UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA

Josiane Marina Hoffmann

FUNTORES E CATEGORIAS DE CLASSIFICAÇÃO

Florianópolis

2018

Josiane Marina Hoffmann

FUNTORES E CATEGORIAS DE CLASSIFICAÇÃO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de mestre em Matemática Pura e Aplicada.
Orientador: Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari (UFSC)

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

HOFFMANN, JOSIANE MARINA
Funtores e Categorias de Classificação / JOSIANE MARINA HOFFMANN ; orientador, Fernando de Lacerda Mortari, 2018.
65 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Categorias, Álgebra e Análise. I. Mortari, Fernando de Lacerda . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Josiane Marina Hoffmann

FUNTORES E CATEGORIAS DE CLASSIFICAÇÃO

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "mestre em Matemática Pura e Aplicada", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 19 de fevereiro de 2018.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador – UFSC

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari
Orientador – UFSC

Prof. Dra. Manuela da Silva Souza
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Prof. Dr. Eliezer Batista
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Giles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida e por permitir que este momento tão importante da minha vida se concretize. Afinal de contas, sem Ele, nada somos. E sem Ele não teria conseguido chegar até aqui.

Às pessoas mais importantes da minha vida...minha família. Meus pais que desde cedo me ensinaram a lutar pelos meus ideais. Jamais vou esquecer uma frase que meus pais sempre repetiam: “Se você quiser ter uma vida melhor, estude.” Talvez essa frase não pareça muito motivadora, mas pra mim foi. Acho que a lição mais importante que me deram foi dar valor para as coisas que temos e respeitar as pessoas que nos cercam. Nada foi fácil. Os primeiros dias em Florianópolis talvez tenham sido os mais difíceis da minha vida. Já não estavam mais perto para segurar a minha mão e apontar meus erros, mas sempre estavam, estão e tenho certeza que estarão ao meu lado para me apoiar nas minhas decisões. Distante de casa percebi quão importante é o amor daqueles que nos presentearam com a vida. Estou satisfeita pois sei que se hoje sou compreensiva com as adversidades ao meu redor, é porque um dia eles foram compreensivos com a minha. Hoje posso dizer que segui o conselho que meus pais me deram, estudei. Mas quero dizer que sou muito grata por tudo que fizeram por mim. Muitíssimo obrigada.

Quero agradecer a pessoa que dividiu o lar comigo nesses dois anos de mestrado... à minha irmã Jaqueline. Nossa cumplicidade sempre foi imensa, apesar das nossas diferenças. Tão bom chegar em casa e ver um sorriso ou saber que terei um ombro e um abraço de alguém que vai me ouvir, mesmo que não saiba do que estou falando. Obrigada por estar comigo nesses dois anos de muito estudo, pela compreensão e toda ajuda que você me deu. Muito obrigada minha irmã e companheira.

Aos Bagunceiros em especial, por todos os cafés compartilhados, pelos momentos de euforia, relacionados a matemática ou à vida pessoal, pelos momentos de secar as lágrimas, um do outro ou até mesmo de compartilhar a mesma angústia. Não compartilhamos só matemática, mas também a vida. Lá se foram dias e dias.... por que não dizer noites? Dos dias que chegamos juntos ao departamento as 07h 30 e saímos depois das 22h, dos finais de semana, do nervosismo para as provas de Cálculo Avançado e Análise Funcional. Claro que não posso esquecer dos momentos bons. Das piadas matemáticas que aconteciam principalmente na fila do RU, das “reuniões dos bagunceiros” que foram de extrema importância pra dar aquela desligada da matemática (nunca vou esquecer do filme do Monk). À Fran, por ser a ”mãe” do grupo e estar sempre preocupada com o bem estar físico e emocional de todos. À

Marduck, por ser essa colombiana tão positiva que é, sempre pensando que coisas boas vão acontecer. Ao Everton, que apesar do seu humor oscilatório, é sempre sincero e prestativo, à lembrar pelo pacote da dissertação e não poderia deixar de mencionar as cervejas das nossas reuniões. À Jé, por compartilhar comigo sua fé inabalável, sempre me lembrando do propósito que Deus tem pra nossa vida e também por nos inspirar a andarmos sempre bem vestidos. À Rafa, pelas caronas e esse sorriso que contagia qualquer um. À Lu, por ser essa mineira tinhosa, esforçada e sempre disposta a ajudar o próximo. A Mari, a intrusa mais fofa da sala do mestrado, pessoa mais fofinha e mais "bocozona"que conheço. Ao Elemar, por nos ajudar em Álgebra em qualquer lugar, em qualquer matéria ou até mesmo na dissertação e por me aguentar em estruturas até o último suspiro. Com toda a certeza que a prova de um teorema nos traz, posso dizer que esse mestrado não seria o mesmo sem vocês. Muitíssimo obrigada.

Ao meu orientador, professor Fernando Mortari por acreditar em mim e na minha capacidade, até mesmo quando eu não acreditava. Pela paciência, principalmente no segundo ano de mestrado, quando foi compreensivo em me permitir conciliar matérias e a dissertação. Pelos conselhos não somente de um professor, mas de um amigo. E por todos os ensinamentos durante esses dois anos...que desde a primeira conversa, ainda na graduação, me proporcionou através do seu amor pela matemática.

Ao professor Giuliano Boava, um dos professores admiro e me espelho. Sua vontade de ensinar é fascinante. Até mesmo estudantes que não são seus alunos no semestre, ou estudantes que nem mesmo sabe o nome, os ajuda, sendo conteúdos matemáticos ou não. Seus conselhos como professor e como amigo, com toda a certeza foram indispensáveis. Pela ajuda em todas as matérias, por sempre estar disponível para dúvidas. Não poderia deixar de mencionar o maravilhoso café, nosso combustível para suas listas gigantescas. Por tudo, muito obrigada.

Ao professor Sérgio, que conheci na disciplina de Álgebra Linear com a seguinte piada: Quem tem o mesmo sobrenome do autor do livro base da ementa, não ganha ponto a mais na média por isso (kkkk). Agradeço por suas piadas engraçadas que deixavam suas aulas da 07H30 da manhã mais interessantes. Por acreditar na minha capacidade, até mais do que eu mesma. Por me apresentar Teoria de Categorias, uma ferramenta matemática que me fascinou e por me mostrar que é possível aprender Topologia.

Ao professor Matheus Bortolan, que me permitiu concretizar o sonho de entrar no mestrado, através do curso de verão. Inclusive, um curso de verão que ficará marcado na minha vida. És um professor que admiro muito pois és prestativo e preocupado com seus alunos. E que apesar de não ser meu professor no mestrado, sempre foi preocupado com meu bem-estar psicológico e emocional. Muito obrigada por tudo.

Agradeço as minhas amigas Anieli Godoi e Gabriela Finn pelo apoio e pela força de sempre. Também aos meus amigos de maneira geral, todos tiveram um papel importante durante essa caminhada.

Agradeço aos professores Eliezer Batista, Gilles Gonçalves de Castro e a professora Manuela da Silva Souza por terem aceitado participar da banca deste trabalho e pelas contribuições que deram ao mesmo.

A CAPES e a PROPG da UFSC pelo apoio financeiro durante todo o mestrado.

RESUMO

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que F é funtor de classificação para $\mathcal{C}$ se F é um funtor de $\mathcal{C}$ para uma categoria $\mathcal{D}$ de tal maneira que para quaisquer objetos A, B da categoria $\mathcal{C}$, se $F(A)$ e $F(B)$ são isomorfos em $\mathcal{D}$ então A e B são isomorfos em $\mathcal{C}$. Neste contexto, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma categoria de classificação para $\mathcal{C}$. O objetivo deste trabalho é descrever funtores e categorias de classificação para qualquer categoria em que seja possível falar de automorfismos internos.

Palavras-chave: Classificação; categoria de classificação; funtor de classificação; automorfismo interno.

ABSTRACT

Given a category $\mathcal{C}$, we say that F is a classification functor for $\mathcal{C}$ if F is a functor from $\mathcal{C}$ into a category $\mathcal{D}$ such that for all objects A, B in $\mathcal{C}$, if $F(A)$ and $F(B)$ are isomorphic in $\mathcal{D}$ then A and B are isomorphic in $\mathcal{C}$. In this context, we say that $\mathcal{D}$ is a classifying category for $\mathcal{C}$. The goal of this work is to describe classification functors and categories for every category in which one can talk about inner automorphisms.

Keywords: Classification; classifying category; classification functor; inner automorphisms.

SUMÁRIO

Introdução 15
1 FUNTORES E CATEGORIAS DE CLASSIFICAÇÃO 17
1.1 EXEMPLO: ÁLGEBRAS DE MATRIZES SOBRE $\mathbb{C}$ 34
2 O FECHO DA CATEGORIA DE CLASSIFICAÇÃO 45
2.1 EXEMPLOS: GRUPOS ENUMERÁVEIS E ÁLGEBRAS ENUMERAVELMENTE GERADAS 54
2.1.1 Grupos Enumeráveis 54
2.1.2 Álgebras Enumeravelmente Geradas 65
REFERÊNCIAS 67

INTRODUÇÃO

Em matemática costumamos classificar objetos, ou seja, seria interessante se pudéssemos encontrar uma maneira de decidir se dois objetos de uma dada categoria, para todos os efeitos práticos, são os mesmos, ou seja, isomorfos. Por exemplo, em Álgebra Linear, uma forma de classificar os Espaços Vetoriais se dá através da dimensão, usando Teorema que diz:

Teorema 1. *Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita sobre um corpo K são isomorfos se, e somente se,* $\dim_{\mathbb{K}}(U) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Já em Topologia Algébrica temos uma construção que é invariante por isomorfismos que não ajuda decidir se dois objetos são isomorfos, porém nos ajuda decidir quando dois objetos não são isomorfos. Esta construção é o grupo fundamental. Por exemplo, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ não são isomorfos como espaços topológicos (homeomorfos), mas possuem o mesmo grupo fundamental. Logo o grupo fundamental não faz distinção entre os dois espaços. Já $\mathbb{R}^2$ e S^1 tem grupos fundamentais diferentes, logo não podem ser homeomorfos.

Ainda de Topologia Algébrica, podemos verificar que o grupo fundamental é um funtor, que associa a cada espaço topológico em um grupo e a função contínua em homomorfismo de grupos. Podemos então usar funtores para obter resultados de classificação em uma categoria que nos interesse.

Levando em conta os fatos mencionados, temos a seguinte definição: dada uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que F é funtor de classificação para $\mathcal{C}$ se F é um funtor de $\mathcal{C}$ para uma categoria $\mathcal{D}$ de tal maneira que para quaisquer objetos A, B da categoria $\mathcal{C}$, se $F(A)$ e $F(B)$ são isomorfos em $\mathcal{D}$ então A e B são isomorfos em $\mathcal{C}$. Neste contexto, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma categoria de classificação para $\mathcal{C}$.

Em [1], George Elliott introduziu a noção de automorfismo interno no contexto de categorias; a partir disto, e generalizando ideias usadas em alguns dos principais resultados em classificação de C*-álgebras e Álgebras de von Neumann nas últimas décadas, obteve a construção de categorias e funtores de classificação para qualquer categoria em que uma família de automorfismos internos tenha sido fixada.

Para uma grande classe de C*-álgebras a classificação obtida é equivalente (no contexto categórico) à usual, via K-teoria. No caso das Álgebras de von Neumann, o funtor do fluxo de pesos de Connes-Takesaki (que rendeu a Connes a Medalha Fields, com a classificação dos fatores de tipo III) se fatora pelo funtor de classificação obtido aqui.

No Capítulo 1, vamos considerar uma categoria $\mathcal{C}$ qualquer, e definir uma nova categoria a partir desta, que chamaremos de $\mathcal{C}^{\text{out}}$, de modo que os objetos desta nova categoria sejam os mesmos objetos da categoria $\mathcal{C}$. Mas, queremos que em $\mathcal{C}^{\text{out}}$ tenha "menos"morfismos que na categoria original $\mathcal{C}$. Uma maneira de fazermos isso, é definir uma relação de equivalência nos morfismos da categoria $\mathcal{C}$. Porém, isso não pode ser feito de qualquer forma. Depois de definida a relação de equivalência nos morfismos de $\mathcal{C}$ e uma lei de composição, mostraremos que $\mathcal{C}^{\text{out}}$ é uma categoria e obteremos um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{out}}$. Além disso, mostraremos que $\mathcal{C}^{\text{out}}$ é uma categoria de classificação para $\mathcal{C}$, obtendo assim que F é um funtor de classificação. E para encerrar o capítulo, vamos apresentar um exemplo de uma construção de uma categoria $\mathcal{C}^{\text{out}}$ e depois mostrar um isomorfismo entre categorias.

No Capítulo 2, vamos criar a categoria $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ e faremos isso supondo que dada uma categoria $\mathcal{C}$ qualquer, A e B objetos de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um espaço métrico. Neste capítulo, o objetivo principal é mostrar que $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ é uma categoria de classificação. Mas para provar isso, precisaremos de algumas hipóteses adicionais que são: a composição de morfismos é contínua, a composição por um automorfismo interno é isométrica e para cada A, B objetos de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um espaço métrico completo. E para finalizar, vamos apresentar dois exemplos, na categoria dos grupos enumeráveis e na categoria das álgebras enumeravelmente geradas.

Antes de iniciarmos, vamos fixar algumas notações. Para simplificar a notação, usaremos $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ quando A é um objeto de $\mathcal{C}$. Em algumas bibliografias, é possível que para cada A, B objetos de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ não seja um conjunto, porém, neste trabalho, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ será sempre um conjunto. Assim, usaremos a notação $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quando φ é um morfismo de A para B.

Além disso, neste trabalho, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ começa a partir de 1.

Antes de iniciar a leitura deste trabalho é necessário ter uma noção básica de Teoria de Categorias, Álgebra e Espaços Métricos como podemos encontrar em [3], [4], [5] e [6].

1 FUNTORES E CATEGORIAS DE CLASSIFICAÇÃO

Definição 2. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, por um* funtor de classificação para $\mathcal{C}$ *entende-se um funtor F de $\mathcal{C}$ para uma categoria $\mathcal{D}$ tal que para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, se $F(A)$ e $F(B)$ são isomorfos em $\mathcal{D}$ então A e B são isomorfos em $\mathcal{C}$. Neste contexto, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma* categoria de classificação *para $\mathcal{C}$.*

Neste trabalho vamos criar uma categoria de classificação $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ para uma categoria $\mathcal{C}$, a partir de uma relação de equivalência R nos morfismos de $\mathcal{C}$. Queremos que os objetos de $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ sejam os mesmos de $\mathcal{C}$, porém os morfismos de $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ sejam obtidos identificando os morfismos de $\mathcal{C}$ que são equivalentes módulo R.

Isso não é suficiente para que $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ seja uma categoria. Precisamos ainda definir a composição de morfismos em $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$. Um candidato para a operação de composição na categoria $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ é dado da seguinte forma: considere f e g morfismos de $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ que são obtidos como classes de equivalência módulo R de morfismos ϕ e ψ de $\mathcal{C}$, respectivamente, então a composição $f \circ g$ seria dada como a classe de equivalência módulo R do morfismo $\phi \circ \psi$.

Queremos definir uma relação R nos morfismos de $\mathcal{C}$, mas antes disso, provaremos um resultado auxiliar.

Proposição 3. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(C)$ tem-se que $\mathrm{Aut}(A)$ é grupo com operação de composição.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer e $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Vamos provar que $\mathrm{Aut}(A)$ é grupo.

Seja $h \in \mathrm{Aut}(A)$. Visto que $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Aut}(A)$ e $h \circ \mathrm{Id}_A = h = \mathrm{Id}_A \circ h$, concluímos que $\mathrm{Aut}(A)$ satisfaz o axioma de elemento neutro para grupos.

Sejam $h, k \in \mathrm{Aut}(A)$. Então existem $h^{-1} : A \longrightarrow A$ e $k^{-1} : A \longrightarrow A$ tal que $h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_A$ e $h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_A$, $k \circ k^{-1} = \mathrm{Id}_A$ e $k^{-1} \circ k = \mathrm{Id}_A$, respectivamente. Sabemos que $h \circ k : A \longrightarrow A$. Assim,

$$\begin{aligned}
(h \circ k) \circ (h \circ k)^{-1} &= (h \circ k) \circ k^{-1} \circ h^{-1} \\
&= h \circ (k \circ k^{-1}) \circ h^{-1} \\
&= h \circ (\mathrm{Id}_A) \circ h^{-1} \\
&= h \circ h^{-1} \\
&= \mathrm{Id}_A .
\end{aligned}$$

Analogamente mostramos que

$$(h \circ k)^{-1} \circ (h \circ k) = \mathrm{Id}_A \,.$$

Isto mostra que $\mathrm{Aut}(A)$ é fechado por composição.

Seja $h \in \mathrm{Aut}(A)$. Desta forma, existe $h^{-1} : A \longrightarrow A$ tal que $h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_A$ e $h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_A$, ou seja, $h^{-1} : A \longrightarrow A$ é um isomorfismo. Segue que, $h^{-1} \in \mathrm{Aut}(A)$ e portanto $\mathrm{Aut}(A)$ satisfaz o axioma de elemento inverso para grupos.

Sejam $f, g, h \in \mathrm{Aut}(A)$. Como f, g e h são automorfismos e do fato que composição de morfismos é associativa tem-se que

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Logo, $\mathrm{Aut}(A)$ satisfaz o axioma de associatividade e portanto, $\mathrm{Aut}(A)$ é um grupo.

$\square$

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Considere a relação R sobre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ definida da seguinte forma: para $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer, temos que fRg se, e somente se existem $h \in \mathrm{Aut}(B)$ e $k \in \mathrm{Aut}(A)$ tal que $f = h \circ g \circ k$.

Afirmamos que R é uma relação de equivalência sobre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. De fato, seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ qualquer. Visto que $\mathrm{Id}_B \in \mathrm{Aut}(B)$ e $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Aut}(A)$ e $f = \mathrm{Id}_B \circ f \circ \mathrm{Id}_A$, podemos concluir que fRf, e portanto R é reflexiva.

Sejam agora $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer. Suponhamos que fRg então existem $h \in \mathrm{Aut}(B)$ e $k \in \mathrm{Aut}(A)$ tal que $f = h \circ g \circ k$.

Como $h \in \mathrm{Aut}(B)$ e do fato que $\mathrm{Aut}(B)$ é grupo temos que $h^{-1} \in \mathrm{Aut}(B)$. De maneira análoga, verificamos que existe $k^{-1} \in \mathrm{Aut}(A)$.

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ f \circ k^{-1} &= h^{-1} \circ (h \circ g \circ k) \circ k^{-1} \\
&= (h^{-1} \circ h) \circ g \circ (k \circ k^{-1}) && \text{(Associatividade)} \\
&= \mathrm{Id}_B \circ g \circ \mathrm{Id}_A && (k \in \mathrm{Aut}(A) \text{ e } h \in \mathrm{Aut}(B)) \\
&= g.
\end{aligned}$$

Com isto temos que $g = h^{-1} \circ f \circ k^{-1}$ e assim concluímos que gRf. Portanto, R é simétrica.

Sejam $f, g, p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer. Suponhamos que fRg e

gRp então existem $h, l \in \text{Aut}(B)$ e $k, j \in \text{Aut}(A)$ tal que

$$f = h \circ g \circ k \tag{1.1}$$

e

$$g = l \circ p \circ j, \tag{1.2}$$

respectivamente.

Substituindo 1.2 em 1.1 temos que

$$\begin{aligned} f &= h \circ g \circ k \\ &= h \circ (l \circ p \circ j) \circ k \\ &= (h \circ l) \circ p \circ (j \circ k). \end{aligned}$$

Como $h, l \in \text{Aut}(B)$ e do fato que $\text{Aut}(B)$ é um grupo temos que $h \circ l \in \text{Aut}(B)$. Analogamente, provamos que $j \circ k \in \text{Aut}(A)$. Com isso, concluímos que fRp e portanto R é transitiva.

Segue disso que R é uma relação de equivalência, como afirmado.

A seguir, vamos exemplificar esta relação de equivalência na categoria Set, em que os objetos são conjuntos e os morfismos são funções.

Exemplo 4. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{i, j, l, m\}$ conjuntos e $f, g : A \longrightarrow B$ funções dadas por

$$\begin{aligned} g : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto j \\ b &\mapsto l \\ c &\mapsto i \\ d &\mapsto i \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto l \\ b &\mapsto j \\ c &\mapsto i \\ d &\mapsto i. \end{aligned}$$

Tome

$$\begin{aligned} k : A &\longrightarrow A \\ a &\mapsto b \\ b &\mapsto a \\ c &\mapsto d \\ d &\mapsto c \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h = \text{Id}_B : B &\longrightarrow B \\ i &\mapsto i \\ j &\mapsto j \\ l &\mapsto l \\ m &\mapsto m. \end{aligned}$$

Veja que $f = h \circ g \circ k$. Para que fRg precisamos verificar que $k \in \text{Aut}(A)$ e $h \in \text{Aut}(B)$.

Afirmamos que $k \in \text{Aut}(A)$. De fato, observe que a imagem de k

é igual ao contradomínio de k e assim concluímos que k é sobrejetora. Perceba também que elementos distintos do domínio de k possuem imagens distintas no contradomínio e assim k é injetora. Portanto $k : A \longrightarrow A$ é bijetora. Segue disso que $k \in \mathrm{Aut}(A)$, como afirmado. De maneira análoga, mostramos que $h \in \mathrm{Aut}(B)$.

Segue disso que fRg.

Para darmos um exemplo de quando duas funções não estão relacionadas precisamos de um resultado auxiliar.

Proposição 5. *Na categoria* Set, *para quaisquer objetos A, B e morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, B)$ que é uma função constante tem-se que para qualquer $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, B)$, fRg se e somente se, g é uma função constante.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Set})$ e $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, B)$ quaisquer tal que f é constante.

($\Rightarrow$) Suponha que fRg. Vamos provar que g é uma função constante. De fato, existem $k \in \mathrm{Aut}(A)$ e $h \in \mathrm{Aut}(B)$ tal que

$$f = h \circ g \circ k. \tag{1.3}$$

Como h, k são funções bijetoras, existe $h^{-1} : B \longrightarrow B$ e $k^{-1} : A \longrightarrow A$. Disto e da Equação 1.3 temos que

$$g = h^{-1} \circ f \circ k^{-1}.$$

Sabemos por hipótese que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, B)$ é uma função constante, então existe $c \in B$ tal que $f(x) = c$, para qualquer $x \in A$.

Assim, para qualquer $y \in A$ temos

$$g(y) = h^{-1}(f(k^{-1}(y))) = h^{-1}(c).$$

Isto mostra que g é uma função constante.

($\Leftarrow$) Suponha que g é constante. Vamos provar que fRg. Do fato que f e g são funções constantes temos que existem $c, d \in B$ tais que para qualquer $x \in A$ tem-se $f(x) = c$ e $g(x) = d$, respectivamente.

Considere $h : B \longrightarrow B$ dada por $h(c) = d$, $h(d) = c$ e $h(x) = x, \forall x \in B \backslash \{c, d\}$. Desta forma, temos que h é bijetora por construção e tomando $k = \mathrm{Id}_A$ temos que

$$h \circ g \circ \mathrm{Id}_A = f.$$

Logo, fRg.

□

Exemplo 6. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{i, j, l\}$ conjuntos e $f', g' : A \longrightarrow B$ funções dadas por

$$\begin{aligned} f' : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto i \\ b &\mapsto i \\ c &\mapsto i \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g' : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto i \\ b &\mapsto l \\ c &\mapsto j \end{aligned}$$

Como f' é uma função constante e g' não é, segue que f' não está relacionada com g'.

Denotaremos a classe de equivalência módulo R de um morfismo ϕ de $\mathcal{C}$ por $[\phi]$.

Queremos criar uma categoria de classificação $\mathcal{C}'$ para a categoria $\mathcal{C}$, a partir da relação de equivalência R nos morfismos de $\mathcal{C}$.

Como primeira tentativa, digamos que os objetos de $\mathcal{C}'$ são os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ e para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(C')$ defina

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)/R.$$

Sejam agora $A, B, C \in \mathrm{Obj}(C')$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(B, C)$ quaisquer. Desta forma temos que $\phi = [f]$ e $\psi = [g]$ para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. Gostaríamos de definir a lei de composição por

$$\psi \circ \phi = [g \circ f].$$

porém a classe $[g \circ f]$ depende dos representantes f e g escolhidos para ψ e ϕ, como o próximo exemplo ilustra.

Exemplo 7. Para a categoria Set, seja Set$'$ como acima.

Considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{i, j, k\}$ e $C = \{l, m, n\}$. Defina

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto i \\ b &\mapsto k \\ c &\mapsto i \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : B &\longrightarrow C \\ i &\mapsto l \\ j &\mapsto m \\ k &\mapsto l, \end{aligned} \qquad \text{e}$$

observe que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, B)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(B, C)$. Com isso, temos que $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, C)$ e é dado por

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$a \mapsto l$$
$$b \mapsto l$$
$$c \mapsto l.$$

Note que $g \circ f$ é constante. Usando a Proposição 5 tem-se que $[g \circ f]$ possui apenas funções constantes.

Por outro lado, considere $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, B)$ dado por

$$f' : A \longrightarrow B$$
$$a \mapsto j$$
$$b \mapsto i$$
$$c \mapsto j.$$

Afirmamos que $f'Rf$. De fato, tome $h \in \mathrm{Aut}(B)$ e $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Aut}(A)$ dadas por

$$\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A \qquad\qquad h : B \longrightarrow B$$
$$a \mapsto a \qquad\qquad i \mapsto j$$
$$b \mapsto b \qquad\qquad j \mapsto k$$
$$c \mapsto c \qquad\qquad k \mapsto i,$$

logo $f' = h \circ f \circ \mathrm{Id}_A$. Assim, concluímos que $f'Rf$, como afirmado.

Com isso, temos que a composição $g \circ f' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A, C)$ e é dada por

$$g \circ f' : A \longrightarrow C$$
$$a \mapsto m$$
$$b \mapsto l$$
$$c \mapsto m.$$

Note que $g \circ f'$ não é constante, logo em $[g \circ f']$ não há funções constantes.

Conclusão: $[g \circ f] \neq [g \circ f']$, logo a composição dos morfismos em Set' como sugerida não está bem definida.

Queremos aproveitar a ideia utilizada para construir a categoria $\mathcal{C}'$: manter os objetos da categoria $\mathcal{C}$ e identificar os morfismos equivalentes módulo R. Porém, precisamos restringir nossa atenção a uma relação de equivalência sobre os morfismos da categoria $\mathcal{C}$ que nos dará uma operação de composição bem definida nas classes de equivalência.

Definição 8. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, uma* família compatível de automorfismos para $\mathcal{C}$ ou (FCA) *consiste de um conjunto $S_A \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ de modo que para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tem-se que para todo $\psi \in S_A$ existe $\theta \in S_B$ tal que $\theta \circ \phi = \phi \circ \psi$.*

Se X denota uma família compatível de automorfismos para $\mathcal{C}$, para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ denotamos o conjunto de X associado a A por X_A.

Definição 9. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, uma* família compatível de grupos de automorfismos para $\mathcal{C}$ (ou FCGA) *consiste de uma família compatível de automorfismos H para $\mathcal{C}$ tal que H_A é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(A)$, para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.*

Queremos dar um exemplo de FCGA para a categoria Grp, a categoria dos grupos. Mas antes disso vamos exibir uma definição e demonstrar um lema.

Definição 10. *Sejam G um grupo qualquer e $x \in G$ qualquer então o automorfismo dado por*

$$\phi_x : G \longrightarrow G$$
$$g \mapsto xgx^{-1}$$

é chamado de automorfismo interno induzido por x.

Para um grupo G qualquer, o conjunto de todos os automorfismos internos de G será denotado por $\mathrm{Inn}(G)$.

Lema 11. *Para qualquer grupo G, tem-se que $\mathrm{Inn}(G)$ é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.*

Demonstração. Seja G um grupo qualquer. Provaremos que $\mathrm{Inn}(G)$ é subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Observe que o homomorfismo identidade Id_G é um automorfismo interno de G, logo $\mathrm{Id}_G \in \mathrm{Inn}(G)$ e portanto $\mathrm{Inn}(G)$ é não vazio.

Tome dois elementos quaisquer de $\mathrm{Inn}(G)$, digamos ϕ_x e ϕ_y, para $x, y \in G$.

Dado $g \in G$ qualquer

$$\begin{aligned}
\phi_x \circ \phi_y(g) &= \phi_x(\phi_y(g)) \\
&= \phi_x(ygy^{-1}) \\
&= x(ygy^{-1})x^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (xy)g(y^{-1}x^{-1})\\
&= (xy)g(xy)^{-1}\\
&= \phi_{xy}(g).
\end{aligned}
$$

logo $\phi_x \circ \phi_y = \phi_{xy} \in \mathrm{Inn}(G)$.

Afirmamos que $(\phi_x)^{-1} = \phi_{x^{-1}}$. Com efeito, para qualquer $g \in G$ temos

$$
\begin{aligned}
(\phi_x \circ \phi_{x^{-1}})(g) &= \phi_{x \cdot x^{-1}}(g)\\
&= \phi_e(g)\\
&= ege^{-1}\\
&= g\\
&= \mathrm{Id}_G(g),
\end{aligned}
$$

logo $\phi_x \circ \phi_{x^{-1}} = \mathrm{Id}_G$, provando o afirmado.

Em particular, $(\phi_x)^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$, disso segue que $\mathrm{Inn}(G)$ é subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Resta mostrar que $\mathrm{Inn}(G)$ é normal em $\mathrm{Aut}(G)$. Sejam $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ e $\phi_x \in \mathrm{Inn}(G)$ quaisquer. Mostraremos que $\theta \circ \phi_x \circ \theta^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$.

Dado $g \in G$ qualquer, temos que

$$
\begin{aligned}
(\theta \circ \phi_x \circ \theta^{-1})(g) &= (\theta \circ \phi_x)(\theta^{-1}(g))\\
&= \theta(x\theta^{-1}(g)x^{-1})\\
&= \theta(x)\theta(\theta^{-1}(g))\theta(x^{-1})\\
&= \theta(x)g(\theta(x))^{-1}\\
&= \phi_{\theta(x)}(g),
\end{aligned}
$$

de onde $\theta \circ \phi_x \circ \theta^{-1} = \phi_{\theta(x)} \in \mathrm{Inn}(G)$. Logo, $\mathrm{Inn}(G)$ é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

□

Proposição 12. *Na categoria* Grp*, para cada objeto A, seja $H_A = \mathrm{Inn}(A)$ o grupo dos automorfismos internos de A. Então, $H = \{H_A \mid A \in \mathrm{Obj(Grp)}\}$ é uma família compatível de grupos de automorfismos para* Grp*.*

Demonstração. Pelo Lema já sabemos que para todo $A \in \mathrm{Obj(Grp)}$ tem-se que H_A é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(A)$. Basta provar que H é FCA para Grp.

Sejam $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp})$ quaisquer e $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(A, B)$ qualquer. Seja $\phi_x \in H_A$ qualquer. Afirmamos que

$$\phi_{\psi(x)} \circ \psi = \psi \circ \phi_x.$$

Com efeito, dado $g \in A$ qualquer temos que

$$\begin{aligned}(\phi_{\psi(x)} \circ \psi)(g) &= \phi_{\psi(x)}(\psi(g)) \\ &= \psi(x)\psi(g)(\psi(x))^{-1} \\ &= \psi(x)\psi(g)\psi(x^{-1}) \\ &= \psi(xgx^{-1}) \\ &= \psi \circ \phi_x(g).\end{aligned}$$

Como $\phi_{\psi(x)} \in H_B$, provou-se que H é FCA para Grp.

□

Dados G um grupo e $S \subseteq G$ denotaremos o subgrupo de G gerado por S pelo símbolo $\langle S \rangle$.

Provaremos um lema auxiliar que será usado na proposição seguinte.

Lema 13. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e qualquer FCA S para $\mathcal{C}$, para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, para qualquer $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ tem-se que para quaisquer $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n \in S_A \bigcup S_A^{-1}$ existem $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n \in S_B \bigcup S_B^{-1}$ tais que*

$$\phi \circ (\psi_1 \circ ... \circ \psi_n) = (\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ \phi.$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, S uma FCA qualquer sobre $\mathcal{C}$, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ qualquer.

Provaremos este lema por indução sobre n. Para $n = 1$, tome $\psi_1 \in S_A \bigcup S_A^{-1}$ qualquer. Então $\psi_1 \in S_A$ ou $\psi_1 \in S_A^{-1}$. Suponha que $\psi_1 \in S_A$. Como S é uma família compatível de automorfismos para $\mathcal{C}$, existe $\theta_1 \in S_B$ tal que

$$\phi \circ \psi_1 = \theta_1 \circ \phi.$$

Suponha que $\psi_1 \in S_A^{-1}$. Como S é uma família compatível de automorfismos para $\mathcal{C}$, existe $\theta \in S_B$ tal que

$$\theta \circ \phi = \phi \circ \psi_1^{-1}.$$

Disto segue que

$$\phi \circ \psi_1 = \theta^{-1} \circ \phi,$$

e se definimos $\theta_1 = \theta^{-1}$, temos que $\theta_1 \in S_B^{-1}$ e

$$\phi \circ \psi_1 = \theta_1 \circ \phi.$$

Logo, o resultado é válido para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que vale para um dado $n \in \mathbb{N}$, ou seja, para quaisquer $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n \in S_A \bigcup S_A^{-1}$ existem $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n \in S_B \bigcup S_B^{-1}$ tais que

$$\phi \circ (\psi_1 \circ ... \circ \psi_n) = (\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ \phi.$$

Provaremos que vale para $n + 1$. Sejam $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, \psi_{n+1} \in S_A \bigcup S_A^{-1}$ quaisquer. Como $\psi_{n+1} \in S_A \bigcup S_A^{-1}$, pelo caso $n = 1$ sabemos que existe $\theta_{n+1} \in S_B \bigcup S_B^{-1}$ tal que

$$\phi \circ \psi_{n+1} = \theta_{n+1} \circ \phi.$$

Defina $\psi = (\psi_1 \circ ... \circ \psi_n) \circ \psi_{n+1}$, então

$$\begin{aligned}
\phi \circ \psi &= \phi \circ [(\psi_1 \circ ... \circ \psi_n) \circ \psi_{n+1}] & \\
&= [\phi \circ (\psi_1 \circ ... \circ \psi_n)] \circ \psi_{n+1} & \text{(Associatividade)} \\
&= [(\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ \phi] \circ \psi_{n+1} & \text{(Hipótese de indução)} \\
&= (\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ (\phi \circ \psi_{n+1}) & \text{(Associatividade)} \\
&= (\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ (\theta_{n+1} \circ \phi) & \text{(Visto acima)} \\
&= (\theta_1 \circ ... \circ \theta_n \circ \theta_{n+1}) \circ \phi. & \text{(Associatividade)}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\phi \circ (\psi_1 \circ ... \circ \psi_{n+1}) = (\theta_1 \circ ... \circ \theta_{n+1}) \circ \phi.$$

Assim, supomos para $n \in \mathbb{N}$ e provamos que vale para $n + 1$. Por indução segue que

$$\phi \circ (\psi_1 \circ ... \circ \psi_n) = (\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ \phi,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Proposição 14. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e qualquer FCA S para $\mathcal{C}$,* *a família*

$$H = \{\langle S_A \rangle \mid A \in \text{Obj}(\mathcal{C})\}$$

é uma família compatível de grupos de automorfismos para $\mathcal{C}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer e S uma FCA qualquer para $\mathcal{C}$. Para provar que H é FCGA para $\mathcal{C}$ precisamos mostrar que H é FCA para $\mathcal{C}$ e para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, H_A é subgrupo normal de $\text{Aut}(A)$.

Começaremos provando que H é FCA para $\mathcal{C}$. De fato, sejam $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ quaisquer e $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ qualquer. Seja $\psi \in H_A = \langle S_A \rangle$ qualquer, logo existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $\psi_1, ..., \psi_n \in S_A \bigcup S_A^{-1}$ tais que

$$\psi = \psi_1 \circ ... \circ \psi_n.$$

Pelo Lema anterior, existem $\theta_1, ..., \theta_n \in S_B \bigcup S_B^{-1}$ tais que

$$(\theta_1 \circ ... \circ \theta_n) \circ \phi = \phi \circ (\psi_1 \circ ... \circ \psi_n).$$

Defina $\theta = \theta_1 \circ ... \circ \theta_n$. Como $H_B = \langle S_B \rangle$, temos $\theta \in H_B$. Do fato que

$$H = \{H_E \mid E \in \text{Obj}(\mathcal{C})\},$$

segue que H é uma família compatível de automorfismos para $\mathcal{C}$. Agora, provaremos que para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, H_A é subgrupo normal de $\text{Aut}(A)$.

Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, sabemos que $S_A \subseteq \text{Aut}(A)$, logo $H_A = \langle S_A \rangle$ é subgrupo de $\text{Aut}(A)$.

Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, sejam $h \in S_A$ e $\rho \in \text{Aut}(A)$ quaisquer. Como S_A é uma FCA para $\mathcal{C}$, existe $k \in S_A$ tal que

$$\rho \circ h = k \circ \rho$$

ou seja,

$$\rho \circ h \circ \rho^{-1} = k \in S_A \subseteq H_A.$$

Sejam agora $s \in S_A^{-1}$ e $\rho \in \text{Aut}(A)$ quaisquer. Temos que $s^{-1} \in (S_A^{-1})^{-1} = S_A$, e já sabemos que

$$\rho \circ s^{-1} \circ \rho^{-1} \in H_A.$$

Como H_A é grupo, temos que

$$(\rho \circ s^{-1} \circ \rho^{-1})^{-1} \in H_A,$$

ou seja,

$$\rho \circ s \circ \rho^{-1} \in H_A.$$

Para $h \in H_A$ qualquer, temos duas opções:

- se $h = \mathrm{Id}_A$ então $\rho \circ h \circ \rho^{-1} = \rho \circ \mathrm{Id}_A \circ \rho^{-1} = \rho \circ \rho^{-1} = \mathrm{Id}_A \in H_A$.
- se $h \neq \mathrm{Id}_A$, existem $n \in \mathbb{N}^*$ e elementos $s_1, ..., s_n \in S_A \cup S_A^{-1}$ tais que
$$h = s_1 \circ s_2 \circ ... \circ s_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho \circ h \circ \rho^{-1} &= \rho \circ (s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n) \circ \rho^{-1} \\
&= \rho \circ (s_1 \circ \rho^{-1} \circ \rho \circ s_2 \circ \rho^{-1} \circ \rho \circ \cdots \circ \rho^{-1} \circ \rho \circ s_n) \circ \rho^{-1} \\
&= (\rho \circ s_1 \circ \rho^{-1}) \circ (\rho \circ s_2 \circ \rho^{-1}) \circ \cdots \circ (\rho \circ s_n \circ \rho^{-1}) \in H_A
\end{aligned}$$

pois H_A é grupo. Portanto, H_A é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(A)$ e assim H é FCGA para $\mathcal{C}$.

□

Definição 15. *Dada $\mathcal{C}$ uma categoria, H uma família compatível de grupos de automorfismos para $\mathcal{C}$, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer dizemos que ϕ está relacionada com ψ através de H, e escrevemos $\phi R_H \psi$, se existe $\theta \in H_B$ tal que $\phi = \theta \circ \psi$.*

Proposição 16. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$, qualquer FCGA H para $\mathcal{C}$, e quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tem-se que R_H é uma relação de equivalência sobre* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, H uma FCGA qualquer para $\mathcal{C}$ e $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ quaisquer. Provaremos que R_H é uma relação de equivalência.

Seja $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ qualquer. Visto que $\mathrm{Id}_B \in H_B$ e $\phi = \mathrm{Id}_B \circ \phi$, segue que $\phi R_H \phi$ e portanto R_H é reflexiva.

Sejam agora $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer. Suponha que $\phi R_H \psi$ então existe $\theta \in H_B$ tal que $\phi = \theta \circ \psi$.

Observe que

$$\phi = \theta \circ \psi$$

$$\theta^{-1} \circ \phi = \theta^{-1} \circ \theta \circ \psi$$

$$\theta^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}_B \circ \psi$$

$$\theta^{-1} \circ \phi = \psi.$$

Como $\theta \in H_B$ e H_B é subgrupo de $\mathrm{Aut}(B)$, segue que $\theta^{-1} \in H_B$. Assim $\psi R_H \phi$ e portanto R_H é simétrica.

Sejam $\phi, \psi, \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer. Suponha que $\phi R_H \psi$ e $\psi R_H \gamma$ então existem $\theta, \delta \in H_B$, respectivamente, tais que

$$\phi = \theta \circ \psi \tag{1.4}$$

e

$$\psi = \delta \circ \gamma. \tag{1.5}$$

Substituindo 1.5 em 1.4, temos que $\phi = \theta \circ (\delta \circ \gamma)$. Pela propriedade associativa, segue que $\phi = (\theta \circ \delta) \circ \gamma$.

Como $\theta, \delta \in H_B$ e H_B é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(B)$, segue que $\theta \circ \delta \in H_B$. Assim $\phi R_H \gamma$ e portanto R_H é transitiva.

Logo, R_H é uma relação de equivalência sobre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

□

Queremos usar H para criar uma categoria de classificação para $\mathcal{C}$, que chamaremos de $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$. A ideia é manter os objetos, mas identificar os morfismos usando a relação de equivalência R_H, ou seja, para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{out}})$, queremos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)/R_H.$$

Resta ainda definir uma lei de composição para os novos morfismos. Se denotarmos a classe de equivalência de um morfismo ϕ módulo R_H por $[\phi]$, gostaríamos que a composição de morfismos $[\phi] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}(B, C)$ e $[\psi] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}(A, B)$ seja dada pelo morfismo $[\phi \circ \psi] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}(A, C)$.

O problema é mostrar que esta operação nas classes está bem definida, o que é feito na proposição seguinte.

Proposição 17. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$, qualquer FCGA H para $\mathcal{C}$, quaisquer $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, e quaisquer $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tais que $\phi_1 R_H \phi_2$ e $\psi_1 R_H \psi_2$ tem-se que*

$$(\phi_1 \circ \psi_1) R_H (\phi_2 \circ \psi_2).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, H uma FCGA qualquer para $\mathcal{C}$, $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ quaisquer e $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tais que $\phi_1 R_H \phi_2$ e $\psi_1 R_H \psi_2$. Queremos provar que $\phi_1 \circ \psi_1 R_H \phi_2 \circ \psi_2$.

Por hipótese temos que $\phi_1 R_H \phi_2$ e $\psi_1 R_H \psi_2$, logo existem $\theta \in H_C$ e $\delta \in H_B$ respectivamente, tais que

$$\phi_1 = \theta \circ \phi_2 \tag{1.6}$$

e

$$\psi_1 = \delta \circ \psi_2. \tag{1.7}$$

Como $\phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e do fato que H é uma FCGA para $\mathcal{C}$ tem-se que para todo $\delta \in H_B$ existe $\xi \in H_C$ tal que

$$\xi \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \delta. \tag{1.8}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_1 \circ \psi_1 &= (\theta \circ \phi_2) \circ (\delta \circ \psi_2) && \text{(1.6 e 1.7)} \\
&= \theta \circ (\phi_2 \circ \delta) \circ \psi_2 && \text{(Associatividade)} \\
&= \theta \circ (\xi \circ \phi_2) \circ \psi_2 && \text{(1.8)} \\
&= (\theta \circ \xi) \circ \phi_2 \circ \psi_2. && \text{(Associatividade)}
\end{aligned}$$

Como $\theta \in H_C$ e $\xi \in H_C$ temos que $\theta \circ \xi \in H_C$. Portanto $(\phi_1 \circ \psi_1) R_H (\phi_2 \circ \psi_2)$.

□

Definição 18. *Dados $\mathcal{C}$ uma categoria e H uma família compatível de grupos de automorfismos para $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ consiste de*

- *A classe dos objetos de $\mathcal{C}$, que denotaremos por* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{out}})$*,*
- *Para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{out}})$, o conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)/R_H$*, que denotaremos por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}(A, B)$*,*
- *A operação de composição apresentada acima, que está bem definida pela Proposição 17.*

Teorema 19. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e qualquer FCGA H para $\mathcal{C}$ tem-se que $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ é uma categoria.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer e H uma FCA qualquer para $\mathcal{C}$. Na Definição 18 vimos como são definidos os objetos e os morfismos. Vimos também que a composição está bem definida. Resta mostrar que a operação de composição apresentada satisfaz os axiomas de associatividade e identidade para categorias.

Sejam $A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{\text{out}})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(B, C)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(C, D)$ quaisquer. Desta forma, temos que $f = [\phi]$, $g = [\psi]$ e $h = [\rho]$ para $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$.

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f &= ([\rho] \circ [\psi]) \circ [\phi] \\ &= [\rho \circ \psi] \circ [\phi] \\ &= [(\rho \circ \psi) \circ \phi].\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}h \circ (g \circ f) &= [\rho] \circ ([\psi] \circ [\phi]) \\ &= [\rho] \circ [\psi \circ \phi] \\ &= [\rho \circ (\psi \circ \phi)].\end{aligned}$$

A composição em $\mathcal{C}$ é associativa, logo $(\rho \circ \psi) \circ \phi = \rho \circ (\psi \circ \phi)$, e disso segue que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Portanto $\mathcal{C}^{\text{out}}$ satisfaz o axioma de associatividade pra categorias.

Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{\text{out}})$, seja $g_A = [\text{Id}_A] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, A)$ para $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$.

Afirmamos que para $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{\text{out}})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, B)$ quaisquer tem-se que

$$f \circ g_A = f \qquad \text{e} \qquad g_B \circ f = f.$$

De fato temos que $f = [\phi]$ para $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Assim,

$$f \circ g_A = [\phi] \circ [\text{Id}_A] = [\phi \circ \text{Id}_A] = [\phi] = f.$$

Por outro lado, temos

$$g_B \circ f = [\text{Id}_B] \circ [\phi] = [\text{Id}_B \circ \phi] = [\phi] = f.$$

Isto mostra que para cada objeto $A \in \mathcal{C}^{\text{out}}$, g_A é o morfismo identidade para A e assim o axioma das identidades é satisfeito.

Portanto, $\mathcal{C}^{\text{out}}$ é uma categoria.

$\square$

Observação 20. A partir de agora, o morfismo $g_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, A)$ (usado na demonstração anterior) será também denotado por Id_A.

Proposição 21. *Para qualquer categoria $\mathcal{C}$, quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se existem $\psi, \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ com $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_B$ e $\theta \circ \phi = \mathrm{Id}_A$ então $\psi = \theta$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ quaisquer e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ qualquer. Suponha que existam $\psi, \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tais que

$$\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_B \tag{1.9}$$

e

$$\theta \circ \phi = \mathrm{Id}_A\,. \tag{1.10}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\psi &= \mathrm{Id}_A \circ \psi \\
&= (\theta \circ \phi) \circ \psi && (1.10) \\
&= \theta \circ (\phi \circ \psi) && \text{(Associatividade)} \\
&= \theta \circ \mathrm{Id}_B && (1.9) \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi = \phi$.

□

Agora, podemos criar um funtor F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ de modo que F leva cada objeto de $\mathcal{C}$ em si próprio (visto como objeto de $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$), e cada morfismo ϕ de $\mathcal{C}$ no morfismo de $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ dado pela classe de equivalência de ϕ módulo R_H.

Teorema 22. *Com a notação acima, F é um funtor de classificação para $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Já vimos que F associa um objeto de $A \in \mathcal{C}$ a um objeto $A = F(A) \in \mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ e que para cada morfismo ϕ de $\mathcal{C}$ é associado a um morfismo $F(\phi)$ em $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$. Resta provar os axiomas do elemento identidade e da composição de funtores.

Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{out}})$, por definição temos $F(\mathrm{Id}_A) = [\mathrm{Id}_A] = g_A = \mathrm{Id}_{F(A)}$ e assim F satisfaz o axioma do elemento identidade para funtores.

Sejam agora $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer. Desta forma temos que

$$F(\phi) \circ F(\psi) = [\phi] \circ [\psi] = [\phi \circ \psi] = F(\phi \circ \psi).$$

Segue que, o funtor F satisfaz o axioma da composição de morfismos. Portanto, F é um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}^{\text{out}}$.

Vamos provar que F é um funtor de classificação.

Sejam $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e suponha que $F(A)$ é isomorfo a $F(B)$ em $\mathcal{C}^{\text{out}}$. Então, existe um isomorfismo $g : F(A) \longrightarrow F(B)$ em $\mathcal{C}^{\text{out}}$ ($g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(F(A), F(B))$. Desta forma, existe $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(F(B), F(A))$ tal que $h \circ g = \text{Id}_{F(A)}$ e $g \circ h = \text{Id}_{F(B)}$ em que as composições estão definidas em $\mathcal{C}^{\text{out}}$.

Sabemos que $g = [\phi]$ para algum $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $h = [\psi]$ para algum $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Desta maneira temos que

$$\text{Id}_{F(B)} = g \circ h = [\phi] \circ [\psi] = [\phi \circ \psi].$$

Isto não garante que $\phi \circ \psi = \text{Id}_B$. Porém, $\phi \circ \psi$ é um representante de $\text{Id}_{F(B)}$.

Como F é um funtor, vimos que $F(\text{Id}_B) = \text{Id}_{F(B)}$. Assim, Id_B é outro representante para a classe da $\text{Id}_{F(B)}$. Desta forma, existe $\theta \in H_B$ tal que $\theta \circ \text{Id}_B = \phi \circ \psi$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta &= \phi \circ \psi \\ \theta \circ \theta^{-1} &= (\phi \circ \psi) \circ \theta^{-1} \\ \text{Id}_B &= (\phi \circ \psi) \circ \theta^{-1} \\ \text{Id}_B &= \phi \circ (\psi \circ \theta^{-1}). \end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\text{Id}_{F(A)} = h \circ g = [\psi] \circ [\phi] = [\psi \circ \phi].$$

Isto não é suficiente para que $\psi \circ \phi = \text{Id}_A$. Mas, $\psi \circ \phi$ é um representante de $\text{Id}_{F(A)}$.

Do fato que F é um funtor, vimos que $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$. Desta maneira, Id_A é um outro representante para a classe de $\text{Id}_{F(A)}$. Assim, existe $\lambda \in H_A$ tal que $\lambda \circ (\psi \circ \phi) = \text{Id}_A$. Segue que $(\lambda \circ \psi) \circ \phi = \text{Id}_A$.

Como $\phi \circ (\psi \circ \theta^{-1}) = \text{Id}_B$ e $(\lambda \circ \psi) \circ \phi = \text{Id}_A$, segue do Teorema 21 que $\psi \circ \theta^{-1} = \lambda \circ \psi$, de onde obtemos que ϕ é isomorfismo e assim F é um funtor de classificação.

$\square$

1.1 EXEMPLO: ÁLGEBRAS DE MATRIZES SOBRE $\mathbb{C}$

Vamos considerar $\mathcal{S}$ a categoria cujos objetos são somas diretas finitas de álgebras de matrizes sobre os números complexos (visto como $*$-álgebras), e cujos morfismos são $*$-homomorfismos entre $*$-álgebras.

Nosso objetivo nesta seção é fornecer uma descrição concreta da categoria $\mathcal{S}^{\text{out}}$ através de um isomorfismo de categorias.

Vejamos como são definidos os objetos e os morfismos na categoria $\mathcal{S}^{\text{out}}$. Já vimos que $\mathcal{S}^{\text{out}}$ têm os mesmos objetos da categoria $\mathcal{S}$. Vimos também que os morfismos de $\mathcal{S}^{\text{out}}$ são obtidos identificando os $*$-homomorfismos de álgebras módulo R_H. Mas para descrevermos essas classes de equivalência temos que introduzir a FCGA.

Primeiro, é fácil ver que todos os objetos de $\mathcal{S}$ são $*$-álgebras com unidade: a unidade de $M_{q_1} \oplus M_{q_2} \oplus \cdots \oplus M_{q_s}$ (em que M_{q_i} é a $*$-álgebra das matrizes quadradas $q_i \times q_i$) é dado por

$$I_{q_1} \oplus I_{q_2} \oplus \cdots \oplus I_{q_s},$$

a soma das identidades em cada entrada.

Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{S})$, um *automorfismo interno de A* é um automorfismo $\phi_x : A \longrightarrow A$ dado pela conjugação por um elemento unitário $x \in A$, dado por

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$

O conjunto dos automorfismos internos de A, $\text{Inn}(A)$, é um subgrupo normal de $\text{Aut}(A)$ (a demonstração é análoga ao que foi feito para grupos). Assim

$$H = \{\text{Inn}(A) | A \in \text{Obj}(\mathcal{S})\}$$

é FCGA para $\mathcal{S}$.

Sejam $q, p \in \mathbb{N}$ (aqui $n \in \mathbb{N}$ se $n \geqslant 1$) e $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\kappa q \leqslant p$. Então a tripla (q, p, κ) dá origem a um homomorfismo $\rho : M_q \longrightarrow M_p$ dado por:

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_h \end{bmatrix}_{p \times p}$$

em que $A \in M_q$, e κ é a quantidade de cópias de A que aparecem ao longo da diagonal e o último bloco de zeros tem tamanho $h = p - \kappa q$.

Para facilitar a escrita, usaremos a seguinte notação: dada uma tripla (q, p, κ) como acima, escrevemos o homomorfismo correspondente $\rho : M_q \longrightarrow M_p$ como

$$A \mapsto \overbrace{A \oplus A \oplus \cdots \oplus A}^{k} \oplus 0_h.$$

Para $s \in \mathbb{N}$, um elemento $(q_1, ..., q_s) \in \mathbb{N}^s$ será denotado simplesmente por $\vec{q}$. Para $\vec{q} \in \mathbb{N}^s$,

$$M(\vec{q}) = M_{q_1} \oplus \cdots \oplus M_{q_s}.$$

Para $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{N}^s$ quaisquer, $\vec{p} \leqslant \vec{q}$ significa $p_i \leqslant q_i$, $\forall i \in \{1, ..., s\}$.

De modo geral, dados $s, r \in \mathbb{N}$, $\vec{q} \in \mathbb{N}^s$, $\vec{p} \in \mathbb{N}^r$ e uma matriz $\kappa_{r \times s} = [\kappa_{ij}], \kappa_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\kappa\vec{q} \leqslant \vec{p}$ (estamos vendo $\vec{q}$ como uma matriz coluna e $\kappa\vec{q}$ é a multiplicação usual de matrizes), temos um homomorfismo $\rho : M(\vec{q}) \longrightarrow M(\vec{p})$ dado por :

$$\begin{aligned}
\rho(A) &= \rho(A_1 \bigoplus \cdots \bigoplus A_s) \\
&= \left(\overbrace{A_1 \oplus \cdots \oplus A_1}^{\kappa_{11}} \oplus \overbrace{A_2 \oplus \cdots \oplus A_2}^{\kappa_{12}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{A_s \oplus \cdots \oplus A_s}^{\kappa_{1s}} \oplus 0_{h_1} \right) \\
&\bigoplus \cdots \bigoplus \\
&\left(\overbrace{A_1 \oplus \cdots \oplus A_1}^{\kappa_{r1}} \oplus \overbrace{A_2 \oplus \cdots \oplus A_2}^{\kappa_{r2}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{A_s \oplus \cdots \oplus A_s}^{\kappa_{rs}} \oplus 0_{h_r} \right),
\end{aligned}$$

para $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s \in M(\vec{q})$ em que $\kappa\vec{q} + \vec{h} = \vec{p}$ e $\vec{h} = (h_1, ..., h_r)$. Na equação acima, $\bigoplus$ separa cada coordenada e $\oplus$ separa os blocos da diagonal.

O número inteiro κ_{ij} determina quantas cópias de A_j vão aparecer ao longo da diagonal em M_{p_i} e o resto completamos com zeros. Este bloco de zero é determinado por $h_i = p_i - \sum_{j=1}^{s} \kappa_{ij} q_j$ para $i \in \{1, ..., s\}$.

Observe que a condição $\kappa\vec{q} \leqslant \vec{p}$, ou seja, $\sum_{j=1}^{s} \kappa_{ij} q_j \leqslant p_i$ é importante pois garante a existência de espaço em $M(\vec{p})$ para colocar as matrizes na diagonal.

Definição 23. *Um $*-$homomorfismo $\rho : M(\vec{q}) \longrightarrow M(\vec{p})$ entre álgebras de matrizes é dito* canônico *se ρ é definido por uma matriz $\kappa = [\kappa_{ij}]$*

como acima.

Vejamos um exemplo de homomorfismo canônico. Este também pode ser encontrado em [2].

Exemplo 24. Seja $\vec{q} = (2, 3, 7)$, $\vec{p} = (5, 11)$ e $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, temos o morfismo canônico

$$\rho : M_2 \oplus M_3 \oplus M_7 \longrightarrow M_5 \oplus M_{11}$$

determinado pela matriz κ.

Seja $A \oplus B \oplus C \in M_2 \oplus M_3 \oplus M_7$. Vejamos como obter $\rho(A \oplus B \oplus C)$. A primeira linha da matriz κ diz quantas cópias de A, B e C colocaremos na primeira entrada de $\rho(A \oplus B \oplus C)$, ou seja, a linha 1 1 0 significa 1 cópia de A, 1 cópia de B e 0 cópias de C. A segunda linha da matriz κ é similar, mas para a segunda entrada de $\rho(A \oplus B \oplus C)$, ou seja, 2 0 1 significa 2 cópias de A, 0 de B e 1 de C.

Como $h_1 = p_1 - \sum_{j=1}^{3} \kappa_{1j} q_j = 0$ e $h_2 = p_2 - \sum_{j=1}^{3} \kappa_{2j} q_j = 0$ não há blocos de zero nas diagonais. E temos que

$$\rho(A \oplus B \oplus C) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Exemplo 25. Seja $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_s)$ e $\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{s \times s}$. Desta forma, temos o morfismo canônico $\rho : M(\vec{q}) \longrightarrow M(\vec{q})$ determinado pela matriz identidade $\kappa_{s \times s}$. Assim, para $A \in M(\vec{q})$ qualquer, digamos $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$, temos que

$$\rho(A) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s = A.$$

Em outras palavras, ρ é o morfismo identidade sobre $M(\vec{q})$.

E com este exemplo concluímos que os morfismos identidades na categoria $\mathcal{S}$ são canônicos.

O seguinte resultado será de grande utilidade, pois deixará claro como são as classes de equivalência nos morfismos na categoria $\mathcal{S}^{\text{out}}$.

Teorema 26. *Para qualquer $\varphi : M(\vec{q}) \longrightarrow M(\vec{p})$ $*$-homomorfismo, tal que $\vec{q} \in \mathbb{N}^s$ e $\vec{p} \in \mathbb{N}^r$ tem-se que existe um único homomorfismo canônico, ρ, que é equivalente a φ módulo R_H.*

Demonstração. Esta demonstração pode ser encontrada em [2], página 23, Teorema 2.3.5. □

Como a demonstração do teorema anterior é um pouco complicada e este exige técnicas delicadas de demonstração, decidimos não demonstrá-lo.

Nosso objetivo é construir uma categoria que seja isomorfa a $\mathcal{S}^{\text{out}}$, vamos denotá-la por $\mathcal{D}$.

Assim, considere $\mathcal{D}$ composto por objetos que são matrizes coluna com entradas naturais e os morfismos são dados da seguinte forma: dados dois objetos $\vec{a}_{k\times 1}, \vec{b}_{l\times 1} \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ dados por

$$\vec{a}_{k\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}_{k\times 1} \qquad \vec{b}_{l\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{bmatrix}_{l\times 1}, \quad \text{um}$$

morfismo entre $\vec{a}_{k\times 1}$ e $\vec{b}_{l\times 1}$ é uma matriz $A_{l\times k}$ com entradas em $\mathbb{Z}^+$ tal que o vetor

$$A_{l\times k} \cdot \vec{a}_{k\times 1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_l \end{bmatrix}_{l\times 1}$$

satisfaz $0 \leqslant p_i \leqslant m_i$, para todo $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Ou seja, dizemos é tal que $A_{l\times k}$ é um morfismo entre $\vec{a}_{k\times 1}$ e $\vec{b}_{l\times 1}$ quando

$$A_{l\times k} \cdot \vec{a}_{k\times 1} \leqslant \vec{b}_{l\times 1}.$$

Exemplo 27. Sejam $\vec{a}_{2\times 1}$ e $\vec{b}_{3\times 1}$ duas matrizes coluna dadas por

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times 1} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}_{3\times 1}.$$

Então um morfismo entre $\vec{a}_{2\times 1}$ e $\vec{b}_{3\times 1}$ é dado por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2},$$

pois

$$A_1 \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \leqslant \vec{b}.$$

A matriz dada por

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

também é um morfismo entre $\vec{a}_{2\times 1}$ e $\vec{b}_{3\times 1}$, pois

$$A_2 \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \leqslant \vec{b}.$$

Resta definir uma lei de composição entre os objetos de $\mathcal{D}$.

Sejam $\vec{a}_{k\times 1}$, $\vec{b}_{l\times 1}$, $\vec{c}_{j\times 1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ dados por

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}_{k\times 1}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{bmatrix}_{l\times 1}, \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \end{bmatrix}_{j\times 1}.$$

Para morfismos $A_{l\times k} : \vec{a}_{k\times 1} \longrightarrow \vec{b}_{l\times 1}$ e $B_{j\times l} : \vec{b}_{l\times 1} \longrightarrow \vec{c}_{j\times 1}$ denote $A \cdot \vec{a} = \vec{p}$ e $B \cdot \vec{b} = \vec{q}$, respectivamente. Então, $\vec{p} \leqslant \vec{b}$ e $\vec{q} \leqslant \vec{c}$.

Então a composição dos morfismos $A_{l\times k}$ e $B_{j\times l}$ será dado pelo produto das matrizes

$$B_{j\times l} \cdot A_{l\times k}.$$

Temos que ver se $(B \cdot A)_{j\times k}$ é um morfismo de $\vec{a}$ para $\vec{c}$. Para isso, basta verificarmos que $(B \cdot A) \cdot \vec{a} \leqslant \vec{c}$.

Denote $A = [\alpha_{mn}]$ e $B = [\beta_{mn}]$ e $BA = [\gamma_{mn}]$, $(BA)\vec{a} = \vec{u}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., j\}$ temos

$$u_i = \sum_{s=1}^{k} \gamma_{is} a_s = \sum_{s=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{l} \beta_{ir} \alpha_{rs} \right) a_s$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^{l} \beta_{ir} \left(\sum_{s=1}^{k} \alpha_{rs} a_s \right) \\
&= \sum_{r=1}^{l} \beta_{ir} p_r \\
&\leqslant \sum_{r=1}^{l} \beta_{ir} b_r \\
&= q_i \\
&\leqslant c_i.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que $(BA)\vec{a} = \vec{u} \leqslant \vec{c}$, e portanto BA é um morfismo de $\vec{a}$ para $\vec{c}$.

Vejamos como são definidos os morfismos identidade. Para cada $a_{k\times 1}$, denote a matriz identidade k por k por $\mathrm{Id}_{\vec{a}}$. Como $\mathrm{Id}_{\vec{a}} \cdot \vec{a} = \vec{a}$ e $\vec{a} \leqslant \vec{a}$, vemos que Id_a é morfismo de $\vec{a}$ para $\vec{a}$.

Proposição 28. *Com a notação acima, $\mathcal{D}$ é uma categoria.*

Demonstração. Já vimos como são definidos os objetos e os morfismos. Também já vimos que a lei de composição está bem definida.

Resta verificar que a operação de composição apresentada satisfaz a propriedade associativa e de identidades para categorias.

Já vimos que os morfismos são matrizes e a operação de composição é a multiplicação de matrizes. Sabemos que a multiplicação de matrizes é associativa. Logo a composição de morfismos em $\mathcal{D}$ é associativa.

Vimos acima que o morfismo identidade é a matriz identidade, assim para cada $\vec{a}_{k\times 1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $\vec{b}_{l\times 1}, \vec{c}_{p\times 1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e $A : \vec{b} \longrightarrow \vec{a}$ e $B : \vec{a} \longrightarrow \vec{c}$ morfismos temos

$$B \cdot \mathrm{Id}_{\vec{a}} = B\,\mathrm{Id}_{k\times k} = B$$

e

$$\mathrm{Id}_{\vec{a}} \cdot A = I_{K\times k} \cdot A = A.$$

Isto mostra que a composição de morfismos satisfaz o axioma das identidades para categoria.

Portanto, $\mathcal{D}$ é uma categoria.

□

Queremos mostrar que $\mathcal{S}^{\mathrm{out}}$ é isomorfo à categoria $\mathcal{D}$, mas antes disso, precisamos de um resultado auxiliar.

Teorema 29. *Para quaisquer* $\vec{a}_{k\times 1}, \vec{b}_{l\times 1}, \vec{c}_{p\times 1}$ *e* $\rho : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{b})$, $\eta : M(\vec{b}) \longrightarrow M(\vec{c})$ *morfismos canônicos com matrizes* M_ρ *e* M_η*, respectivamente, tem-se que* $\eta \circ \rho$ *é equivalente módulo* R_H *ao morfismo canônico* $\mu : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{c})$ *associado à matriz* $M_\eta \cdot M_\rho$*.*

Demonstração. Sejam $\vec{a}_{k\times 1}, \vec{b}_{l\times 1}, \vec{c}_{p\times 1}$ e $\rho : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{b})$, $\eta : M(\vec{b}) \longrightarrow M(\vec{c})$ morfismos canônicos com matrizes $M_\rho = [\rho_{ij}]$ e $M_\eta = [\eta_{ij}]$, respectivamente. Para um $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \in M(\vec{a})$ qualquer tem-se que

$$\rho(A) = \rho(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) = B_1 \oplus \cdots \oplus B_l = B,$$

em que

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1^{\rho_{11}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{1k}} \oplus \mathbf{0} \\ B_2 &= A_1^{\rho_{21}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{2k}} \oplus \mathbf{0} \\ &\vdots \\ B_l &= A_1^{\rho_{l1}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{lk}} \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

em que cada $A_j^{\rho_{ij}} = A_j \oplus A_j \oplus \cdots \oplus A_j$ com ρ_{ij} fatores para $1 \leqslant j \leqslant k$ e $1 \leqslant i \leqslant l$. Assim,

$$(\eta \circ \rho)(A) = \eta(B) = \eta(B_1 \oplus \cdots \oplus B_l) = C_1 \oplus \cdots \oplus C_p,$$

em que

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1^{\eta_{11}} \oplus \cdots \oplus B_l^{\eta_{1l}} \oplus \mathbf{0} \\ C_2 &= B_1^{\eta_{21}} \oplus \cdots \oplus B_l^{\eta_{2l}} \oplus \mathbf{0} \\ &\vdots \\ C_p &= B_1^{\eta_{p1}} \oplus \cdots \oplus B_l^{\eta_{pl}} \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

em que cada $B_j^{\eta_{ij}} = B_j \oplus B_j \oplus \cdots \oplus B_j$ com η_{ij} fatores para $1 \leqslant j \leqslant l$ e $1 \leqslant i \leqslant p$. Isto é,

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1^{\eta_{11}} \oplus \cdots \oplus B_l^{\eta_{1l}} \oplus \mathbf{0} \\ &= (A_1^{\rho_{11}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{1k}} \oplus \mathbf{0})^{\eta_{11}} \bigoplus \cdots \bigoplus (A_1^{\rho_{l1}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{lk}} \oplus \mathbf{0})^{\eta_{1l}} \bigoplus \mathbf{0}, \\ &\vdots \\ C_p &= B_1^{\eta_{p1}} \oplus \cdots \oplus B_l^{\eta_{pl}} \oplus \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$= (A_1^{\rho_{11}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{1k}} \oplus \mathbf{0})^{\eta_{p1}} \bigoplus \cdots \bigoplus (A_1^{\rho_{l1}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\rho_{lk}} \oplus \mathbf{0})^{\eta_{pl}} \bigoplus \mathbf{0}$$

Vemos que em C_1 há $\eta_{11}\rho_{11} + \eta_{12}\rho_{21} + \cdots + \eta_{1l}\rho_{l1} = \sum_{r=1}^{l} \eta_{lr}\rho_{r1}$ cópias de A_1 e que, para $i \in \{1, 2, ..., p\}$ e $j \in \{1, 2, ..., k\}$ quaisquer, temos $\eta_{i1}\rho_{1j} + \eta_{i2}\rho_{2j} + \cdots + \eta_{il}\rho_{lj} = \sum_{r=1}^{l} \eta_{ir}\rho_{rj}$ cópias de A_j em C_i.

Portanto, se para $i \in \{1, ..., p\}$ e $j \in \{1, ..., k\}$ definirmos

$$\mu_{ij} = \sum_{\eta_{r=1}}^{l} \eta_{ir}\rho_{rj},$$

então o morfismo canônico $\mu : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{c})$ associado à matriz $M_\eta \cdot M_\rho = [\mu_{ij}]$ será equivalente ao morfismo $\eta \circ \rho$; de fato, para $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \in M(\vec{a})$ qualquer

$$\mu(A) = D_1 \oplus \cdots \oplus D_p,$$

em que

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1^{\mu_{11}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\mu_{1k}} \oplus \mathbf{0} \\ D_2 &= A_1^{\mu_{21}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\mu_{2l}} \oplus \mathbf{0} \\ &\vdots \\ D_p &= A_1^{\mu_{p1}} \oplus \cdots \oplus A_k^{\mu_{pk}} \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Portanto, é possível passar de C_r para D_r, para todo $r \in \{1, ..., p\}$, fazendo uma simples permutação dos blocos das somas diretas o que corresponde à conjugação por um elemento unitário U da álgebra $M(\vec{c})$. Como a permutação é a mesma independentemente do A, existe um único unitário $U \in M(\vec{c})$ tal que

$$U[(\eta \circ \rho)(A)]U^* = \mu(A)$$

para qualquer $A \in M(\vec{a})$, isto é,

$$\phi_U \circ (\eta \circ \rho) = \mu,$$

portanto $\eta \circ \rho$ e μ são equivalentes módulo R_H através do automorfismo interno ϕ_U.

Portanto,

$$[\eta \circ \rho] = [\mu].$$

$\square$

Teorema 30. *$\mathcal{S}^{\text{out}} \cong \mathcal{D}$.*

Demonstração. Considere $F : \mathcal{S}^{\text{out}} \longrightarrow \mathcal{D}$ em que as somas diretas finitas de matrizes quadradas da forma $M(\vec{q}) = M_{q_1} \oplus M_{q_2} \oplus \cdots \oplus M_{q_n}$ são levadas em matrizes coluna da forma

$$\vec{q}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

Sejam $M(\vec{q})$, $M(\vec{p}) \in \text{Obj}(\mathcal{S}^{\text{out}})$ e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}^{\text{out}}}(M(\vec{q}), M(\vec{p}))$. Pelo Teorema 26 existe um único morfismo canônico $\rho : M(\vec{q}) \longrightarrow M(\vec{p})$ em $\mathcal{S}$ que representa φ. Seja M_ρ a matriz de ρ. Então M_ρ é morfismo entre $\vec{q}$ e $\vec{p}$ em $\mathcal{D}$. Defina $F(\varphi) = M_\rho$. Mostremos que F é um funtor.

Sejam $M(\vec{a}), M(\vec{b}), M(\vec{c}) \in \text{Obj}(\mathcal{S}^{\text{out}})$ e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}^{\text{out}}}(M(\vec{a}), M(\vec{b}))$ e $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}^{\text{out}}}(M(\vec{b}), M(\vec{c}))$. Então pelo Teorema 26 existe um único morfismo canônico $\rho : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{b})$ que é equivalente a φ, ou seja, $\varphi = [\rho]$. Analogamente, existe único morfismo canônico $\eta : M(\vec{b}) \longrightarrow M(\vec{c})$ que é equivalente a ψ, ou seja, $\psi = [\eta]$.

Desta forma, temos que $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}^{\text{out}}}(M(\vec{a}), M(\vec{c}))$ e

$$\psi \circ \phi = [\eta] \circ [\rho] = [\eta \circ \rho].$$

Pelo Teorema 26 temos que

$$[\eta \circ \rho] = [\mu]$$

para $\mu : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{c})$ o morfismo canônico equivalente a $\eta \circ \rho$. Com isso, pelo Teorema 29 temos que

$$\begin{aligned} F(\psi \circ \varphi) = F([\eta \circ \rho]) = F([\mu]) &= M_\mu \\ &= M_\eta \cdot M_\rho \\ &= F([\eta]) \cdot F([\rho]) \\ &= F(\psi) \cdot F(\varphi). \end{aligned}$$

Portanto, F satisfaz o axioma de composição de morfismos.

Para $\vec{a}_{k\times 1}$ qualquer, do exemplo 25, temos

$$F(\mathrm{Id}_{M(\vec{a})}) = I_{k\times k} = Id_{\vec{a}} = Id_{F(M(\vec{a}))}.$$

Logo, F satisfaz o axioma de identidade para funtores. Portanto, F é um funtor.

Considere $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{out}}$ em que as matrizes coluna são associadas a somas diretas finitas de álgebras de matrizes quadradas, ou seja, $G(\vec{q}_{n\times 1}) = M(\vec{q})$.

Dados $\vec{a}_{k\times 1}$, $\vec{b}_{l\times 1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e $M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\vec{a}, \vec{b})$. Então defina $G(M) = \varphi$ em que $\varphi : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{b})$ é o morfismo em $\mathcal{S}^{\mathrm{out}}$ representado pelo morfismo canônico ρ associado a matriz M.

Mostremos que G é um funtor.

Sejam $\vec{a}_{k\times 1}, \vec{b}_{l\times 1}, \vec{c}_{p\times 1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $M_{l\times k} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\vec{a}, \vec{b})$ e $N_{p\times l} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\vec{b}, \vec{c})$. Denote $G(M) = \varphi$, $G(N) = \psi$.

Assim, existe um único morfismo canônico $\rho : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{b})$ em $\mathcal{S}$ que representa φ, ou seja, $\varphi = [\rho]$.

Analogamente, existe um único morfismo canônico $\eta : M(\vec{b}) \longrightarrow M(\vec{c})$ em $\mathcal{S}$ que representa ψ, ou seja, $\psi = [\eta]$. Assim,

$$G(N) \circ G(M) = \psi \circ \varphi = [\eta] \circ [\rho] = [\eta \circ \rho]. \tag{1.11}$$

Por outro lado, $G(N \cdot M)$ é o morfismo representado pelo morfismo canônico $\mu : M(\vec{a}) \longrightarrow M(\vec{c})$ dado pela matriz $N \cdot M$.

Vimos que N é a matriz de η e M é a matriz de ρ. Então pelo Teorema 29, $\eta \circ \rho$ é equivalente a μ. Logo,

$$[\eta \circ \rho] = [\mu].$$

Disto e de 1.11 temos que

$$G(N) \circ G(M) = \psi \circ \varphi = [\eta] \circ [\rho] = [\eta \circ \rho] = [\mu] = G(N \cdot M).$$

Portanto, G satisfaz o axioma de composição de morfismos.

Seja $\vec{a}_{k\times 1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e $Id_{\vec{a}}$ o morfismo identidade em $\vec{a}$, que já vimos que é a matriz identidade $k \times k$. Assim,

$$G(\mathrm{Id}_{\vec{a}}) = G(I_{k\times k}) = [\mathrm{Id}_{M(\vec{a})}] = \mathrm{Id}_{M(\vec{a})} = \mathrm{Id}_{G(\vec{a})}\,.$$

Portanto, G satisfaz o axioma de identidade para funtores. Portanto, G é um funtor.

A verificação de que $F \circ G$ e $G \circ F$ são os respectivos funtores identidade é direta.

$\square$

2 O FECHO DA CATEGORIA DE CLASSIFICAÇÃO

Neste capítulo queremos criar uma categoria $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ para uma dada categoria $\mathcal{C}$. Esta nova categoria $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ será construída a partir da categoria $\mathcal{C}^{\text{out}}$, vista no capítulo anterior. Queremos que os objetos de $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ continuem sendo os mesmos da categoria $\mathcal{C}$ e os morfismos sejam dados da seguinte forma: para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}})$, um morfismo de A para B em $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ seja o fecho de um morfismo de A para B na categoria $\mathcal{C}^{\text{out}}$.

Queremos definir o fecho de uma categoria, porém não mencionamos espaço métrico ou espaço topológico, que é onde faz sentido falar em fecho. Então, precisamos que dada uma categoria $\mathcal{C}$, para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um espaço métrico, munido de uma métrica d.

Definição 31. *Dada $\mathcal{C}$ uma categoria e H uma FCGA para $\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ consiste de*

- *A classe dos objetos de $\mathcal{C}$, que denotaremos por $\text{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}})$;*
- *Para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}})$, um morfismo $\Psi \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}}(A, B)$ é da forma $\Psi = \overline{[f]}$, para algum $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;*
- *Dados $A, B, C \in \text{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}})$, morfismos $\Phi \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}}(A, B)$ e $\Psi \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}}(B, C)$, definimos*

$$\Psi \circ \Phi = \overline{\{f \circ g | g \in \Phi, f \in \Psi\}}$$

em que o fecho se dá em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$.

Observe que esta composição está bem definida pois não depende dos representantes.

Mostraremos agora um resultado que nos permitirá enxergar os morfismos da categoria $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ de outra forma.

Proposição 32. *Suponha que para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tem-se que a aplicação de composição*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

é contínua. Sejam $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(B, C)$, $\eta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, B)$. Então

$$\overline{\varphi} \circ \overline{\eta} = \overline{\varphi \circ \eta}.$$

Demonstração. Mostremos que $\overline{\varphi \circ \eta} \subseteq \overline{\varphi} \circ \overline{\eta}$. Basta provar que $\varphi \circ \eta \subseteq \overline{\varphi} \circ \overline{\eta}$, visto que $\overline{\varphi} \circ \overline{\eta}$ é fechado por definição.

Note que

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \eta &= \{f \circ g | f \in \varphi, g \in \eta\} \\
&\subset \{f \circ g | f \in \overline{\varphi}, g \in \overline{\eta}\} \\
&\subseteq \overline{\{f \circ g | f \in \overline{\varphi}, g \in \overline{\eta}\}} \\
&= \overline{\varphi} \circ \overline{\eta}.
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{\varphi \circ \eta} \subseteq \overline{\varphi} \circ \overline{\eta}$.

Mostremos agora que $\overline{\varphi} \circ \overline{\eta} \subseteq \overline{\varphi \circ \eta}$.

Afirmamos que $\{f \circ g | f \in \overline{\varphi}, g \in \overline{\eta}\} \subseteq \overline{\varphi \circ \eta}$. De fato, tome $f \in \overline{\varphi}$ e $g \in \overline{\eta}$ quaisquer. Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um espaço métrico e $\overline{\eta} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, logo $g = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$, para $g_n \in \eta, \forall n \in \mathbb{N}$. Simultaneamente $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, para $f_n \in \varphi, \forall n \in \mathbb{N}$. Desta forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \circ g_n \in \varphi \circ \eta$.

Como $(f_n, g_n) \to (f, g)$ e a composição de morfismos é contínua, temos que $f_n \circ g_n \to f \circ g$ e, como $f_n \circ g_n \in \varphi \circ \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que $f \circ g \in \overline{\varphi \circ \eta}$.

Logo, $\{f \circ g | f \in \overline{\varphi}, g \in \overline{\eta}\} \subseteq \overline{\varphi \circ \eta}$, como afirmado. Como $\overline{\varphi \circ \eta}$ é fechado tem-se que

$$\overline{\{f \circ g | f \in \overline{\varphi}, g \in \overline{\eta}\}} \subseteq \overline{\varphi \circ \eta}.$$

Logo, $\overline{\varphi} \circ \overline{\eta} \subseteq \overline{\varphi \circ \eta}$ e com isso provamos que

$$\overline{\varphi} \circ \overline{\eta} = \overline{\varphi \circ \eta}.$$

□

Teorema 33. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e H uma família compatível de grupos de automorfismos para $\mathcal{C}$. Suponha que para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tem-se que a aplicação de composição*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

é contínua. Então, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$ é uma categoria.

Demonstração. Já vimos na Definição 31 como são definidos os objetos e os morfismos, e pela Proposição 32, a lei de composição.

Resta mostrar que a operação de composição satisfaz os axiomas de associatividade e identidade para categorias.

Sejam $A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\Phi = \overline{\varphi} \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}}(A, B)$, $\Omega = \overline{\eta} \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}}(B, C)$ e $\Psi = \overline{\psi} \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}}(C, D)$.

Pelo Teorema 19 temos que

$$(\psi \circ \eta) \circ \varphi = \psi \circ (\eta \circ \varphi).$$

Tomando o fecho em ambos os lados temos

$$\overline{(\psi \circ \eta) \circ \varphi} = \overline{\psi \circ (\eta \circ \varphi)}.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
(\overline{\psi} \circ \overline{\eta}) \circ \overline{\varphi} &= (\overline{\psi \circ \eta}) \circ \overline{\varphi} \\
&= \overline{(\psi \circ \eta) \circ \varphi} \\
&= \overline{\psi \circ (\eta \circ \varphi)} \\
&= \overline{\psi} \circ \overline{\eta \circ \varphi} \\
&= \overline{\psi} \circ (\overline{\eta} \circ \overline{\varphi}).
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ satisfaz a propriedade associativa para categorias.

Sejam $A, B \in \text{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}})$, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, B)$ e para cada $A \in \text{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}})$, seja $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{out}}}(A, A)$. Observe que Id_A é a classe de equivalência módulo R_H do morfismo identidade de A em $\mathcal{C}$.

Pelo Teorema 19 temos que

$$\varphi \circ \text{Id}_A = \varphi.$$

Tomando o fecho em ambos os lados, temos

$$\overline{\varphi \circ \text{Id}_A} = \overline{\varphi}.$$

Com isso, temos que

$$\overline{\varphi} \circ \overline{\text{Id}_A} = \overline{\varphi \circ \text{Id}_A} = \overline{\varphi}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 19 também sabemos que

$$\text{Id}_B \circ \varphi = \varphi.$$

Agora, ao tomar o fecho em ambos os lados da igualdade, temos que

$$\overline{\mathrm{Id}_B \circ \varphi} = \overline{\varphi}.$$

E usando isso temos

$$\overline{\mathrm{Id}_B} \circ \overline{\varphi} = \overline{\mathrm{Id}_B \circ \varphi} = \overline{\varphi}.$$

Isto prova que para cada $A \in \mathrm{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}})$, $\overline{\mathrm{Id}_A}$ é o morfismo identidade para A e assim o axioma da identidade é satisfeito.

Portanto, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$ é uma categoria.

□

A partir disso, conseguimos criar um funtor F de $\mathcal{C}$ em $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$ de modo que F leva cada objeto em si próprio (visto como objeto de $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$) e cada morfismo f em $\mathcal{C}$ no morfismo de $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$ dado pelo fecho da classe de equivalência de f módulo R_H.

Teorema 34. *Com a notação acima, F é um funtor.*

Demonstração. Já vimos que F associa cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ a um objeto $F(A)$ em $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$ e que cada morfismo $\varphi \in \mathcal{C}$ é associado a um morfismo $F(\varphi)$ em $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$. Resta mostrar os axiomas do elemento identidade e da composição de funtores.

Para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}})$, por definição temos

$$F(\mathrm{Id}_A) = \overline{[\mathrm{Id}_A]} = \mathrm{Id}_{F(A)},$$

e assim F satisfaz o axioma do elemento identidade para categorias.

Sejam agora, $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer. Desta forma, temos que

$$F(f) \circ F(g) = \overline{[f]} \circ \overline{[g]} = \overline{[f \circ g]} = F(f \circ g).$$

Segue que F satisfaz o axioma de composição de morfismos para funtores, e assim concluímos que F é um funtor.

□

Queremos provar que F é um funtor de classificação. Mas para isso, precisamos de algumas hipóteses adicionais. Como veremos no teorema seguinte.

Teorema 35. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e H uma FCGA para $\mathcal{C}$. Suponha que:*

- *Para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ *é um espaço métrico completo.*

- *Para quaisquer* $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *tem-se que a aplicação de composição*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

é contínua.

- *Para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(C)$ *e* $\varphi \in H_B$ *tem-se que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$f \mapsto \varphi \circ f$$

é isometria.

Sob tais hipóteses, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$ *é um funtor de classificação.*

Demonstração. Já vimos pelo Teorema 34 que F é um funtor. Resta mostrar que F é um funtor de classificação. Fixemos notações inicialmente: para $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ quaisquer, a função

$$E_k : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$x \mapsto k \circ x$$

dada pela restrição da aplicação contínua de composição, fixando a primeira entrada, é contínua; em particular E_k é contínua em Id_B.

Da mesma forma, a função

$$D_k : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$x \mapsto x \circ k$$

é contínua, e portanto contínua em Id_A.

Sejam $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ quaisquer e suponha que $F(A)$ e $F(B)$ são isomorfos em $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$. Então existe um isomorfismo $h : F(A) \longrightarrow F(B)$ em $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{out}}}$. Desta maneira, existe $h^{-1} : F(B) \longrightarrow F(A)$ tal que

$$h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_{F(B)} = \overline{[\mathrm{Id}_B]}$$

e

$$h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_{F(A)} = \overline{[\mathrm{Id}_A]}.$$

Mostraremos que $h = F(f)$ para $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo em $\mathcal{C}$. Para tanto, escolha $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tais que $h = F(p) = \overline{[p]}$ e $h^{-1} = F(q) = \overline{[q]}$. Segue da lei composição em $\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$ e da funtorialidade de F que

$$\overline{[p \circ q]} = F(p \circ q) = F(p) \circ F(q) = h \circ h^{-1} = \overline{[\mathrm{Id}_B]},$$

e similarmente $\overline{[q \circ p]} = \overline{[\mathrm{Id}_A]}$.

A partir dos morfismos p e q, construímos o diagrama (não comutativo) abaixo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "p"'] & \cdots \\
B \arrow[r, "\mathrm{Id}_B"'] \arrow[ur, "q"] & B \arrow[r, "\mathrm{Id}_B"'] \arrow[ur, "q"] & B \arrow[r, "\mathrm{Id}_B"'] \arrow[ur, "q"] & \cdots ,
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

De agora em diante, trocaremos os morfismos não horizontais do diagrama 2.1 progressivamente e em ordem. Denotaremos o morfismo p à esquerda do triângulo 2.1 por f_1.

Considere o primeiro triângulo do diagrama 2.1

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "f_1"'] & A \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[ur, "q"'] & {}
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

A função E_p é contínua em Id_A, logo para $\epsilon = 2^{-2}$existe um $\delta > 0$ (que podemos supor menor que 2^{-1}) tal que para qualquer $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, se $d(x, \mathrm{Id}_A) < \delta$ então $d(p \circ x, p) = d(E_p(x), E_p(\mathrm{Id}_A) < 2^{-2}$ (na demonstração, a letra d sempre denota a métrica em questão).

Vimos acima que $\overline{[q \circ f_1]} = \overline{[q \circ p]} = \overline{[\mathrm{Id}_A]}$, logo $\mathrm{Id}_A \in \overline{[q \circ f_1]}$ e portanto Id_A é o ponto limite em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ de uma sequência de morfismos, todos equivalentes módulo R_H à $q \circ f_1$. Segue disso que existe $\psi_1 \in H_A$ tal que $d(\psi_1 \circ (q \circ f_1), \mathrm{Id}_A) < \delta$.

Escrevendo $g_1 = \psi_1 \circ q$, temos que

$$d(g_1 \circ f_1, \mathrm{Id}_A) < \delta < 2^{-1},$$

e portanto

$$d(p \circ (g_1 \circ f_1), p) < 2^{-2}. \tag{2.3}$$

Em seguida, considere o segundo triângulo do diagrama 2.1, em que trocamos o morfismo q da esquerda pelo morfismo g_1 obtido no passo anterior, como segue:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "f_1"'] & A \arrow[d, "p"] & {} \\ B \arrow[ur, "g_1"'] \arrow[r, "\mathrm{Id}_B"'] & B \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

As funções D_{f_1} e E_{f_1} são contínuas em Id_B; assim,

- tome $\delta_1 > 0$ para a continuidade de D_{f_1} em Id_B para $\epsilon = 2^{-2}$,
- tome $\delta_2 > 0$ para a continuidade de E_q em Id_B para $\epsilon = 2^{-3}$,

e seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 2^{-2}\}$.

Uma vez que $g_1 \sim q$ módulo R_H temos que $F(g_1) = F(q) = h^{-1}$ e assim $\overline{[p \circ g_1]} = \overline{[p \circ q]} = \overline{[\mathrm{Id}_B]}$; isto mostra que $\mathrm{Id}_B \in \overline{[p \circ g_1]}$, portanto existe $\varphi_2 \in H_B$ de modo que $d(\varphi_2 \circ (p \circ g_1), \mathrm{Id}_B) < \delta$.

Fazendo $f_2 = \varphi_2 \circ p$, temos

$$d(f_2 \circ g_1, \mathrm{Id}_B) < \delta \leqslant 2^{-2},$$

e disso segue que

$$d((f_2 \circ g_1) \circ f_1, f_1) < 2^{-2}, \tag{2.4}$$

e que

$$d((q \circ (f_2 \circ g_1), q) < 2^{-3}. \tag{2.5}$$

Note que como $f_2 = \varphi_2 \circ p$, então pela Desigualdade 2.3 e pela hipótese da composição à esquerda por elemento de H_B ser isometria, temos que

$$\begin{aligned} d(f_2 \circ (g_1 \circ f_1), f_2) &= d((\varphi_2 \circ p) \circ (g_1 \circ f_1), \varphi_2 \circ p) \\ &= d(\varphi_2 \circ (p \circ (g_1 \circ f_1)), \varphi_2 \circ p) \\ &= d(p \circ (g_1 \circ f_1), p) \end{aligned}$$

$$< 2^{-2}.$$

Agora, considere o terceiro triângulo do diagrama 2.1, em que trocamos o morfismo p da esquerda pelo morfismo f_2 obtido no passo anterior, como segue

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "f_2"'] & A \arrow[d, "p"] \\
{} \arrow[ur, "g_1"] & B \arrow[ur, "q"'] & {}
\end{tikzcd}$$

As funções D_{g_1} e E_p são contínuas em Id_A; assim

- tome $\delta_1 > 0$ para a continuidade de D_{g_1} em Id_A para $\epsilon = 2^{-3}$,
- tome $\delta_2 > 0$ para a continuidade de E_p, em Id_A para $\epsilon = 2^{-4}$,

seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 2^{-3}\}$.

Prova-se, assim como antes, que $\mathrm{Id}_A \in \overline{[q \circ f_2]}$, e portanto existe $\psi_2 \in H_A$ de modo que $d(\psi_2 \circ (q \circ f_2), \mathrm{Id}_A) < \delta$.

Fazendo $g_2 = \psi_2 \circ q$, temos

$$d(g_2 \circ f_2, \mathrm{Id}_A) < \delta \leqslant 2^{-3},$$

e disso segue que

$$d((g_2 \circ f_2) \circ g_1, g_1) < 2^{-3}$$

e que

$$d(p \circ (g_2 \circ f_2), p) < 2^{-4}. \tag{2.6}$$

Note ainda que como $g_2 = \psi_2 \circ q$, a Desigualdade 2.4 e a hipótese da composição à esquerda por elemento de H_A ser isometria, chegamos em

$$\begin{aligned}
d(g_2 \circ (f_2 \circ g_1), g_2) &= d((\psi_2 \circ q) \circ (f_2 \circ g_1), \psi_2 \circ q) \\
&= d(\psi_2 \circ (q \circ (f_2 \circ g_1)), \psi_2 \circ q) \\
&= d(q \circ (f_2 \circ g_1), q) \\
&< 2^{-3}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo desta forma podemos obter, para cada $n \in \mathbb{N}$, morfismos f_n e g_n, de modo que

- $f_n \sim p$ módulo R_H;
- $g_n \sim q$ módulo R_H;
- $d(f_{n+1} \circ g_n, \mathrm{Id}_B) < 2^{-2n}$;
- $d(g_n \circ f_n, \mathrm{Id}_A) < 2^{-2n+1}$;
- $d((f_{n+1} \circ g_n) \circ f_n, f_n) < 2^{-2n}$;
- $d(f_{n+1} \circ (g_n \circ f_n), f_{n+1}) < 2^{-2n}$;
- $d((g_{n_1} \circ f_{n+1}) \circ g_n, g_n) < 2^{-2n-1}$;
- $d(g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ g_n), g_{n+1}) < 2^{-2n-1}$.

Por fim, usando estas desigualdades ficamos com

$$\begin{aligned} d(f_{n+1}, f_n) &\leqslant d(f_{n+1}, f_{n+1} \circ (g_n \circ f_n)) + d(f_{n+1} \circ (g_n \circ f_n), f_n) \\ &= d(f_{n+1} \circ (g_n \circ f_n), f_{n+1}) + d((f_{n+1} \circ g_n) \circ f_n, f_n) \\ &< 2^{-2n} + 2^{-2n} \\ &= 2^{-2n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(g_{n+1}, g_n) &\leqslant d(g_{n+1}, g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ g_n)) + d(g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ g_n), g_n) \\ &= d(g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ g_n), g_{n+1}) + d((g_{n+1} \circ f_{n+1}) \circ g_n, g_n) \\ &= 2^{-(2n-1)} + 2^{-(2n-1)} \\ &= 2^{-2n}. \end{aligned}$$

provando que (f_n) e (g_n) são sequências de Cauchy; como estamos em espaços métricos completos, então as sequências (f_n) e (g_n) convergem, digamos para f_∞ g_∞, respectivamente. Além disso, como $2^{-2n} \to 0$ vemos das desigualdades acima que $g_n \circ f_n \to \mathrm{Id}_A$ e $f_{n+1} \circ g_n \to \mathrm{Id}_B$. Segue finalmente da lei de composição que $g_n \circ f_n \to g_\infty \circ f_\infty$, e que $f_{n+1} \circ g_n \to f_\infty \circ g_\infty$. A unicidade dos limites garantem que

$$f_\infty \circ g_\infty = \mathrm{Id}_B$$

e

$$g_\infty \circ f_\infty = \mathrm{Id}_A\,.$$

Visto que $f_n \in \overline{[p]} = h$ para todo n temos que $f_\infty \in h$, logo $f_\infty \sim p$ módulo R_H e portanto $F(f_\infty) = \overline{[f_\infty]} = h$. Da mesma forma, $F(g_\infty) = h^{-1}$, e disso segue que F é um funtor de classificação e $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ é uma categoria de classificação, como desejado.

$\square$

2.1 EXEMPLOS: GRUPOS ENUMERÁVEIS E ÁLGEBRAS ENUMERAVELMENTE GERADAS

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, queremos apresentar exemplos da categoria $\overline{\mathcal{C}^{\text{out}}}$ abordada na seção anterior. E faremos isso com a categoria dos grupos enumeráveis discretos e a categoria das álgebras enumeravelmente geradas. Conforme veremos a seguir.

2.1.1 Grupos Enumeráveis

Considere a categoria Grp_E em que os objetos são grupos enumeráveis discretos e os morfismos são homomorfismos de grupos.

Para cada $G \in \text{Obj}(\text{Grp}_\text{E})$, um automorfismo interno $\varphi : G \longrightarrow G$ será da forma usual, conforme vista no Capítulo 1. Já vimos também que os automorfismos internos de grupos formam uma FCGA para a categoria dos grupos. Em particular, são uma FCGA para a categoria dos grupos enumeráveis discretos. Assim,

$$H = \{\text{Inn}(G) | G \in \text{Obj}(\text{Grp}_\text{E})\}$$

é FGCA para Grp_E.

Para cada $G, H \in \text{Obj}(\text{Grp}_\text{E})$, precisamos definir uma métrica em $\text{Hom}_{\text{Grp}_\text{E}}(G, H)$. Para isso, apresentaremos um lema.

Antes disso, observe que para cada $G \in \text{Obj}(\text{Grp}_\text{E})$ existe uma bijeção de G com $\mathbb{N}$ ou com segmento inicial de $\mathbb{N}$.

De fato, se G é um grupo enumerável infinito, então existe uma bijeção

$$\eta : G \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n(g),$$

em que $n(g)$ é o índice dos elementos do grupo G.

Por outro lado se G é um grupo finito, existe $k \in \mathbb{N}^*$ e uma bijeção

$$\eta : G \longrightarrow \{1, 2, 3, ...k\}$$

$$g \mapsto n(g).$$

Portanto, existe uma bijeção entre G e $\mathbb{N}$ ou com um segmento inicial de $\mathbb{N}$.

Lema 36. *Para quaisquer* $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ *e* $g \in G$ *seja*

$$\mathrm{d}_g : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)},$$

em que $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = \begin{cases} 0, & se \quad \varphi(g) \neq \psi(g) \\ 1, & se \quad \varphi(g) = \psi(g). \end{cases}$

Então d_g *é uma pseudo-métrica.*

Demonstração. Sejam $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ e $g \in G$ quaisquer.

Sejam $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ quaisquer. Mostremos que $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) \geqslant 0$.

Temos que $\delta_{\varphi(g),\psi(g)}$ é igual a 0 ou 1. Assim, $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$ ou $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$. Logo

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} \geqslant 0,$$

e assim $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) \geqslant 0$.

Mostremos agora que $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = \mathrm{d}_g(\psi,\varphi)$: É claro que $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = \delta_{\psi(g),\varphi(g)}$. E com isso temos que

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1 - \delta_{\psi(g),\varphi(g)} = \mathrm{d}_g(\psi,\varphi).$$

Logo $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = \mathrm{d}_g(\psi,\varphi)$.

Seja $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ qualquer. Mostremos que $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) \leqslant \mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi)$:

Temos os seguintes casos:

(1) $\varphi(g) = \psi(g)$, $\varphi(g) = \mu(g)$ e $\mu(g) = \psi(g)$;

(2) $\varphi(g) = \psi(g)$, $\varphi(g) \neq \mu(g)$ e $\mu(g) \neq \psi(g)$;

(3) $\varphi(g) \neq \psi(g)$, $\varphi(g) \neq \mu(g)$ e $\mu(g) \neq \psi(g)$;

(4) $\varphi(g) \neq \psi(g)$, $\varphi(g) = \mu(g)$ e $\mu(g) \neq \psi(g)$;

(5) $\varphi(g) \neq \psi(g)$, $\varphi(g) \neq \mu(g)$ e $\mu(g) = \psi(g)$.

Verifiquemos a desigualdade triangular para os casos acima.

Caso 1: Se $\varphi(g) = \psi(g)$, $\varphi(g) = \mu(g)$ e $\mu(g) = \psi(g)$ então $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$, $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 1$ e $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 1$. Então:

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$$

e

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} + 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 0.$$

Portanto $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = \mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi)$.

Caso 2: Se $\varphi(g) = \psi(g)$, $\varphi(g) \neq \mu(g)$ e $\mu(g) \neq \psi(g)$ então $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$, $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 0$ e $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 0$. Com isso, temos que

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$$

e

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} + 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 2.$$

Portanto $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) < \mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi)$.

Caso 3: Se $\varphi(g) \neq \psi(g)$, $\varphi(g) \neq \mu(g)$ e $\mu(g) \neq \psi(g)$ então $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$, $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 0$ e $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 0$. E assim

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$$

e

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} + 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 2.$$

Portanto $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) < \mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi)$.

Caso 4: Se $\varphi(g) \neq \psi(g)$, $\varphi(g) = \mu(g)$ e $\mu(g) \neq \psi(g)$ então $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$, $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 1$ e $\delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 0$. E com isso temos que

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$$

e

$$\mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi) = 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} + 1 - \delta_{\varphi(g),\mu(g)} = 1.$$

Portanto $\mathrm{d}_g(\varphi,\psi) = \mathrm{d}_g(\varphi,\mu) + \mathrm{d}_g(\mu,\psi)$.

A prova do caso 5 é análoga ao caso 4. Logo a desigualdade triangular é satisfeita. E com isso concluímos que d_g é uma pseudo-métrica.

$\square$

A partir de agora, mostraremos alguns resultados que nos permitirão cair nas hipóteses do Teorema 35.

Proposição 37. *Para quaisquer* $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ *e* $g \in G$*, seja*

$$\mathrm{d} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)})$$

em que $n(g)$ *é o índice de* g *em uma enumeração fixada de* G.

Então d *é uma métrica para* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$*. Além disso,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ *é espaço métrico completo.*

Demonstração. Mostremos que d é uma métrica.

Sejam $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ quaisquer, e fixe uma enumeração de G. Mostraremos que d como acima é uma métrica em $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$.

Sejam $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ quaisquer. Uma vez que para todo $g \in G$ tem-se que $2^{-n(g)} > 0$ e $0 \leqslant 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} \leqslant 1$, temos que

$$0 \leqslant 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}) \leqslant 2^{-n(g)}$$

e portanto

$$0 \leqslant \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}) \leqslant \sum_{g \in G} 2^{-n(g)},$$

provando assim que a série $\sum\limits_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)})$ converge e além disso, que $\mathrm{d}(\varphi, \psi) \geqslant 0$.

Suponha que $\mathrm{d}(\varphi, \psi) = 0$. Então,

$$\sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}) = 0.$$

No Lema 36 vimos que $1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} \geqslant 0$ e assim

$$2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}) = 0, \forall g \in G.$$

Como $2^{-n(g)} > 0$ temos que

$$1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0, \forall g \in G,$$

ou seja,

$$\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1, \forall g \in G,$$

o que nos leva a concluir que

$$\varphi(g) = \psi(g), \forall g \in G.$$

Por outro lado, se para cada $g \in G$ temos $\varphi(g) = \psi(g)$, então $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$ e assim

$$\mathrm{d}(\varphi, \varphi) = \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\varphi(g)}) = \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - 1) = 0.$$

Portanto $\mathrm{d}(\varphi, \psi) = 0$ se, e somente se $\varphi(g) = \psi(g)$, para todo $g \in G$, o que ocorre se, e somente se $\varphi = \psi$.

Mostremos agora, que $\mathrm{d}(\varphi, \psi) = \mathrm{d}(\psi, \varphi)$.

No Lema 36 vimos que para cada $g \in G$, $1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1 - \delta_{\psi(g),\varphi(g)}$. Usando isso, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\varphi, \psi) &= \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}) \\
&= \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\psi(g),\varphi(g)}) \\
&= \mathrm{d}(\psi, \varphi).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{d}(\varphi, \psi) = \mathrm{d}(\psi, \varphi)$.

Sejam $\varphi, \psi, \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$ quaisquer. Temos que mostrar que

$$\mathrm{d}(\varphi, \psi) \leqslant \mathrm{d}(\varphi, \eta) + \mathrm{d}(\eta, \psi).$$

Usando o Lema 36 temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\varphi, \psi) &= \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}) \\
&\leqslant \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}[(1 - \delta_{\varphi(g),\eta(g)}) + (1 - \delta_{\eta(g),\psi(g)})] \\
&= \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi(g),\eta(g)}) + \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\eta(g),\psi(g)}) \\
&= \mathrm{d}(\varphi, \eta) + \mathrm{d}(\eta, \psi).
\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{d}(\varphi, \psi) \leqslant \mathrm{d}(\varphi, \eta) + \mathrm{d}(\eta, \psi)$ e assim concluímos que d é uma métrica para $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$.

Mostremos agora que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ é completo.

Tome uma sequência φ_k em $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ de Cauchy. A definição da métrica em $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ garante que para todo $g \in G$ tem-se que

$$1 - \delta_{\varphi_k(g),\varphi_{k+1}(g)} \longrightarrow 0,$$

e portanto a sequência φ_k é eventualmente constante.

Defina $\varphi : G \longrightarrow H$ em que cada $g \in G$ como sendo o eventual valor constante da sequência $\varphi_k(g)$. Segue de imediato da definição da métrica em $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, provando que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ é completo.

□

Proposição 38. *Para quaisquer $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ e qualquer automorfismo interno φ sobre H, a função*

$$f : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$$

$$p \mapsto \varphi \circ p,$$

é uma isometria.

Demonstração. Sejam $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ e φ automorfismo interno qualquer sobre H. Sejam $p, q \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H)$ quaisquer. O objetivo é mostrar que $\mathrm{d}(f(p), f(q)) = \mathrm{d}(p,q)$.

Para cada $g \in G$ tem-se que $p(g), q(g) \in H$. Como φ é automorfismo interno sobre H temos que φ é injetor, e portanto $\varphi(p(g)) = \varphi(q(g))$ se, e somente se $p(g) = q(g)$. Em particular, $1 - \delta_{\varphi\circ p(g),\varphi\circ q(g)} = 1 - \delta_{p(g),q(g)}$, e disso segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f(p), f(q)) &= \mathrm{d}(\varphi \circ p, \psi \circ p) \\
&= \sum_{g\in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi\circ p(g),\psi\circ p(g)}) \\
&= \sum_{g\in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{p(g),q(g)}) \\
&= \mathrm{d}(p,q).
\end{aligned}$$

provando que d é isometria, como desejado.

□

Resta ainda provar que a composição de morfismos na categoria $\mathrm{Grp_E}$ é contínua. Mas antes disso, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Teorema 39. *Sejam* $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ *e* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$ *quaisquer. Se* (φ_n) *é uma sequência no espaço métrico* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$ *tal que* $\varphi_n \to \varphi$ *então para todo* $g \in G$ *tem-se que* $\varphi_n(g) \to \varphi(g)$ *em que* H *possui a topologia discreta.*

Demonstração. Suponha que $\varphi_k \to \varphi$ na métrica de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$. Então

$$\sum_{g \in G} 2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi_k(g), \varphi(g)}) \longrightarrow 0, \tag{2.7}$$

quando $k \longrightarrow \infty$.

Fixe $h \in G$ arbitrário. Queremos mostrar que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_0$ tem-se que

$$\varphi_k(h) = \varphi(h).$$

Para cada $g \in G$ temos que

$$2^{-n(g)}(1 - \delta_{\varphi_k(g), \varphi(g)}) \geqslant 0.$$

Disto e 2.7 temos que

$$2^{-n(h)}(1 - \delta_{\varphi_k(h), \varphi(h)}) \longrightarrow 0,$$

quando $k \longrightarrow \infty$.

Esta é uma sequência cujos termos são apenas $2^{-n(g)}$ ou 0. Para que esta convirja para zero, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_0$ temos

$$2^{-n(h)}(1 - \delta_{\varphi_k(h), \varphi(h)}) = 0,$$

ou seja, $1 - \delta_{\varphi_k(h), \varphi(h)} = 0$, isto é, $\delta_{\varphi_k(h), \varphi(h)} = 0$, o que implica que

$$\varphi_k(h) = \varphi(h).$$

□

Teorema 40. *Para quaisquer* $G, H, I \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$ *e* $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(H, I)$ *tem-se que*

$$\mathrm{d}(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \leqslant \mathrm{d}(\varphi, \psi).$$

Demonstração. Sejam $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G, H)$ e $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(H, I)$ morfismos quaisquer. Mostremos primeiramente que para cada $g \in G$ temos

$$\mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \leqslant \mathrm{d}_g(\varphi, \psi).$$

Seja $g \in G$ qualquer. Então temos duas opções:

(i) $\varphi(g) = \psi(g)$;

(ii) $\varphi(g) \neq \psi(g)$.

Se (i) ocorre então temos que

$$(\eta \circ \varphi)(g) = \eta(\varphi(g)) = \eta(\psi(g)) = (\eta \circ \psi)(g).$$

Nestas condições temos que $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 1$ e $\delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)} = 1$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_g(\varphi, \psi) &= 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} \\ &= 0 \\ &= 1 - \delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)} \\ &= \mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi). \end{aligned}$$

Portanto nessas condições

$$\mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) = \mathrm{d}_g(\varphi, \psi). \tag{2.8}$$

Se (ii) ocorre temos duas opções:

(a) $(\eta \circ \varphi)(g) \neq (\eta \circ \psi)(g)$;

(b) $(\eta \circ \varphi)(g) = (\eta \circ \psi)(g)$.

Nas condições do item (a) temos que $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$ e $\delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)} = 0$. Então temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_g(\varphi, \psi) &= 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} \\ &= 1 \\ &= 1 - \delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)} \\ &= \mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi). \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) = \mathrm{d}_g(\varphi, \psi). \tag{2.9}$$

Por fim, de acordo com as condições do item (b) temos que $\delta_{\varphi(g),\psi(g)} = 0$ e $\delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)} = 1$. E assim temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_g(\varphi, \psi) &= 1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)} \\
&= 1 \\
&> 0 \\
&= 1 - \delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)} \\
&= \mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) < \mathrm{d}_g(\varphi, \psi). \tag{2.10}$$

De 2.8, 2.9 e 2.10 temos que

$$\mathrm{d}_g(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \leqslant \mathrm{d}_g(\varphi, \psi).$$

Usando isso, temos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \\
&\qquad = \sum_{g \in G} 2^{-n(g)} \big(1 - \delta_{(\eta\circ\varphi)(g),(\eta\circ\psi)(g)}\big) \\
&\qquad \leqslant \sum_{g \in G} 2^{-n(g)} \big(1 - \delta_{\varphi(g),\psi(g)}\big) \\
&\qquad = \mathrm{d}(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{d}(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \leqslant \mathrm{d}(\varphi, \psi).$$

□

Usando os dois teoremas anteriores podemos provar a continuidade da composição.

Proposição 41. *Para quaisquer* $G, H, I \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Grp_E})$ *tem-se que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(H,I) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,I)$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

é contínua.

Demonstração. Seja $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(G,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp_E}}(H,I)$ qualquer e tome uma sequência que converge para (φ, ψ) na topologia produto, digamos $(\varphi_k, \psi_k) \longrightarrow (\varphi, \psi)$. Queremos provar que $\psi_k \circ \varphi_k \longrightarrow \psi \circ \varphi$.

Como $(\varphi_k, \psi_k) \longrightarrow (\varphi, \psi)$ temos que

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi$$

e

$$\psi_k \longrightarrow \psi.$$

Como $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ então para todo $\epsilon > 0$, existe $\widehat{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k > \widehat{k_0}$ tem-se que

$$d(\varphi, \varphi_k) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Afirmamos que $\psi_k \circ \varphi_k \longrightarrow \psi \circ \varphi$. De fato, seja $\epsilon > 0$ qualquer. Então, como $\sum\limits_{g \in G} 2^{-n(g)}$ converge, existe $F \subseteq G$ finito tal que $\sum\limits_{g \in G \setminus F} 2^{-n(g)} < \frac{\epsilon}{2}$.

Como F é um subconjunto finito de G, considere $F = \{g_1, g_2, ..., g_l\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., l\}$, como $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ na métrica temos que existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_i$ temos que

$$\varphi_k(g_i) = \varphi(g_i), \text{pelo Teorema 39.}$$

Analogamente, para cada $i \in \{1, , 2, ..., l\}$, como $\psi_k \longrightarrow \psi$ na métrica temos que existe $\widetilde{k_i} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant \widetilde{k_i}$ temos que

$$\psi_k(\varphi(g_i)) = \psi(\varphi(g_i)).$$

Seja $k_0 = \max\{\widehat{k_0}, k_1, ..., k_l, \widetilde{k_1}, \widetilde{k_2}, ..., \widetilde{k_l}\}$. Então, para todo $k \geqslant k_0$ temos que

$$\psi_k(\varphi(g_i)) = \psi(\varphi(g_i))$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Com isso temos que

$$\begin{aligned}
(\psi_k \circ \varphi_k)(g_i) &= \psi_k(\varphi_k(g_i)) \\
&= \psi_k(\varphi(g_i)) && \text{pois } k \geqslant k_i \\
&= \psi(\varphi(g_i)) && \text{pois } k \geqslant \widetilde{k_i} \\
&= \psi(\varphi_k(g_i)) && \text{pois } k \geqslant k_i \\
&= (\psi \circ \varphi_k)(g_i).
\end{aligned}$$

Assim, para todo $k \geqslant k_0$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\psi \circ \varphi_k, \psi_k \circ \varphi_k) &= \sum_{g \in G} 2^{-n(g)}\left(1 - \delta_{\psi \circ \varphi_k(g), \psi_k \circ \varphi_k(g)}\right) \\
&= \sum_{g \in F} 2^{-n(g)}\left(1 - \delta_{(\psi \circ \varphi_k)(g), (\psi_k \circ \varphi_k)(g)}\right) \\
&+ \sum_{g \in G \setminus F} 2^{-n(g)}\left(1 - \delta_{(\psi \circ \varphi_k)(g), (\psi_k \circ \varphi_k)(g)}\right) \\
&< 0 + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{d}(\psi \circ \varphi_k, \psi_k \circ \varphi_k) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.12}$$

De 2.11, 2.12 e do Teorema 40 temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\psi \circ \varphi, \psi_k \circ \varphi_k) &\leqslant \mathrm{d}(\psi \circ \varphi, \psi \circ \varphi_k) + \mathrm{d}(\psi \circ \varphi_k, \psi_k \circ \varphi_k) \\
&\leqslant \mathrm{d}(\varphi, \varphi_k) + \mathrm{d}(\psi \circ \varphi_k, \psi_k \circ \varphi_k) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{d}(\psi \circ \varphi, \psi_k \circ \varphi_k) < \epsilon$ e assim concluímos que

$$\psi_k \circ \varphi_k \longrightarrow \psi \circ \varphi.$$

Logo a composição é contínua.

□

Pelas Proposições 37, 38 e 41 temos que as hipóteses do Teorema

35 são satisfeitas. Portanto, o funtor $F : \mathrm{Grp_E} \to \overline{\mathrm{Grp_E}}^{\mathrm{out}}$ é um funtor de classificação para a categoria dos grupos enumeráveis discretos.

2.1.2 Álgebras Enumeravelmente Geradas

Considere agora a categoria $\mathrm{Alg_E}$ cujos objetos são álgebras enumeravelmente geradas (não necessariamente com unidade) sobre o corpo dos números complexos e os morfismos são homomorfismos de álgebras entre os objetos.

Primeiramente, vamos explicitar a família compatível de automorfismos (FCA) para esta categoria.

Para de?nirmos um automor?smo interno de uma álgebra, precisamos em princípio que a álgebra tenha unidade. Todavia, nossas álgebras não precisam ser, necessariamente, com unidade.

Dado $A \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Alg_E})$ qualquer, por um *automorfismo interno sobre* A entende-se $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ cuja única extensão $\tilde{\varphi}$ para a unitização $\tilde{A}$ de A é um automorfismo interno, isto é, existe $x \in \tilde{A}$ tal que

$$\tilde{\varphi} = \phi_x : \tilde{A} \to \tilde{A}$$

$$a \mapsto xax^{-1}.$$

Denotando o conjunto dos automorfismos internos sobre A por $\mathrm{Inn}(A)$, de modo análogo ao que fizemos para grupos é possível mostrar que

$$H = \{\mathrm{Inn}(A) | A \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Alg_E})\}$$

é uma FCGA para $\mathrm{Alg_E}$.

A partir de agora, mostraremos uma série de resultados que nos levará a cair nas hipóteses do Teorema 35.

Proposição 42. *Para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Alg_E})$ *e* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência geradora para* A*, seja*

$$\mathrm{d} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}(1 - \delta_{\varphi(a_n),\psi(a_n)})$$

Então d *é uma métrica para* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B)$*. Além disso,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B)$ *é um espaço métrico completo.*

A demonstração desta proposição é completamente análoga à demonstração da Proposição 37 da seção anterior.

Proposição 43. *Para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Alg_E})$ *e qualquer automorfismo interno* φ *sobre* H*, a função*

$$f : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B)$$

$$p \mapsto \varphi \circ p,$$

é uma isometria.

A demonstração deste resultado é similar à demonstração da Proposição 38 da seção anterior.

Proposição 44. *Para quaisquer* $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Alg_E})$ *tem-se que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_E}}(A, C)$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

é contínua.

A demonstração deste resultado é similar à demonstração da Proposição 41 da seção anterior.

Pelas Proposições 42, 43 e 44 temos que as hipóteses do Teorema 35 são satisfeitas. Portanto, o funtor $F : \mathrm{Alg_E} \to \overline{\mathrm{Alg_E}^{\mathrm{out}}}$ é um funtor de classificação para a categoria das álgebras enumeravelmente geradas.

REFERÊNCIAS

[1] ELLIOTT, G. A. **Towards a theory of classification**. Advances in Mathematics, v. 223, n. 1, p. 30-48, 2010.

[2] NYLAND, P. K. **Bratteli Diagrams-Modeling AF-algebras and Cantor Minimal Systems Using Infinite Graphs**. MS thesis, 2016.
Disponível em
<https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2391566/12812_FULLTEXT.pdf?sequence=1>. Data de acesso: 27 de fev. 2018

[3] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[4] HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo: Editora Polígono, 1970.

[5] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer-Verlag, 1997.

[6] MUNKRES, J. R., **Topology: a first course**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975