}$ são amplificadas na solução $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^\dagger (\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))$, tornando-a inútil em aplicações práticas. A explicação mais transparente para esse fenômeno vem do fato de que a solução do problema de minimização pode ser escrito em termos da SVD de \mathbf{J} (ver equação (A.4) no apêndice), como

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{j=1}^M \frac{u_j^T (\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))}{\sigma_j} v_j = \mathbf{Q} + \sum_{j=1}^M \frac{u_j^T \mathbf{e}}{\sigma_j} v_j,$$

sendo $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}$ o vetor de erros nas medidas de temperatura. A segunda parcela na equação acima representa o erro cometido no cálculo da solução \mathbf{Q} . A partir disso, fica evidente que o erro deve dominar a solução calculada devido a divisão por valores singulares muito pequenos. Ilustramos esta observação na Figura 2.3, onde o fluxo exato é dado por

$$Q(\phi) = -3250 - 1265 \exp(\cos(\phi))$$

e as temperaturas discretas \mathbf{T} e $\mathbf{T}(0)$ são calculadas via a equação (2.23). A temperatura experimental $\tilde{\mathbf{T}}$ na fronteira Γ_e é obtida de maneira que o erro $\|\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}}\|_2 = 13.34$.

Como podemos observar, devido à presença de perturbações nos dados, não existe relação entre a solução exata \mathbf{Q} e a solução $\tilde{\mathbf{Q}}$ do

problema (2.32). Por outro lado, notamos que o comportamento dos valores singulares σ_i convergem rapidamente para zero, que é característico das matrizes mal condicionadas.

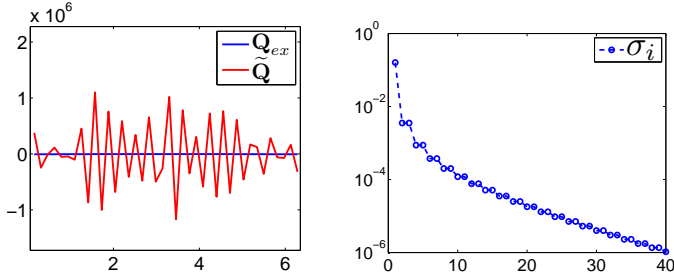


Figura 2.3: Esquerda: comparação entre o fluxo exato \mathbf{Q}_{ex} e o fluxo $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^\dagger(\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))$. Direita: valores singulares da matriz \mathbf{J} .

Pelas observações mencionadas acima, para resolver o problema (2.32) é necessário o uso de métodos de regularização. Neste capítulo, utilizaremos a decomposição generalizada em valores singulares truncados (TGSVD) e regularização de Tikhonov (RT). Para tanto, vamos considerar a GSVD do par (\mathbf{J}, L) , sendo $L \in \mathbb{R}^{p \times M}$ a matriz de diferenciação discreta.

$$\mathbf{J} = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & I_{M-p} \end{bmatrix} X^{-1}, \quad L = V(\Sigma_2, 0)X^{-1}$$

sendo $U = [u_1, \dots, u_M] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ e $V = [v_1, \dots, v_p] \in \mathbb{R}^{p \times p}$ matrizes ortogonais, $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ é não singular, e $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, $\Sigma_2 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ são matrizes diagonais com componente positivas tal que $\sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1$. Denotando $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0)$, com a GSVD disponível, a solução TGSVD é definido como

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\delta, L}^{(k)} = \sum_{i=p-k+1}^p \frac{u_i^T \tilde{\mathbf{b}}}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^M (u_i^T \tilde{\mathbf{b}}) \mathbf{x}_i$$

e a qualidade da solução depende do parâmetro de truncamento k . De maneira similar, a solução regularizada obtida pelo método RT, baseada na GSVD do par (\mathbf{J}, L) é

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\lambda, \delta} = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i}{\lambda^2 \mu_i^2 + \sigma_i^2} (u_i^T \tilde{\mathbf{b}}) \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^M (u_i^T \tilde{\mathbf{b}}) \mathbf{x}_i.$$

Novamente, a qualidade da solução $\tilde{\mathbf{Q}}_{\lambda, \delta}$ depende do valor do parâmetro de regularização λ . Maiores detalhes a respeito das técnicas de regularização TGSVD e TR são descritos no apêndice.

Na prática, os dados são obtidos experimentalmente e, ao utilizarmos métodos de regularização, dois casos são considerados:

1. O erro nos dados $\tilde{\mathbf{T}}$ é conhecido a priori através da estimativa $\|\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|_2 \leq \delta$, sendo \mathbf{T} o vetor de temperaturas exato. Neste caso, os parâmetros de regularização dos métodos TGSVD e RT são determinados utilizando o Princípio da Discrepância, (ver equações (A.8) e (A.12) no apêndice).
2. A estimativa do erro nos dados $\|\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|_2$ é desconhecida. Para este caso existem diferentes critérios de escolha do parâmetro de regularização. Dentre estes, citamos o trabalho de Bazán *et al.* [12], que propuseram o método do produto mínimo (MPR) para calcular o parâmetro de truncamento para o método TGSVD. Por outro lado, para determinar o parâmetro de regularização do método RT, mencionamos o método da curva L (LC), de Hansen e O’Leary [36], e o método do ponto fixo de Bazán *et al.* [5–7].

Nesta tese assumiremos que a estimativa do erro da temperatura é conhecida a priori. A seguir, mostramos o algoritmo proposto para obter as estimativas do fluxo $\tilde{\mathbf{Q}}$ a partir das medidas de temperatura $\tilde{\mathbf{T}}$.

Algoritmo 1:

Dados de entrada: $\alpha, \delta, \lambda_w, q_g, r_e, r_i, T_b, T_{env}, \tilde{\mathbf{T}}$.

Dados de saída: Solução regularizada $\tilde{\mathbf{Q}}$.

1. Calcule a matriz $\hat{\mathbf{A}}$ de (2.19).
2. Calcule o vetor $\hat{\mathbf{g}}_0$ associado ao fluxo $\mathbf{Q} = 0$.
3. Calcule o vetor $\mathbf{T}(0)$ via a equação (2.22).

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{g}}_0$$

4. Para $j = 1, \dots, M$

Calcule o vetor $\mathbf{b}_j = \mathbf{P}(\mathbf{e}_j \otimes (\zeta \mathbf{d}_0 - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1))$ de (2.29).

Resolva o problema (2.30)

$$\hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j} = \mathbf{b}_j$$

Calcule as colunas da matriz \mathbf{J} como

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{S}_e \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial Q_j}.$$

5. Calcule a solução $\tilde{\mathbf{Q}}$ do problema (2.32) via regularização.
-

Além disso, considerando que o problema original (1.1)- (1.3) envolve o coeficiente de transferência de calor convectivo h_{\sim} baseado em aproximações da temperatura na parede interna do tubo \widetilde{T}_0 e do fluxo \mathbf{Q} , as componentes do coeficiente h são estimadas como:

$$h_j = \frac{\mathbf{Q}_j}{T_b - [\widetilde{T}_0]_j}, \quad j = 1, \dots, M, \quad \text{se } T_b \neq [\widetilde{T}_0]_j. \quad (2.33)$$

2.2.2 Custo computacional

Encerramos a seção analisando o custo computacional do método de estimação via resolução do problema (2.32). Começamos notando que, para construir a matriz \mathbf{J} e o vetor de temperatura $\mathbf{T}(0)$, é necessário calcular a matriz $\widehat{\mathbf{A}}^\dagger$ e este procedimento precisa de $\mathcal{O}(M^3(N+1)^3)$ operações. Além do cálculo da matriz pseudoinversa, notamos que o número de colunas da matriz \mathbf{J} corresponde à quantidade de pontos utilizados ϕ_j ($j = 1, \dots, M$). Assim, calcular as M colunas via produtos matriz-vetor requer $\mathcal{O}(M^2(N+1)^2)$ operações. Finalmente, devemos considerar o cálculo da GSVD do par (\mathbf{J}, L) cujo custo é $\mathcal{O}(M^2Np)$ operações. Portanto, o custo total do método de estimação baseado na matriz de sensibilidade é de aproximadamente $\mathcal{O}(M^3(N+1)^3) + \mathcal{O}(M^2(N+1)^2) + \mathcal{O}(M^2Np)$ operações.

Com o objetivo de diminuir as operações envolvidas neste processo, na seguinte seção propomos o método que visa reduzir o número de colunas da matriz \mathbf{J} para $m \ll M$ e, conseqüentemente, reduzir o custo computacional.

2.3 Método de aproximações contínuas em subespaços de dimensão finita

Uma característica típica da abordagem descrita na seção anterior é que, devido ao uso da pseudoinversa $\widehat{\mathbf{A}}^\dagger$, o cálculo da matriz \mathbf{J} tem alto custo computacional. Com o objetivo de reduzir tal custo, determinaremos aproximações para o fluxo Q definidas por

$$\widehat{Q}(\phi) = \sum_{i=1}^m c_i \psi_i(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (2.34)$$

tal que $\widehat{Q}(0) = \widehat{Q}(2\pi)$, sendo c_i incógnitas a serem determinadas e $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ um conjunto de funções contínuas e linearmente indepen-

dente em $[0, 2\pi]$. Para tanto, primeiro observamos que, o valor pontual $\widehat{Q}(\phi_j)$, $j = 1, \dots, M$, pode ser expresso como

$$\widehat{Q}(\phi_j) = \mathbf{F}_j^T \mathbf{c}, \quad (2.35)$$

em que $\mathbf{F}_j = [\psi_1(\phi_j), \dots, \psi_m(\phi_j)]^T$ e $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_m]^T$. Substituindo Q_j em (2.14) pela aproximação dada em (2.35), vemos que o vetor \mathbf{f} em (2.13), pode ser aproximado pelo vetor

$$\mathbf{f}^\psi = [[\mathbf{f}^\psi]_1^T, \dots, [\mathbf{f}^\psi]_M^T]^T, \quad (2.36)$$

sendo

$$[\mathbf{f}^\psi]_j = \mathbf{F}_j^T \mathbf{c} (\rho \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1) - \alpha T_{env} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_{N+1} + \rho \mathbf{d}_N).$$

Seguindo os procedimentos desenvolvidos na solução do problema direto pelo método CPS, estabelecemos um sistema matricial

$$\widehat{\mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{g}}_\psi, \quad (2.37)$$

com $\widehat{\mathbf{g}}_\psi = \mathbf{P}(\mathbf{f}^\psi - \mathbf{q})$, \mathbf{f}^ψ definido em (2.36) e $\widehat{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{T}}$, \mathbf{q} como em (2.19). Claramente, neste caso, ambos, o fluxo $\widehat{Q} = \widehat{Q}(\mathbf{c})$ e a temperatura externa $\widetilde{\mathbf{T}} = \widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{c})$, são dependentes das constantes c_1, \dots, c_m . Assim, seguindo um processo análogo ao descrito na seção anterior, o problema de estimar o fluxo Q a partir das informações obtidas $\widetilde{\mathbf{T}}$ na fronteira externa, pode ser formulado como: determinar o vetor de coeficientes $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ que resolve o problema de minimização

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{J}_b \mathbf{c} - (\widetilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(0))\|_2^2, \quad (2.38)$$

sendo $\mathbf{J}_b \in \mathbb{R}^{M \times m}$, $M \gg m$, a matriz de sensibilidade, e $\mathbf{T}(0)$ a temperatura no tubo externo quando $\mathbf{c} = 0$. Neste caso, as colunas da matriz de sensibilidade \mathbf{J}_b são sub-blocos das soluções do problema linear

$$\widehat{\mathbf{A}} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{c})}{\partial c_j} = \frac{\partial \widehat{\mathbf{g}}_\psi(\mathbf{c})}{\partial c_j} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \psi_j(\phi_1) (\rho \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ \psi_j(\phi_M) (\rho \mathbf{d}_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_1) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.39)$$

Note que, diferentemente do problema (2.32), a solução do (2.38) é calculada num subespaço de menor dimensão, mas ainda assim, o mal condicionamento da matriz de sensibilidade permanece, e métodos de regularização devem ser utilizados. Porém, vale a pena ressaltar que,

neste caso, os métodos de regularização utilizados serão baseados na SVD usual de \mathbf{J}_b , porque as propriedades da solução de (2.38) são desconhecidas.

Finalmente, obtida a solução do problema (2.38) regularizado, a aproximação discreta $\tilde{\mathbf{Q}}$ de \mathbf{Q}_{ex} é obtida via a equação (2.34).

2.3.1 Base de Splines lineares

Entre os subespaços que serão utilizadas para aproximar a função de fluxo Q , primeiro consideramos o subespaço gerado por splines lineares, $\mathcal{B}_s = \{\hat{B}_0, \dots, \hat{B}_m\}$, associados a pontos uniformemente espaçados $\{\hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_m\}$ em $[0, 2\pi]$, conforme mostrados na figura 2.4. Assim, a aproximação para a função de fluxo Q pode ser escrita como

$$\hat{Q}(\phi) = \sum_{i=0}^m c_i \hat{B}_i(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad (2.40)$$

sendo a função \hat{B}_i definida como

$$\hat{B}_i(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < \hat{\phi}_{i-1} \\ \frac{\phi - \hat{\phi}_i}{\hat{\phi}_{i+1} - \hat{\phi}_i}, & \hat{\phi}_{i-1} \leq \phi < \hat{\phi}_i \\ \frac{\phi - \hat{\phi}_{i+1}}{\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_{i+1}}, & \hat{\phi}_i \leq \phi < \hat{\phi}_{i+1} \\ 0, & \phi \geq \hat{\phi}_{i+1}. \end{cases}$$

Os pontos $\{\hat{\phi}_i\}_{i=0}^m$ são escolhidos a partir da partição $\{\phi_0, \dots, \phi_M\}$ com $m \ll M$ tal que $M + 1 = m + k(m - 1)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, considerando que a função \hat{Q} tem que ser 2π -periódica, das propriedades das funções \hat{B}_i [33] segue que $c_0 = c_m$. Assim, \hat{Q} pode ser escrita como

$$\hat{Q}(\phi) = \sum_{i=1}^m c_i B_i(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi], ,$$

sendo $B_i = \hat{B}_i$, $i = 1, \dots, m - 1$ e $B_m = \hat{B}_0 + \hat{B}_m$ e, então, a matriz de sensibilidade \mathbf{J}_b pode ser calculada conforme descrito em (2.39), com B_j em lugar de ψ_j , aproveitando as propriedades das funções B_j . Uma vez construída a matriz de sensibilidade, o problema (2.38) pode ser resolvido usando regularização.

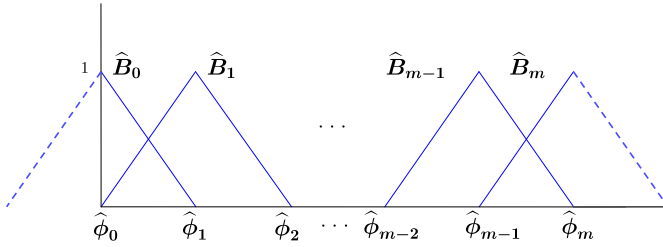


Figura 2.4: Splines \hat{B}_i .

2.3.2 Base de Fourier

Além de utilizar splines para aproximar a função de fluxo Q , também aproximaremos a função Q como combinação linear de uma base de funções trigonométricas $\mathcal{B}_l = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, isto é

$$Q(\phi) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

com $\varphi_1(\phi) = 1$ e $\varphi_{2l}(\phi) = \cos(l\phi)$, $\varphi_{2l+1}(\phi) = \sin(l\phi)$. Note que esta base satisfaz a condição de periodicidade do fluxo Q naturalmente. Portanto, o processo de estimação deve seguir o roteiro geral descrito anteriormente, com φ_j em lugar de ψ_j .

2.4 Resultados numéricos

O objetivo desta seção é ilustrar o desempenho dos métodos desenvolvidos na reconstrução dos parâmetros físicos de interesse (fluxo e coeficiente de transferência de calor). Para tanto, consideramos dados artificiais, gerados a partir de dois problemas associados às funções de fluxo Q_1 , Q_2 , respectivamente, definidas por

$$Q_1(\phi) = -3250 - 1265 \exp[\cos(\phi)], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad (2.41)$$

$$Q_2(\phi) = \begin{cases} -6000, & 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < \phi \leq 2\pi \\ -4200, & \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.42)$$

O fluxo Q_1 , além de possuir regularidade, ele é interessante porque simula o comportamento do fluxo obtido em experimentos de laboratório em [10]. A função Q_2 é um fluxo descontínuo e é empregada para medir a eficiência, em termos de aproximação, dos métodos propostos. As quantidades físicas utilizadas no modelo (1), (2) (4) são extraídas de [20] e apresentadas na Tabela 2.1.

Para efeitos da modelagem, consideramos M pontos ϕ_i uniformemente espaçados em $[0, 2\pi]$ e o vetor de fluxo $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_M]^T$ com $\mathbf{Q}_i = Q(\phi_i)$. Baseado nisso, calculamos os vetores de temperatura na fronteira exterior \mathbf{T}_E e $\mathbf{T}(0)$ conforme descrito em (2.23) e (2.26), respectivamente e, para simular dados experimentais, definimos o vetor de dados de entrada $\mathbf{b} = \mathbf{T}_E - \mathbf{T}(0)$ e o vetor com perturbações $\tilde{\mathbf{b}}$ da forma

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \epsilon,$$

em que ϵ é um vetor de ruídos com componentes aleatórias, tal que o erro relativo presente nos dados satisfaz

$$\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|_2 = \text{NL}\|\mathbf{b}\|_2$$

sendo NL o nível de ruído. Para a avaliação do desempenho dos métodos calcularemos o erro relativo

$$E_{\mathbf{Q}} = \|\mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{Q}}\|_2 / \|\mathbf{Q}\|_2$$

para três diferentes níveis de ruído:

$$NL_1 = 1 \times 10^{-4}, \quad NL_2 = 2.5 \times 10^{-3}, \quad NL_3 = 1 \times 10^{-2}$$

e diferentes raios internos r_i .

Como os métodos de regularização são baseados na SVD/GSVD, para a reconstrução do fluxo Q_1 , que é suave, utilizaremos a GSVD do par (\mathbf{J}, L) , sendo L a matriz de diferenciação discreta de primeira ordem $(M - 1) \times M$, porém, para a reconstrução do fluxo Q_2 , que não é suave, utilizamos a SVD usual. Os parâmetros de regularização são determinados empregando o Princípio da Discrepância. Os métodos de regularização TGSVD e RT, por sua vez, são implementados utilizando as rotinas disponíveis em [39]. O tempo gasto na execução dos métodos é calculado utilizando a função `tic toc` do software MATLAB.

Finalmente, a partir do fluxo estimado $\tilde{\mathbf{Q}}$, utilizamos o problema direto (2.19) para calcular estimativas discretas da temperatura interna $\tilde{\mathbf{T}}_I$ e obtemos a aproximação do fluxo convectivo $\tilde{\mathbf{h}}$ via a equação (2.33). A qualidade das reconstruções do coeficiente de transferência será avaliada por meio do erro relativo

$$E_{\mathbf{h}} = \|\mathbf{h}_{ex} - \tilde{\mathbf{h}}\|_2 / \|\mathbf{h}_{ex}\|_2.$$

2.4.1 Desempenho do método descrito no Algoritmo 1

Para gerar dados do experimento numérico, na discretização do problema direto, consideramos $N = 20$ para a direção radial no intervalo $[r_i, r_e]$ e $M = 128$ para a partição $\{\theta_i\}_{i=0}^M$ de $[0, 2\pi]$. Com isso, a dimensão do sistema (2.19) é $M(N + 1) \times M(N + 1) = 2688 \times 2688$. Por outro lado, para resolver o problema (2.32) via TGSVD e regularização de Tikhonov, a escolha do parâmetro de regularização é feita pelo princípio de discrepância, com a estimativa do erro nos dados, $\delta = \tau \text{NL} \|\mathbf{b}\|_2$, sendo usada como dado de entrada. Em todos os casos usamos $\tau = 1.01$.

Na Tabela 2.2 apresentamos a média do erro relativo $E_{\mathbf{Q}}$ correspondente a 50 reconstruções do fluxo Q_1 . Os valores médios dos parâmetros

r_i	TGSVD			Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
0.010	0.014	0.039	0.096	0.017	0.061	0.187
0.011	0.014	0.032	0.080	0.016	0.041	0.149
0.012	0.012	0.031	0.055	0.014	0.041	0.122
0.013	0.010	0.024	0.051	0.011	0.031	0.081
0.014	0.007	0.022	0.031	0.009	0.020	0.042

Tabela 2.2: Erro relativo médio $E_{\mathbf{Q}}$ associado aos métodos TGSVD e Tikhonov na reconstrução do fluxo Q_1 .

de regularização obtidos no experimento, para o caso $r_i = 0.012$, para os três níveis de ruído, são apresentados Tabela 2.3. No caso do parâmetro de truncamento, o parâmetro \bar{k} denota o valor arredondado para o maior inteiro.

	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{k}	6	2	1
$\bar{\lambda}$	0.04	0.94	2.63

Tabela 2.3: Parâmetros de regularização TGSVD e Tikhonov para a reconstrução do fluxo Q_1 .

Já na Tabela 2.4, mostramos a média do erro relativo na reconstrução do coeficiente de transferência correspondente, $E_{\mathbf{h}}$, também para o caso $r_i = 0.012$, e o tempo de execução, em segundos. Dos resultados, fica claro que ambos os métodos fornecem boas estimativas do coefi-

ente \mathbf{h}_{ex} e que o tempo de execução \bar{t} é praticamente o mesmo para cada método. A segunda observação deve-se ao fato de que a maior quantidade de tempo gasto é no cálculo da matriz pseudoinversa $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$.

	TGSVD			Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{t}	14.92	14.84	14.87	15.30	14.78	14.83
$E_{\mathbf{h}}$	0.012	0.031	0.054	0.014	0.041	0.123

Tabela 2.4: Erro relativo na reconstrução do coeficiente \mathbf{h} e tempo médio \bar{t} gasto associados a Q_1 .

Na Figura 2.5, mostramos os dados de entrada \mathbf{b} , $\tilde{\mathbf{b}}$, e os fluxos exato e estimado, Q_1 e \tilde{Q}_1 . Este último corresponde ao caso em que $r_i = 0.010$ e o nível de ruído é $NL = 5 \times 10^{-3}$.

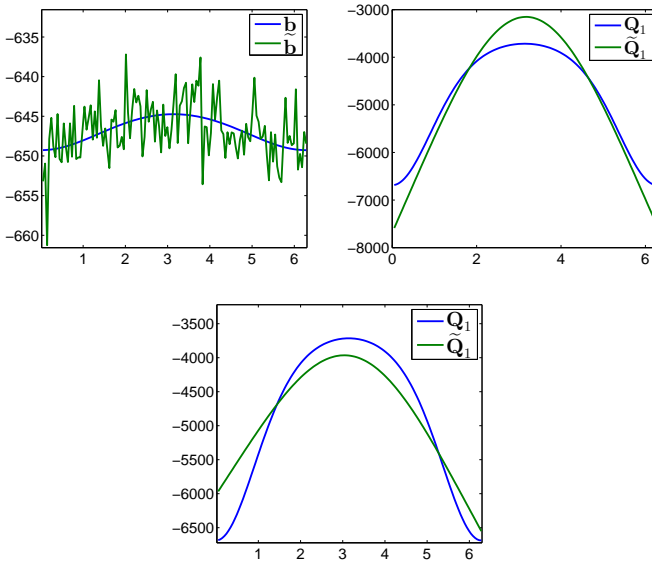


Figura 2.5: Esquerda: Dado de entrada exato e perturbado. Centro: Fluxo exato e reconstruído via TGSVD. Direita: Fluxo exato e reconstruído via RT.

A conclusão que podemos tirar dos resultados obtidos é que os métodos propostos têm um bom desempenho, pois conseguem recuperar

boas estimativas do fluxo exato quando os dados possuem baixo nível de ruído e estimativas razoáveis para níveis grandes de ruído, como mostra a Figura 2.5.

r_i	TSVD			Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
0.010	0.049	0.084	0.146	0.061	0.088	0.152
0.011	0.048	0.081	0.116	0.056	0.084	0.143
0.012	0.047	0.080	0.099	0.052	0.080	0.116
0.013	0.045	0.079	0.098	0.049	0.077	0.096
0.014	0.041	0.076	0.085	0.042	0.073	0.083

Tabela 2.5: Erro relativo médio dos métodos TSVD e Tikhonov para Q_2 .

Analogamente, na Tabela 2.5, mostramos a média do erro relativo E_Q na reconstrução do fluxo Q_2 . Neste caso, como o fluxo é descontínuo, os métodos de truncamento e a regularização de Tikhonov são baseados na SVD usual. Novamente, podemos concluir que os métodos TSVD e regularização de Tikhonov produzem boas estimativas quando o nível de ruído é pequeno. Porém, a qualidade da aproximação tende a piorar quando o erro nos dados aumenta, como pode ser verificado em cada linha da tabela acima. A média dos parâmetros de regularização para o caso em que $r_i = 0.012$, descrita na Tabela 2.6, mostra que o parâmetro de truncamento \bar{k} decresce à medida que o nível de ruído aumenta, enquanto que o parâmetro de regularização $\bar{\lambda}$ cresce. A média do erro relativo na reconstrução do coeficiente convectivo \mathbf{h} e a média do tempo \bar{t} computacional gasto, em segundos, também para $r_i = 0.012$, são mostradas na Tabela 2.7. Observamos que as estimativas do erro são muito parecidas para ambos métodos de regularização.

	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{k}	12	3	2
$\bar{\lambda}$	0.001	0.028	0.088

Tabela 2.6: Parâmetros de regularização k , λ para a reconstrução do fluxo Q_2 .

Na Figura 2.6 mostramos o fluxo exato Q_2 e o estimado \tilde{Q}_2 para o caso em que $r_i = 0.014$, para dois níveis de ruído, $NL = 1 \times 10^{-4}$, 2.5×10^{-3} .

	TSVD			Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{t}	14.91	14.89	14.91	14.85	15.86	14.85
E_h	0.047	0.079	0.098	0.052	0.080	0.111

Tabela 2.7: Erro relativo E_h e tempo médio \bar{t} associados a Q_2 .

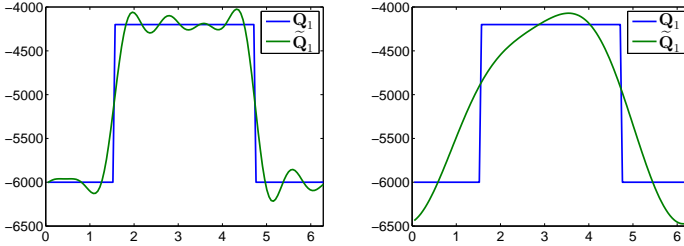


Figura 2.6: Fluxo exato e estimado usando o método TSVD com níveis de ruído $NL = 1 \times 10^{-4}$ e $NL = 2.5 \times 10^{-3}$ respectivamente.

Como observação geral, notamos que o erro relativo da solução aproximada melhora quando o nível de ruído é pequeno e o raio interno r_i é próximo do raio externo r_e . Fisicamente, isto mostra que, para tubos finos, é possível obter boas estimativas do fluxo Q a partir de dados com pouco ruído e estimativas razoáveis para níveis de ruído maiores.

2.4.2 Desempenho do método baseado em subespaços

Agora, mostraremos os resultados numéricos obtidos utilizando os subespaços gerados pelas bases de splines e de Fourier. Os dados de entrada para o experimento são construídos como descrito anteriormente, e os resultados são expressos em termos de médias, também como no caso anterior. No caso do subespaço gerado pela base de splines, usamos $m = 17$, enquanto que, para o subespaço gerado pela base de Fourier, usamos $m = 4$. Em todos os casos, o parâmetro de regularização é determinado pelo princípio da discrepância.

Os resultados correspondentes à reconstrução do fluxo Q_1 , para distintos r_i e distintos níveis de ruído, são descritos na Tabela 2.8. Na Tabela 2.9, mostramos o erro relativo médio E_h e o tempo médio \bar{t} .

Na Tabela 2.10, mostramos os resultados referentes à reconstru-

r_i	Splines-TSVD			Splines-Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
0.010	0.009	0.056	0.140	0.012	0.058	0.136
0.011	0.009	0.055	0.099	0.009	0.055	0.135
0.012	0.008	0.053	0.080	0.007	0.045	0.105
0.013	0.006	0.048	0.061	0.006	0.040	0.080
0.014	0.003	0.027	0.056	0.004	0.024	0.055

Tabela 2.8: Erro relativo médio obtido pelo método Splines-TSVD e Splines-Tikhonov para Q_1 .

	Splines-TSVD			Splines-Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{t}	10.82	10.92	12.03	10.92	10.81	10.80
E_h	0.008	0.053	0.081	0.007	0.046	0.106

Tabela 2.9: Erro médio e tempo médio associado aos métodos Splines-TSVD e Splines-Tikhonov na reconstrução do coeficiente convectivo.

ção do fluxo Q_1 , usando o subespaço gerado pela base de Fourier e, na Tabela 2.11, o tempo médio \bar{t} gasto na reconstrução do coeficiente convectivo, para o caso em que $r_i = 0.012$.

r_i	Fourier-TSVD			Fourier-Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
0.010	0.008	0.003	0.145	0.011	0.058	0.205
0.011	0.008	0.056	0.101	0.009	0.054	0.104
0.012	0.008	0.053	0.075	0.007	0.045	0.110
0.013	0.008	0.050	0.061	0.005	0.037	0.031
0.014	0.008	0.026	0.054	0.002	0.026	0.036

Tabela 2.10: Erro relativo médio obtido pelo método Fourier-TSVD e Fourier-Tikhonov para Q_1 .

	Fourier-TSVD			Fourier-Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{t}	10.46	10.52	10.53	10.56	10.57	10.51
$E_{\mathbf{h}}$	0.008	0.053	0.076	0.007	0.045	0.111

Tabela 2.11: Erro médio e tempo médio associado aos métodos Fourier-TSVD e Fourier-Tikhonov na reconstrução do coeficiente convectivo \mathbf{h} .

A Figura 2.7, mostra os coeficientes convectivos exato e aproximado, associados ao fluxo Q_1 . Os resultados correspondem a uma execução dos métodos para o caso em que $r_i = 0.012$ e $NL = 5 \times 10^{-3}$.

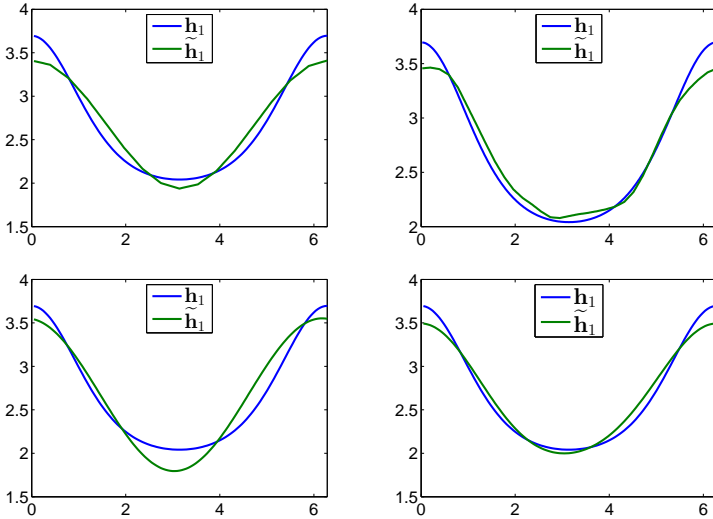


Figura 2.7: Coeficiente convectivo exato e estimado utilizando os métodos TSVD (esquerda) e regularização de Tikhonov (direita). Parte superior: regularização com base de splines. Parte inferior: regularização com base de Fourier.

Finalmente, para compararmos os tempos de execução do Algoritmo 1, denotado por \bar{t}_{reg} , com aqueles gastos pelos métodos que usam subespaços, denotados por \bar{t}_S \bar{t}_F , respectivamente, na Tabela 2.12, mostramos os tempos médios gastos na reconstrução do fluxo Q_1 , para $r_i = 0.012$. Os resultados mostram que a técnica das aproximações contínuas consegue boas estimativas da solução, em um tempo relativamente menor devido a que o cálculo das m colunas da matriz \mathbf{J}_b em

(2.39) é de ordem $\mathcal{O}(M(N+1))$ operações, o qual difere do custo de calcular todas as colunas de \mathbf{J} em (2.29), que é $\mathcal{O}(M^2(N+1)^2)$ operações. No entanto, estes métodos numéricos são computacionalmente caros, pois precisam do cálculo da pseudoinversa de uma matriz de dimensão $M(N+1) \times M(N+1)$. Concluímos que, para reconstruir a distribuição do fluxo de calor \mathbf{Q} a partir das informações de temperatura, na borda exterior do tubo, são necessárias $\mathcal{O}(M^3(N+1)^3)$ operações aritméticas.

	TSVD			Tikhonov		
	NL_1	NL_2	NL_3	NL_1	NL_2	NL_3
\bar{t}_{reg}	14.92	14.84	14.87	15.30	14.78	14.83
\bar{t}_S	10.82	10.92	12.13	10.52	10.81	10.80
\bar{t}_F	10.46	10.52	10.53	10.56	10.57	10.51

Tabela 2.12: Comparação do tempo gasto pelos métodos propostos.

No próximo capítulo, desenvolveremos, com base na série de Fourier, um método para calcular estimativas para o fluxo Q a partir da temperatura na fronteira exterior, que não requer o cálculo da matriz de sensibilidade. Em particular, demonstraremos que o custo da reconstrução fica em torno de $\mathcal{O}(M)$ operações.

Capítulo 3

Reconstrução do fluxo baseada em análise de Fourier

3.1 Sumário e notação

Neste capítulo, apresentamos resultados teóricos sobre a existência e unicidade de solução do problema direto (1.1), (1.2) e (1.4), assim como uma descrição da solução na forma de séries de Fourier. Com isso, estabeleceremos uma relação entre o fluxo e a temperatura na borda externa do tubo via um operador linear, compacto, autoadjunto e injetor. Como principal contribuição, mostramos que o sistema singular associado é determinado explicitamente e é simples de se avaliar.

Baseados nesses resultados, para o caso de dados exatos, apresentamos uma fórmula explícita da solução do problema inverso. Para o caso de dados inexatos, apresentamos métodos de reconstrução baseados no truncamento de uma expansão infinita em valores singulares (TSVE) e regularização de Tikhonov.

A vantagem dos métodos propostos neste capítulo é que não há necessidade da resolução de sistemas lineares relacionados ao problema direto. Dessa forma, são relativamente simples de implementar, além de computacionalmente baratos quando comparados aos métodos desenvolvidos no capítulo anterior.

Daqui em diante, denotamos por \mathcal{H} o espaço de Hilbert das fun-

ções quadrado integráveis em $L^2[0, 2\pi]$ equipado com o produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma associada $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Também, definimos o espaço de Hilbert \mathcal{V} como sendo o completamento do espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com a norma em coordenadas polares

$$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \left[f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta$$

a qual provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{V}} = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \left[fg + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right] r dr d\theta$$

Note que

$$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = |f|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla f|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.1)$$

sendo

$$|f|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} f^2 r dr d\theta, \quad |\nabla f|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} |\nabla f|^2 r dr d\theta$$

$$\nabla f = \left(f_r, \frac{1}{r} f_\theta \right).$$

3.2 Problema direto: análise de Fourier

Os aspectos teóricos relativos a existência e unicidade de solução do problema de valor de fronteira (1.1)-(1.3) e, conseqüentemente, do problema (1.1), (1.2), (1.4), para o caso em que Ω tem fronteira suave, podem ser encontrados em várias referências, ver, por exemplo [55, Teoremas 8.3 e 8.14]. Nesta seção, aproveitando que o domínio Ω é um anel, os aspectos mencionados acima são estudados via análise de Fourier. Para tanto, visto que o problema inverso depende da solução do problema auxiliar (1.1), (1.2), (1.4), começamos com a observação que tal solução pode ser escrita na forma

$$T = V + W \quad (3.2)$$

em que V é solução do problema de valor de fronteira

$$\lambda_w \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \lambda_w \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad r_i < r < r_e, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.3)$$

$$\lambda_w \frac{\partial V}{\partial r}(r_e, \theta) + \alpha V(r_e, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.4)$$

$$-\lambda_w \frac{\partial V}{\partial r}(r_i, \theta) = Q(\theta). \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.5)$$

e W é solução do problema auxiliar

$$\lambda_w \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \lambda_w \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + q_g(r, \theta) = 0, \quad (r_i, r_e) \times [0, 2\pi], \quad (3.6)$$

$$\lambda_w \frac{\partial W}{\partial r}(r_e, \theta) = \alpha (T_{env} - W(r_e, \theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.7)$$

$$-\lambda_w \frac{\partial W}{\partial r}(r_i, \theta) = 0. \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.8)$$

Diferentes maneiras de escrever a solução de (1.1), (1.2), (1.4) podem ser encontradas em [22, 30]. A seguir, iniciaremos a análise detalhada dos problemas (3.3)-(3.5) e (3.6)-(3.8). Supondo que as funções V , W , V_θ e W_θ sejam periódicas de período 2π na variável θ , i.e.,

$$V(r, 0) = V(r, 2\pi), \quad \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, 2\pi) \quad r_i < r < r_e. \quad (3.9)$$

$$W(r, 0) = W(r, 2\pi), \quad \frac{\partial W}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial W}{\partial \theta}(r, 2\pi) \quad r_i < r < r_e.$$

Como veremos mais adiante, a validade desta hipótese dependerá de condições de regularidade sobre Q .

3.2.1 Solução do problema de valor de fronteira homogêneo

Na primeira parte desta seção abordaremos as questões relativas a existência e unicidade de solução do problema (3.3)-(3.5). Por enquanto, construiremos uma solução fraca do problema usando a hipótese que $V \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Para tanto, introduzimos a formulação variacional associada, como segue. Multiplicando a equação (3.3) por $w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ e integrando em Ω , tem-se

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) w + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} w \right] dr d\theta = 0 \quad (3.10)$$

Utilizando integração por partes, em cada integrando apresentado em (3.10), junto com as condições de fronteira (3.4)-(3.5), na primeira

parcela, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) w dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[r_e \frac{\partial V}{\partial r}(r_e, \theta) w(r_e, \theta) - r_i \frac{\partial V}{\partial r}(r_i, \theta) w(r_i, \theta) \right] d\theta \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-r_e \frac{\alpha}{\lambda_w} V(r_e, \theta) w(r_e, \theta) + \frac{r_i}{\lambda_w} Q(\theta) w(r_i, \theta) \right] d\theta \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} dr d\theta
\end{aligned}$$

De maneira análoga, utilizando a condição de periodicidade (3.9) no segundo integrando de (3.10), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{r_i}^{r_e} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} w d\theta dr &= \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial V}{\partial \theta}(r, 2\pi) w(r, 2\pi) - \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, 0) w(r, 0) \right] dr \\
&\quad - \int_{r_i}^{r_e} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta dr \\
&= - \int_{r_i}^{r_e} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta dr
\end{aligned}$$

Assim, pelas identidades obtidas acima, definimos a formulação variacional associada ao problema (3.3)-(3.5) como sendo

$$\begin{cases} \text{Encontre } V \in \mathcal{V} \text{ tal que} \\ a(V, w) = f(w), \quad \forall w \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
a(V, w) &= \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} dr d\theta \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha r_e}{\lambda_w} V(r_e, \theta) w(r_e, \theta) d\theta
\end{aligned} \quad (3.12)$$

e

$$f(w) = \int_0^{2\pi} \frac{r_i}{\lambda_w} Q(\theta) w(r_i, \theta) d\theta \quad (3.13)$$

O próximo passo é mostrar que o problema variacional (3.11) tem solução única. Mostramos este resultado a partir da seguinte proposição.

Teorema 3.2.1. *Seja $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.12) e $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ em (3.13), então a é uma forma bilinear contínua e coerciva e f é linear e contínuo.*

Demonstração.

Sejam $V, w \in \mathcal{V}$, no primeiro integrando de (3.12) utilizamos as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz e obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r^{1/2} \frac{\partial V}{\partial r} r^{1/2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^{1/2}} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial \theta} dr d\theta \\
& \leq \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} + \\
& + \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} \\
& \leq \|V\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}$$

Na segunda parcela de (3.12), utilizamos as desigualdades de Hölder e do traço e temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} r_e \frac{\alpha}{\lambda_w} V(r_e, \theta) w(r_e, \theta) d\theta & \leq r_e \frac{\alpha}{\lambda_w} |V(r_e, \cdot)|_{\mathcal{H}} |w(r_e, \cdot)|_{\mathcal{H}} \\
& \leq C \|V\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}},
\end{aligned}$$

onde $C > 0$. Pelas desigualdades obtidas acima, concluímos que

$$a(V, w) \leq C \|V\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}}, \quad V, w \in \mathcal{V}$$

e, portanto, o operador a é contínuo.

Para mostrar que a é coerciva, procedemos por contradição. Suponha que existe uma sequência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ tal que

$$\|v_n\|_{\mathcal{V}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a(v_n, v_n) = 0. \quad (3.14)$$

Dado $v \in \mathcal{V}$ e o gradiente $\nabla v = (v_r, \frac{1}{r}v_\theta)$, então, pela definição de a , temos

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 r dr d\theta + C \int_{\Gamma_e} v^2(r_e, \theta) d\theta.$$

Como $\{v_n\}$ é limitada no espaço reflexivo \mathcal{V} , existe uma subsequência que denotamos por $\{v_n\} \subset \mathcal{V}$ e $v \in \mathcal{V}$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em \mathcal{V} . Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov [15], temos a inclusão compacta $\mathcal{V} \subset L^2(\Omega)$. Segue a convergência $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, considerando que $v_n \rightharpoonup v$ em \mathcal{V} , pela definição de convergência fraca temos que, para todo $w \in \mathcal{V}$

$$\langle v_n - v, w \rangle_{\mathcal{V}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

ou seja

$$\int_{\Omega} (v_n - v) w r dr d\theta + \int_{\Omega} \nabla(v_n - v) \cdot \nabla w r dr d\theta \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

em particular para $w = v$. Isto implica que

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 r dr d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v_n r dr d\theta \leq |\nabla v|_{L^2(\Omega)} \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla v_n|_{L^2(\Omega)}$$

utilizando (3.14) e pela desigualdade acima obtemos que

$$|\nabla v|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla v_n|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a(v_n, v_n)^{1/2} = 0 \quad (3.15)$$

então, segue-se que $v = c$ é constante. Além disso, pela convergência $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$ e a expressão (3.15), tem-se

$$|v|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{\mathcal{V}} = 1$$

logo $c > 0$. Por outro lado, da convergência $v_n \rightarrow v \in L^2(\Gamma_e)$ e da hipótese (3.14), obtemos

$$C^{1/2} |v|_{L^2(\Gamma_e)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a(v_n, v_n)^{1/2} = 0$$

logo $c = 0$, o que é absurdo. Portanto, a forma bilinear a é coerciva.

Com respeito ao funcional f definido em (3.13), é fácil verificar que é linear. Para mostrar a continuidade seja $w \in \mathcal{V}$ e utilizando a desigualdade do traço obtemos

$$f(w) = \int_0^{2\pi} \frac{r_i}{\lambda_w} Q(\theta) w(r_i, \theta) d\theta \leq \frac{r_i}{\lambda_w} \|Q\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{L^2(\Gamma_i)}$$

$$\leq C\|Q\|_{\mathcal{H}}\|w\|_{\mathcal{V}}.$$

□

Pelos resultados obtidos a partir da Proposição 3.2.1, segue, do Teorema de Lax-Milgram [3], que o problema variacional (3.11) tem única solução V e satisfaz a estimativa *a priori*

$$\begin{aligned}\|V\|_{\mathcal{V}} &\leq \sup_{w \in \mathcal{V}} \frac{a(V, w)}{\|w\|_{\mathcal{V}}} = \sup_{w \in \mathcal{V}} \frac{f(w)}{\|w\|_{\mathcal{V}}} \\ &\leq C\|Q\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

sendo $C > 0$ constante. Portanto, obtemos a desigualdade que relaciona a temperatura V e o fluxo Q

$$\|V\|_{\mathcal{V}} \leq C\|Q\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.16)$$

Tendo provado a existência da função V , mostraremos que esta função pode ser expressa em termos de séries de Fourier. Para tanto, utilizaremos o método da separação de variáveis, como segue. Assumamos que a solução do problema (3.3)-(3.5) pode ser escrita como $V(r, \theta) = X(r)Y(\theta)$. Inserindo este produto em (3.3)-(3.5), obtém-se dois problemas de contorno descritos por equações diferenciais ordinárias, a saber: o problema de Sturm-Liouville

$$Y''(\theta) + \gamma^2 Y(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.17)$$

$$Y(0) = Y(2\pi), \quad Y'(0) = Y'(2\pi) \quad (3.18)$$

e o problema de Cauchy

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - \gamma^2 X(r) = 0, \quad r_i < r < r_e \quad (3.19)$$

$$\lambda_w X'(r_e) + \alpha X(r_e) = 0. \quad (3.20)$$

Cálculos elementares mostram que o problema (3.17)-(3.18) possui um sistema de autovalores e autovetores associados, os quais tem as seguintes características. O primeiro autovalor é $\gamma_0 = 0$ e seu autoespaço associado é $\text{span}\{1\}$. Os autovalores restantes são $\gamma_n = n$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, os quais possuem dupla multiplicidade com seu respectivo autoespaço associado $\text{span}\{\cos(n\theta), \sin(n\theta)\}$. Segue-se que, a solução geral que resolve (3.17)-(3.18) é dada por

$$Y_n(\theta) = a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta),$$

em que $R_n(\theta) = \cos(n\theta)$, $S_n(\theta) = \sin(n\theta)$. Agora, inserimos os valores γ_n no problema de Cauchy (3.19) e obtemos que para $\gamma_0 = 0$ a solução correspondente $X_0(r) \in \text{span}\{1, \ln(r)\}$ e pela condição de fronteira (3.20), esta é obtida explicitamente como sendo

$$X_0(r) = \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) - \frac{\lambda_w}{\alpha r_e}.$$

Para $\gamma_n = n$, não é difícil provar que $X_n \in \text{span}\{r^n, r^{-n}\}$ resolve o problema (3.19)- (3.20) e é da forma

$$X_n(r) = \frac{1}{r^n} + \left(\frac{\lambda_w n r_e^{-n-1} - \alpha r_e^{-n}}{\lambda_w n r_e^{n-1} + \alpha r_e^n}\right) r^n, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \quad (3.21)$$

Seguindo o princípio da superposição, tem-se que V é dada pela expressão formal

$$V(r, \theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r) (a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta)). \quad (3.22)$$

O próximo passo, é mostrar que V é, de fato, solução fraca do problema (3.3)-(3.5).

Afirmção 3.2.1. *A função V definida em (3.22) é solução do problema variacional (3.11) e seus coeficientes são*

$$a_0 = -\frac{\langle Q, R_0 \rangle}{2\pi \lambda_w X'_0(r_i)}, \quad a_n = -\frac{\langle Q, R_n \rangle}{\lambda_w \pi X'_n(r_i)}, \quad b_n = -\frac{\langle Q, S_n \rangle}{\lambda_w \pi X'_n(r_i)}, \quad (3.23)$$

sendo as funções R_n e S_n definidas previamente

Demonstração. Com efeito, para cada $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$, considere a soma parcial

$$\mathcal{Q}_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \langle Q, R_0 \rangle + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \langle Q, R_n \rangle R_n(\theta) + \langle Q, S_n \rangle S_n(\theta). \quad (3.24)$$

É simples verificar que \mathcal{Q}_N converge à Q em \mathcal{H} , isto é

$$\mathcal{Q}_N \rightarrow Q \quad \text{em } \mathcal{H}, \quad \text{quando } N \rightarrow +\infty$$

Se considerarmos a função \mathcal{Q}_N , em vez de Q como condição de fronteira em (3.5), é fácil verificar, nestas condições, que a função

$$V_N(r, \theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^N X_n(r) (a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta)).$$

é solução do problema variacional (3.11).

Agora, passamos a mostrar (3.23). Note que $V_N \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Assim, pela condição (3.5), obtem-se a relação

$$-\lambda_w \left(a_0 X_0'(r_i) + \sum_{n=1}^N X_n'(r_i) (a_n R_n + b_n S_n) \right) = \mathcal{Q}_N(\theta), \quad (3.25)$$

e o resultado segue pela ortogonalidade da base \mathcal{B} . Resta apenas demonstrar que V está bem definida, de fato sejam V_{N_1} , V_{N_2} , com $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$. Como o problema (3.3)-(3.5) é homogêneo, segue-se que $V_{N_1} - V_{N_2}$ também é solução, com condição de fronteira $\mathcal{Q}_{N_1} - \mathcal{Q}_{N_2}$. Assim, pela estimativa *a priori* (3.16), obtemos

$$\|V_{N_1} - V_{N_2}\|_{\mathcal{V}} \leq C \|\mathcal{Q}_{N_1} - \mathcal{Q}_{N_2}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.26)$$

Então, considerando que $\{\mathcal{Q}_N\}_N$ é uma sequência de Cauchy em \mathcal{H} , temos que a sequência $\{V_N\}_N$ é uma sequência de Cauchy em \mathcal{V} , sendo \mathcal{V} um espaço vetorial completo. Portanto, a sequência $\{V_N\}_N$ é convergente e seu limite

$$V(r, \theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r) (a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta)) \quad (3.27)$$

está bem definido.

O próximo passo é mostrar que V é solução fraca do problema (3.3)-(3.5). Efetivamente, pelo que vimos anteriormente, a função V_N é solução do problema variacional

$$a(V_N, w) = c \int_0^{2\pi} \mathcal{Q}_N(\theta) w(r_i, \theta) d\theta \quad \forall w \in \mathcal{V} \quad (3.28)$$

com $c = r_i / \lambda_w$. Considerando que as sequências $\{V_N\}_N$ e $\{\mathcal{Q}_N\}_N$ convergem nos espaços \mathcal{V} e \mathcal{H} , respectivamente, o resultado segue tomando limite em (3.28) quando $N \rightarrow \infty$, isto é

$$a(V, w) = C \int_0^{2\pi} Q(\theta) w(r_i, \theta) d\theta, \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

Portanto, V é solução fraca do problema (3.3)-(3.5). \square

Observação 3.2.1. *Como vimos acima, se $Q \in \mathcal{H}$, então existe a solução fraca V do problema (3.3)-(3.5) expressa em séries por (3.27). Uma pergunta natural é: sob qual hipótese esta solução V é solução forte? No próximo Teorema, demonstraremos resultados de regularidade sobre a função V .*

Teorema 3.2.2. *Seja V a função definida em (3.22), então $V \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_\epsilon)$.*

Demonstração. Simples cálculos mostram que a k -ésima derivada de $X_n(r)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$ é dada por

$$X_n^{(k)}(r) = A_{n,k} r^{-n-k} + \frac{\lambda_w n r_e^{-n-1} - \alpha r_e^{-n}}{\lambda_w n r_e^{n-1} + \alpha r_e^n} B_{n,k} r^{n-k}, \quad n \geq k$$

onde $B_{n,k} = n!/(n-k)!$ e $A_{n,k} = (-1)^k (n+k-1)!/(n-1)!$. Então

$$\frac{X_n^{(k)}(r)}{X_n'(r_i)} = - \left(\frac{r_i}{r}\right)^n \frac{r_i}{r^k} \frac{\lambda_w n (A_{n,k} r_e^{2n} + B_{n,k} r^{2n}) + \alpha r_e (A_{n,k} r_e^{2n} - B_{n,k} r^{2n})}{\lambda_w n^2 (r_e^{2n} - r_i^{2n}) + \alpha n r_e (r_e^{2n} + r_i^{2n})}.$$

Portanto, para $k \geq 1$, $\ell \geq 0$ e $n \geq k$ obtemos

$$\left| a_n X_n^{(k)}(r) R_n^{(\ell)}(\theta) \right| \leq \left(\frac{r_i}{r}\right)^n \frac{n^\ell r_i}{\lambda_w r^k} \frac{(\lambda_w + \alpha r_e)(|A_{n,k}| + B_{n,k}(r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n}) + \alpha n r_e (1 + \rho^{2n})} \|Q\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.29)$$

onde $\rho = r_i/r_e$. Então, para cada $\epsilon \in]0, r_e - r_i[$ e $n \geq k$, tendo em conta que $0 < r/r_e \leq 1$,

$$\sup_{(r,\theta) \in [r_i + \epsilon, r_e] \times [0, 2\pi]} \left| a_n X_n^{(k)}(r) R_n^{(\ell)}(\theta) \right| \leq \frac{r_i}{\alpha r_e \lambda_w r^k} \|Q\|_{\mathcal{H}} C_n(\ell, k, \epsilon), \quad (3.30)$$

onde

$$C_n(\ell, k, \epsilon) = n^{\ell-1} \left(\frac{r_i}{r_i + \epsilon}\right)^n (\lambda_w n + \alpha r_e)(|A_{n,k}| + B_{n,k}).$$

Uma estimativa similar se cumpre para $\left| b_n X_n^{(k)}(r) S_n^{(\ell)}(\theta) \right|$. Note que,

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1}(\ell, k, \epsilon)}{C_n(\ell, k, \epsilon)} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ell-1} \left(\frac{r_i}{r_i + \epsilon}\right) \left(\frac{\lambda_w(n+1) + \alpha r_e}{\lambda_w n + \alpha r_e}\right) \\ &\times \left(\frac{|A_{n+1,k}| + B_{n+1,k}}{|A_{n,k}| + B_{n,k}}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Também,

$$\frac{|A_{n+1,0}| + B_{n+1,0}}{|A_{n,0}| + B_{n,0}} = 1, \quad \frac{|A_{n+1,1}| + B_{n+1,1}}{|A_{n,1}| + B_{n,1}} = \frac{n+1}{n} \quad (3.32)$$

e, para cada $k \in \{2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{|A_{n+1,k}| + B_{n+1,k}}{|A_{n,k}| + B_{n,k}} &= \frac{1}{n(n-k+1)} \frac{(n+k)!(n-k+1)! + n!(n+1)!}{(n+k-1)!(n-k)! + n!(n-1)!} \\
&= \frac{1}{n(n-k+1)} \frac{(n+1)!(n-k+1)!}{n!(n-k)!} \times \\
&\quad \frac{(n+k)(n+k-1) \cdots (n+2) + n(n-1) \cdots (n-k+2)}{(n-1+k)(n-2+k) \cdots (n+1) + (n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)} \\
&\leq \frac{n+1}{n} \frac{(n+k)^{k-1} + n^{k-1}}{(n+1)^{k-1} + (n-k+1)^{k-1}} \\
&\leq \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+k}{n-k+1} \right)^{k-1}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto, para (3.32)-(3.33),

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|A_{n+1,k}| + B_{n+1,k}}{|A_{n,k}| + B_{n,k}} \leq 1$$

e, pela identidade (3.31), obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{n+1}(\ell, k, \epsilon)}{C_n(\ell, k, \epsilon)} \leq \frac{r_i}{r_i + \epsilon} < 1$$

Utilizando o teste da razão para a convergência, concluímos que a série, cujo termo geral é limitado em (3.30), é convergente. Consequentemente, $V \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_e)$ pois a diferenciação da série (3.22) termo a termo produz uma serie uniformemente convergente em $[r_i + \epsilon, r_e] \times [0, 2\pi]$ para cada $\epsilon \in]0, r_e - r_i[$, e a prova termina. \square

Note que não temos como afirmar nada a respeito da suavidade da solução V na fronteira interna Γ_i sem contar com informação *a priori* sobre Q . Para contornar esta dificuldade, assumiremos que o fluxo Q satisfaz certas propriedades, sendo estas baseadas em observações de dados obtidos experimentalmente [20]. Nosso resultado principal é descrito no seguinte Corolário.

Corolário 3.2.1. *Suponha que $Q, Q', Q'' \in \mathcal{H}$ tal que Q e Q' são funções 2π -periódicas. Então a função V , dada em (3.22), resolve o problema (3.3)-(3.5) no sentido clássico.*

Demonstração. Desde que $Q, Q', Q'' \in \mathcal{H}$ onde Q e Q' são 2π -periódicas, pela integração por partes obtemos

$$\langle Q, R_n \rangle = -n^{-2} \langle Q'', R_n \rangle, \quad \langle Q, S_n \rangle = -n^{-2} \langle Q'', S_n \rangle.$$

Então, fazendo procedimento similar à (3.29), podemos deduzir que

$$\begin{aligned} & |X'_n(r)(a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta))| \leq \\ & \leq \frac{2}{\lambda_w n^2} \frac{\lambda_w n^2 (1 - (r/r_e)^{2n}) + \alpha r_e n (1 + (r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n}) + \alpha n r_e (1 + \rho^{2n})} \|Q''\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

mas

$$\frac{\lambda_w n^2 (1 - (r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n}) + \alpha n r_e (1 + \rho^{2n})} \leq \frac{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n})}{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n}) + \alpha n r_e (1 + \rho^{2n})} \leq 1$$

e

$$\frac{\alpha r_e n (1 + (r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n}) + \alpha n r_e (1 + \rho^{2n})} \leq \frac{2\alpha r_e n}{\lambda_w n^2 (1 - \rho^{2n}) + \alpha n r_e (1 + \rho^{2n})} \leq 2.$$

Portanto, de (3.34), segue que

$$\sup_{(r, \theta) \in [r_i, r_e] \times [0, 2\pi]} |X'_n(r)(a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta))| \leq \frac{6}{\lambda_w n^2} \|Q''\|_{L^2}. \quad (3.35)$$

A diferenciação termo a termo da série (3.22), com respeito a r junto com (3.35), mostra que a derivada da série convergem uniformemente em $[r_i, r_e] \times [0, 2\pi]$. Então, (3.4)-(3.5) são satisfeitas no sentido clássico e consequentemente V é uma solução clássica. \square

Com os resultados obtidos, no Teorema 3.2.2 sobre a regularidade de V , mostramos a seguir a relação que constitui a base do método proposto neste trabalho.

Teorema 3.2.3. *Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $A(Q) = V|_{\Gamma_e}$, onde V é solução de (3.3)-(3.5). Então, são satisfeitas as seguintes propriedades:*

1. *A é um operador linear, compacto, autoadjunto, positivo e injetor, tal que*

$$A(Q) = \mu_0 \langle Q, R_0 \rangle R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (\langle Q, R_n \rangle R_n + \langle Q, S_j \rangle S_n) \quad (3.36)$$

em que as funções $R_0(\theta) = 1/\sqrt{2\pi}$, $R_n(\theta) = \cos(n\theta)/\sqrt{\pi}$, $S_n(\theta) = \sin(n\theta)/\sqrt{\pi}$, para $n \geq 1$ e os coeficientes

$$\mu_n = -\frac{X_n(r_e)}{\lambda_w X'_n(r_i)} = \frac{2r_i^{n+1} r_e^n}{\lambda_w n(r_e^{2n} - r_i^{2n}) + \alpha(r_e^{2n+1} + r_e r_i^{2n})} > 0. \quad (3.37)$$

para todo $n \geq 0$

2. A sequência $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ é não crescente e é convergente com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

3. Os valores singulares de A são dados por (3.37), sendo μ_0 autovalor simples, associado à função singular R_0 ; e μ_n , $n \geq 1$, autovalor com dupla multiplicidade associado às funções singulares $\{S_n, R_n\}$. Consequentemente, $\mathcal{R}(A)$, a imagem de A é caracterizada como sendo

$$\mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{H} / \frac{1}{\mu_0^2} \langle f, R_0 \rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n^2} (\langle f, S_n \rangle^2 + \langle f, R_n \rangle^2) < \infty\}. \quad (3.38)$$

Demonstração. Para provar o primeiro item, vemos pela compacidade do operador traço $\Lambda : \mathcal{V} \rightarrow L^2(\Gamma_i) \times L^2(\Gamma_e)$, $\Lambda(u) = (u|_{\Gamma_i}, u|_{\Gamma_e})$ [42, pag. 271] e a desigualdade (3.16) que A é um operador linear compacto. A expansão (3.36) com μ_j em (3.37) resulta de (3.22) e pela suavidade de V em $\Omega \cup \Gamma_e$. Por outro lado, considerando que $\mu_j \in \mathbb{R}$, segue que A é autoadjunto pelo [56, Teorema 2, p. 10]). Com isso, para cada $Q \in \mathcal{H}$, segue que

$$\langle A(Q), Q \rangle = \mu_0 \langle Q, R_0 \rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (|\langle Q, R_n \rangle|^2 + |\langle Q, S_n \rangle|^2) \geq 0.$$

Assim, temos demonstrado que A é um operador positivo. Para provar a injetividade de A , note que pela completude da base \mathcal{B} de \mathcal{H} e (3.36), a equação $AQ = 0$ implica que $Q = 0$, i.e., A é injetora.

Para provar o segundo item, note que

$$\mu_n = \frac{2r_i}{\lambda_w n(\rho^{-n} - \rho^n) + r_e(\rho^n + \rho^{-n})},$$

sendo $\rho = r_i/r_e$. De fato, como $\rho < 1$, é fácil verificar que as sucessões $\{\rho^{-n} - \rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\rho^{-n} + \rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ são não decrescentes. Isso implica o que a sequência μ_n não é crescente e converge a zero quando $n \rightarrow \infty$.

Para provar o último item, notamos que

$$AR_0 = \mu_0 R_0, \quad AS_n = \mu_n S_n, \quad AR_n = \mu_n R_n, \quad n \geq 1$$

que é um resultado imediato de (3.36), então

$$A^*(A(Q)) = \mu_0^2 \langle Q, R_0 \rangle \tilde{R}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^2 (\langle Q, R_n \rangle R_n(\theta) + \langle Q, S_n \rangle S_n(\theta)).$$

Isto mostra que $\{\mu_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ são os autovalores de A^*A . A esse respeito, ver [56, Corolário do Teorema 2]. Portanto, também mostra que μ_j são valores singulares de A . A última parte do item segue do Teorema de Picard [31]. \square

Observação 3.2.2. *Baseado na definição de μ_n , é muito simples verificar que os valores singulares do operador tem decaimento exponencial. Problemas envolvendo operadores compactos com esse tipo de valores singulares, são denominados na literatura como problemas severamente mal postos.*

Pelo Teorema acima, segue que existe uma relação entre o fluxo Q e a temperatura na borda externa $V(r_e, \theta)$. Uma consequência imediata das propriedades teóricas do operador A é que o fluxo Q pode ser determinado como $Q = A^{-1}(V|_{\Gamma_e})$ e descrito, explicitamente, em termos do sistema singular de A e dados de entrada exatos $V|_{\Gamma_e}$, como veremos na próxima seção. Finalmente, observamos que o conjunto de funções, para as quais é garantida a existência do fluxo Q , é determinado pelo terceiro item do Teorema 3.2.3. De fato, supondo que desejamos resolver $AQ = f$, para que uma solução quadrado integrável Q exista, a série descrita em (3.38) precisa ser limitada, o que significa que os coeficientes de Fourier $\langle f, R_i \rangle, \langle S, R_i \rangle$, de f , devem decrescer para zero mais rápido em comparação com os valores singulares μ_i . Em termos de regularidade, isto implica que o subespaço $\mathcal{R}(A)$ é formado por funções muito suaves.

3.2.2 Solução do problema não homogêneo

Começamos assumindo que a função fonte q_g não depende da variável angular. Nesse caso, podemos desprezar as derivadas com respeito a θ em (3.6), e procurar a solução W como uma função que depende apenas de r . Procedendo dessa forma, o problema (3.6)-(3.8) transforma-se em

um problema unidimensional, cuja solução,

$$W(r) = T_{env} + \frac{1}{\lambda_w} \int_r^{r_e} \left(\frac{1}{s} \int_{r_i}^s tq_g(t)dt \right) ds + \frac{1}{\alpha r_e} \int_{r_i}^{r_e} tq_g(t)dt,$$

pode ser avaliada usando algum método de quadratura. Obviamente, uma solução desse tipo, envolve a situação particular onde a função q_g é constante e, nesse caso, a solução pode ser escrita como

$$W(r) = -\frac{q_g}{4\lambda_w}(r - r_e^2) + \frac{q_g}{2\lambda_w}r_i^2 \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) + T_{env} + \frac{q_g}{2\alpha r_e}(r_e^2 - r_i^2). \quad (3.39)$$

Vale a pena ressaltar que, o caso q_g constante aparece frequentemente em problemas inversos em transferência de calor, nos quais q_g é gerado em laboratório e representa uma fonte de calor uniforme gerado pelo efeito Joule [30, 52].

A existência e unicidade de solução do problema (3.6)-(3.8), para o caso do termo fonte q_g depender de ambas as variáveis, depende basicamente de hipóteses de regularidade sobre o fluxo Q , e pode ser abordado seguindo [55]. Outra alternativa é construir soluções fracas ou soluções numéricas. A construção de soluções fracas pode ser feita via formulação do problema variacional,

$$\begin{cases} \text{Encontre } W \in \mathcal{V} \text{ tal que} \\ a(W, w) = g(w), \quad \forall w \in \mathcal{V} \end{cases}$$

sendo a o operador bilinear definido em (3.12) e

$$g(w) = \frac{1}{\lambda_w} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r q_g(r, \theta) w(r, \theta) dr d\theta + \frac{\alpha r_e T_{env}}{\lambda_w} \int_0^{2\pi} w(r_e, \theta) d\theta,$$

seguindo o procedimento descrito no caso do problema homogêneo, com a hipótese adicional da função $q_g(r, \theta)$ pertencer ao espaço $L^2(\Omega)$. Ou seja, baseado no Teorema de Lax-Milgram [3], podemos verificar a existência de uma única solução fraca do problema (3.6)-(3.8). Porém, quando o termo fonte depende de ambas as variáveis, na prática, apenas soluções numéricas podem ser construídas e, nesse caso, métodos numéricos altamente precisos são recomendados. Neste trabalho, para o caso do termo fonte depender de ambas as variáveis, $q_g = q_g(r, \phi)$, utilizaremos o método CSP detalhado no capítulo anterior. Com este procedimento obtemos um sistema matricial

$$\widehat{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{h}} \quad (3.40)$$

sendo

$$\widehat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_M) + \lambda_w (R^{-2} \otimes \mathcal{D}^{(2)}), \quad \widetilde{\mathbf{W}} = [\widetilde{\mathbf{W}}_0^T, \dots, \widetilde{\mathbf{W}}_N^T]^T, \quad \widehat{\mathbf{h}} = \mathbf{P}(\mathbf{f} - \mathbf{q})$$

com

$$\widetilde{\mathbf{W}}_j = [W(r_j, \phi_1), \dots, W(r_j, \phi_M)]^T, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \dots, \mathbf{f}_M^T]^T, \quad \mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j^{(b)}$$

e

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_M^T]^T, \quad \mathbf{q}_j = [q_g(r_0, \phi_j), \dots, q_g(r_N, \phi_j)]^T.$$

sendo a componente $\widetilde{\mathbf{W}}_N$ o vetor que contém as informações na fronteira Γ_e , via o produto $\widetilde{\mathbf{W}}_N = \mathbf{S}_e \widetilde{\mathbf{W}}$, com \mathbf{S}_e definido em (2.22). Note também que no último caso, pelo que foi visto no capítulo anterior, a resolução do problema (3.40) demandará um custo computacional de $\mathcal{O}((N+1)^3 \times M^3)$ operações.

Observação 3.2.3. *Pelos resultados de existência e unicidade descritos acima, podemos concluir que a função $T = V + W$ é bem definida e é solução fraca do problema (1.1)-(1.3). Note que do Teorema 3.2.3, podemos reformular a relação entre o fluxo Q e a temperatura T na fronteira Γ_e via a equação*

$$A(Q) = T|_{\Gamma_e} - W|_{\Gamma_e}. \quad (3.41)$$

Esta relação será a base para estudar o problema inverso, na próxima seção.

3.3 Problema inverso

Nesta seção, estudamos o problema inverso, que consiste na determinação de aproximações do fluxo de calor Q a partir de dados da temperatura na fronteira exterior $T(r_e, \cdot)$. Para tanto, como ocorre frequentemente em problemas inversos em transferência de calor [20, 27, 52, 53], para simplicidade, assumiremos que a função de fonte q_g é constante em Ω . Assim, utilizaremos a função radial $u(r) \doteq W(r)$ definida em (3.39). Assim, o problema inverso pode ser formulado através de uma equação linear via o operador A , definido em (3.36), como sendo

$$A(Q) = T_e - u(r_e), \quad T_e = T(r_e, \theta).$$

Entretanto, note, pela injetividade de A , que este problema tem, no máximo, uma solução. Se denotarmos por $G = T_e - u(r_e) \in \mathcal{R}(A)$,

então, pelo Teorema de Picard [31], o fluxo Q pode ser escrito como

$$Q(\theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_j} (\langle G, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G, S_j \rangle S_j(\theta)), \quad (3.42)$$

sendo a convergência na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Pela expansão (3.42), temos que a solução Q é escrita em termos de funções suaves e 2π -periódicas.

No entanto, na prática nos deparamos com dados de entrada arbitrários da forma $G_\delta(\theta) \doteq T_\delta(r_e, \theta) - u(r_e)$, com $G_\delta \notin \mathcal{R}(A)$, e estimadas pelo erro

$$\|G - G_\delta\|_{\mathcal{H}} = \|T_e - T_\delta\|_{\mathcal{H}} \leq \delta, \quad (3.43)$$

Assim, pelo fato de que o operador $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ é descontínuo [31, pag. 38], calcular estimativas da solução Q torna-se complicado, pois pequenas variações presentes nos dados de entrada podem produzir grandes perturbações na solução. De fato, se introduzirmos

$$Q_\delta(\theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_j} (\langle G_\delta, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j(\theta)), \quad (3.44)$$

por causa do comportamento dos valores singulares, (veja Teorema 3.2.3 item 2), é claro que a série deve divergir ou diferir enormemente de $Q(\theta)$. Para contornar essas dificuldades, usaremos métodos de regularização.

3.3.1 Expansão truncada de valores singulares

O primeiro método, denominado expansão truncada de valores singulares (TSVE) é um método intuitivo que procura mitigar a propagação do erro $T_e - T_\delta$ em (3.42) devido a divisão por pequenos valores singulares μ_j . Assim, a TSVE procura aproximações estáveis para a solução $Q(\theta)$ definindo soluções truncadas dadas por

$$Q_{k,\delta}(\theta) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu_j} (\langle G_\delta, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j(\theta)). \quad (3.45)$$

Note que, se denotarmos por $Q_k(\theta)$ a série (3.42) truncada em k termos, então

$$Q_{k,\delta}(\theta) = Q_k(\theta) + \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu_j} (\langle T_\delta - T_e, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle T_\delta - T_e, S_j \rangle S_j(\theta)).$$

A equação acima mostra que $Q_{k,\delta}$ pode ser fortemente influenciada pelo segundo somatório, pois, como a sequência de valores singulares $\{\mu_j\}_j$ decresce para zero, deve existir um índice $j \geq j_0$ tal que $\mu_j \ll \|T_\delta - T\|_2$, ficando evidente que a partir desse índice a qualidade da solução $Q_{k,\delta}(\theta)$ deve deteriorar. Dito em outras palavras, a qualidade de $Q_{k,\delta}(\theta)$ como aproximação para $Q(\theta)$ depende fortemente da escolha do índice de truncamento k .

Conforme já mencionado, nesta tese o parâmetro de truncamento será determinado utilizando o Princípio da Discrepância (DP) de Morozov [31], impondo que o resíduo da solução aproximada, $A(Q_{k,\delta}) - G_\delta$, seja da ordem do erro presente nos dados. Ou seja, dado $\tau \geq 1$, escolhamos o índice de truncamento, denotado por \hat{k} , tal que

$$\hat{k} = \inf\{k \in \mathbb{N}; \|A(Q_{k,\delta}) - G_\delta\|_{\mathcal{H}} \leq \tau\delta\} \quad (3.46)$$

Para referência futura, a norma do resíduo associado a $Q_{k,\delta}(\theta)$, denotado por $\|r_{k,\delta}\|_{\mathcal{H}}$, pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \|r_{k,\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|G_\delta - A(Q_{k,\delta})\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 - \sum_{j=0}^k (\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2) \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} (\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2). \end{aligned}$$

É importante observar que, por causa do Princípio da Discrepância, o índice de truncamento \hat{k} deve satisfazer a desigualdade

$$\sum_{j=\hat{k}+1}^{\infty} (\langle G_\delta, R_i \rangle^2 + \langle G_\delta, S_i \rangle^2) \leq \tau^2 \delta^2 \leq \sum_{j=\hat{k}}^{\infty} (\langle G_\delta, R_i \rangle^2 + \langle G_\delta, S_i \rangle^2). \quad (3.47)$$

3.3.2 Análise de erro e taxas de convergência para TSVE

Nesta última parte estudaremos as taxas de convergência do método TSVE, associado com o princípio da Discrepância, isto é, a rapidez em que a solução $Q_{\hat{k},\delta}$ aproxima à função Q . Com este objetivo, assumiremos hipóteses de regularidade sobre a função Q , a saber: a condição de fonte tipo Hölder [31, 35] e a condição de fonte Logarítmica [41, 44, 51]. Como veremos mais adiante, estas condições *a priori*, são necessárias para obter a estimativa do erro. Começaremos com a condição tipo Hölder. Primeiro, descrevemos propriedades desejáveis do fluxo Q .

Lema 3.3.1. *Suponha que $Q \in \mathcal{R}((A^*A)^\nu)$ para algum $\nu > 0$, então a série*

$$C = \frac{1}{\mu_0^{2(2\nu+1)}} \langle G, R_0 \rangle^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{2(2\nu+1)}} (\langle G, R_j \rangle^2 + \langle G, S_j \rangle^2).$$

é convergente.

Demonstração. Pela hipótese sobre Q , existe um elemento $z \in \mathcal{H}$ tal que $Q = A^{2\nu}z$. Então, pelo Teorema 3.2.3, item 1, a função Q é expressa como

$$Q(\theta) = \mu_0^{2\nu} \langle z, R_0 \rangle R_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2\nu} (\langle z, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle z, S_j \rangle S_j(\theta)).$$

Por outro lado, utilizando (3.42), segue que o fluxo tem a representação em séries da forma

$$Q(\theta) = \frac{1}{\mu_0} \langle G, R_0 \rangle R_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} (\langle G, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G, S_j \rangle S_j(\theta)).$$

Logo, pela ortogonalidade da base \mathcal{B} , obtem-se, as seguintes relações, para cada $j \in \{0, 1, \dots\}$:

$$\langle z, R_j \rangle = \frac{1}{\mu_j^{2\nu+1}} \langle G, R_j \rangle, \quad \langle z, S_j \rangle = \frac{1}{\mu_j^{2\nu+1}} \langle G, S_j \rangle. \quad (3.48)$$

Como $z \in \mathcal{H}$, temos

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (\langle z, R_j \rangle^2 + \langle z, S_j \rangle^2) < \infty. \quad (3.49)$$

O resultado procurado é obtido substituindo as identidades (3.48) em (3.49). \square

O resultado central sobre a qualidade da solução calculada pela TSVE é descrito no próximo teorema.

Teorema 3.3.1. *Suponha que $Q \in \mathcal{R}((A^*A)^\nu)$ para algum $\nu > 0$ e $T_\delta \in \mathcal{H}$ tal que satisfaz (3.43). Se $Q_{\widehat{k}, \delta}$ é definida por (3.45), onde o parâmetro \widehat{k} é determinado por (3.46), então obtemos a seguinte estimativa de erro para a solução regularizada.*

$$\|Q - Q_{\widehat{k}, \delta}\|_{\mathcal{H}} \leq C^{\frac{1}{2}} C_\tau \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}, \quad (3.50)$$

com $C_\tau = (\tau + \tau_1)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} + (\tau - \tau_2)^{-\frac{1}{2\nu+1}}$, $0 < \tau_1, \tau_2 < 1$ e $\tau \geq 1$.

Demonstração. Para estimar o erro $Q - Q_{\widehat{k},\delta}$ utilizamos a desigualdade triangular

$$\|Q - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq \|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}} + \|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.51)$$

e procedemos a estimar cada uma das normas separadamente. Na primeira parcela, notamos que

$$\|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2} (a_j^2 + b_j^2), \quad a_j = \langle G, R_j \rangle, \quad b_j = \langle G, S_j \rangle. \quad (3.52)$$

Agora, utilizamos a desigualdade de Hölder

$$\sum_j \alpha_j \beta_j \leq \left(\sum_j \alpha_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_j \beta_j^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0.$$

com índices

$$p = 2\nu + 1, \quad q = \frac{2\nu + 1}{2\nu},$$

e escolhas apropriadas de α_j e β_j . De fato, note que o termo geral em (3.52) pode ser escrito como

$$\frac{1}{\mu_j^2} (a_j^2 + b_j^2) = \left(\frac{1}{\mu_j^2} a_j^{\frac{2}{2\nu+1}} \right) \left(a_j^{\frac{4\nu}{2\nu+1}} \right) + \left(\frac{1}{\mu_j^2} b_j^{\frac{2}{2\nu+1}} \right) \left(b_j^{\frac{4\nu}{2\nu+1}} \right),$$

então, em (3.52) a desigualdade de Hölder produz

$$\begin{aligned} \|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left[\sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{\frac{2}{2\nu+1}}} a_j^2 \right]^{\frac{1}{2\nu+1}} \left[\sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} a_j^2 \right]^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \\ &\quad + \left[\sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{\frac{2}{2\nu+1}}} b_j^2 \right]^{\frac{1}{2\nu+1}} \left[\sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} b_j^2 \right]^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}. \end{aligned}$$

Usando, novamente, a desigualdade de Hölder, o lado direito da desigualdade acima pode ser estimado como

$$\|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left[\sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) \right]^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}, \quad (3.53)$$

onde $C = \left[\sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{2(2\nu+1)}} (a_j^2 + b_j^2) \right]^{\frac{1}{2\nu+1}}$ é limitada pelo Lema anterior.

O próximo passo é estimar o segundo fator em (3.53). Para tanto, denotamos por $\mathcal{P}_{\widehat{k}+1}$ o operador projeção ortogonal de \mathcal{H} sobre o subespaço $\text{span}\{R_{\widehat{k}+1}, S_{\widehat{k}+1}, R_{\widehat{k}+2}, S_{\widehat{k}+2}, \dots\}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) &= \|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1}(G)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \left[\|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1}(T_e - T_\delta)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1}(G_\delta)\|_{\mathcal{H}} \right]^2 \\ &\leq (\tau_1 + \tau)^2 \delta^2, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde temos introduzimos a variável $\delta_1 = \|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1}(T_e - T_\delta)\|_{\mathcal{H}} < \delta$, definido $\tau_1 = \delta_1/\delta$ e utilizado as condições (3.43) e (3.47). Substituindo (3.54) em (3.53), segue que

$$\|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}} \leq C^{\frac{1}{2}} (\tau_1 + \tau)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \quad (3.55)$$

Agora, vamos estimar a segunda parcela de (3.51). Note que

$$\|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=0}^{\widehat{k}} \frac{1}{\mu_j^2} (\langle T_e - T_\delta, R_j \rangle^2 + \langle T_e - T_\delta, S_j \rangle^2) \leq \frac{\delta^2}{\mu_{\widehat{k}}^2}. \quad (3.56)$$

logo devemos limitar o último termo na desigualdade acima. Para tanto, procedemos como em (3.54) e utilizamos a condição (3.47), associado ao índice de truncamento \widehat{k} , e obtemos

$$\begin{aligned} \tau^2 \delta^2 &\leq \sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} (\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2) \\ &\leq \left\{ \left[\sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} \langle T_\delta - T, R_j \rangle^2 + \langle T_\delta - T, S_j \rangle^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} a_j^2 + b_j^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \|\mathcal{P}_{\widehat{k}}(T_\delta - T)\|_{\mathcal{H}} + \left[\sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} a_j^2 + b_j^2 \right]^{1/2} \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Definindo $\delta_2 = \|\mathcal{P}_{\widehat{k}}(T_\delta - T)\|_{\mathcal{H}}$, obtemos a relação

$$\tau\delta \leq \delta_2 + \left[\sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) \right]^{1/2} \Leftrightarrow (\tau - \tau_2)^2 \delta^2 \leq \sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} \langle G, R_j \rangle^2 + \langle G, S_j \rangle^2,$$

em que $\tau_2 = \delta_2/\delta$. Como $\mu_{\widehat{k}} \geq \mu_j$ para $j \geq \widehat{k}$, então

$$\begin{aligned} (\tau - \tau_2)^2 \delta^2 &\leq \sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} (\langle G, R_j \rangle^2 + \langle G, S_j \rangle^2) \\ &\leq \mu_{\widehat{k}}^{2(2\nu+1)} \sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{2(2\nu+1)}} (\langle G, R_j \rangle^2 + \langle G, S_j \rangle^2) \\ &\leq \mu_{\widehat{k}}^{2(2\nu+1)} C^{2\nu+1}, \end{aligned}$$

e assim

$$\frac{1}{\mu_{\widehat{k}}^2} \leq C(\tau - \tau_2)^{-\frac{2}{2\nu+1}} \delta^{-\frac{2}{2\nu+1}} \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{\mu_{\widehat{k}}^2} \leq C(\tau - \tau_2)^{-\frac{2}{2\nu+1}} \delta^{2 - \frac{2}{2\nu+1}}.$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.56), obtemos

$$\|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq C^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau_2)^{-\frac{1}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}. \quad (3.58)$$

Finalmente, utilizando as estimativas (3.58) e (3.55) em (3.51), obtemos

$$\|Q - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq C^{\frac{1}{2}} C_\tau \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}, \quad (3.59)$$

sendo $C_\tau = (\tau + \tau_1)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} + (\tau - \tau_2)^{-\frac{1}{2\nu+1}}$. \square

Observação 3.3.1. *Ressaltamos que a condição de Hölder sobre o fluxo $Q \in \mathcal{R}((A^*A)^\nu)$ é muito importante neste resultado, pois garante que a constante C , definida no Lema 3.3.1, é limitada. Além disso, esta hipótese torna-se natural quando $\nu = 1/2$ (o que produz a taxa do erro $\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$), pois aqui estaríamos exigindo apenas que $Q \in \mathcal{R}(A)$, o que é aceitável devido ao fato da solução Q ser expressa na forma de série infinita em termos de uma base ortonormal de $\overline{\mathcal{R}(A)}$.*

Para o caso em que $\nu > 1/2$, a situação é diferente, porque a convergência da série que define a constante C requer que os coeficientes de

Fourier $\langle G, R_j \rangle, \langle G, S_j \rangle$ decaíam mais depressa do que as potências dos valores singulares $\mu_j^{2\nu+1}$, sendo que estes têm decaimento exponencial. Isto, somente é possível quando a função G é muito regular. Assim sendo, hipóteses menos restritivas devem ser procuradas.

Como mencionado acima, a hipótese $Q \in \mathcal{R}((A^*A)^\nu)$ é muito restritiva para problemas mal postos [44, 51] cujos valores singulares tem decaimento exponencial. Na verdade, para problemas deste tipo, é usado na literatura condições de fonte Logarítmica, isto é, $Q \in M_{p,\varrho}^{\log}(A)$ sendo $M_{p,\varrho}^{\log}(A)$ definido como

$$M_{p,\varrho}^{\log}(A) = \{u \in \mathcal{H}; u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}z, \|z\|_{\mathcal{H}} \leq \varrho\},$$

com $p > 0$ e $\varrho > 0$. Na sequência, para completude, apresentamos resultados sobre o assunto extraídos de [9]. Para tanto, assumimos que os parâmetros físicos satisfazem $\rho < \alpha$. Com estas hipóteses, e com auxílio do seguinte Lema mostraremos a estimativa de erro $\|Q - Q_{\hat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}}$ quando o índice de truncamento \hat{k} é determinado pelo DP.

Lema 3.3.2. *Seja \hat{k} o índice de truncamento determinado pelo DP e assumamos que $Q \in M_{p,\varrho}^{\log}(A)$. Então, a seguinte estimativa é válida.*

$$(\tau - 1)\delta \leq \|AQ_{\hat{k}-1} - G\|_{\mathcal{H}} \leq \varrho\mu_{\hat{k}} \ln^{-p} \mu_{\hat{k}}^{-2}. \quad (3.60)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P}_{\hat{k}}$ o projetor ortogonal definido no Teorema anterior. É simples de verificar a seguinte igualdade:

$$\|AQ_{\hat{k}-1} - G\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=\hat{k}}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) = \|\mathcal{P}_{\hat{k}}G\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.61)$$

sendo $a_j = \langle G, R_j \rangle$, $b_j = \langle G, S_j \rangle$. Como \hat{k} é escolhido pelo DP, pela desigualdade (3.47) tem-se:

$$\begin{aligned} \tau^2\delta^2 &\leq \sum_{j=\hat{k}}^{\infty} (\langle G_{\delta}, R_j \rangle^2 + \langle G_{\delta}, S_j \rangle^2) = \|\mathcal{P}_{\hat{k}}G_{\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \left(\|\mathcal{P}_{\hat{k}}(G_{\delta} - G)\|_{\mathcal{H}} + \|AQ_{\hat{k}-1} - G\|_{\mathcal{H}} \right)^2. \end{aligned}$$

Assim, verificamos que a primeira desigualdade de (3.60) é satisfeita. Por outro lado, se $Q \in M_{p,\varrho}^{\log}(A)$, então utilizando a decomposição espectral do operador A^*A , temos que o operador $\ln^{-p}(A^*A)^{-1}$ está bem definido [31], e obtemos

$$Q(\theta) = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}z = \sum_{j=0}^{\infty} \ln^{-p} \mu_j^{-2} (\langle z, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle z, S_j \rangle S_j(\theta)) \quad (3.62)$$

para algum $z \in \mathcal{H}$. Então o resíduo pode ser expresso como

$$G - AQ_{\widehat{k}-1} = AQ - AQ_{\widehat{k}-1} = \sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} \mu_j \ln^{-p} \mu_j^{-2} (\langle z, R_j \rangle R_j + \langle z, S_j \rangle S_j).$$

Logo, para $j \geq \widehat{k}$, temos que $\mu_j \leq \mu_{\widehat{k}}$; isto implica a desigualdade $\ln^{-p} \mu_j^{-2} \leq \ln^{-p} \mu_{\widehat{k}}^{-2}$. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \|AQ_{\widehat{k}-1} - G\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sum_{j=\widehat{k}}^{\infty} \mu_j^2 (\ln^{-p} \mu_j^{-2})^2 (\langle z, R_j \rangle^2 + \langle z, S_j \rangle^2) \\ &\leq \mu_{\widehat{k}}^2 (\ln^{-p} \mu_{\widehat{k}}^{-2})^2 \|z\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

Agora faremos uso de um resultado auxiliar mostrado por Mair [44].

Lema 3.3.3. *Sejam A, B operadores entre os espaços de Hilbert X, Y tal que para todo $x \in \mathcal{R}(B^*B)$*

$$\int \varphi(\lambda^{-1}) \lambda d\mu_{x,x}(\lambda) \leq \|Ax\|_{\mathcal{H}}^2,$$

sendo $\mu_{x,x}$ a medida espectral de B^*B e $\varphi(s) = s \exp(-s^{1/2p})$. Se para algum $u \in X$, as seguintes desigualdades $\|Au\|_Y \leq \varepsilon$ e $\|Bu\|_Y \leq 1$ são satisfeitas, então

$$\|u\|_X \leq \ln^{-p} \frac{1}{\varepsilon^2} (1 + o(1)).$$

Proposição 3.3.1. *Assumamos que $Q \in M_{p,\varrho}^{\log}(A)$ e $T_\delta \in \mathcal{H}$ satisfaz (3.43). Então, dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno a seguinte estimativa de erro é satisfeita*

$$\|Q - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq C \ln^{-p} \frac{1}{\delta}, \quad C = C(p, \varrho, \tau) > 0. \quad (3.63)$$

Demonstração. Para estimar o erro $Q - Q_{\widehat{k},\delta}$, faremos uso da desigualdade triangular

$$\|Q - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq \|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}} + \|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \quad (3.64)$$

e estimaremos cada termo separadamente. De fato, seja $u = \varrho^{-1}(Q - Q_{\widehat{k}})$ e utilizamos (3.62) obtemos

$$u(\theta) = \varrho^{-1} \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \ln^{-p} \mu_j^{-2} (\langle z, R_j \rangle R_j + \langle z, S_j \rangle S_j). \quad (3.65)$$

Seja $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $Bz = \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \ln^p \mu_j^{-2} (\langle z, R_j \rangle R_j + \langle z, S_j \rangle S_j)$. Então

$$Bu = \varrho^{-1} \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} (\langle z, R_j \rangle R_j + \langle z, S_j \rangle S_j), \quad (3.66)$$

então,

$$\|Bu\|_{\mathcal{H}}^2 = \varrho^{-2} \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} (\langle z, R_j \rangle^2 + \langle z, S_j \rangle^2) \leq \varrho^{-2} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 1. \quad (3.67)$$

Seja $x \in \mathcal{R}(B^*B)$ e $\varphi, \mu_{x,x}$ como no Lema 3.3.3. Então, pela definição de B temos

$$\begin{aligned} \int \varphi(\lambda^{-1}) \lambda d\mu_{x,x}(\lambda) &= \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \varphi((\ln^{-p} \mu_j^{-2})^2) (\ln^p \mu_j^{-2})^2 (\langle x, R_j \rangle^2 + \langle x, S_j \rangle^2) \\ &= \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} (\ln^{-p} \mu_j^{-2})^2 \exp(-[(\ln^{-p} \mu_j^{-2})^2]^{-1/2p}) (\ln^p \mu_j^{-2})^2 (\langle x, R_j \rangle^2 + \langle x, S_j \rangle^2) \\ &= \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \exp(-\ln \mu_j^{-2}) (\langle x, R_j \rangle^2 + \langle x, S_j \rangle^2) \leq \|Ax\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, da desigualdade a esquerda de (3.47) e a expressão

$$Au = \varrho^{-1} (AQ - AQ_{\widehat{k}}) = \varrho^{-1} \sum_{j=\widehat{k}+1}^{\infty} \langle G, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G, S_j \rangle S_j(\theta)$$

implica que

$$\begin{aligned} \|Au\|_{\mathcal{H}}^2 &= \varrho^{-2} \|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1} G\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \varrho^{-2} (\|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1}(G - G_{\delta})\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{P}_{\widehat{k}+1} G_{\delta}\|_{\mathcal{H}})^2 \\ &\leq (\tau + 1)^2 \varrho^{-2} \delta^2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Logo, pelo Lema 3.3.3 e as expressões (3.67)-(3.68), para δ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned} \|Q - Q_{\widehat{k}}\|_{\mathcal{H}} &= \varrho \|u\|_{\mathcal{H}} \leq \varrho \ln^{-p} \left(\frac{1}{(\tau+1)^2 \varrho^{-2} \delta^2} \right) (1 + o(1)) \\ &\leq 2\varrho \frac{1}{(\ln((\tau+1)^{-2} \varrho^2) + \ln(\delta^{-2}))^p} \\ &\leq C(p, \varrho) \ln^{-p} \left(\frac{1}{\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Assim, temos estimado o primeiro termo da desigualdade (3.64). Para estimar o segundo termo, note que

$$\|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=0}^{\widehat{k}} \frac{1}{\mu_j^2} (\langle T_{r_e} - T_\delta, R_j \rangle^2 + \langle T_{r_e} - T_\delta, S_j \rangle^2) \leq \frac{\delta^2}{\mu_{\widehat{k}}^2}. \quad (3.70)$$

Se $\delta \leq \mu_{\widehat{k}}^2$, então obtemos

$$\|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq \delta^{1/2} < \ln^{-p} \left(\frac{1}{\delta} \right). \quad (3.71)$$

caso contrário, se $\delta > \mu_{\widehat{k}}^2$, então $\ln^{-p} \mu_{\widehat{k}}^{-2} < \ln^{-p}(\delta^{-1})$. Utilizando os extremos de (3.60), obtemos

$$(\tau-1) \frac{\delta}{\mu_{\widehat{k}}} \leq \varrho \ln^{-p} \mu_{\widehat{k}}^{-2} \leq \varrho \ln^{-p} \left(\frac{1}{\delta} \right).$$

Portanto, obtemos

$$\|Q_{\widehat{k}} - Q_{\widehat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\varrho}{\tau-1} \ln^{-p} \left(\frac{1}{\delta} \right). \quad (3.72)$$

O resultado procurado segue de (3.71)-(3.72), (3.70) em (3.64). \square

Baseados no método TSVE, descrevemos o Algoritmo TSVE para determinar a solução regularizada $Q_{k,\delta}$.

Algoritmo TSVE:

Dados de entrada: $\delta > 0$, G_δ , $\tau > 1$.

Dados de saída: Solução regularizada $Q_{\hat{k},\delta}$.

1. Para $k = 0, \dots$ faça

2. No passo k

(i) Calcule os produtos internos $\langle G_\delta, R_k \rangle$, $\langle G_\delta, S_k \rangle$.

(ii) Calcule μ_k .

3. Atualize $\|r_{k,\delta}\|_{\mathcal{H}}$

$$\|r_{k,\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|r_{k-1,\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 - (\langle G_\delta, R_k \rangle^2 + \langle G_\delta, S_k \rangle^2)$$

4. Índice de truncamento

Se $\|r_{\hat{k},\delta}\|_{\mathcal{H}} < \tau\delta$, calcule

$$Q_{\hat{k},\delta}(\theta) = \sum_{j=0}^{\hat{k}} \frac{1}{\mu_j} [\langle G_\delta, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j(\theta)]$$

senão

$k = k + 1$

3.3.3 Regularização de Tikhonov

Como vimos, resolver o problema inverso $AQ = G_\delta$, sendo A um operador compacto, apresenta dificuldades porque imprecisões nos dados de entrada podem produzir grandes diferenças entre a solução aproximada e a solução exata. Para tratar este tipo de situações, na literatura encontramos métodos de regularização, os quais são empregados para obter aproximações estáveis da solução.

A ideia básica do método de Tikhonov é substituir o problema inicial por um problema próximo, envolvendo um parâmetro λ junto com informações a priori da solução exata. Especificamente, o método de Tikhonov constrói soluções regularizadas dadas por

$$Q_{\lambda,\delta} = \operatorname{argmin}_{Q \in \mathcal{H}} F_\lambda(Q), \quad F_\lambda(Q) = \|AQ - G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 \|Q\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.73)$$

onde $\lambda > 0$ é o parâmetro de regularização. A base teórica do método foi introduzida em [59, 60] e, desde então, vários trabalhos têm sido desenvolvidos [2, 31, 35, 40]. A função objetivo $F_\lambda(Q)$ procura um compromisso de dois processos: aproximação da solução para os dados em entrada, e suavidade ou estabilidade da solução. A escolha apropriada do parâmetro λ faz o balanço nestes processos. Resultados de existência e unicidade de solução do problema (3.73) podem ser encontradas em [42]. Além disso, a solução regularizada $Q_{\lambda,\delta}$ satisfaz a equação normal

$$(\lambda^2 I + A^*A) Q_{\lambda,\delta} = A^*G_\delta$$

e, em consequência, $Q_{\lambda,\delta}$ pode ser escrita como

$$Q_{\lambda,\delta} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^* G_\delta$$

sendo A^* o operador adjunto de A . Utilizando o sistema singular $\{\mu_j, R_j, S_j\}$ do operador compacto A , temos que a solução regularizada $Q_{\lambda,\delta}$ é representada por

$$Q_{\lambda,\delta}(\theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mu_j}{\lambda^2 + \mu_j^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j(\theta)]. \quad (3.74)$$

Como podemos observar, a solução regularizada $Q_{\lambda,\delta}$ depende do parâmetro λ . Se este valor for grande a solução é muito suave. Por outro, lado se for muito pequeno, a solução é afetada pelo erro contido nos dados. Na sequência, se Q é a solução do problema sem ruído $AQ = G$, assumimos que o erro nos dados de entrada satisfaz

$$\|AQ - G_\delta\|_{\mathcal{H}} = \|G - G_\delta\|_{\mathcal{H}} \leq \delta. \quad (3.75)$$

Neste trabalho, escolhemos o parâmetro de regularização λ^* como sendo a solução da equação não linear

$$\|AQ_{\lambda^*,\delta} - G_\delta\|_{\mathcal{H}} = \tau\delta, \quad \tau > 1. \quad (3.76)$$

Este critério de escolha se deve a Morozov [31, 46] e, por esta razão, é chamado princípio da Discrepância de Morozov. É interessante notar que a solução determinada pelo Princípio da Discrepância estabelece que o resíduo da solução regularizada $\|AQ_{\lambda^*,\delta} - G_\delta\|_{\mathcal{H}}$ deve ser da mesma ordem do erro presente nos dados ($\mathcal{O}(\delta)$).

Por outro lado, vemos que a solução regularizada $Q_{\lambda,\delta}$, em (3.74), e o problema de cálculo de raiz λ^* , em (3.76), requerem cálculos envolvendo séries infinitas, que são inviáveis em termos computacionais. Em vista destas dificuldades, utilizaremos o método de projeção, para gerar soluções estáveis do problema original, onde o espaço \mathcal{H} é aproximado por uma família de subespaços encaixados $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de dimensão finita em \mathcal{H} , cuja união é densa, isto é,

$$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \subset \dots \subset \mathcal{H}, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n} = \mathcal{H}.$$

As soluções Q_n geradas resolvem o problema $A_n Q = G$, sendo $A_n = AP_n$ e $P_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{X}_n$ é o operador projeção ortogonal de \mathcal{H} sobre \mathcal{X}_n . Em geral, a sequência $\{Q_n\}_n$ não necessariamente converge a Q . As condições que garantem a convergência são encontradas em Engl *et al.* [31] e mostradas nos seguintes Teoremas.

Teorema 3.3.2. *Seja $Q \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ e seja Q_n definido como acima*

(i) *A sequência $\{Q_n\}_n$ converge de maneira fraca para Q , $Q_n \rightharpoonup Q$ se e somente se $\{\|Q_n\|_{\mathcal{H}}\}_n$ é limitada.*

(ii) *A sequência $\{Q_n\}_n$ converge fortemente, isto é, $Q_n \rightarrow Q$ se e somente se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|Q\|_{\mathcal{H}}$.*

Como podemos observar no item (ii), a caracterização da convergência na norma não ajuda muito devido à necessidade de ter a norma da solução exata $\|Q\|_{\mathcal{H}}$, a qual, para casos práticos, é desconhecida. Assim, no seguinte teorema, estabeleceremos uma condição suficiente para garantir esta convergência.

Teorema 3.3.3. *Seja $Q \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ e seja Q_n definido como acima. Se*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(A_n^\dagger)^* Q_n\|_{\mathcal{H}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(A_n^*)^\dagger Q_n\|_{\mathcal{H}} < \infty$$

então $Q_n \rightarrow Q$.

Para o caso em que os dados G_δ contêm perturbações, utilizaremos o método de projeção combinado com a regularização de Tikhonov, sendo os subespaços \mathcal{X}_n definidos como

$$\mathcal{X}_n = \text{span}\{R_0, R_1, S_1, \dots, R_n, S_n\}.$$

Assim, com estas considerações prévias, definimos o problema de minimização projetado

$$Q_{\lambda, \delta}^{(n)} = \underset{Q \in \mathcal{H}}{\operatorname{argmin}} \{\|A_n Q - G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 \|Q\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (3.77)$$

Afirmção 3.3.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo, então a solução $Q_{\lambda, \delta}^{(n)}$ do problema (3.77) é dada por*

$$Q_{\lambda, \delta}^{(n)}(\theta) = \sum_{j=0}^n \frac{\mu_j}{\lambda^2 + \mu_j^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j(\theta)] \quad (3.78)$$

Demonstração. De fato, como a função $Q_{\lambda, \delta}^{(n)}$ é solução do problema (3.77), temos que esta satisfaz a equação normal

$$(\lambda^2 I + P_n A^2 P_n) Q_{\lambda, \delta}^{(n)} = P_n A G_\delta. \quad (3.79)$$

Utilizando a propriedade do sistema singular $\{\mu_j, R_j, S_j\}$ do operador A , isto é, $AR_j = \mu_j R_j$, $AS_j = \mu_j S_j$ para $j \geq 0$, vemos que cada termo da equação (3.79) pode ser expresso como

$$\begin{aligned} (\lambda^2 I + P_n A^2 P_n) Q_{\lambda, \delta}^{(n)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^2 [\langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, R_j \rangle R_j + \langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, S_j \rangle S_j] \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \mu_j^2 [\langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, R_j \rangle R_j + \langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, S_j \rangle S_j] \end{aligned}$$

e

$$P_n A G_\delta = \sum_{j=0}^n \mu_j [\langle G_\delta, R_j \rangle R_j + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j].$$

Equacionando estas identidades e empregando a ortogonalidade da base \mathcal{B} , obtemos, para $j = 0, 1, \dots, n$

$$\langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, R_j \rangle = \frac{\mu_j}{(\lambda^2 + \mu_j^2)} \langle G_\delta, R_j \rangle, \quad \langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, S_j \rangle = \frac{\mu_j}{(\lambda^2 + \mu_j^2)} \langle G_\delta, S_j \rangle$$

e

$$\langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, R_j \rangle = 0, \quad \langle Q_{\lambda, \delta}^{(n)}, S_j \rangle = 0 \quad j = n+1, \dots$$

Assim, provamos que os primeiros n coeficientes de Fourier de $Q_{\lambda, \delta}^{(n)}$ são não nulas e obtivemos o resultado procurado. \square

Neste caso, a determinação do parâmetro de regularização λ , denotado por λ_n^* , é feito utilizando o princípio da discrepância, como sendo a raiz do problema

$$\|A_n Q_{\lambda, \delta}^{(n)} - G_\delta\|_{\mathcal{H}} = \tau \delta, \quad \tau > 1. \quad (3.80)$$

Para garantirmos que a equação não linear acima tem solução, observe que o resíduo da solução

$$r_\lambda^{(n)} = \|A_n Q_{\lambda, \delta}^{(n)} - G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2$$

pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} r_\lambda^{(n)} &= \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^4}{(\mu_j^2 + \lambda^2)^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2] + \|(I - P_n)G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^4}{(\mu_j^2 + \lambda^2)^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2] + \|G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

$$- \sum_{j=0}^n \langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2.$$

Seja $\delta_0^{(n)} = \|(I - P_n)G_\delta\|_{\mathcal{H}}$ a componente incompatível de G_δ que não pertence à imagem de A_n , então

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} r_\lambda^{(n)} = \delta_0^{(n)2} \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} r_\lambda^{(n)} = \|P_n G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(I - P_n)G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2 = \|G_\delta\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Além disso, a sequência $\{\delta_0^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente por definição temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_0^{(n)} = 0$. Com esta observação, segue-se que a equação (3.80) tem solução se for satisfeita a seguinte desigualdade

$$\delta_0^{(n)} < \tau\delta \leq \|G_\delta\|_{\mathcal{H}}.$$

Assim, dado $\delta > 0$ vemos que a existência da raiz λ_n^* depende da proximidade de $\delta_0^{(n)}$ para zero. Porém, temos que $r_\lambda^{(n)}$ é crescente para $\lambda > 0$. Com efeito, derivando (3.80) com respeito à λ , temos

$$\frac{d}{d\lambda} r_\lambda^{(n)} = 4\lambda^3 \sum_{j=0}^n \frac{\mu_j^2}{(\mu_j^2 + \lambda^2)^3} [\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2] > 0$$

segue que $r_\lambda^{(n)}$ é crescente. Com estes considerações, fazemos uma modificação do Princípio da Discrepância, de forma análoga à [13], e procuramos as raízes do problema não linear

$$R^{(n)}(\lambda) = \tau\delta, \tag{3.81}$$

sendo $R^{(n)}(\lambda) = \sqrt{r_\lambda^{(n)} - \delta_0^{(n)2}}$. Pelos resultados obtidos acima, segue que $R^{(n)}$ é crescente com $R^{(n)}(\mu_0) \geq \frac{1}{2}\|G_\delta\|_{\mathcal{H}}$. Portanto, as raízes do problema (3.81) serão procuradas no intervalo $(0, \mu_0]$.

Por outro lado, se fixarmos $\lambda > 0$ é fácil verificar as seguintes desigualdades:

$$\|Q_{\lambda,\delta}^{(n)}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=0}^n \frac{\mu_j^2}{(\lambda^2 + \mu_j^2)^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2] \leq \|Q_{\lambda,\delta}^{(n+1)}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

e

$$r_\lambda^{(n+1)} - \delta_0^{(n+1)2} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\lambda^4}{(\mu_j^2 + \lambda^2)^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2]$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^4}{(\mu_j^2 + \lambda^2)^2} [\langle G_\delta, R_j \rangle^2 + \langle G_\delta, S_j \rangle^2] \\
&= r_\lambda^{(n)} - \delta_0^{(n)2}.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos o Lema a seguir.

Lema 3.3.4. *Sejam $Q_{\lambda,\delta}^{(n)}$, $R^{(n)}$ definidas em (3.78) e (3.81), respectivamente, então são verificadas as seguintes afirmações*

- (i) *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo, então a função $\lambda \mapsto R^{(n)}(\lambda)$ é crescente e o problema (3.81) tem uma única solução.*
- (ii) *Seja $\lambda > 0$ fixo, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\|Q_{\lambda,\delta}^{(n)}\|_{\mathcal{H}} \leq \|Q_{\lambda,\delta}^{(n+1)}\|_{\mathcal{H}}, \quad R^{(n+1)}(\lambda) \geq R^{(n)}(\lambda).$$

Teorema 3.3.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo e λ_n^* a solução da equação (3.81). Então a sequência $\{\lambda_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente.*

Demonstração. Seja λ_n^* solução de (3.81), então $R^{(n)}(\lambda_n^*) = \tau\delta$ e pelo Lema 3.3.4, temos que

$$R^{(n)}(\lambda_n^*) = \tau\delta \leq R^{(n+1)}(\lambda_n^*)$$

como a função $\lambda \mapsto R^{(n+1)}(\lambda)$ é contínua e crescente para $\lambda > 0$, então existe $\lambda_{n+1}^* > 0$ tal que $\lambda_{n+1}^* \leq \lambda_n^*$ e satisfaz $R^{(n+1)}(\lambda_{n+1}^*) = \tau\delta$. Assim, obtemos o resultado. \square

Crítério de Parada. Note que a sequência de raízes $\{\lambda_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente, limitada inferiormente e, portanto, converge. A partir desta propriedade, faremos uso do critério de semiconvergência

$$|\lambda_{n+1}^* - \lambda_n^*| < \lambda_n^* TOL,$$

onde $TOL > 0$ é o parâmetro de tolerância, para interromper as iterações que geram as soluções $\{Q_{\lambda_n^*,\delta}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ quando a mudança relativa entre as raízes consecutivas é pequena.

Utilizamos este critério, pois, intuitivamente, a partir de certo índice $n_0 \in \mathbb{N}$, os novos valores da sequência $\{\lambda_n^*\}_{n \geq n_0}$ não contribuem com novas informações para a solução $Q_{\lambda,\delta}^{(n)}$. Com estas observações, resumimos, no seguinte algoritmo, o método proposto para obter a solução do problema (3.77) como segue

Algoritmo Tikhonov:

Dados de entrada: $\delta > 0$, G_δ , $\tau > 1$, $TOL > 0$.

Dados de saída: Solução regularizada $Q_{\lambda,\delta}^{(n)}$.

1. Para $n = 0, \dots$ faça

2. No passo n :

(i) Calcule os produtos internos $\langle G_\delta, R_n \rangle$, $\langle G_\delta, S_n \rangle$.

(ii) Calcule μ_n .

3. Atualize $r_\lambda^{(n)}$

$$(i) r_\lambda^{(n)} = r_\lambda^{(n-1)} + \frac{\lambda^4}{(\mu_n^2 + \lambda^2)^2} [\langle G_\delta, R_n \rangle^2 + \langle G_\delta, S_n \rangle^2] - [\langle G_\delta, R_n \rangle^2 + \langle G_\delta, S_n \rangle^2].$$

$$(ii) \text{ Defina } R^{(n)}(\lambda) = \sqrt{r_\lambda^{(n)} - \delta_0^{(n)2}}.$$

(iii) Resolva $R^{(n)}(\lambda) = \tau\delta$ no intervalo $I = (0, \lambda_{n-1}^*]$.

(iv) Calcule λ_n^*

4. Critério de parada

Se $|\lambda_n^* - \lambda_{n-1}^*| < \lambda_{n-1}^* TOL$, então

$$Q_{\lambda_n^*, \delta}^{(n)}(\theta) = \sum_{j=0}^n \frac{\mu_j}{\mu_j^2 + \lambda_n^{*2}} [\langle G_\delta, R_j \rangle R_j(\theta) + \langle G_\delta, S_j \rangle S_j(\theta)]$$

senão

$n = n + 1$

3.3.4 Custo computacional

Com o propósito de comparar o custo computacional destes métodos com o método pseudo-espectral desenvolvido no capítulo anterior, começamos observando que a função $Q_{\hat{k}, \delta}$, obtida pelo método TSVE, precisa do cálculo dos coeficientes $\langle G_\delta, R_j \rangle$, $\langle G_\delta, S_j \rangle$, $j = 0, \dots, \hat{k}$. Estes são aproximados utilizando a fórmula de quadratura, sendo G_δ substituída pelo seu interpolador cúbico 2π -periódico. Assim, cada produto interno envolve $\mathcal{O}(M)$ operações; e, conseqüentemente, a solução regularizada precisa de $\mathcal{O}(M\hat{k})$ operações, sendo \hat{k} o parâmetro de truncamento obtido pelo Princípio da Discrepância.

Seguindo a mesma linha de análise, o fluxo $Q_{\lambda_n, \delta}^{(n)}$, estimado pelo método de regularização de Tikhonov, requer $\mathcal{O}(Mn)$ operações, sendo o parâmetro de regularização λ_n determinado como a solução do problema não linear (3.80). Este valor pode ser estimado utilizando-se um método de resolução de raízes.

3.3.5 Resultados numéricos

Para testar numericamente os métodos de regularização propostos, utilizaremos a função de fluxo Q definida em (2.41). Neste caso, a temperatura na borda externa $T(r_e, \theta)$ não possui uma expressão analítica. Assim, como dados de entrada usamos valores pontuais da temperatura $T(r_e, \theta)$ calculados numericamente pelo método de Galerkin, conforme será descrito no próximo capítulo. Com as informações exatas da temperatura e do fluxo, levamos em consideração a função de dados exatos

$$G(r_e, \theta) = T(r_e, \theta) - u(r_e)$$

sendo u a função definida em (3.39). Passamos a resolver, o problema de determinar soluções aproximadas de $Q(\theta)$ quando os dados da temperatura na fronteira exterior $G_\delta(r_e, \theta)$ apresentam perturbações com respeito aos dados exatos, sendo G_δ construído como segue.

Considere $\theta_i = 2\pi i/M$ ($i = 0, \dots, M$) pontos igualmente espaçados em $[0, 2\pi]$. Definimos, nos pontos θ_i , a função de dados perturbados na fronteira externa $V_\delta(r_e, \theta)$ por

$$G_\delta(\theta_i) = G(\theta_i) + \epsilon_i, \quad i = 0, \dots, M$$

com ϵ_i números aleatórios Gaussianos tal que o erro com respeito à temperatura exata na fronteira Γ_e satisfaz

$$\|G_\delta - G\|_{\mathcal{H}} = \|T_\delta - T\|_{\mathcal{H}} = NL\|G\|_{\mathcal{H}}$$

onde NL denota o nível de ruído.

Por outro lado, note que as soluções dadas pelos métodos de regularização descritos acima requerem o cálculo dos coeficientes $\langle G_\delta, R_j \rangle$ e $\langle G_\delta, S_j \rangle$, onde $G_\delta(\theta) = V_\delta(r_e, \theta) - u(r_e)$. Estes produtos internos são aproximados substituindo G_δ pelo seu spline cúbico interpolador 2π -periódico, denotado por $I(\theta)$, que interpola G_δ nos pontos $(\theta_i, G_\delta(\theta_i))$. A função $I(\theta)$ é definida em cada subintervalo $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, como sendo

$$I_i(\theta) = a_i(\theta - \theta_i)^3 + b_i(\theta - \theta_i)^2 + c_i(\theta - \theta_i) + d_i, \quad \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$$

para cada $i = 0, \dots, M - 1$, sendo os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i determinados pelas propriedades do interpolador $I(\theta)$ nos pontos θ_i [21], isto é,

$$\begin{aligned} I_i(\theta_i) &= G_\delta(\theta_i), & I_i(\theta_{i+1}) &= I_{i+1}(\theta_{i+1}) \\ I'_i(\theta_{i+1}) &= I'_{i+1}(\theta_{i+1}), & I''_i(\theta_{i+1}) &= I''_{i+1}(\theta_{i+1}). \end{aligned}$$

Com esta abordagem, os produtos internos são estimados em cada subintervalo como segue

$$\langle G_\delta, R_j \rangle \approx \int_0^{2\pi} I(\theta) R_j(\theta) d\theta = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} I_i(\theta) R_j(\theta) d\theta,$$

$$\langle G_\delta, S_j \rangle \approx \int_0^{2\pi} I(\theta) S_j(\theta) d\theta = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} I_i(\theta) S_j(\theta) d\theta.$$

onde, para cada $i = 0, \dots, M - 1$, estas últimas integrais envolvem calcular integrais da forma

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\theta - \theta_i)^m \cos(j\theta) d\theta, \quad \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\theta - \theta_i)^m \sin(j\theta) d\theta,$$

para $m = 0, \dots, 3$ e $j = 0, 1, \dots$

Resultados obtidos com TSVE

Neste experimento numérico, consideramos $M = 256$ pontos para a partição $\{\theta_i\}_{i=0}^M$ de $[0, 2\pi]$ e $\tau = 1.01$. Mostraremos a eficiência deste método através do erro relativo da solução aproximada $E_k = \|Q_{k,\delta} - Q\|_{\mathcal{H}} / \|Q\|_{\mathcal{H}}$. Este valor representa a média calculada para 50 realizações, utilizando cinco valores do raio interno r_i e distintos níveis de ruído NL . Na Tabela 3.1, mostramos os resultados obtidos para diferentes valores do raio interno r_i e diferentes níveis de ruído NL . O parâmetro de truncamento determinado pelo Princípio da Discrepância é, na média arredondada para o máximo inteiro, $\hat{k} = 2$ em todos os casos. Utilizaremos cinco valores diferentes para o raio interno r_i . Nas simulações, usamos $M = 128$ valores de temperatura na parede externa do tubo.

r_i	$NL = 7.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-3}$
0.010	0.1266	0.1691	0.2097
0.011	0.0786	0.0850	0.2096
0.012	0.0497	0.0658	0.1874
0.013	0.0496	0.0497	0.1299
0.014	0.0480	0.0496	0.0597

Tabela 3.1: Erro relativo médio do fluxo de distribuição de calor $Q_{k,\delta}(\theta)$.

A Tabela 3.1 mostra que o método TSVE aproxima muito bem o fluxo exato para o caso em que o nível de ruído presente nos dados é pequeno e tem uma aproximação aceitável quando o nível de ruído vai aumentando. Em particular, no caso em que o raio interno é próximo do raio externo, obtemos as melhores estimativas.

Com respeito ao tempo de execução, na Tabela 3.2 mostramos a média do tempo, considerando $r_i = 0.012$ com diferentes níveis de ruído. Podemos observar que o tempo gasto pelo método TSVE é curto e consideravelmente mais rápido em comparação com o método CPS, pois, neste método, não precisamos construir um sistema matricial nem calcular a decomposição SVD.

	$NL = 5.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-3}$
\bar{t}	0.19	0.18	0.11

Tabela 3.2: Média do tempo de execução do método TSVE.

Considerando $r_i = 0.012$ e $NL = 2.5 \times 10^{-3}$, mostramos, na Figura 3.1, a diferença entre os dados de entrada G_δ e a solução regularizada $Q_{1,\delta}$, calculada pelo método TSVE. Para este caso em particular, vemos que os dados G_δ apresentam grandes diferenças com respeito aos dados exatos G . No entanto, o método consegue determinar, para $\hat{k} = 1$, uma estimativa aceitável do fluxo exato Q .

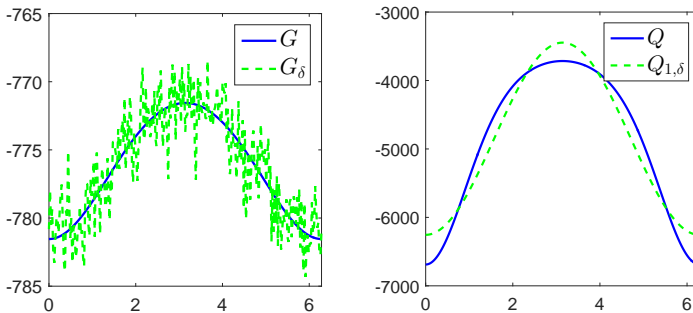


Figura 3.1: Esquerda: Função de temperatura exata G e temperatura perturbada G_δ . Direita: Fluxo exato Q e recuperado $Q_{1,\delta}$ pelo método TSVE.

Resultados obtidos com regularização de Tikhonov

Usando um processo análogo ao descrito no método acima, consideramos $M = 256$ e utilizamos a partição $\{\theta_i\}_{i=0}^M$ de $[0, 2\pi]$. Tendo-se em conta que a solução regularizada $Q_{\lambda_n, \delta}^{(n)}$ depende do parâmetro λ_n , este valor é calculado, para cada n , pelo Princípio da Discrepância, que estabelece a equação não linear $R^{(n)}(\lambda) = \tau\delta$ no intervalo $(0, \lambda_{n-1}^*]$. Sendo esta equação resolvida utilizando um método de cálculo de raízes, como o método da biseção ou método de Newton [21].

A Tabela 3.3 mostramos a média do erro relativo, $E_\lambda = \|Q - Q_{\lambda_n, \delta}^{(n)}\|_{\mathcal{H}} / \|Q\|_{\mathcal{H}}$, para 50 simulações e diferentes valores para r_i e NL com $\tau = 1.01$.

r_i	$NL = 7.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-3}$
0.010	0.0758	0.0942	0.1827
0.011	0.0617	0.0763	0.1562
0.012	0.0490	0.0603	0.1192
0.013	0.0381	0.0453	0.0829
0.014	0.0223	0.0278	0.0489

Tabela 3.3: Erro relativo médio do fluxo de distribuição de calor $Q(\theta)$.

Como podemos observar, para um raio fixo o erro relativo aumenta a medida que o nível de ruído nos dados de entrada cresce. Sendo os melhores resultados obtidos quando o anel é fino.

	$NL = 7.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-3}$
λ_n	1.5×10^{-3}	1.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}
\bar{n}	4	4	3
\bar{t}	0.39	0.35	0.39

Tabela 3.4: Média do Parâmetro de regularização, do parâmetro de truncamento e do tempo de execução.

Na Tabela 3.4, mostramos, para $r_i = 0.012$, a média dos parâmetros de regularização λ , sendo estes obtidos pelo Princípio da Discrepância. O valor \bar{n} é a média arredondada, para o maior inteiro próximo, dos parâmetros de truncamento obtidos pelo critério de parada. No que diz respeito ao tempo de execução requerido, podemos constatar que a solução aproximada é calculada rapidamente.

Para o critério de parada, consideramos o valor da tolerância $TOL = 0.005$. Como podemos observar, o algoritmo escolhe valores pequenos

de n , o que mostra que as informações relevantes da solução (3.78) são capturadas utilizando poucos termos. Também, os parâmetros de regularização crescem com respeito ao nível de ruído nos dados. A Figura 3.2 mostra a solução aproximada $Q_{\lambda_3, \delta}^{(3)}$ com $r_i = 0.012$ e nível de ruído $NL = 7.5 \times 10^{-4}$.

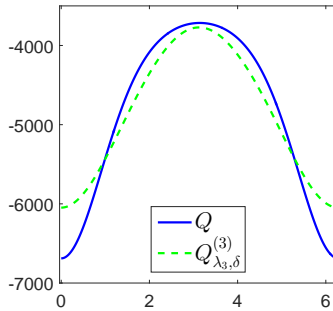


Figura 3.2: Comparação entre o fluxo exato e estimado para $r_i = 0.012$ e nível de ruído $NL = 7.5 \times 10^{-4}$.

Além disso, ilustramos, na Figura 3.3, o comportamento crescente das funções $\lambda \mapsto R^{(n)}(\lambda)$ em escala logarítmica para $n = 0, 10$ e 20 . No centro, mostramos uma ampliação das raízes λ_n^* que são geradas pelas interseções de $R^{(n)}(\lambda)$ com a reta $y = \tau\delta$, e, na direita, podemos observar o comportamento monótono da sequência de raízes $\{\lambda_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$; o que está de acordo com o Teorema 3.3.4.

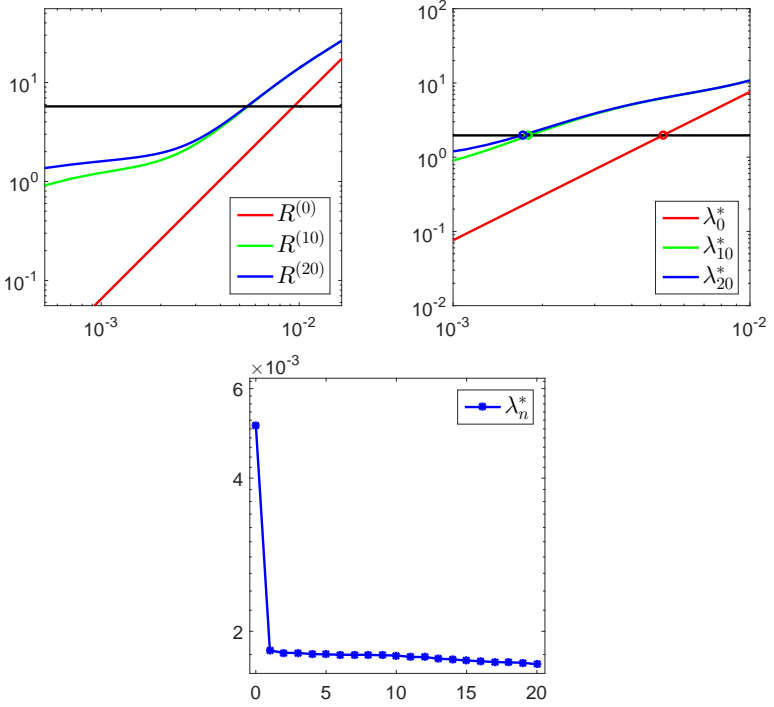


Figura 3.3: Funções $R^{(n)}(\lambda)$ para $n = 0, 10$ e 20 , $\tau\delta = 1.96$ com $r_i = 0.012$ (esquerda) e ampliação das raízes λ_n^* (direita). Sequência $\{\lambda_n^*\}_{n=0}^{20}$ (parte inferior).

Concluimos este capítulo, ressaltando que o estudo teórico do modelo (1.1), (1.2) e (1.4), em espaços funcionais, possibilitou o desenvolvimento de métodos computacionais eficientes para a reconstrução do fluxo Q a partir de informações da temperatura na parede externa do domínio. Os métodos desenvolvidos neste capítulo, fornecem boas estimativas do fluxo Q quando os dados de entrada apresentam pequenas perturbações. Além disso, o custo computacional dos métodos é pequeno quando comparado com o custo do método CPS, pois agora não há necessidade de resolver sistemas lineares como visto no capítulo anterior. Observamos que a diferença no tempo computacional dos métodos TSVE e RT é devido a que o último precisa calcular o parâmetro de regularização λ , utilizando uma rotina para o cálculo de raízes.

Capítulo 4

Abordagem via método de Galerkin

Com o objetivo de amenizar o esforço computacional do método baseado na análise de Fourier, descrito no capítulo anterior, neste capítulo, introduziremos um método de estimação baseado no método de Galerkin para o tratamento numérico do problema direto (1)-(2) e (4). A abordagem difere daquela dada no capítulo anterior em que o método é apropriado para casos reais pois está baseado em dados de temperatura discretos. Em particular, análogo ao método baseado na técnica pseudo espectral, mostramos que o fluxo discreto pode ser determinado a partir de dados de temperatura discreta na borda exterior via solução de um sistema linear mal condicionado. Em decorrência do método, mostraremos que a SVD da matriz do sistema é determinada explicitamente e sem custo computacional, facilitando em grande maneira a implementação numérica para cálculo da solução regularizada via os métodos TSVD e RT.

Para ilustrar a eficiência do método, reconstruiremos aproximações do fluxo de calor Q e do coeficiente convectivo h , para dados sintéticos. Finalmente, aplicaremos este método para reconstruir o fluxo e o coeficiente convectivo a partir de dados experimentais obtidos por Bozzoli [20].

4.1 Problema direto

Como mencionado acima, o método de Galerkin será utilizado para procurar aproximações da função V em subespaços de dimensão finita. Para tanto, assumiremos, como no capítulo anterior, que a função V satisfaz as propriedades de periodicidade dadas em (3.9). Assim, procedemos a resolver o problema direto (3.6)-(3.8) a partir das informações do fluxo Q .

Considere $\mathcal{B} = \{R_0, R_1, S_1, \dots\}$ a base ortogonal em \mathcal{H} , sendo as funções

$$R_0(\theta) = 1 \text{ e } R_k(\theta) = \cos(k\theta), \quad S_k(\theta) = \sin(k\theta), \quad k = 1, \dots$$

Seguindo o procedimento descrito em [16, 50], procuramos soluções aproximadas de V da forma

$$V_m(r, \theta) = \sum_{k=0}^m (v_k(r)R_k(\theta) + w_k(r)S_k(\theta)) \quad (4.1)$$

sendo os coeficientes $\{v_k, w_k\}$ funções a serem determinadas da seguinte maneira. Substituindo V_m em (3.3)-(3.5), após multiplicar por R_k, S_k e integrar em $(0, 2\pi)$, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_m}{\partial \theta^2} \right] R_k(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0, \dots, m. \quad (4.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] S_k(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Como a base \mathcal{B} é ortogonal, as equações (4.2)-(4.3) são reduzidas ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO):

$$\begin{aligned} r^2 v_k''(r) + r v_k'(r) - k^2 v_k(r) &= 0, & r_i < r < r_e \\ r^2 w_k''(r) + r w_k'(r) - k^2 w_k(r) &= 0, & r_i < r < r_e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicando um processo similar na condição (3.4), obtemos

$$\lambda_w v_k'(r_e) + \alpha v_k(r_e) = 0, \quad \lambda_w w_k'(r_e) + \alpha w_k(r_e) = 0. \quad (4.5)$$

Seja \widehat{Q}_n o interpolante trigonométrico que passa por $(\theta_j, Q(\theta_j))$, $j = 0, \dots, M-1$, sendo $\theta_j = 2\pi j/M$ ($j = 0, \dots, M-1$). É bem conhecido que \widehat{Q}_n é único e dado por [61, Capítulo 3]

$$\widehat{Q}_n(\theta) = \frac{\widehat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\widehat{a}_k R_k(\theta) + \widehat{b}_k S_k(\theta) \right) \quad (4.6)$$

satisfazendo $\widehat{Q}_n(\theta_j) = Q_j$, $j = 0, \dots, M-1$. Os coeficientes \widehat{a}_k , \widehat{b}_k são dependentes de M (par ou ímpar) e podem ser determinados explicitamente. Neste trabalho, vamos considerar M ímpar, ou seja, $M = 2n+1$; então, os coeficientes do polinômio interpolador \widehat{Q}_n são

$$\widehat{a}_k = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M-1} Q_j R_k(\theta_j), \quad k = 0, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$\widehat{b}_k = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M-1} Q_j S_k(\theta_j), \quad k = 1, \dots, n.$$

Mencionamos que expressões similares podem ser deduzidas para M par. Para futuras referências, notamos que as expressões em (4.7) se devem ao fato de que os vetores \mathbf{r}_k , $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^M$ definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= [R_k(\theta_0), \dots, R_k(\theta_{M-1})]^T, \quad k = 0, \dots, n, \\ \mathbf{s}_k &= [S_k(\theta_0), \dots, S_k(\theta_{M-1})]^T, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.8)$$

são ortogonais [50] e satisfazem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k &= \begin{cases} M & \text{se } k = 0, \\ M/2 & \text{se } k = 1, \dots, n. \end{cases} \\ \mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k &= M/2, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agora procedemos com a construção de soluções pelo método de Galerkin, com a observação de que, na condição de fronteira (3.5), o fluxo de calor Q é substituído pelo seu interpolante trigonométrico. Dessa forma, para a aproximação V_m satisfazer a condição de fronteira (3.5) com \widehat{Q}_n em vez de Q , a seguinte igualdade deve ser satisfeita

$$-\lambda_w \sum_{k=0}^m (v'_k(r_i) R_k(\theta) + w'_k(r_i) S_k(\theta)) = \widehat{Q}_n(\theta). \quad (4.10)$$

Novamente, pela ortogonalidade de $\{R_0, R_1, S_1, \dots, R_m, S_m\}$, para $m > n$, obtemos

$$\begin{cases} -\lambda_w v'_k(r_i) = \widehat{a}_k/d_k, & -\lambda_w w'_k(r_i) = \widehat{b}_k; & k = 0, \dots, n \\ -\lambda_w v'_k(r_i) = 0, & -\lambda_w w'_k(r_i) = 0; & k = n+1, \dots, m. \end{cases} \quad (4.11)$$

sendo $d_k = 2$ se $k = 0$ e $d_k = 1$ para $k = 1, \dots, m$. Assim, a partir de (4.11) e (4.4) vemos que, para determinar os coeficientes v_k, w_k

($k = 0, \dots, m$) em (4.1) devemos resolver os seguintes problemas com condições de fronteira

$$\begin{cases} r^2 v_k''(r) + r v_k'(r) - k^2 v_k(r) = 0, & r_i < r < r_e \\ \lambda_w v_k'(r_e) + \alpha v_k(r_e) = 0 \\ -\lambda_w v_k'(r_i) = \widehat{a}_k. \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} r^2 w_k''(r) + r w_k'(r) - k^2 w_k(r) = 0, & r_i < r < r_e \\ \lambda_w w_k'(r_e) + \alpha w_k(r_e) = 0 \\ -\lambda_w w_k'(r_i) = \widehat{b}_k. \end{cases} \quad (4.13)$$

Se $k = 0$, utilizando o mesmo procedimento do Capítulo 3 obtemos que a solução v_0 de (4.12) é

$$v_0(r) = \widehat{a}_0 \left(\frac{r_i}{\lambda_w} \ln \left(\frac{r_e}{r} \right) + \frac{r_i}{\alpha r_e} \right)$$

e para $k = 1, \dots, n$, temos que as soluções v_k são da forma

$$v_k(r) = c_{1,k} r^k + c_{2,k} r^{-k} \quad (4.14)$$

com coeficientes $c_{1,k}$ e $c_{2,k}$ a serem determinados utilizando as condições de fronteira dadas em (4.12). Logo, temos que os coeficientes $c_{1,k}, c_{2,k}$ satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} c_{1,k} r_e^{2k} (\lambda_w k + \alpha r_e) + c_{2,k} (\alpha r_e - \lambda_w k) = 0 \\ c_{1,k} r_i^{2k} - c_{2,k} = -\widehat{a}_k r_i^{k+1} / \lambda_w k \end{cases} \quad (4.15)$$

cujas soluções correspondentes são

$$c_{1,k} = \frac{\widehat{a}_k r_i^{k+1} (\lambda_w k - \alpha r_e)}{\lambda_w k [\lambda_w k (r_e^{2k} - r_i^{2k}) + \alpha r_e (r_e^{2k} + r_i^{2k})]}$$

$$c_{2,k} = \frac{\widehat{a}_k r_e^{2k} r_i^{k+1} (\alpha r_e + \lambda_w k)}{\lambda_w k [\lambda_w k (r_e^{2k} - r_i^{2k}) + \alpha r_e (r_e^{2k} + r_i^{2k})]}.$$

Fazendo $\rho = r_i/r_e$ e agrupando os termos em (4.14), obtemos

$$v_k(r) = \widehat{a}_k \widehat{\mu}_k(r), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.16)$$

onde

$$\widehat{\mu}_0(r) = \frac{r_i}{\lambda_w} \ln \left(\frac{r_e}{r} \right) + \frac{r_i}{\alpha r_e}$$

$$\widehat{\mu}_k(r) = \frac{(1 - \frac{\alpha r_e}{\lambda_w k}) \rho^k \left(\frac{r}{r_e} \right)^k + (1 + \frac{\alpha r_e}{\lambda_w k}) \left(\frac{r_i}{r} \right)^k}{[\lambda_w k (1 - \rho^{2k}) + \alpha r_e (1 + \rho^{2k})]} r_i, \quad k = 1, \dots \quad (4.17)$$

Utilizando procedimentos similares é simples verificar que a solução de (4.13) é da forma

$$w_k(r) = \widehat{b}_k \widehat{\mu}_k(r), \quad k = 1, \dots \quad (4.18)$$

Note que para $k = n + 1, \dots, m$, em (4.14), obtemos de (4.16) e (4.18) que $v_k(r) = 0$ e $w_k(r) = 0$. Portanto, se $m > n$, é suficiente considerar a função V_n em vez de V_m . Estes resultados são resumidos no seguinte Teorema.

Teorema 4.1.1. *Sejam $Q_j = Q(\theta_j)$ ($j = 0, \dots, M - 1$) os valores discretos do fluxo em pontos uniformemente espaçados de $[0, 2\pi]$. Então, a solução aproximada de (3.3)-(3.5), obtida pelo método de Galerkin, é da forma*

$$V_n(r, \theta) = \frac{v_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^n (v_k(r)R_k(\theta) + w_k(r)S_k(\theta)) \quad (4.19)$$

com coeficientes v_k , w_k dados em (4.16) e (4.18). Além disso, se $Q \in \mathcal{H}$, temos

$$|v_k(r)|, |w_k(r)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall r \in [r_i, r_e]. \quad (4.20)$$

Demonstração. A afirmação sobre V_n é verdade pela construção. Para provar (4.20), tomamos o módulo em cada termo e obtemos

$$|c_{1,k}r^k| \leq \frac{r_i |\widehat{a}_k| |(\lambda_w k - \alpha r_e)|}{\lambda_w k (\lambda_w k + \alpha r_e) (1 - \rho^{2k})} \rho^k \left(\frac{r}{r_e} \right)^k, \quad (4.21)$$

e

$$|c_{2,k}r^{-k}| \leq \frac{|\widehat{a}_k| r_i}{\lambda_w k (1 - \rho^{2k})} \left(\frac{r_i}{r} \right)^k. \quad (4.22)$$

Assim, as desigualdades (4.21), (4.22) mostram que se $|\widehat{a}_k|$ é limitada, então $v_k(r)$ decresce para zero exponencialmente quando k cresce, $\forall r \in [r_i, r_e]$. Para $w_k(r)$, obtemos resultados similares, o que completa a demonstração. \square

Pelo Teorema 4.1.1, temos que os coeficientes $v_k(r)$ e $w_k(r)$ tornam-se desprezíveis para grandes valores de k desde que os coeficientes \widehat{a}_k sejam limitados, como acontece quando $Q \in \mathcal{H}$. De fato, para este caso os coeficientes do polinômio interpolador são da $\mathcal{O}(1/k)$, o que é suficiente para garantir que ambos os termos $|c_{1,k}r^k|$ e $|c_{2,k}r^{-k}|$ se

tornarão insignificantes para grandes valores de k , devido às condições (4.21)-(4.22).

Exemplo: Ilustramos esta observação, usando dados discretos Q_j associados ao fluxo definido por

$$Q(\theta) = \frac{3 + \cos^2(0.5\theta)}{2\alpha + 3 + \cos^2(0.5\theta)}, \quad (4.23)$$

com $M = 257$ e parâmetros físicos reportados em [20] e mostrados na Tabela 2.1.

Para este exemplo, é fácil verificar que os coeficientes $\widehat{b}_k = 0$, implicando que a solução aproximada (4.19) não contém os termos $S_k(\theta)$. Na Figura 4.1, mostramos o comportamento de $|\widehat{a}_k|$ e $|v_k(r)|$, e vemos que ambas quantidades decaem rapidamente e podem ser desprezadas a partir de $k = 10$. Assim, em (4.19), vemos que $n = 10$ termos são suficientes para capturar as características mais importantes da solução V de (3.3)-(3.5).

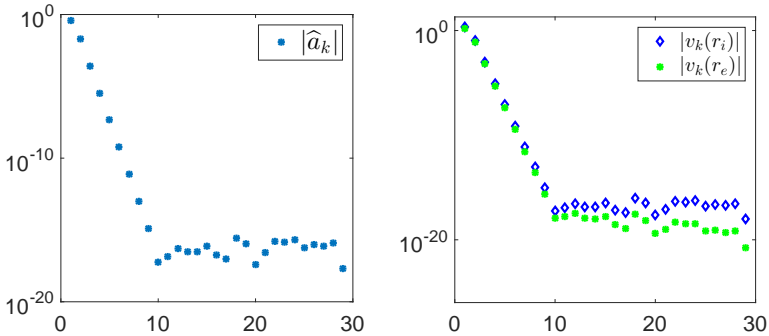


Figura 4.1: Comportamento dos coeficientes $|\widehat{a}_k|$ e $|\widehat{v}_k(r)|$ para $k = 0, \dots, 30$.

Com base nesta observação, na Figura 4.2, mostramos a função V_{10} e o erro discreto entre V_{10} e V_{20} . Portanto, conferimos que para este caso, acrescentar muitos termos em (4.19) não contribui para melhorar a qualidade da solução aproximada V_n .

É importante destacar que a construção de V_n e o resultado de aproximação dependem do erro de interpolação $Q - \widehat{Q}_n$ [16,57]. Em termos de convergência, no ambiente do espaço de funções \mathcal{V} introduzido no Capítulo 2, temos o seguinte resultado de convergência.

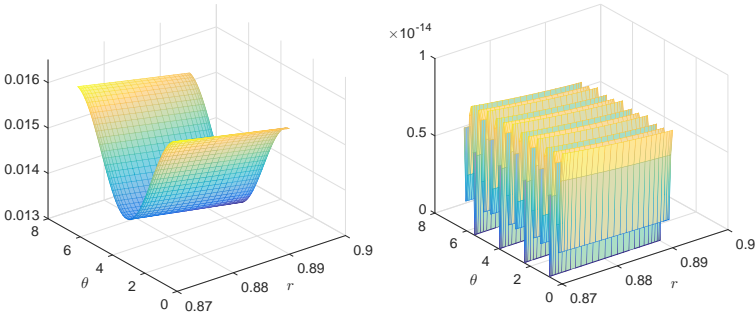


Figura 4.2: Esquerda: Valores da temperatura aproximada obtidas com $V_{10}(r, \theta)$ em $[r_i, r_e] \times [0, 2\pi]$. Direita: Erro discreto entre $\|V_{10}(r_i, \theta_j) - V_{20}(r_i, \theta_j)\|_2$ soluções aproximadas.

Teorema 4.1.2. *Seja $V_n(r, \theta)$ definido no Teorema anterior. Então, $V_n(r, \theta)$ converge em \mathcal{V} , quando $n \rightarrow \infty$, para a função V que é solução fraca do problema (3.3)-(3.5).*

A demonstração será omitida por ser análoga à prova da afirmação 2.1.1.

Pelos resultados numéricos mostrados acima, observamos que podemos construir soluções aproximadas para o problema (1.1)-(1.4) com excelente qualidade, utilizando a solução de Galerkin V_n , com n moderado, junto com a função W solução de (3.6)-(3.8). De fato, podemos considerar n suficientemente grande, o que é razoável, pois n está relacionado com a quantidade de dados da temperatura e, então, usar (3.2) para definir T_n , aproximação de T , como sendo

$$\begin{aligned} T_n(r, \theta) &\doteq V_n(r, \theta) + W(r, \theta) \\ &= \frac{\hat{a}_0}{2} \hat{\mu}_0(r) R_0(\theta) + \sum_{k=1}^n \hat{\mu}_k(r) \left(\hat{a}_k R_k(\theta) + \hat{b}_k S_k(\theta) \right) + W(r, \theta), \end{aligned}$$

em que $\hat{\mu}_k(r)$ é definido em (4.17). Neste caso, a solução aproximada V_n na borda externa $r = r_e$, é dada por

$$V_n(r_e, \theta) = \frac{\hat{a}_0}{2} \mu_0 R_0(\theta) + \sum_{k=1}^n \mu_k \left(\hat{a}_k R_k(\theta) + \hat{b}_k S_k(\theta) \right)$$

sendo os coeficientes μ_0 e μ_k , $k = 1, \dots, n$, definidos em (3.37). Como consequência, temos a correspondente aproximação para $T(r_e, \theta)$

$$T(r_e, \theta) \approx T_n(r_e, \theta) = \frac{\hat{a}_0}{2} \mu_0 R_0(\theta) + \sum_{k=0}^n \mu_k (\hat{a}_k R_k(\theta) + \hat{b}_k S_k(\theta)) + W(r_e, \theta). \quad (4.24)$$

Esta identidade será a base para definir o problema inverso na seguinte seção.

4.2 Problema inverso

Os resultados obtidos pelos Teoremas na seção anterior, mostram que podemos construir soluções aproximadas V_n do problema (3.4)-(3.5), para n suficientemente grande, e por conseguinte estimar aproximações da temperatura T desde que as informações de $W(r_e, \theta)$ sejam determinadas com alto grau de precisão. Iniciamos esta seção definindo $G(r_e, \theta) = T_n(r_e, \theta) - W(r_e, \theta)$, e estabelecendo os seguintes objetivos

- (i) Determinar os valores da temperatura $T_n(r, \theta_j)$ para todo $r \in [r_i, r_e]$.
- (ii) Estabelecer um problema matricial

$$\mathbf{A}_n \mathbf{Q} = \mathbf{G} \quad (4.25)$$

com $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{M \times M}$, em que \mathbf{Q} e \mathbf{G} contêm os valores pontuais de Q e G nos pontos de colocação θ_j , respectivamente, que permita a determinação do fluxo nos pontos de colocação de forma eficiente.

Havendo declarado os objetivos da seção, procedemos introduzindo o vetor \mathbf{G} , com entradas $G_j := T_n(r_e, \theta_j) - W(r_e, \theta_j) = V_n(r_e, \theta_j)$, $j = 0, \dots, M-1$. Utilizando a expressão (4.24) nos pontos de colocação θ_j , temos que os dados de entrada podem ser descritos como

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} V_n(r_e, \theta_0) \\ \vdots \\ V_n(r_e, \theta_{M-1}) \end{bmatrix} = \mathbf{E}_n \mathbf{D}_n \mathbf{C} \quad (4.26)$$

em que

$$\mathbf{E}_n = \left[\frac{\mathbf{r}_0}{2}, \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{s}_n \right] \in \mathbb{R}^{M \times M},$$

com $\mathbf{r}_k, \mathbf{s}_k$ definidos em (4.8),

$$\mathbf{D}_n = \text{diag}(\mu_0, \mu_1, \mu_1, \dots, \mu_n, \mu_n) \in \mathbb{R}^{M \times M}$$

e

$$\mathbf{C} = \left[\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \widehat{b}_1, \dots, \widehat{a}_n, \widehat{b}_n \right]^T \in \mathbb{R}^M.$$

Agora, note que, pela propriedade (4.9), a matriz \mathbf{E}_n possui colunas ortogonais e satisfaz

$$\mathbf{E}_n^T \mathbf{E}_n = \text{diag}(M/4, M/2, \dots, M/2) \doteq \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{M \times M}.$$

A partir dessa relação, junto com (4.6)-(4.7), segue que os coeficientes do polinômio interpolador satisfazem a relação

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}_n^T \mathbf{G}. \quad (4.27)$$

Por outro lado, seja $\mathbf{G}^{(r)}$ uma função vetorial cujas entradas são $\mathbf{G}_j^{(r)} = T_n(r, \theta_j) - W(r_e, \theta_j)$, $j = 0, \dots, M-1$. Seguindo um procedimento similar ao feito acima, obtemos

$$\mathbf{G}^{(r)} = \mathbf{E}_n \mathbf{D}_n^{(r)} \mathbf{C} \quad (4.28)$$

em que

$$\mathbf{D}_n^{(r)} = \text{diag}(\widehat{\mu}_0(r), \widehat{\mu}_1(r), \widehat{\mu}_1(r), \dots, \widehat{\mu}_n(r), \widehat{\mu}_n(r)).$$

Portanto, pela equação (4.27), obtemos

$$\mathbf{G}^{(r)} = \mathbf{E}_n \mathbf{D}_n^{(r)} \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}_n^T \mathbf{G}. \quad (4.29)$$

Assim, temos obtido uma equação (4.29) que relaciona a temperatura na fronteira $r = r_e$ com qualquer ponto $r \in [r_i, r_e]$. Portanto, temos atingido o item (i) O item (ii) é atingido utilizando o seguinte Teorema.

Teorema 4.2.1. *Utilizando as notações e definições nesta seção, assumamos que $T_n(r_e, \theta_j)$ são dados exatos de temperatura na fronteira externa, sendo θ_j , $j = 0, \dots, M-1$ os pontos de colocação de Fourier. Então, o vetor \mathbf{Q} de dados pontuais do fluxo Q_j de Q , é representado como sendo*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_n \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{F}_n^T \mathbf{G} = \sum_{k=1}^M \frac{\mathbf{f}_k^T \mathbf{G}}{\sigma_k} \mathbf{f}_k, \quad (4.30)$$

em que $\mathbf{F}_n = \mathbf{E}_n \sqrt{\mathbf{D}^{-1}}$ é uma matriz ortogonal e \mathbf{f}_k denota a k -ésima coluna de \mathbf{F}_n ,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_0, \quad \sigma_{2i} = \sigma_{2i+1} = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \widehat{\sigma}_1(r) &= \widehat{\mu}_0(r), \quad \widehat{\sigma}_{2i}(r) = \widehat{\sigma}_{2i+1}(r) = \widehat{\mu}_i(r), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.31)$$

com μ_i definido em (3.37). Além disso, o vetor $\mathbf{T}(r)$ de valores discretos de $T(r, \theta_j)$ pode ser descrito como

$$\mathbf{T}(r) = \sum_{k=1}^M \hat{\sigma}_k(r) \frac{\mathbf{f}_k^T \mathbf{G}}{\sigma_k} \mathbf{f}_k + \mathbf{W}_e \quad (4.32)$$

sendo \mathbf{W}_e o vetor de dados discretos $W(r_e, \theta_j)$.

Demonstração. Como a equação (4.27) implica que $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}_n^T \mathbf{Q}$, substituindo \mathbf{C} em (4.26), vemos que \mathbf{Q} resolve o sistema linear

$$\mathbf{A}_n \mathbf{Q} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{E}_n \mathbf{D}_n \mathbf{D} \mathbf{E}_n^T \quad (4.33)$$

com $\mathbf{F}_n = \mathbf{E}_n \sqrt{\mathbf{D}^{-1}}$. Note que, por construção, que \mathbf{F}_n é uma matriz ortogonal, portanto a matriz \mathbf{A}_n possui uma decomposição em valores singulares (SVD) expressa como

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{F}_n \mathbf{D}_n \mathbf{F}_n^T.$$

Com este resultado, a expressão (4.30) é deduzida imediatamente. Por último, a identidade (4.32) segue imediatamente a partir da equação (4.29) e (4.33). \square

Embora tenhamos conseguido uma expressão para determinar o fluxo discreto, é importante ressaltar que, na prática a temperatura medida corresponde a $T(r_e, \theta_j)$ e não a $T_n(r_e, \theta_j)$. Assim, a hipótese usada pode ser considerada não realista. Por essa razão, nesta seção assumiremos as seguintes hipóteses:

- a) A função $W(r_e, \theta)$ é simples de calcular ou aproximar com excelente precisão.
- b) O erro de aproximação $|T(r_e, \theta) - T_n(r_e, \theta)|$ é desprezível e, conseqüentemente, podemos substituir $T_j = T(r_e, \theta_j)$ por $T_n(r_e, \theta_j)$ sem perda significativa da informação.

É importante mencionar que hipótese em (a) é satisfeita nos problemas inversos de transferência de calor quando a função de fonte representa o calor gerado pelo efeito Joule [52]. Para outros casos a solução $W(r_e, \theta)$ deve ser calculado mediante métodos com alto grau de aproximação, como por exemplo, pelo método CPS, estudado no segundo capítulo.

Com relação a hipótese b), note que os coeficientes v_k, w_k torna-se insignificantes para pequenos valores de k (Teorema 4.1.1). Portanto, esta hipótese é satisfeita para n suficientemente grande, e não é restritiva na prática, devido a potencialidade dos atuais equipamentos de medição [20, 26].

Quanto aos aspectos práticos do processo de inversão, não podemos esquecer que, na prática, os dados obtidos a partir de medições de temperatura apresentam perturbações da forma $T_\delta(r_e, \theta_j) = T(r_e, \theta_j) + \epsilon_j$, $j = 0, \dots, M - 1$, sendo ϵ_j o ruído presente na j -ésima componente. Estas imprecisões geram sérias dificuldades no cálculo da solução do problema (4.33) quando G_δ é usado em lugar de G , devido que a matriz A_n é severamente mal condicionada, caracterizada pelo rápido decréscimo dos valores singulares σ_k , como mostra a Figura 4.3.

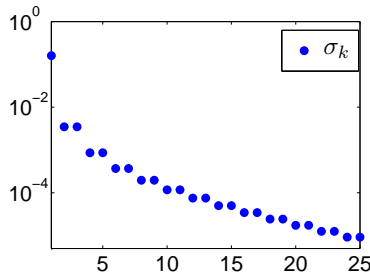


Figura 4.3: Decaimento dos valores singulares σ_k para 25 termos.

4.3 Reconstrução do coeficiente de transferência de calor

Nesta seção, descrevemos como utilizar o método descrito acima para estimar o coeficiente de transferência de calor $h(\theta)$, a partir de dados experimentais na fronteira externa. Conforme descrito na introdução, veja equação (1.5), este procedimento depende da disponibilidade do fluxo Q e da temperatura na borda interna $T(r_i, \theta)$ e, quando ambas quantidades estão disponíveis, o coeficiente h pode ser determinado como

$$h(\theta) = \frac{Q(\theta)}{T_b - T(r_i, \theta)}, \quad T_b \neq T(r_i, \theta).$$

Obviamente, esta abordagem tem a dificuldade natural que, na prática, estimar a temperatura na parede interna do tubo não é uma tarefa simples, pois em muitos casos a geometria do duto impossibilita a incorporação de sondas. Uma das contribuições deste trabalho é que, além de recuperarmos estimativas do fluxo Q , conseguimos contornar as dificuldades apontadas acima, aplicando o método de Galerkin para estimar a temperatura discreta em qualquer parte do domínio.

Assim, para a reconstrução do coeficiente convectivo procedemos da seguinte maneira: com os dados de entrada \mathbf{G}_δ , denotamos por $\mathbf{Q}_{\text{estim}}$ a solução calculada pelos métodos de regularização TSVD e RT associados ao problema inverso (4.33). Na sequência, usando (4.33) calculamos

$$\mathbf{G}_{\text{estim}} = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{\text{estim}}$$

e, usando o Teorema 4.2.1, estimamos a temperatura em $r = r_i$ como

$$\mathbb{T}_1 \doteq \mathbb{T}_{\text{estim}}(r_i) = \sum_{k=1}^M \hat{\sigma}_k(r_i) \frac{\mathbf{f}_k^T \mathbf{G}_{\text{estim}}}{\sigma_k} \mathbf{f}_k + \mathbb{W}_e.$$

Finalmente, recuperamos o vetor $\mathbf{h}_{\text{estim}}$ que aproxima o coeficiente h , da forma

$$[\mathbf{h}_{\text{estim}}]_j = \frac{[\mathbf{Q}_{\text{estim}}]_j}{T_b - [\mathbb{T}_{\text{estim}}(r_i)]_j}, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (4.34)$$

4.3.1 Resultados numéricos

Ilustraremos a eficiência do método proposto utilizando dados sintéticos divididos em dois casos.

Caso 1: Fonte constante. Neste experimento, utilizamos a equação (4.32) para gerar a temperatura discreta $\mathbb{T}(r)$, no domínio $[r_e, r_i]$, correspondente às informações discretas do fluxo de distribuição Q , definido por

$$Q(\theta) = -3250 - 1265 \exp(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.35)$$

A escolha do fluxo Q é pela sua semelhança com fluxos experimentais no interior de tubos espiralados obtidos por Bozzoli *et al.* [20]. Também denotamos por $\mathbf{h}_{\text{exact}}$, o vetor associado ao coeficiente de transferência de calor definido como

$$h_j = \frac{Q_j}{T_b - \mathbb{T}_{1j}}, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Neste caso particular, como a fonte q_g é constante, utilizaremos a função radial u dada em (3.39) como parte da solução do problema direto

$$u(r) = -\frac{q_g}{4\lambda_w}(r^2 - r_e^2) + \frac{q_g}{2\lambda_w}r_i^2 \ln(r/r_e) + T_{env} + \frac{q_g}{2\alpha r_e}(r_e^2 - r_i^2),$$

Os parâmetros físicos utilizados neste modelo são definidos na Tabela 2.1.

No problema inverso utilizaremos $M = 127$ pontos de colocação θ_j e construímos o vetor de fluxo de calor \mathbf{Q} com componentes $Q_j = Q(\theta_j)$ e o vetor de temperatura na fronteira exterior $\mathbf{T}_E = \mathbf{T}(r_e)$, via a equação (4.32). Com estas informações, geramos o vetor

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}_E - u(r_e)\mathbf{1}$$

sendo $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^M$ o vetor com componentes iguais à unidade.

Nosso método é testado utilizando o vetor com dados perturbados \mathbf{G}_δ , construído da forma

$$\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + (NL\|\mathbf{G}\|_2)\mathbf{e}, \quad \|\mathbf{e}\|_2 = 1$$

sendo NL o nível de ruído e \mathbf{e} é o vetor de ruído cujas entradas são números aleatórios Gaussianos. Assim, o erro nos dados é calculado exatamente como

$$\delta = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_\delta\|_2 = \|\mathbf{T} - \mathbf{T}_\delta\|_2 = NL\|\mathbf{G}\|_2.$$

A eficiência destes métodos apresentados é quantificada pelo erro relativo no fluxo e pelo erro relativo no coeficiente convectivo definidos por

$$E_Q = \frac{\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{estim}\|_2}{\|\mathbf{Q}\|_2}, \quad E_h = \frac{\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_{estim}\|_2}{\|\mathbf{h}\|_2}$$

sendo \mathbf{Q}_{estim} a solução obtidas pelos métodos TSVD e RT, e \mathbf{h}_{estim} o vetor definido em (4.34), respectivamente. As estratégias de regularização são implementadas numericamente utilizando o pacote de Hansen [38], onde os parâmetros de truncamento e de regularização são determinados pelo Princípio da Discrepância, respectivamente.

Resultados obtidos pela TSVD

Na Tabela 4.1 mostramos o erro relativo das soluções calculadas pelo método TSVD. A qualidade da solução é medida em termos do erro

relativo médio $E_n = \|\mathbf{Q}_\delta^{(n^*)} - \mathbf{Q}\|_2 / \|\mathbf{Q}\|_2$ e representa a média de 50 realizações, para vários valores do raio interno r_i e níveis de ruído NL . O parâmetro n_{\max}^* representa o máximo valor dos parâmetros calculados em todas as realizações. O parâmetro de regularização é determinado pelo Princípio da Discrepância, com $\tau = 1.01$.

r_i	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
0.010	0.0117	0.0494	0.2132
0.011	0.0099	0.0441	0.1925
0.012	0.0090	0.0240	0.1171
0.013	0.0086	0.0134	0.1044
0.014	0.0047	0.0096	0.0579

Tabela 4.1: Erro relativo médio calculado pelo método TSVD.

Verificamos, pelos resultados obtidos na Tabela 4.1, que o grau de aproximação do método TSVD é bom no caso em que o domínio anular é fino e os dados contêm baixo nível de ruído, e é aceitável para tubos com maior espessura. Na Figura 4.4 ilustramos esta aproximação, onde mostramos os resultados para uma execução a solução estimada pelo método TSVD para $r_i = 0.012$ e dois níveis de ruído $NL = 2.5 \times 10^{-4}$, $NL = 2.5 \times 10^{-2}$. Podemos observar que quando os dados contêm pequenas perturbações a solução recuperada aproxima bem a solução exata.

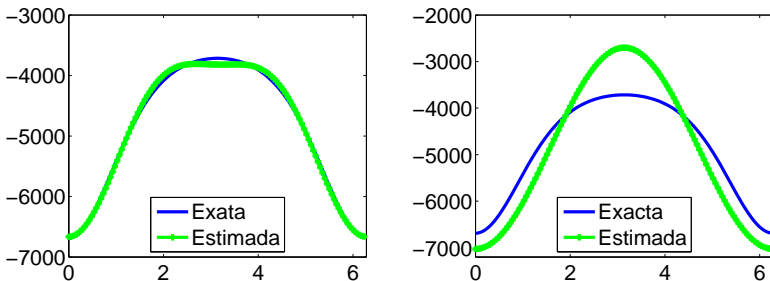


Figura 4.4: Fluxo de calor exato e aproximado para $r_i = 0.012$ e nível de ruído $NL = 2.5 \times 10^{-4}$ (esquerda), $NL = 2.5 \times 10^{-2}$ (direita).

Na Tabela 4.2 mostramos o máximo índice de truncamento n_{\max} determinado pelo princípio da Discrepância junto com a média do tempo de execução \bar{t} e a média do Erro relativo do coeficiente convectivo E_h .

	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
n_{\max}^*	4	4	2
\bar{t}	0.0751	0.059	0.0777
E_h	0.0090	0.0226	0.1178

Tabela 4.2: Índice de truncamento n_{\max}^* , média de tempo de execução (em segundos) do método TSVD e do erro E_h para $r_i = 0.012$.

A Tabela 4.2, mostra que o índice de truncamento n_{\max}^* determinado pelo DP é estimado usando subespaços de baixa dimensão, para distintas ordens do nível de ruído. Isso implica o cálculo das soluções regularizadas é feito em tempo desprezível. Assim, vemos que o método de Galerkin apresenta grandes vantagens devido a facilidade com que a decomposição SVD da matriz sistema linear (4.33) é construída

Resultados obtidos via Regularização de Tikhonov

Procedendo como acima, na Tabela 4.3 mostramos a qualidade da solução fornecida pelo método de regularização de Tikhonov em termos do erro relativo médio $E_\lambda = \|\mathbf{Q}_{\lambda,\delta} - \mathbf{Q}\|_2 / \|\mathbf{Q}\|_2$ associado a 50 realizações, para distintos valores de r_i e níveis de ruído NL . O parâmetro de regularização λ^* é calculado pelo princípio da discrepância, isto implica resolver a equação não linear $R(\lambda) - \tau^2 \delta^2 = 0$, via um método para calcular raízes, com R definida em (A.11).

r_i	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
0.010	0.0197	0.0386	0.1961
0.011	0.0172	0.0335	0.1835
0.012	0.0147	0.0296	0.1656
0.013	0.0116	0.0231	0.1370
0.014	0.0083	0.0169	0.0901

Tabela 4.3: Erro relativo médio na reconstrução do fluxo de calor calculado pelo método RT.

Como podemos observar, o método RT aproxima bem o fluxo no caso em que o nível de ruído é pequeno, e para o caso em que $NL = 2.5 \times 10^{-2}$ as aproximações são aceitáveis.

A Tabela 4.4 mostra a média dos parâmetros obtidos de todas as realizações. Note que, estes valores crescem com respeito ao nível de ruído devido a que para valores grandes de NL é requerido maior re-

	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
$\bar{\lambda}$	3.82×10^{-4}	7.73×10^{-4}	7.85×10^{-3}
\bar{t}	0.086	0.0801	0.086
E_h	0.0148	0.0298	0.1672

Tabela 4.4: Média do parâmetro de regularização $\bar{\lambda}$, tempo de execução e Erro do coeficiente h para $r_i = 0.012$.

gularização. Com respeito ao tempo gasto, vemos que o método RT consegue calcular a solução aproximada em um tempo semelhante aos resultados obtidos pelo método TSVD. Concluimos que o método de Galerkin associado à RT é uma excelente alternativa para resolver o problema inverso, com a característica de melhorar a performance de ambos os métodos, CPS e Análise de Fourier, estudados nos capítulos anteriores.

Caso 2: Fonte variável. Agora mostraremos os resultados numéricos para o caso em que a fonte de calor q_g depende das variáveis r , θ . Para tanto, definimos a função q_g utilizando o problema direto de valor de fronteira (1), (2) e (4), sendo as funções de temperatura T e o fluxo de calor Q definidas da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta) &= \frac{Q(\theta)}{\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda_w}(r - r_i)\right) + T_{env}, \\
 Q(\theta) &= \frac{3 + \cos^2(0.5\theta)}{2\alpha + 3 + \cos^2(0.5\theta)}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Neste experimento, os parâmetros físicos são escolhidos como:

$$r_i = 0.4, \quad r_e = 0.9, \quad T_b = 55, \quad T_{env} = 10, \quad \alpha = 8, \quad \lambda_w = 5.$$

Como a função de fonte q_g depende das variáveis r , θ , os dados exatos na fronteira Γ_e são obtidos da forma $G(r_e, \theta_j) = T(r_e, \theta_j) - W(r_e, \theta_j)$ ($j = 0, \dots, M - 1$).

Vale ressaltar que, como W depende das variáveis r e θ , esta função será aproximada de forma discreta utilizando o problema auxiliar (3.40), baseado no método CSP, sobre uma malha de $(N + 1) \times M$ com N par e $M = 2N$. Consideraremos $N = 28$ pontos na direção radial e $M = 56$ na direção θ .

Fixados os dados exatos, procederemos de forma similar ao caso anterior, construiremos dados perturbados G_δ e procuraremos estimativas do fluxo para vários níveis de ruído $NL = 2.5 \times 10^{-4}, 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-2}$. A precisão dos métodos de regularização TSVD e RT são quantificadas via a média do erro relativo para o fluxo, denotado por E_Q e o erro relativo do fluxo E_h . Também apresentamos uma Tabela com o tempo de execução para cada método de regularização e os parâmetros de regularização para cada método.

Resultados obtidos via TSVD

Nesta subseção, mostramos os resultados obtidos utilizando o método TSVD para reconstruir estimativas discretas do fluxo Q e do coeficiente h , no caso em que a fonte de calor $q_g(r, \theta)$. Na seguinte tabela, mostramos a média do erro relativo para 50 realizações com diferentes valores do r_i e valores do nível de ruído.

r_i	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
0.4	2.33×10^{-4}	1.01×10^{-3}	8.42×10^{-2}
0.5	1.44×10^{-4}	9.81×10^{-4}	7.57×10^{-3}
0.6	1.28×10^{-4}	4.95×10^{-4}	5.75×10^{-3}
0.7	8.43×10^{-5}	4.54×10^{-4}	6.43×10^{-3}
0.8	6.88×10^{-5}	3.01×10^{-3}	5.54×10^{-3}

Tabela 4.5: Erro relativo médio na reconstrução do fluxo de calor calculado pelo método TSVD.

Podemos observar, pelos resultados obtidos, que o grau de aproximação da solução calculada pelo método TSVD é muito bom, sendo obtidas as melhores estimativas quando o raio interno é próximo de $r_e = 0.9$. Por outro lado, na Tabela 4.6, mostramos a performance deste método em termos do tempo de execução. Comparado com o caso de fonte constante, vemos que o tempo gasto do método é consideravelmente maior. Isto é devido a que o vetor W_e associado à função $W(r_e, \theta)$ é determinado pelo método CPS. Além disso, a partir do erro associado ao fluxo convectivo h , vemos que o método TSVD consegue recuperar estimativas aceitáveis para diferentes níveis de ruído NL .

Os resultados obtidos nas tabelas acima, são ilustrados na Figura 4.5, onde mostramos a diferença entre as soluções exata e recuperada (para uma iteração). Principalmente, notamos que existe diferença notável entre a temperatura discreta T_1 , na fronteira Γ_i , e a temperatura $T_{\text{estim}}(r_i)$ calculada pelo Teorema 4.2.1. Além disso, temos que

	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
n_{\max}^*	8	6	5
\bar{t}	18.56	18.13	18.41
E_h	6.6×10^{-3}	6.5×10^{-3}	7.9×10^{-3}

Tabela 4.6: Média do parâmetro de truncamento n_{\max}^* , tempo de execução e Erro do coeficiente h para $r_i = 0.6$.

$\|T_{\text{estim}}(r_i) - T_1\| = \mathcal{O}(10^{-2})$. Esta dificuldade é superada quando o raio interno r_i é muito próximo de r_e .

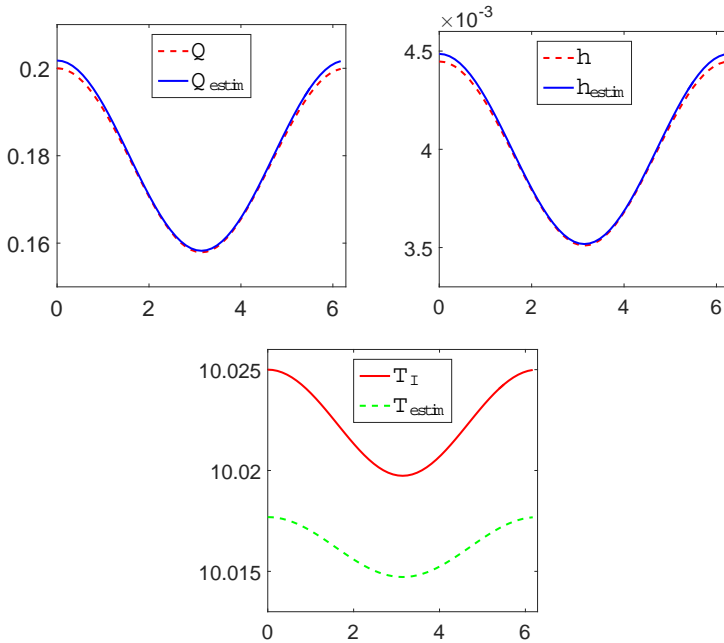


Figura 4.5: Comparação entre as estimativas do fluxo de calor (esquerda), coeficiente convectivo (direita) e temperatura na fronteira interna (abaixo).

Resultados obtidos via regularização de Tikhonov

Seguindo um procedimento similar ao descrito acima, mostramos os resultados obtidos pelo método RT para calcular aproximações discretas

do fluxo Q e do coeficiente h . Na Tabela 4.7 mostramos a média do erro relativo para 50 realizações, usando diferentes valores do r_i e diferentes valores do nível de ruído.

r_i	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
0.4	4.15×10^{-3}	6.75×10^{-3}	2.15×10^{-1}
0.5	4.29×10^{-3}	7.38×10^{-3}	4.57×10^{-2}
0.6	3.93×10^{-3}	8.09×10^{-3}	4.42×10^{-2}
0.7	4.38×10^{-3}	9.79×10^{-3}	5.01×10^{-2}
0.8	5.37×10^{-3}	1.01×10^{-2}	5.74×10^{-2}

Tabela 4.7: Erro relativo médio da distribuição do fluxo de calor calculado pelo método de Tikhonov.

Os resultados obtidos mostram que o método RT calcula as estimativas com erro relativo com ordem $\mathcal{O}(10^{-3})$ para nível de ruído pequeno. Isso sugere que, para efeitos de reconstrução, é preferível o método TSVD, pois, como temos visto, este utiliza menos colunas da matriz F_n para estimar o vetor Q_{estim} do que o método RT.

Na Tabela 4.8 mostramos o tempo gasto pelo método RT, assim como o erro relativo associado ao fluxo convectivo h para $r_i = 0.6$.

	$NL = 2.5 \times 10^{-4}$	$NL = 1 \times 10^{-3}$	$NL = 2.5 \times 10^{-2}$
$\bar{\lambda}$	9.70×10^{-4}	1.86×10^{-3}	8.27×10^{-3}
\bar{t}	13.03	13.13	14.41
E_h	3.94×10^{-3}	8.10×10^{-3}	4.43×10^{-2}

Tabela 4.8: Média do parâmetro de regularização $\bar{\lambda}$, tempo de execução e Erro do coeficiente h para $r_i = 0.6$.

4.4 Reconstrução do fluxo de calor e coeficiente convectivo a partir de dados experimentais

Nesta seção, aplicamos o método proposto para estimar o coeficiente de transferência de calor $h(\theta)$, em tubos espiralados, a partir de dados experimentais obtidos por Bozzoli *et. al.*, [20], os dados que serão utilizados consistem em 276 pontos uniformemente espaçados com seus correspondentes valores de temperatura, obtidos com uma câmera

infravermelha na parede exterior do tubo de aço inoxidável, sob condições de aquecimento uniforme, gerados pelo efeito Joule na parede interna (isto é q_g é constante). Neste experimento, com exceção que o raio interno e externo são $r_i = 0.008$ mm e $r_e = 0.009$ mm os outros parâmetros físicos utilizados são apresentados na Tabela 2.1. Os dados obtidos pela câmera infravermelha, são mostrados na Figura 4.6 (lado esquerdo), no lado direito são mostradas as temperaturas reconstruídas T_E e T_I utilizando (4.32).

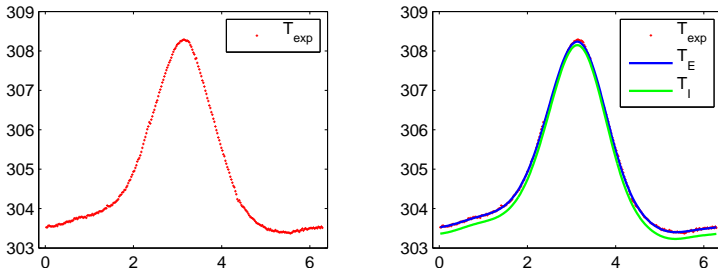


Figura 4.6: Esquerda: Temperatura experimental. Direita: Temperatura recuperada nas fronteiras interna e externa.

Os dados de entrada mostram claramente que a distribuição de temperatura possui uma variação importante ao longo da circunferência e que o gradiente de temperatura é quase desprezível ao longo do eixo do tubo. Esta observação verifica que o modelo bidimensional é adequado para este tipo de problemas.

Voltando ao nosso procedimento, sabemos que para a implementação do princípio da discrepância precisamos estimar a norma de erro nos dados. Esta medida do erro foi calculada medindo a distribuição da temperatura da superfície, mantendo a parede do tubo em condições isotérmicas. Numericamente, o parâmetro de truncamento associado ao método TSVD é $n = 11$ e o parâmetro correspondente ao método RT foi $\lambda = 1.2093 \times 10^{-4}$. Com o fluxo de calor Q_{estim} , determinado pelos métodos de regularização, o coeficiente de transferência de calor é calculado conforme (4.34). As estimativas obtidas do fluxo Q_{estim} e o coeficiente h_{estim} são mostradas na Figura 4.7

Como podemos observar, os resultados obtidos concordam bem com os obtidos em [20], onde o problema direto é resolvido pelo método de elementos finitos e o fluxo de calor é determinado pela resolução de um problema linear de quadrados mínimos regularizados, onde a matriz do problema é a matriz de sensibilidade. Neste caso, o método RT é

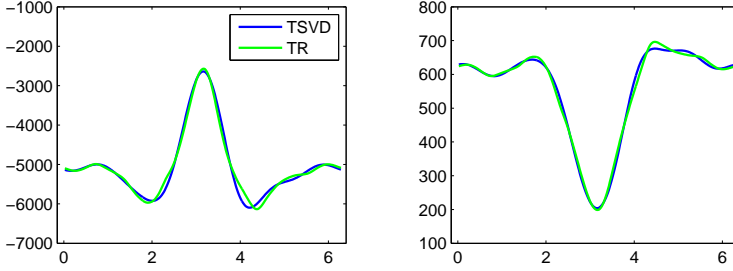


Figura 4.7: Estimativas do fluxo Q (esquerda) e do coeficiente h (direita) a partir de medidas experimentais.

acoplado com o método do ponto fixo para determinar o parâmetro de regularização [5, 6].

Os dados de temperatura calculados pelo método TSVD são obtidos truncando a soma dada em (4.32) para n termos; e são comparados com os dados experimentais na Figura 4.6 (direita). Os resultados mostram que ambas aproximações de temperatura ajustam bem os dados experimentais.

Concluimos esta seção com resultados de aproximação para fluxo de calor Q e coeficiente de transferência de calor assimétricos. Para tanto, utilizamos dados experimentais fornecidos por M. J. Colaço [30]. Neste caso, o conjunto de dados consiste em 201 valores de temperatura obtidas pela câmera infravermelha, com as mesmas condições experimentais descritos acima e para os parâmetros físicos

$$q_g = 4.78 \times 10^6, T_b = 21.57, T_{env} = 23.85, \alpha = 5, \lambda_w = 15.$$

Os dados experimentais de temperatura para este exemplo numérico são mostrados na Figura 4.8

Os dados de temperatura estimada são mostrados a direita. Como vimos acima, os resultados mostram que as temperaturas obtidas aproximam bem os dados experimentais. Note que os valores de temperatura na fronteira interior e exterior são muito similares. Isto é, devido a que a espessura do tubo é muito pequena, $r_e - r_i = 0.001$. Finalmente o fluxo de calor reconstruído e o coeficiente de transferência de calor são mostrados na Figura 4.9

Na comparação realizada, o método proposto mostrou-se adequado para funções de temperatura não simétricas. Além disso, o coeficiente

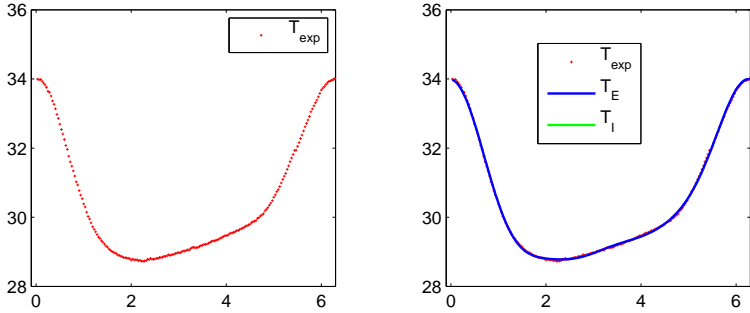


Figura 4.8: Dados experimentais (esquerda) e dados estimados (direita) para o caso assimétrico.

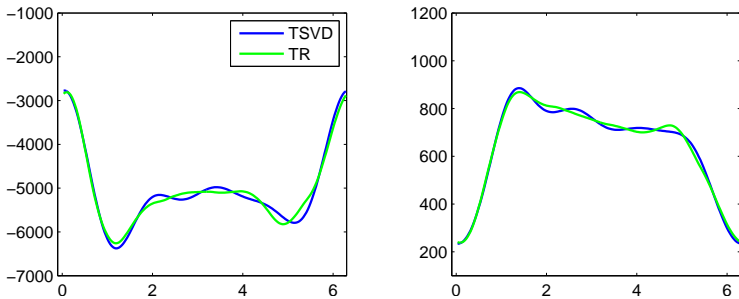


Figura 4.9: Fluxo estimado Q (esquerda) e coeficiente de transferência de calor h (direita) a partir da temperatura experimental para o caso assimétrico.

h obtido pelos métodos TSVD e RT são muito similares aos mostrados em [30, Figura 6]

Capítulo 5

Conclusões e trabalho futuro

Neste trabalho, estudamos o problema de reconstruir o coeficiente convectivo h , para a equação de Poisson num domínio anular, a partir de informações de temperatura na borda externa de um tubo. O estudo do problema foi motivado por inúmeras aplicações industriais tais como pasteurização de alimentos e corrosão de materiais entre outros, sendo o coeficiente de interesse, embutido como dados de fronteira do tipo Robin vinculado a um modelo 2D descrito pela equação de Poisson em coordenadas polares em uma região anular.

Para tanto, utilizamos a técnica de linearização e estudamos a reconstrução do fluxo Q , que aparece embutido no modelo como condição de fronteira do tipo Neumann. A principal contribuição desta tese é o desenvolvimento de técnicas de reconstrução de dados de fronteira do tipo Neumann (inacessível) utilizando diferentes estratégias descritas em cada capítulo. Os métodos desenvolvidos na tese são apresentados em três capítulos.

No capítulo 2, estudamos o método de colocação pseudoespectral CPS que, embora a técnica ser muito eficiente e conseguir soluções numéricas com alto grau de precisão, sua implementação computacional envolve a solução de sistemas lineares de ordem $(N + 1) \times M$ que relacionam aproximações da temperatura discreta e o fluxo Q . Por outro lado, no problema inverso o cálculo da matriz de sensibilidade \mathbf{J} gera um custo computacional de $\mathcal{O}((N + 1)^3 \times M^3)$ operações. Além do cálculo da matriz pseudoinversa, notamos que o número de colunas da matriz \mathbf{J} corresponde à quantidade de pontos utilizados ϕ_j

($j = 1, \dots, M$). Assim, calcular as M colunas via produtos matriz-vetor requer $\mathcal{O}(M^2(N+1)^2)$ operações. Finalmente, temos observado que a matriz de sensibilidade é mal condicionada, e por conseguinte devemos considerar os métodos de regularização TSVD/GTSVD e regularização de Tikhonov, baseados no cálculo da GSVD do par (\mathbf{J}, L) , com $L \in \mathbb{R}^{p \times M}$ cujo custo é $\mathcal{O}(M^2 N p)$ operações. Portanto, o custo total do método de estimação baseado na matriz de sensibilidade é aproximadamente $\mathcal{O}(M^3(N+1)^3) + \mathcal{O}(M^2(N+1)^2) + \mathcal{O}(M^2 N p)$ operações.

Considerando as dificuldades descritas acima, temos proposto o método de aproximações contínuas para obter aproximações da solução exata em subespaços de dimensão finita. Esta estratégia visa reduzir o custo computacional que envolve utilizar o método CPS.

Ilustramos estes métodos, através de experimentos numéricos com fluxo de calor sintéticos e mostramos as estimativas determinadas pelos métodos de regularização a saber, TSVD/GTSVD e regularização de Tikhonov. Concluímos que estas estratégias recuperam soluções de boa qualidade porém com alto custo computacional. Isto nos levou, nos seguintes capítulos, a estudar diferentes estratégias para conseguir um melhor desempenho.

No terceiro capítulo, apresentamos o estudo teórico sobre existência e unicidade de solução do problema direto em espaços de funções apropriados. Como principal contribuição, apresentamos um método de reconstrução que descreve o fluxo de calor em termos do sistema singular de um operador compacto, obtido via análise de Fourier do problema direto. A característica principal da abordagem é o ambiente de trabalho e o uso de dados “contínuos” no processo de aquisição de dados e da reconstrução em si. Para contornar dificuldades decorrentes de incertezas nos dados, usamos métodos de regularização; a expansão truncada de valores singulares (TSVE) e regularização de Tikhonov projetado em subespaços de dimensão finita, para possibilitar a implementação computacional correspondente. Além disso, calculamos taxas de convergência para a solução regularizada a partir de condições de fonte sobre a função Q . Utilizando estes métodos, mostramos que a o fluxo Q é recuperado em $\mathcal{O}(M\bar{k})$ e $\mathcal{O}(Mn)$ operações respectivamente. Resultados numéricos mostram que ambos os métodos apresentam reconstruções de boa qualidade em termos de erro relativo, sendo estas obtidas em poucas iterações e por conseguinte com baixo custo computacional.

No Capítulo 4, abordamos o problema de reconstrução através do método de Galerkin, baseado na hipótese de que os dados de tempera-

tura medidos são de natureza discreta. Assim, relacionamos os dados discretos na fronteira externa $G(r_e, \theta_j)$ com os dados do fluxo desconhecido $Q(\theta_j)$ através de um sistema linear severamente mal condicionado. Entre as contribuições mais importantes, temos a relação entre o fluxo discreto Q com a temperatura discreta $T(r)$ em qualquer ponto do domínio radial. Também, ressaltamos a descrição explícita da SVD da matriz coeficiente e, portanto, o cálculo da solução “exata” para dados livres de ruído. Além disso, para o caso em que os dados possuem incertezas, dois métodos de regularização são discutidos e implementados, o método TSVD e regularização de Tikhonov. Estes métodos são extremamente simples de se implementar e computacionalmente baratos, porque a reconstrução utiliza apenas alguns produtos internos em espaços euclidianos de dimensão pequena. A solução calculada por estes métodos, foi utilizada para construir estimativas da temperatura na borda interior do duto e posteriormente a reconstrução de estimativas discretas do coeficiente convectivo h .

Vários resultados numéricos são incluídos para ilustrar a eficiência dos métodos propostos. Finalmente, como aplicação, estimamos o coeficiente de transferência de calor em tubos enrolados com dados experimentais extraídos de [20, 30].

Entre os objetivos a longo prazo mencionamos os seguintes

- (1) Procurar funções de fluxo no subespaço $M_{p,\varrho}^{\log}(A)$, e aplicar o método TSVE verificando as taxas de convergência no cálculo de estimativas para o problema inverso.
- (2) Estudar o caso 3-D, isto é, analisar o problema direto considerando um tubo de comprimento $L > 0$ e uma equação de Poisson 3D em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Para tanto, podemos escolher uma base formada por funções de Bessel para construir soluções aproximadas, e estabelecer modelos lineares que relacionam o fluxo de calor com os dados medidos na fronteira exterior.

Apêndice A

Regularização

Muitos problemas nas áreas aplicadas envolvem a resolução de uma equação linear do tipo

$$Ax = b \tag{A.1}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \geq n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ ou, o problema mais geral

$$\tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|_2.$$

Na prática, quando os problemas acima são provenientes da discretização de problemas mal postos, a matriz A é mal condicionada e o vetor de dados exatos b é indisponível. Assim, os problemas acima devem ser resolvidos usando um vetor de dados b_δ , contaminado por erros, satisfazendo

$$\|b_\delta - b\|_2 \leq \delta, \delta > 0. \tag{A.2}$$

Em particular, considerando o problema associado à (A.1),

$$Ax = b_\delta, \tag{A.3}$$

é conhecido que a solução da forma $x^\delta = A^\dagger b_\delta$ não proporciona informação útil da solução exata do problema, pois os erros presentes no vetor b_δ são amplificados pela matriz pseudo-inversa A^\dagger [39]. Portanto, vemos a necessidade de utilizar métodos de regularização para recuperar aproximações estáveis da solução desejada.

Entre os métodos mais importantes, podemos mencionar o método de valores singulares truncados (TGSVD), Regularização de Tikhonov (RT) e métodos de regularização iterativa, entre outros. Nesta seção, descrevemos os dois primeiros, TGSVD e Regularização de Tikhonov, por serem apropriados para os objetivos deste trabalho.

A.1 Método de truncamento de valores singulares: TSVD

A decomposição truncada de valores singulares (TSVD) é um método de regularização baseado na SVD da matriz A . A decomposição em valores singulares de A é da forma [34]

$$A = U\Sigma V^T$$

em que $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, são matrizes ortogonais e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz diagonal com os valores singulares

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Usando a SVD, a solução x_δ do problema (A.3) é [39]

$$x_\delta = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b_\delta}{\sigma_i} v_i. \quad (\text{A.4})$$

Na prática, esta solução torna-se instável quando os valores singulares σ_i são próximas de zero, pois os erros presentes no vetor b_δ são amplificados pela divisão por pequenos valores singulares σ_i . Consequentemente, a solução x_δ não tem nenhuma relação com a solução exata x . Para contornar esta dificuldade, o método TSVD utiliza (A.4) e calcula soluções aproximadas truncando a soma em $k \leq n$ termos [36]. Assim, a k -ésima solução TSVD é definida como

$$x_\delta^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b_\delta}{\sigma_i} v_i. \quad (\text{A.5})$$

Similarmente, o método TGSVD é baseado na GSVD do par matricial (A, L) onde L incorpora informações a priori da solução como sua suavidade ou regularidade. A GSVD de (A, L) é uma generalização da SVD de A no sentido que os valores singulares generalizados de (A, L) são raízes quadradas dos autovalores generalizados do problema $A^T A x = \lambda L^T L x$ [34, 36]. Especificamente, dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, com $m \geq n \geq p$, a GSVD do par (A, L) é

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} X^{-1}, \quad L = V(\Sigma_2, 0)X^{-1} \quad (\text{A.6})$$

em que $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V = [v_1, \dots, v_p] \in \mathbb{R}^{p \times p}$ são matrizes ortogonais, $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não singular, e $\Sigma_1 =$

$\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, $\Sigma_2 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ são matrizes diagonais com componentes positivas tal que $\sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1$.

Os valores singulares generalizados do par (A, L) são definidos como $\gamma_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}$. Com esta decomposição, a solução truncada baseada na GSVD do par (A, L) é definido como

$$x_{\delta, L}^{(k)} = \sum_{i=p-k+1}^p \frac{u_i^T b_\delta}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n (u_i^T b) \mathbf{x}_i. \quad (\text{A.7})$$

A solução $x_{\delta, L}^{(k)}$ depende do parâmetro de truncamento k , este valor é importante para determinar uma boa aproximação da solução x . Se usarmos k pequeno $x_{\delta, L}^{(k)}$ poderia capturar pouca informação da solução exata. Por outro lado, k muito grande poderia incluir contribuições do ruído presente nos dados a ponto da solução ser dominada pelo ruído. Portanto, o parâmetro de truncamento deve ser escolhido com muito cuidado. Neste trabalho usamos o princípio da Discrepância de Morozov [4] o qual determina o parâmetro de truncamento como segue

$$k^* = \min\{k \in \mathbb{N}; \|Ax_{\delta, L}^{(k)} - b_\delta\|_2 \leq \tau\delta\} \quad (\text{A.8})$$

sendo $\tau \gtrsim 1$ um valor próximo de um. Este critério permite reduzir as operações computacionais significativamente.

A.2 Regularização de Tikhonov

O método de regularização de Tikhonov calcula aproximações estáveis da solução, mediante a incorporação das propriedades da solução no problema dos mínimos quadrados penalizados

$$x_{\lambda, \delta} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \{ \|Ax - b_\delta\|_2^2 + \lambda^2 \|Lx\|_2^2 \} \quad (\text{A.9})$$

onde $\lambda > 0$ é o parâmetro de regularização e L a matriz de regularização. É conhecido que a solução do problema (A.9) satisfaz as equações normais regularizadas associadas ao problema (A.9) [42]

$$(\lambda^2 L^T L + A^T A) x_{\lambda, \delta} = A^T b_\delta$$

Esta solução é única quando $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(L) = 0$, isto é, a interseção dos núcleos de A e L é o espaço trivial. Usando a GSVD do par (A, L) , a

solução do problema (A.9) é

$$x_{\lambda,\delta} = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i}{\lambda^2 \mu_i^2 + \sigma_i^2} (u_i^T b_\delta) \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n (u_i^T b_\delta) \mathbf{x}_i. \quad (\text{A.10})$$

Quando $L = I_n$, a solução é baseada na SVD da matriz A . Nesse caso, a solução regularizada é

$$x_{\lambda,\delta} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\lambda^2 + \sigma_i^2} (u_i^T b_\delta) v_i$$

Como podemos observar, a solução $x_{\lambda,\delta}$ depende do valor de λ ; novamente, a escolha deste parâmetro deve ser feita cuidadosamente. Aqui, o parâmetro será escolhido pelo princípio da discrepância de Morozov, no qual o parâmetro "ótimo", $\lambda^* > 0$, é a única raiz da equação não linear

$$R(\lambda) = \tau^2 \delta^2, \quad R(\lambda) := \|Ax_{\lambda,\delta} - b_\delta\|_2^2. \quad (\text{A.11})$$

onde $\tau \gtrsim 1$. Esta estratégia procura que o resíduo $R(\lambda)$ seja da mesma ordem de grandeza do erro presente nos dados b_δ conforme (A.2).

É simples mostrar que (A.11) tem uma única solução. De fato, se denotarmos por $\delta_0 = \|(I - UU^T)b_\delta\|_2$ a componente de b_δ que não pertence a $\mathcal{R}(A)$, o resíduo pode ser expresso como

$$R(\lambda) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda^4}{(\gamma_i^2 + \lambda^2)^2} |u_i^T b_\delta|^2 + \delta_0^2. \quad (\text{A.12})$$

Aplicando derivada com respeito à λ temos

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda) = 4\lambda^3 \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^2}{(\gamma_i^2 + \lambda^2)^3} |v_i^T b_\delta|^2 > 0.$$

Segue-se que a função R é crescente em $\lambda > 0$ e $R(0) = \delta_0^2$. Portanto, a equação (A.11) tem única solução se e somente se $\delta_0 \leq \tau\delta$.

Referências Bibliográficas

- [1] G. Alessandrini, L. Del Piero and L. Rondi, Stable determination of corrosion by a single electrostatic boundary measurement, *Inverse Problems*, vol 19, 973-984, 2003.
- [2] O.M. Alifanov. Identification of Heat Transfer Processes of Flying Vehicles (An Introduction to the Theory of Inverse Heat Transfer Problems). Mashinostroenie Publishing Academy, Moscow, 1979.
- [3] S.S. Antman, J. E. Marsden, L. Sirovich, Applied Mathematical Science, Springer Science+Business Media, vol 159, 2004.
- [4] Anzengruber S W and Ramlau R 2010, Morozov's discrepancy principle for Tikhonov-type functionals with nonlinear operators *Inverse Problems* 26(2) 025001 doi:10.1088/0266-5611/26/2/025001.
- [5] F. S. V. Bazán, Fixed-point iterations in determining the Tikhonov regularization parameter, *Inverse Prob.* 24, 2008.
- [6] F. S. V. Bazán, J.B. Francisco, An improved Fixed-point algorithm for determining a Tikhonov regularization parameter, *Inverse Prob.* 25,045007, 2009.
- [7] F. S. V. Bazán, L.S. Borges, GKB-FP: an algorithm for large-scale discrete ill-posed problems, *BIT Numer. Math.* 50 (3), 481-507, 2010.
- [8] F. S. V. Bazán, J. R. Quiroz, Galerkin approach for estimating boundary data in Poisson Equation on annular domain with application to heat transfer coefficient estimation in coiled tubes.

Submetido para a revista Numerical Algorithms, NUMA-D-17-00485R1.

- [9] F. S. V. Bazán and L. Bedin, Identification of heat transfer coefficient through linearization: explicit solution and approximation, *Inverse Problems* 33, DOI, <https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa97c1>, 2017.
- [10] F. S.V. Bazán, L. Bedin, F. Bozzoli, Numerical estimation of convective heat transfer coefficient through linearization, *J. Heat Mass Transfer*, 102, 1230-1244, 2016.
- [11] F. S.V. Bazán, L. Bedin, J. R. Quiroz, Method for recovering heat flux distribution in coiled tubes through singular value expansion. Aceito para publicação na revista *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Ref. No. CAM-D-16-02355R1.
- [12] F. S.V. Bazán, M. C. C Cunha, L. S. Borges, Extension of GKB-FP algorithm to large-scale general-form Tikhonov regularization, *Numer. Linear Algebra* 21 (3), 316-339, 2014.
- [13] F. S. V. Bazán, J. B. Francisco, Koung Hee Leem, and G. Pelekanos, Using the linear sampling method and an improved maximum product criterion for the solution of the electromagnetic inverse medium problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics* v. 273, p. 61-75, 2015.
- [14] J. V. Beck, B. Blackwell, Jr. Ch. R. Clair, *Inverse Heat Conduction - Ill-posed problems*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.
- [15] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* [Functional Analysis: Theory and applications.] Applied Mathematics Series for the Master's Degree. Masson, Paris, 1983.
- [16] Canuto C, Hussaini, MY, Quarteroni A, a Zang TA, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [17] D. Fasino and Gabriele Inglese, An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods, *Inverse Problems* 15, pp. 41-48, 1999.
- [18] S. Rainieri, F. Bozzoli, L. Schiavi, G. Pagliarini, Numerical analysis of convective heat transfer enhancement in swirl tubes, *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow* 21 (5),559-571, 2011.

- [19] I. Di Piazza, M. Ciofalo, Numerical prediction of turbulent flow and heat transfer in helically coiled pipes, *Int. J. Therm. Sci.* 49 (4), 653-663, 2010.
- [20] F. Bozzoli, L. Cattani, S. Rainieri, F. S. V. Bazán, L. S. Borges, Estimation of the local heat-transfer coefficient in the laminar flow regime in coiled tubes by the Tikhonov regularisation method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 72, pp. 352-361, 2014.
- [21] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, Brooks Cole, isbn 9780534382162,0534382169, Edition 7, 2000.
- [22] H. Cao, S. V. Pereverzev and E. Sincich, Natural linearization for corrosion identification, *Journal of Physics: Conference Series* 135,012027, 2008.
- [23] H. Cao and S. V. Pereverzev, Natural linearization for the identification of a diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic system from short-time observations *Inverse Problems* 22, 2311-2330, 2006.
- [24] S. Chaabane and M. Jaoua, Identification of Robin coefficients by the means of boundary measurements, *Inverse Problems* 15, 1425-1438, 1999.
- [25] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua and J. Leblond, Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in two-dimensional Laplace inverse problems, *Inverse Problems* 20, 47-59, 2004.
- [26] F. Bozzoli, L. Cattani, S. Rainieri, Effect of wall corrugation on local convective heat transfer in coiled tubes, Elsevier Science, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol 101, pag. 76-90, 2016.
- [27] F. Bozzoli, L. Cattani, S. Rainieri, G. Pagliarini, Estimation of local heat transfer coefficient in coiled tubes under inverse heat conduction problem approach, *Exp. Therm. Fluid Sci.* 59, 246-251, 2014.
- [28] H. T. Chen and X. Y. Wu, Estimation of heat transfer coefficient in two-dimensional inverse heat conduction problems, *Numerical Heat Transfer Part B* 50, 375-394, 2006.

- [29] H. T. Chen and X.Y. Wu, Investigation of heat transfer coefficient in two-dimensional transient inverse heat conduction problems using the hybrid inverse scheme, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 73, 107-122, 2008.
- [30] M. J. Colaço, C. J. Alves and F. Bozzoli, The reciprocity function approach applied to the non-intrusive estimation of spatially varying internal heat transfer coefficients in ducts: numerical and experimental results, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 90, pp. 1221-1231, 2015.
- [31] H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, vol. 375 of *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [32] H. W. Engl, Fusek P. and Pereverzev S. V. Natural linearization for the identification of nonlinear heat transfer law, *J. inverse Ill-Posed Probl.* 13, 567-82, 2005.
- [33] H. H. Golub and J. M. Ortega, *Scientific Computing and Differential Equations-An Introduction to Numerical Methods*, Academic Press, San Diego, California, 1992.
- [34] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, isbn 978 1-4214-0794-4, 1-4214-0794-9, 4rd ed, 2013.
- [35] C. Groetsch, *Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Longman Higher Education, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series, 1984.
- [36] P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [37] P. C. Hansen, *Regularization, GSVD and truncated GSVD*, BIT, 29, pp. 491-504, 1989.
- [38] P. C. Hansen, *Regularization Tools. A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems*, 2008.
- [39] P. C. Hansen, *The truncated SVD as a method for regularization*, BIT, 27, pp. 534-553, 1987.
- [40] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag. New York, 1997.

- [41] T. Hohage, Regularization of exponentially ill-posed problems, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* 21, 439-464, 2000.
- [42] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag New York, Applied Mathematical Sciences 120, 2011.
- [43] T. Lu, B. Liu, P. X. Jiang, Inverse estimation of the inner wall temperature fluctuations in a pipe elbow, *Applied Thermal Engineering*, 31 1976-1982 (2011).
- [44] B. A. Mair, Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators, *SIAM J. Math. Anal.* 25,135-147, 1994.
- [45] T. J. Martin and G. S. Dulikravich, Inverse determination of steady heat convection coefficient distributions, *J. Heat Transfer* 120, 328-334, 1998.
- [46] V. A. Morozov. *Regularization Methods for Ill-Posed Problems*. Michael Stessin, Albany, NY, 1993.
- [47] P. Naphon and S. Wongwises, A review of flow and heat transfer characteristics in curved tubes, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 10, 463-490, 2006.
- [48] T. T. M. Onyango, D.B. Ingham, D. Lesnic and M. Slodicka, Determination of a time dependent heat transfer coefficient from non-standard boundary measurements, *Mathematics and Computers in Simulation* 79, 1577-1584, 2009.
- [49] M. F. Pakdaman, M.A. Akhavan-Behabadi and P. Razi, An experimental investigation on thermo-physical properties and overall performance of MWCNT/heat transfer oil nanofluid flow inside vertical helically coiled tubes, *Experimental Thermal and Fluid Science* 40, 103111, 2012.
- [50] Peiret R. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, Springer, Heildeberg, 2002.
- [51] S. pereverzyev and E. Schock, Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 21(7), 902-916, 2000.

- [52] S. Rainieri, F. Bozzoli, L. Cattani, G. Pagliarini, Experimental investigation on the convective heat transfer enhancement for highly viscous fluids in helical coiled corrugated tubes, *J. Phys.: Conf. Ser.* 395, Paper No. 012032, 2012.
- [53] S. Rainieri, F. Bozzoli, G. Pagliarini, Experimental investigation on the convective heat transfer in straight and coiled corrugated tubes for highly viscous fluids: Preliminary results, *Int. J. Heat Mass Transfer* 55 (1-3), 498-504, 2012.
- [54] S. Rainieri, F. Bozzoli, L. Cattani, G. Pagliarini, Compound convective heat transfer enhancement in helically coiled wall corrugated tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer* 59, 353-362, 2013.
- [55] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action*. Springer, Milano, 2008.
- [56] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operator*, Springer-Verlag, 1960.
- [57] Shivanian, E., Jafarabadi, A. *Engineering with Computers*, 33: 431. <https://doi.org/10.1007/s00366-016-0482-x>, 2017.
- [58] A. Shirzadi and F. Takhtabnoos, A local meshless method for Cauchy problem of elliptic PDEs in annulus domains, *J. Inverse Problems in Science and Engineering*, 24, 729-743, 2016.
- [59] A. N. Tikhonov. On stability of inverse problems. *Dokl. Acad. Nauk URSS*, 39(5):195-198, 1943.
- [60] A. N. Tikhonov. On solving incorrectly posed problems and method of regularization. *Dokl. Acad. Nauk URSS*, 151(3):501-504, 1963.
- [61] Lloyd N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, Society for Industrial and Applied Mathematics, isbn 9780898714654, 0898714656, illustrated edition, 2000.
- [62] A. Zachár, Analysis of coiled-tube heat exchangers to improve heat transfer rate with spirally corrugated wall, *Int. J. Heat Mass Transfer* 53, 3928-3929, 2010.
- [63] R. Zolfaghari and A. Shidfar, Restoration of the heat transfer coefficient from boundary measurements using the Sinc method, *Comp. Appl. Math.* 44, 34-29, 2015.