

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

Jéssica Neckel Cavalheiro

**CONDIÇÕES DE FINITUDE E O GRUPO DE
THOMPSON F**

Florianópolis

2018

Jéssica Neckel Cavalheiro

**CONDIÇÕES DE FINITUDE E O GRUPO DE
THOMPSON F**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática Pura
e Aplicada para a obtenção do Grau
de mestre em Matemática Pura e Apli-
cada.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Tadao
Martins (UFSC)

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Neckel Cavalheiro, Jéssica
Condições de finitude e o grupo de Thompson F. /
Jéssica Neckel Cavalheiro ; orientador, Sérgio
Tadao Martins, 2018.
130 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.


1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Teoria de
Grupos. 3. Topologia Algébrica. 4. Álgebra
Homológica. I. Tadao Martins, Sérgio. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III.
Título.

Jéssica Neckel Cavalheiro

CONDIÇÕES DE FINITUDE E O GRUPO DE THOMPSON F

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “mestre em Matemática Pura e Aplicada”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 23 de fevereiro de 2018.



Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador – UFSC

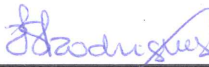
Banca Examinadora:



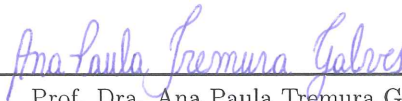
Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins
Orientador – UFSC



Prof. Dr. Eduardo Tengan
UFSC



Prof. Dra. Virgínia Silva Rodrigues
UFSC



Prof. Dra. Ana Paula Tremura Galves
UFU

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me ajudado a chegar até aqui. É para Ele que dedico todo este aprendizado.

A minha mãe Dirce e ao meu irmão Ermes, que sempre acreditaram em mim. A família Noll, que me adotou como filha e cuidou de mim. Ao meu noivo Leonardo, que sempre me apoiou e incentivou, e com seu amor e cuidado me ajudou nos momentos difíceis e se alegrou comigo nos momentos felizes.

Agradeço a todos os professores que tive nestes dois anos de mestrado. Em especial, o meu orientador, Sérgio Tadao Martins, que aceitou o desafio de me orientar e por ter sido sempre muito paciente e gentil. O professor Giuliano Boava, que pacientemente me prestou o seu auxílio, me respondendo questões simples até as mais complicadas que sempre eram acompanhados de um bom cafezinho. A professora Virgínia Rodrigues, que me motivou com seu grande amor pela matemática.

A todos os meus amigos de mestrado: Josiane Hoffmann, Francieli Triches Marduck Montoya, Luiza Sorice, Elemar Rapachi, Everton Boss, Rafaela Filippozzi e Mariana Ventureli, que estiveram comigo em momentos felizes e tristes durante estes dois anos. Tenho certeza que sem vocês esta caminhada seria muito difícil, vou sentir falta dos cafés que eram realizados pontualmente às 15 hs.

Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro sem o qual não seria possível a conclusão deste trabalho.

“Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de irrem a fundo nela.”

(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

O propósito deste trabalho é exibir um grupo livre de torção com dimensão cohomológica infinita e que seja do tipo FP_∞ , tal grupo é conhecido como o grupo de Thompson F . Para mostrarmos que F é do tipo FP_∞ , é necessário construir um espaço topológico adequado em que F age. Devido a F não ser um grupo muito “simples”, usaremos sua representação por meio de árvores binárias a fim de descrever a ação de F neste espaço topológico.

Palavras-chave: Grupo de Thompson. Dimensão Cohomológica. Torção livre. Condição FP_∞ .

ABSTRACT

The goal of this work is to exhibit a torsion-free, infinite dimensional, FP_∞ group, known as Thompson's group F . In order to show that F is FP_∞ , we construct a topological space on which F acts nicely. Since F is not a particularly "simple" group, we will describe it by means of binary trees and build our topological space using this description.

Keywords: Thompson's group. Cohomological dimension. Torsion-free. FP_∞ .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.	45
Figura 2	$\pi_n(X, x_0)$ é abelino quando $n \geq 2$	49
Figura 3	A representação de I^2 , ∂I^2 e J^1	49
Figura 4	Estrela de σ	54
Figura 5	Link de σ	55
Figura 6	A subdivisão baricêntrica de K	55
Figura 7	Subdivisão baricêntrica de um 2-simplexo.	56
Figura 8	Realização geométrica de K	56
Figura 9	Representação de \mathbb{R} como um CW -complexo	74
Figura 10	Diagramas retangulares de A e B	95
Figura 11	Diagrama retangular de AB^{-1}	96
Figura 12	Diagramas retangulares de $A^{-1}BA$ e $A^{-2}BA^2$	96
Figura 13	Diagrama retangular de X_n	97

LISTA DE SÍMBOLOS

$\dot{\cup}, \amalg$	União disjunta.
$:=$	Definição.
$[\]$	Classe de equivalência
$(G : H)$	Índice do subgrupo H em G .
\rightarrow	Epimorfismo.
\hookrightarrow	Inclusão canônica.
Id_M	Identidade em M
G/H	Classes laterais de H em G .
\approx	Isomorfismo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	ÁLGEBRA HOMOLÓGICA	19
2.1	SEQUÊNCIAS EXATAS	19
2.2	MÓDULOS LIVRES E PROJETIVOS	23
2.3	SEQUÊNCIA EXATA LONGA	25
2.4	RESOLUÇÕES LIVRES E PROJETIVAS	30
2.5	TOR E EXT	33
2.6	SEQUÊNCIA ESPECTRAL	35
3	TOPOLOGIA	41
3.1	HOMOTOPIA	41
3.2	CW-COMPLEXO	42
3.3	EXTENSÃO HOMOTÓPICA	44
3.4	HOMOLOGIA SINGULAR	44
3.5	HOMOLOGIA CELULAR	47
3.6	GRUPOS DE HOMOTOPIA	48
3.7	ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO	50
3.8	TEOREMA DE WHITEHEAD E HUREWICZ	52
3.9	COMPLEXO SIMPLICIAL	54
4	HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE GRUPOS	59
4.1	$\mathbb{Z}G$ -MÓDULOS	59
4.2	GRUPO DE INVARIANTES E COINVARIANTES	61
4.3	(CO)HOMOLOGIA DE UM GRUPO	64
4.4	MÓDULOS INDUZIDOS E COINDUZIDOS	68
4.5	INTERPRETAÇÃO TOPOLÓGICA	71
4.6	HOMOLOGIA EQUIVARIANTE	76
5	CONDIÇÕES DE FINITUDE	77
5.1	DIMENSÃO COHOMOLÓGICA	77
5.2	GRUPOS DO TIPO FP	81
5.3	CRITÉRIO DE BIERI-ECKMANN	87
6	O GRUPO DE THOMPSON F	93
6.1	DIAGRAMAS RETANGULARES	95
6.2	ÁLGEBRA DO TIPO 2	97
6.3	PRESENTAÇÃO DE F	104
6.4	UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE	112
6.5	CONDIÇÃO DE FINITUDE DE F	117
	REFERÊNCIAS	125

1 INTRODUÇÃO

Um grupo G tem a condição FP_∞ se existe uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ que possui em todas as dimensões módulos projetivos finitamente gerados. Grupos finitos sempre apresentam esta propriedade (veja a Proposição 5.16). Além disso, outra propriedade de um grupo que nos interessa é a dimensão cohomológica: esta é um número inteiro denominado como sendo o ínfimo dos comprimentos das resoluções projetivas de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Este número pode não existir, por consequência disso dizemos, neste caso, que G tem dimensão cohomológica infinita. Não é difícil encontrarmos grupos que possuam a dimensão cohomológica infinita, basta olharmos para os grupos com torção, por exemplo os grupos cíclicos finitos. Porém, encontrar um grupo infinito livre de torção que seja do tipo FP_∞ e possua a dimensão cohomológica infinita já não é uma tarefa tão simples.

Em 1965, Richard Thompson introduziu o grupo F que é chamado de grupo de Thompson F . Brown e Geoghegan demonstraram que F é do tipo FP_∞ , dando assim o primeiro exemplo de um grupo infinito do tipo FP_∞ livre de torção. O grupo F é definido como sendo o conjunto de todos os homeomorfismos lineares por partes do intervalo $[0, 1]$ em si mesmo que são diferenciáveis, exceto em uma quantidade finita de racionais diádicos $\left(\frac{a}{2^k}\right)$ e cujas derivadas são potências inteiras de 2. Este grupo possui duas apresentações

$$F = \langle X_0, X_1, X_2, \dots; X_k^{-1}X_nX_k = X_{n+1}, \text{ para } k < n \rangle$$

e

$$F = \langle A, B; [AB^{-1}, A^{-1}BA] = 1, [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] = 1 \rangle$$

em que $[x, y]$ denota $xyx^{-1}y^{-1}$. Esta última apresentação nos diz que F é finitamente apresentado.

Mostrar que F é do tipo FP_∞ exige a utilização de um espaço topológico descrito por meio de um complexo simplicial. O grupo F age neste espaço e para descrever esta ação precisamos relacionar os elementos de F com árvores binárias.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

Os dois primeiros capítulos fornecem uma base para o restante do trabalho, no capítulo 2 veremos alguns tópicos da Álgebra Homológica, dentre eles: as resoluções projetivas e livres, a homologia, a cohomologia e os funtores Tor e Ext .

No capítulo 3 nos atentaremos para o estudo dos CW-complexos, espaços do tipo $K(G, 1)$, homologia singular, entre outros aspectos da topologia algébrica.

O capítulo 4 fornece as definições da homologia e cohomologia de grupo, uma do ponto de vista algébrico e outra topológico, quando o coeficiente é o $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial \mathbb{Z} .

No capítulo 5 serão vistas algumas propriedades a respeito das condições FP_n e FP_∞ , além de outras referentes a dimensão cohomológica.

No capítulo 6 será apresentado o objetivo principal do trabalho, mostrar que F é um grupo livre de torção com dimensão cohomológica infinita e do tipo FP_∞ .

2 ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados da álgebra homológica que utilizaremos ao longo do trabalho.

2.1 SEQUÊNCIAS EXATAS

A definição de um módulo é similar à definição de um espaço vetorial trocando corpo por anel. Por isso que um dos exemplos clássicos de módulos são os espaços vetoriais.

Definição 2.1. *Seja R um anel com unidade. Um módulo à esquerda M sobre R é um conjunto com operações*

$$+ : M \times M \longrightarrow M \quad \bullet : R \times M \longrightarrow M$$

tais que

- (i) $(M, +)$ é um grupo abeliano;
- (ii) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$, para quaisquer $r, s \in R$ e todo $m \in M$;
- (iii) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$, para todo $r \in R$ e quaisquer $m, n \in M$;
- (iv) $1 \cdot m = m$, para todo $m \in M$;
- (v) $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$, para quaisquer $r, s \in R$ e todo $m \in M$.

Podemos também definir de modo similar um R -módulo à direita. Quando mencionarmos um R -módulo sempre será à esquerda, exceto nos casos em que for informado previamente.

Definição 2.2. *Sejam M, N dois R -módulos. Uma função $f: M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos ou um R -homomorfismo se são satisfeitas as seguintes igualdades*

- (i) $f(m + m') = f(m) + f(m')$
- (ii) $f(rm) = rf(m)$

para todo $r \in R$ e todo $m, m' \in M$.

No caso em que M e N são R -módulos à direita, o item (ii) é trocado pela igualdade $f(mr) = f(m)r$.

Dado um R -homomorfismo $f: M \rightarrow N$, denotaremos por $\text{Im}(f)$ e $\text{Ker}(f)$ a imagem e o kernel de f , respectivamente.

Definição 2.3. *Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ homomorfismos de R -módulos. A seqüência*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

*é dita **exata em N** se $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. Se a seqüência $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow M_{n+1}$ é exata em M_1, \dots, M_n , então a seqüência é simplesmente chamada **exata**.*

Um tipo de seqüência exata muito usada é da forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0,$$

e é chamada de **seqüência exata curta**. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.4. A seqüência $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ é exata, em que i e π são a inclusão canônica e a projeção canônica, respectivamente.

Observação 2.5. (i) A seqüência $0 \xrightarrow{f_0} M \xrightarrow{f} N$ é exata em M se, e somente se f é um monomorfismo.

(ii) A seqüência $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{f_0} 0$ é exata em N se, e somente se f é um epimorfismo.

Proposição 2.6 (Lema dos cinco). *Seja*

$$\begin{array}{ccccccccc} M' & \xrightarrow{f_1} & N' & \xrightarrow{f_2} & S' & \xrightarrow{f_3} & P' & \xrightarrow{f_4} & Q' \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ M & \xrightarrow{g_1} & N & \xrightarrow{g_2} & S & \xrightarrow{g_3} & P & \xrightarrow{g_4} & Q \end{array}$$

um diagrama comutativo de R -módulos com linhas exatas. Então

(a) *Se φ_2 e φ_4 são epimorfismos e φ_5 é um monomorfismo então φ_3 é um epimorfismo.*

(b) *Se φ_2 e φ_4 são monomorfismos e φ_1 é um epimorfismo então φ_3 é um monomorfismo.*

(c) *Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ e φ_5 são isomorfismos, então φ_3 é um isomorfismo.*

Demonstração. Para demonstrar esta proposição é necessário realizar uma “caça” ao diagrama. Faremos apenas o item (a), os outros itens seguem de maneira análoga.

(a) Seja $y \in S$, então $g_3(y) \in P$. Como φ_4 é um epimorfismo, existe $p' \in P'$ tal que $\varphi_4(p') = g_3(y)$. Pela comutatividade do diagrama temos que

$$\begin{aligned}\varphi_5 \circ f_4(p') &= g_4 \circ \varphi_4(p') \\ &= g_4 \circ g_3(y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então $f_4(p') \in \text{Ker}(\varphi_5) = \{0\}$. Portanto $p' \in \text{Ker}(f_4) = \text{Im}(f_3)$, assim existe $x \in S'$ tal que $f_3(x) = p'$. Com isso,

$$g_3(y) = \varphi_4 \circ f_3(x) = g_3 \circ \varphi_3(x)$$

e conseqüentemente $g_3(y - \varphi_3(x)) = 0$, ou seja, $y - \varphi_3(x) \in \text{Ker}(g_3) = \text{Im}(g_2)$. Desta forma, existe $n \in N$ tal que $g_2(n) = y - \varphi_3(x)$. Como φ_2 é um epimorfismo, existe $n' \in N'$ tal que $\varphi_2(n') = n$. Portanto

$$\begin{aligned}y - \varphi_3(x) &= g_2(n) \\ &= g_2 \circ \varphi_2(n') \\ &= \varphi_3 \circ f_2(n')\end{aligned}$$

e conseqüentemente, $y = \varphi_3(f_2(n') + x)$. Logo φ_3 é um epimorfismo. □

A seguir temos uma versão curta do Lema dos cinco, em que a demonstração é similar à da proposição acima, ou seja, basta fazer uma caça ao diagrama.

Corolário 2.7. *Seja*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

um diagrama comutativo de R -módulos com linhas exatas. Então

(1) se φ_1 e φ_3 são monomorfismos então φ_2 é um monomorfismo;

(2) se φ_1 e φ_3 são epimorfismos então φ_2 é epimorfismo;

(3) se φ_1 e φ_3 são isomorfismos então φ_2 é isomorfismo.

Definição 2.8. A sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0,$$

cinde se existe um R -homomorfismo $\mu: Q \rightarrow N$ tal que $g \circ \mu = Id_Q$.

Exemplo 2.9. A sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus N \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ cinde.

Definindo $\mu: N \rightarrow M \oplus N$ por $\mu(n) = (0, n)$, temos que $\pi \circ \mu = Id_N$.

Exemplo 2.10. Considere a sequência de \mathbb{Z} -módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0,$$

em que n representa o homomorfismo que pega um elemento de \mathbb{Z} e multiplica por n . Esta sequência não cinde, pois não existe R -homomorfismo $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ que não seja o nulo.

Seja $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta que cinde. Então, pela definição acima, $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ é um somando direto de N .

De fato, existe um homomorfismo $\mu: Q \rightarrow N$ tal que $g \circ \mu = Id_Q$. Seja $n \in N$, então escreva $n = \mu \circ g(n) + (n - \mu \circ g(n))$. O elemento $n - \mu \circ g(n)$ pertence a $\text{Ker}(g)$, pois

$$\begin{aligned} g(n - \mu \circ g(n)) &= g(n) - g(\mu \circ g(n)) \\ &= g(n) - g \circ \mu(g(n)) \\ &= g(n) - g(n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, todo $n \in N$ pode ser escrito como a soma de um elemento de $\text{Im}(\mu)$ com um elemento de $\text{Ker}(g)$. Se $x \in \text{Im}(\mu) \cap \text{Ker}(g)$, temos que $g(x) = 0$ e $\mu(y) = x$ para algum $y \in Q$. Assim, $y = g \circ \mu(y) = g(x) = 0$, conseqüentemente $x = \mu(y) = 0$. Portanto $N = \text{Im}(\mu) \oplus \text{Ker}(g)$. Além disso, através do 1º Teorema do Isomorfismo segue que N também é isomorfo a $M \oplus Q$.

2.2 MÓDULOS LIVRES E PROJETIVOS

Sabemos que todo espaço vetorial possui base, porém quando estamos trabalhando com módulos isto nem sempre é verdade.

Definição 2.11. *Seja M um R -módulo e X um subconjunto de M . Dizemos que X é **gerador** de M , denotado por $M = \langle X \rangle$, se todo elemento $m \in M$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de X :*

$$m = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in R, x_i \in X.$$

*Dizemos que X é **linearmente independente** (LI) se*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$$

implica $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, para quaisquer $\alpha_i \in R$, $x_i \in X$.

*Além disso, se X é um conjunto gerador de M que também é LI dizemos então que X é uma **base** para M . Neste caso, qualquer elemento $m \in M$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear de elementos de X .*

Exemplo 2.12. Considere $M = \mathbb{Z}_n$ como um \mathbb{Z} -módulo. Observe que todo conjunto unitário de \mathbb{Z}_n é linearmente dependente, pois dado qualquer elemento $[x] \in \mathbb{Z}_n$ temos que $n \cdot [x] = [nx] = [0]$. Portanto \mathbb{Z}_n , visto como \mathbb{Z} -módulo, não possui uma base.

Como nem todo módulo possui uma base então temos a seguinte definição:

Definição 2.13. *Um R -módulo F é **livre** se possui base.*

Exemplo 2.14. Seja R um anel com unidade. O anel R , visto como módulo sobre si mesmo (à direita ou à esquerda), é um módulo livre com base $\{1\}$.

No caso em que R é um anel comutativo é possível mostrar que todas as bases de R possuem apenas um elemento. No entanto, quando R não é comutativo não podemos afirmar isto, ou seja, os módulos livres podem possuir bases com cardinalidades distintas (Veja Hungerford [9], p. 190).

Proposição 2.15 (Propriedade universal). *Seja M um R -módulo livre com base $X = \{x_i\}_{i \in I}$. Sejam N um R -módulo e $f: X \rightarrow N$ uma função. Então existe um único R -homomorfismo $\tilde{f}: M \rightarrow N$ tal que $\tilde{f}|_X = f$.*

Demonstração. Ver em [9] página 181. □

Através da proposição anterior é possível mostrar que se F é um R -módulo livre com base $\{x_i\}_{i \in I}$, então

$$\begin{aligned} \varphi: F &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} R \\ x_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

é um isomorfismo, em que $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$.

Proposição 2.16. *Para todo R -módulo M existe um epimorfismo $f: F \rightarrow M$, em que F é um R -módulo livre.*

Demonstração. Ver em [9] página 182. □

Um tipo importante de módulos são os chamados módulos projetivos, estes serão extremamente úteis para o desenvolvimento da teoria.

Definição 2.17. *Um módulo P é dito **projetivo** se dados $f: M \rightarrow N$ e $g: P \rightarrow N$ R -homomorfismos, em que f é um epimorfismo, existe (pelo menos) um R -homomorfismo $\varphi: P \rightarrow M$ tal que $g = f \circ \varphi$.*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \varphi & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Exemplo 2.18. Todo módulo livre F é projetivo.

Observação 2.19. Se $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de R -módulos e P é um R -módulo, então a sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(P, Q) \longrightarrow 0$$

é exata, em que $f_*: \text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N)$ é dado por $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$, analogamente para g_* . Neste caso, dizemos que $\text{Hom}_R(P, _)$ é **exato à direita**.

Existem definições equivalentes para os módulos projetivos que são frequentemente usadas.

Proposição 2.20. *Seja P um R -módulo. São equivalentes:*

(a) P é projetivo;

(b) Para toda seqüência exata curta $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$, temos que a seqüência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(P, Q) \longrightarrow 0$$

é exata;

(c) Toda seqüência exata curta $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ cinde;

(d) P é somando direto de um módulo livre.

Demonstração. Ver em [2] página 27. □

2.3 SEQUÊNCIA EXATA LONGA

Definição 2.21. *Um **complexo de cadeias** é um par (C, d) , em que $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma família de R -módulos e $d = \{d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}\}$ são R -homomorfismos tais que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Escreve-se*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Os homomorfismos d_n são chamados de *diferenciais*.

O kernel de d_n é o módulo de **n -ciclos** de C , denotado por $Z_n(C) = Z_n$. A imagem de $d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$ é o módulo **n -bordos** de C , denotado por $B_n(C) = B_n$. Com isso definimos o n -ésimo grupo de homologia de C como sendo o quociente

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}.$$

Sejam $(C, d), (C', d')$ dois complexos de cadeia. Um **homomorfismo de complexos de cadeia** $f: C \rightarrow C'$ é uma família de homo-

morfismos $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{d'_{n+2}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & \cdots \end{array},$$

isto é, $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$.

Definição 2.22. Um homomorfismo $f: C \rightarrow D$ de complexos de cadeia é chamado de **equivalência fraca** se para cada n o homomorfismo induzido $f_*: H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ é um isomorfismo.

Definição 2.23. Um complexo de cadeia (C, d) é dito **acíclico** quando $H_n(C) = 0$ para todo n .

Proposição 2.24. Seja (C, d) um complexo de R -módulos. São equivalentes:

- (i) C é exato, isto é, exato em todo C_n .
- (ii) C é acíclico.
- (iii) O homomorfismo $\mathbf{0} \rightarrow C$ é um equivalência fraca, em que $\mathbf{0}$ é considerado como um complexo de módulos nulos.

Demonstração. Ver em [14] página 3. □

Definição 2.25. Um **complexo de cocadeias** é um par (C, d) em que $C = \{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma família de R -módulos e $d = \{d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}\}$ uma família de R -homomorfismos, tais que $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Escreve-se

$$\cdots \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

Denotaremos o kernel de d^n como sendo $Z^n(C) = Z^n$ que é o módulo de **n -cociclos** de C e a imagem de d^{n-1} como sendo $B^n(C) = B^n$ que é o módulo de **n -cobordos** de C . Desta forma definimos o n -ésimo grupo de cohomologia de C como sendo o quociente

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)}.$$

Teorema 2.26 (Sequência exata longa de homologia/cohomologia).

Seja $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeia. Então existem homomorfismos $\partial: H_n(Q) \rightarrow H_{n-1}(M)$ chamados de **homomorfismo de conexão** tais que

$$\cdots \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(Q) \xrightarrow{\partial} H_n(M) \xrightarrow{f_*} H_n(N) \xrightarrow{g_*} H_n(Q) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é uma sequência exata longa de homologia.

Similarmente, se $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos de cocadeia, existem homomorfismos $\partial: H^n(Q) \rightarrow H^{n+1}(M)$ tais que

$$\cdots \xrightarrow{g^*} H^{n-1}(Q) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(M) \xrightarrow{f^*} H^n(N) \xrightarrow{g^*} H^n(Q) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é uma sequência exata longa de cohomologia.

Para demonstrarmos o Teorema 2.26 usaremos os seguintes lemas:

Lema 2.27 (Lema da Serpente). Considere o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\mu} & N & \xrightarrow{\epsilon} & Q & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\mu'} & N' & \xrightarrow{\epsilon'} & Q' \end{array}$$

Então existe um homomorfismo de conexão $\omega: \text{Ker}(\gamma) \rightarrow \text{Coker}(\alpha)$ tal que a seguinte sequência

$$\text{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\mu_*} \text{Ker}(\beta) \xrightarrow{\epsilon_*} \text{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\omega} \text{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\mu'_*} \text{Coker}(\beta) \xrightarrow{\epsilon'_*} \text{Coker}(\gamma)$$

é exata, em que $\omega(q) = [\mu'^{-1}\beta(\epsilon^{-1}(q))]$, $q \in \text{Ker}(\gamma)$.

Demonstração. Ver em [13] página 335. □

Lema 2.28. O homomorfismo $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ induz

$$\varphi_n: \text{Coker}(d_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}),$$

com $\text{Ker}(\varphi_n) = H_n(C)$ e $\text{Coker}(\varphi_n) = H_{n-1}(C)$.

Demonstração. Ver em [8] página 121. □

Agora temos condições para demonstrar o Teorema 2.26.

Demonstração do Teorema 2.26. Faremos apenas a prova para a versão homológica. A demonstração para a versão cohomológica segue de modo análogo. Observe o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Ker}(d_n) & \longrightarrow & \text{Ker}(d'_n) & \longrightarrow & \text{Ker}(d''_n) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{f_n} & N_n & \xrightarrow{g_n} & Q_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_n & & \downarrow d'_n & & \downarrow d''_n \\
 0 & \longrightarrow & M_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & N_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & Q_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \text{Coker}(d_n) & \longrightarrow & \text{Coker}(d'_n) & \longrightarrow & \text{Coker}(d''_n) & .
 \end{array}$$

Através do Lema da Serpente temos que a primeira e a última linha são exatas.

Aplicando Lema 2.28 obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(M) & \longrightarrow & H_n(N) & \longrightarrow & H_n(Q) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \text{Coker}(d_{n+1}) & \longrightarrow & \text{Coker}(d'_{n+1}) & \longrightarrow & \text{Coker}(d''_{n+1}) \\
 \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi'_n & & \downarrow \varphi''_n \\
 \text{Ker}(d_{n-1}) & \longrightarrow & \text{Ker}(d'_{n-1}) & \longrightarrow & \text{Ker}(d''_{n-1}) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 H_{n-1}(M) & \longrightarrow & H_{n-1}(N) & \longrightarrow & H_{n-1}(Q).
 \end{array}$$

∂

Novamente pelo Lema da Serpente, temos que existe um homomorfismo $\partial: H_n(Q) \rightarrow H_{n-1}(M)$ e a seqüência

$$\dots \xrightarrow{g} H_{n+1}(Q) \xrightarrow{\partial} H_n(M) \xrightarrow{f} H_n(N) \xrightarrow{g} H_n(Q) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(M) \rightarrow \dots$$

é exata. □

Definição 2.29. *Sejam (C, d) e (C', d') complexos de cadeias. Uma **homotopia** entre dois homomorfismos de cadeia $f, g: C \rightarrow C'$ é uma família de homomorfismos $h = \{h_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}\}$ tais que*

$$h_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ h_n = f_n - g_n, \forall n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \searrow^{h_n} & \Downarrow^{f_n} & \swarrow_{g_n} & & \\ & & & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \swarrow_{d'_{n+1}} & \Downarrow^{f_n} & \searrow^{d'_n} & & \\ & & & & & & & & \end{array}$$

Dizemos que f é **homotópico** a g se existe uma homotopia h entre eles e denotamos por $f \simeq g$.

Observação 2.30. A relação \simeq é uma relação de equivalência.

Proposição 2.31. *Um homomorfismo de complexos de cadeia $f: C \rightarrow C'$ induz um homomorfismo $H(f): H(C) \rightarrow H(C')$. E, se $f \simeq g$, então $H(f) = H(g)$.*

Demonstração. Ver em [8] página 124. □

Definição 2.32. *Um homomorfismo de complexos de cadeia $f: C \rightarrow C'$ é uma **equivalência homotópica** se existe um homomorfismo $f': C' \rightarrow C$ tal que $f' \circ f \simeq Id_C$ e $f \circ f' \simeq Id_{C'}$.*

Proposição 2.33. *Qualquer equivalência homotópica é uma equivalência fraca.*

Definição 2.34. *Um complexo de cadeia C é chamado **contrátil** se é homotopicamente equivalente ao complexo zero, ou seja, se $Id_C \simeq \mathbf{0}$.*

Quando o complexo C é contrátil a homotopia entre os homomorfismos Id_C e $\mathbf{0}$ é dita uma **homotopia de contração**. Dado um complexo acíclico nem sempre podemos afirmar que existe uma homotopia de contração, por isso temos seguinte a proposição:

Proposição 2.35. *Um complexo de cadeia (C, d) é contrátil se, e somente se é acíclico e cada sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow Z_{n+1} \xrightarrow{i} C_{n+1} \xrightarrow{\bar{d}} Z_n \longrightarrow 0$$

cinde, em que \bar{d} é induzida por d e i é a inclusão canônica, para todo n .

Demonstração. Ver em [2] página 5. □

2.4 RESOLUÇÕES LIVRES E PROJETIVAS

Neste momento abordaremos as resoluções projetivas, as quais serão úteis no Capítulo 4, pois usaremos para definir a (co)homologia de grupo.

Definição 2.36. *Seja M um R -módulo. Uma **resolução** de M é um complexo (P, d) com $P_i = 0$ para $i < 0$, munido de um R -homomorfismo $\varepsilon: P_0 \rightarrow M$ de modo que o complexo*

$$\dots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

é exato.

Se cada P_i da definição acima for projetivo (resp. livre) então a resolução é dita projetiva (resp. livre). Denotaremos tal resolução apenas por $\varepsilon: P \rightarrow M$ ou simplesmente por P .

Exemplo 2.37. Se M é um R -módulo projetivo, então M admite a seguinte resolução projetiva:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{Id_M} M \longrightarrow 0 .$$

Exemplo 2.38. Seja R um domínio de ideais principais. Então todo submódulo de um módulo projetivo é projetivo (Veja Hilton [8] página 27). Desta forma, qualquer R -módulo M admite uma resolução projetiva

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Neste momento, podemos nos perguntar se dado um R -módulo é possível encontrar uma resolução projetiva. Felizmente, isto sempre é possível.

Lema 2.39. *Todo R -módulo M possui uma resolução livre e consequentemente projetiva.*

Demonstração. A Proposição 2.16 nos diz que existe um epimorfismo $\varepsilon_0: F_0 \rightarrow M$, sendo F_0 um módulo livre. Aplicando a mesma proposição em $\text{Ker}(\varepsilon_0)$ temos que existe um epimorfismo $F_1 \rightarrow \text{Ker}(\varepsilon_0)$ tal que F_1 é livre. Defina d_1 como sendo a composição $F_1 \rightarrow \text{Ker}(\varepsilon_0) \hookrightarrow P_0$.

Repetindo este processo obtemos a seguinte sequência exata

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} M \longrightarrow 0 \\ & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ & & & & \text{Ker}(d_1) & & \text{Ker}(\varepsilon_0) \end{array}$$

□

Já sabemos então que todo módulo possui uma resolução projetiva, mas podemos encontrar várias resoluções para um mesmo módulo. O resultado seguinte nos ajuda a perceber que as resoluções de um módulo são relacionadas através de uma equivalência homotópica.

Teorema 2.40. *Sejam $\varepsilon: P \rightarrow M$ uma resolução projetiva de M e $f': M \rightarrow N$ um R -homomorfismo. Então para toda resolução $\mu: Q \rightarrow N$ de N existe um homomorfismo de cadeia $f: P \rightarrow Q$ que levanta f' no sentido de que $\mu \circ f_0 = f' \circ \varepsilon$. O homomorfismo de cadeia f é único a menos de homotopia.*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ \cdots & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{d'_2} & Q_1 & \xrightarrow{d'_1} & Q_0 \xrightarrow{\mu} N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demonstração. Suponha por indução que f_i existe para $i \leq n$ tal que $d'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i$. Defina $f_{-1} = f'$.

Note que para $n = -1$ temos

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varepsilon) &= \text{Ker}(0) = M = Z_{-1}(P) \quad \text{e} \\ \text{Im}(\mu) &= \text{Ker}(0) = N = Z_{-1}(N). \end{aligned}$$

Para $n \geq 0$ temos que f_n induz um homomorfismo $f'_n: Z_n(P) \rightarrow Z_n(Q)$.

Observe que os diagramas

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{n+2}} & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & Z_n(P) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f'_n \circ d_{n+1} & \searrow & \downarrow f'_n & & \\ \cdots & \xrightarrow{d'_{n+2}} & Q_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & Z_n(Q) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Z_n(P) & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\
& & \downarrow f'_n & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
0 & \longrightarrow & Z_n(Q) & \longrightarrow & Q_n & \longrightarrow & Q_{n-1}
\end{array}$$

possuem linhas exatas. A existência do homomorfismo representado pela flecha tracejada é garantida pela definição do módulo projetivo, e conseqüentemente temos que o quadrado comuta. Indutivamente estendemos o resultado para os outros quadrados.

Para mostrar a unicidade suponha que exista $g: P \rightarrow Q$ tal que $\mu \circ g_0 = f' \circ \varepsilon$ e seja $s = f - g$. Vamos construir uma homotopia de contração $(h_n: P_n \rightarrow Q_{n+1})$ por indução em n .

Se $n < 0$ temos que $P_0 = 0$ e assim $h_n = 0$. Se $n = 0$ temos que $f' \circ \varepsilon = \mu \circ f_0$ e $f' \circ \varepsilon = \mu \circ g_0$, conseqüentemente obtemos $\mu(f_0 - g_0) = 0$ donde $\mu \circ s_0 = 0$. Da última igualdade vemos que s_0 leva P_0 em $Z_0(Q) = \text{Im}(d'_1)$. Assim $s_0 = d'_1 \circ h_0 + h_{-1} \circ d_0$. Indutivamente, suponha que existe homomorfismos h_i ($i < n$) tais que $d' \circ h_{n-1} = s_{n-1} - h_{n-2} \circ d$. Considere o homomorfismo $s_{n-1} - h_{n-2} \circ d$ de P_n para Q_n . Note que

$$\begin{aligned}
d'_n(s_n - h_{n-1} \circ d_n) &= d'_n \circ s_n - d'_n(h_{n-1} \circ d_n) \\
&= d'_n \circ s_n - d'_n(d'_{n+1} \circ h_n - s_n) \\
&= d'_n \circ s_n - d'_n d'_{n+1} \circ h_n - d'_n \circ s_n = 0.
\end{aligned}$$

Desta forma temos que $s_n - h_{n-1} \circ d_n$ é um homomorfismo de P_n para $Z_n(Q)$. Como P_n é projetivo existe um homomorfismo $h_n: P_n \rightarrow Q_{n+1}$ tal que $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = s_n$.

$$\begin{array}{ccc}
& & P_n \\
& \swarrow h_n & \downarrow s_n - h_{n-1} \circ d_n \\
Q_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & Z_n(Q) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

□

Teorema 2.41. *Dadas duas resoluções P e P' de um módulo M , existe um homomorfismo de cadeias $f: P \rightarrow P'$, único a menos de homotopia, e f é uma equivalência homotópica.*

Demonstração. Considere as seguintes resoluções projetivas $\varepsilon: P \rightarrow M$ e $\mu: P' \rightarrow M$. Pelo teorema anterior existe um homomorfismo de cadeia $f: P \rightarrow P'$ que satisfaz $\mu \circ f_0 = \varepsilon$ e tal homomorfismo é único a menos

de homotopia.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow Id_M \\ \cdots & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{\mu} & M \longrightarrow 0. \end{array}$$

Similarmente, existe um homomorfismo de cadeia $f' : P' \rightarrow P$ tal que $\epsilon \circ f'_0 = \mu$. Através da Proposição 2.40 temos que $f \circ f' \simeq Id_{P'}$ e $f' \circ f \simeq Id_P$. Portanto, dadas duas resoluções projetivas de um módulo M obtemos um homomorfismo único a menos de homotopia e que além disso é uma equivalência homotópica. \square

2.5 TOR E EXT

Sejam M um R -módulo à direita e N um R -módulo à esquerda. Considere a seguinte resolução projetiva de M :

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0. \quad (2.1)$$

Aplicando $- \otimes_R N$ no complexo acima, obtemos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{\partial_1} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\epsilon_*} M \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

Definição 2.42. *O grupo abeliano $Tor_n^R(M, N)$ é definido como sendo*

$$Tor_n^R(M, N) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

Considere agora M como sendo um R -módulo à esquerda. Aplicando $\text{Hom}_R(-, N)$ em (2.1), obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\epsilon^*} \text{Hom}_R(P_0, N) \xrightarrow{\partial^0} \text{Hom}_R(P_1, N) \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

Definição 2.43. *O grupo abeliano $Ext_R^n(M, N)$ é definido por*

$$Ext_R^n(M, N) = \frac{\text{Ker}(\partial^n)}{\text{Im}(\partial^{n-1})}.$$

O Teorema 2.41 implica que os grupos Tor e Ext independem da escolha da resolução projetiva.

Observação 2.44. Se $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata de R -módulos à direita e Q é um R -módulo à esquerda, então a seqüência de grupos abelianos

$$M \otimes_R Q \xrightarrow{f \otimes Id_Q} N \otimes_R Q \xrightarrow{g \otimes Id_Q} P \otimes_R Q \longrightarrow 0$$

é exata. Neste caso, dizemos que $-\otimes_R Q$ é **exato à direita**.

Proposição 2.45. *Seja M um R -módulo à direita e sejam N e Q R -módulos à esquerda. Então*

- (i) $Tor_0^R(M, N) \approx M \otimes_R N$;
- (ii) $Ext_R^0(N, Q) \approx \text{Hom}_R(N, Q)$;
- (iii) $Tor_n^R(M, N) = 0$ se M é projetivo, para $n \geq 1$;
- (iv) $Ext_R^n(N, Q) = 0$ se N é projetivo, para $n \geq 1$.

Demonstração. Veja em [12] página 46. □

Como era de se esperar, os grupos Tor e Ext satisfazem a seguinte propriedade: dada uma seqüência exata curta de R -módulos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Ext_R^0(P, Q) \rightarrow Ext_R^0(N, Q) \rightarrow Ext_R^0(M, Q) \rightarrow Ext_R^1(P, Q)$$

$$\longrightarrow Ext_R^1(N, Q) \rightarrow Ext_R^1(M, Q) \rightarrow Ext_R^2(P, Q) \rightarrow \dots$$

é uma seqüência exata longa.

Semelhantemente, se $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata de R -módulos à direita e Q é um R -módulo à esquerda, temos que

$$\dots \rightarrow Tor_2^R(P, Q) \rightarrow Tor_1^R(M, Q) \rightarrow Tor_1^R(N, Q) \rightarrow Tor_1^R(P, Q)$$

$$\longrightarrow Tor_0^R(M, Q) \rightarrow Tor_0^R(N, Q) \rightarrow Tor_0^R(P, Q) \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata longa. Estas seqüências são exatamente as seqüências de homologia e cohomologia.

2.6 SEQUÊNCIA ESPECTRAL

Veremos nesta seção uma síntese a respeito das sequências espectrais. Focaremos apenas nas sequências do tipo homológica, entretanto é possível definir também para o tipo cohomológica. (Veja [11] e [14]).

Um **complexo duplo** é um complexo de cadeia $C = (C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$ com um diferencial d' horizontal e um vertical d'' tais que $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, conforme o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_{p-1,q} & \xleftarrow{d'} & C_{p,q} \\ \downarrow d'' & & \downarrow d'' \\ C_{p-1,q-1} & \xleftarrow{d'} & C_{p,q-1}, \end{array}$$

em que d' diminui um grau na primeira coordenada e d'' na segunda coordenada.

O complexo duplo C dá origem a um complexo de cadeia chamado **complexo total**, denotado por $Tot(C)$, que é definido como sendo

$$(Tot(C))_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q},$$

em que o diferencial d é dado por $d = d' + d''$. As relações vindas de d' e d'' mostram que $d \circ d = 0$.

Exemplo 2.46. Considere (M, d_M) e (N, d_N) dois complexos de cadeia de R -módulos à direita e à esquerda, respectivamente. O complexo duplo $C_{p,q} = M_p \otimes_R N_q$, em que os diferenciais são dados por $d' = d_M \otimes 1$ e $d'' = (-1)^p 1 \otimes d_N$, dá origem ao complexo total $(Tot(C), d) = (M \otimes_R N, d_\otimes)$.

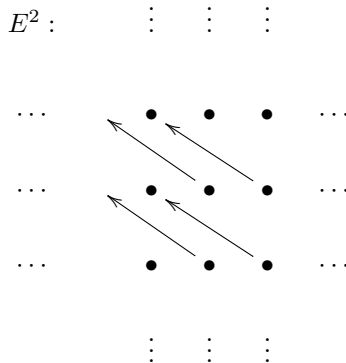
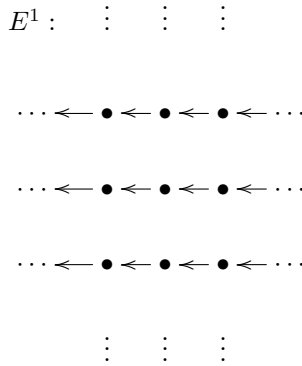
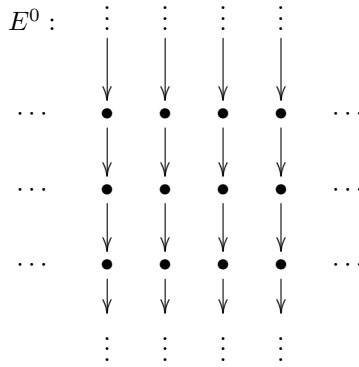
Estamos interessados em calcular a homologia de $Tot(C)$. Para isso usaremos duas sequências espectrais que calculam a homologia de C em duas direções.

Definição 2.47. Uma **sequência espectral** (homológica) consiste em uma família de R -módulos bigraduados $\{E_{p,q}^r\}$ e homomorfismos $\{d_{p,q}^r\}$, em que $r, p, q \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$. Os homomorfismos $d_{p,q}^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ satisfazem $d_{p-r,q}^r \circ d_{p,q}^r = 0$ e, para todo p, q, r , temos que

$$E_{p,q}^{r+1} \approx \frac{\text{Ker}(d_{p,q}^r)}{\text{Im}(d_{p+r,q-r+1}^r)}.$$

Nestas condições, dizemos que para um r fixo, E^r é a página

da sequência espectral. A seguir, temos o diagrama que representa as páginas $r = 0, 1, 2$:



O teorema padrão das seqüências espectrais é dado da seguinte maneira:

Teorema 2.48. *Existe um seqüência espectral tal que*

$$E_{*,*}^2 \approx \text{“alguma coisa computável”}$$

e converge para H_* , alguma coisa desejável.

No nosso caso, encontraremos seqüências espectrais que são calculadas a partir da homologia em duas direções, as quais convergirão para a homologia de $Tot(C)$ por meio de aproximações dadas pelas filtrações de $Tot(C)$.

Definição 2.49. *Uma filtração F_* em um R -módulo A é um família de submódulos $\{F_p A\}_{p \in \mathbb{Z}}$ tal que*

$$\cdots \subset F_{p-1}A \subset F_p A \subset F_{p+1}A \subset \cdots \subset A$$

Dada uma seqüência espectral homológica, temos que $E_{p,q}^{r+1}$ é um quociente de um submódulo de $E_{p,q}^r$. Por indução em r , temos que existe uma família de submódulos de $E_{p,q}^2$:

$$B_{p,q}^2 \subseteq B_{p,q}^3 \subseteq \cdots \subseteq B_{p,q}^r \subseteq \cdots \subseteq Z_{p,q}^r \subseteq \cdots \subseteq Z_{p,q}^2 \subseteq E_{p,q}^2$$

tal que $E_{p,q}^r \approx Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r$, em que $B_{p,q}^r = \text{Ker}(d_{p,q}^r)$ e $Z_{p,q}^r = \text{Im}(d_{p,q}^r)$. Defina

$$B_{p,q}^\infty = \bigcup_{r=2}^{\infty} B_{p,q}^r \quad \text{e} \quad Z_{p,q}^\infty = \bigcap_{r=2}^{\infty} Z_{p,q}^r$$

e $E_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty$. Em uma seqüência espectral limitada (isto é, que possui apenas uma quantidade finita de termos não-nulos em $E_{*,*}^r$) a união e a interseção são finitas, então $B_{p,q}^\infty = B_{p,q}^r$ e $Z_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^r$ para um r grande. Então, neste caso, temos que $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^r$ para um r grande.

Definição 2.50. *Dizemos que uma seqüência espectral converge para um R -módulo graduado H_* , denotado por $E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}$, se existe uma filtração F_* em H_* tal que*

$$E_{p,q}^\infty \approx F_p H_{p+q} / F_{p-1} H_{p+q},$$

em que $E_{p,q}^\infty$ é o termo limite de uma seqüência espectral.

Definição 2.51. *Um R -módulo A é um módulo diferencial filtrado se*

(i) A é a soma direta dos seus submódulos, $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$.

(ii) Existem homomorfismos $d : A_n \rightarrow A_{n-1}$ tais que $d_{n-1} \circ d_n = 0$.

(iii) A possui uma filtração F e o diferencial d respeita a filtração, isto é, $d_n : (F_p A)_n \rightarrow (F_p A)_{n-1}$.

Visto que o diferencial respeita a filtração, temos que $H(A, d) = \text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$ herda uma filtração

$$F_p H(A, d) = \text{Im}(H(F_p A, d) \xrightarrow{H(\text{inclusão})} H(A, d)).$$

Teorema 2.52. *Suponha que A é um módulo diferencial filtrado. Então cada filtração F de A dá origem a uma sequência espectral $\{E_{p,q}^r, d^r\}$, em que $r, p, q \in \mathbb{Z}$, $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$ e*

$$E_{p,q}^1 \approx H_{p+q}(F_p A / F_{p-1} A).$$

*Suponha ainda que a filtração é **limitada**, isto é, para cada dimensão n , existem valores $s = s(n)$ e $t = t(n)$ de modo que*

$$\{0\} \subset F_s A_n \subset F_{s+1} A_n \subset \cdots \subset F_{t-1} A_n \subset F_t A_n = A_n,$$

então a sequência espectral converge para $H(A, d)$, ou seja,

$$E_{p,q}^{\infty} \approx F_p H_{p+q}(A, d) / F_{p-1} H_{p+q}(A, d).$$

Demonstração. Ver em [11] página 34. □

Introduziremos agora algumas notações. Considere o complexo duplo (C, d', d'') definido anteriormente. Defina

$$H_{p,q}^I(C) := \frac{\text{Ker}(d'_{p,q})}{\text{Im}(d'_{p+1,q})} \quad H_{p,q}^{II}(C) := \frac{\text{Ker}(d''_{p,q})}{\text{Im}(d''_{p+1,q})}.$$

A condição $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$ implica que $(H_{p,q}^I, \bar{d}') e (H_{p,q}^{II}, \bar{d}'')$ são módulos bigraduados diferenciais, em que os diferenciais \bar{d}' e \bar{d}'' são induzidos por d' e d'' , respectivamente. Sejam

$$H_{*,*}^I H^{II}(C) = H(H_{*,*}^{II}(C), \bar{d}'') \quad e \quad H_{*,*}^{II} H^I(C) = H(H_{*,*}^I(C), \bar{d}').$$

Existem duas filtrações de $\text{Tot}(C)$, dadas por

$$F_p^I(\text{Tot}(C))_n = \bigoplus_{i \leq p} C_{i, n-i} \quad e \quad F_p^{II}(\text{Tot}(C))_n = \bigoplus_{j \leq p} C_{n-j, j}$$

que o tornam um módulo diferencial filtrado. Através destas filtrações é possível mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2.53. *Dado um complexo duplo $\{C_{p,q}, d', d''\}$ existem duas seqüências espectrais tais que*

$$E_{p,q}^2 \approx H_{*,*}^I H^{II}(C)$$

e

$$E_{p,q}^2 \approx H_{*,*}^{II} H^I(C)$$

Se $C_{p,q} = \{0\}$ quando $p < 0$ ou $q < 0$, então ambas as seqüências espectrais convergem para $H_(Tot(C))$.*

Demonstração. Ver em [11] página 48. □

3 TOPOLOGIA

Este capítulo tem como objetivo apresentar definições e resultados necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos. As demonstrações serão omitidas, mas poderão ser encontradas em Geoghegan [5], Hatcher [6] e Lima [10].

3.1 HOMOTOPIA

Uma **homotopia** H entre funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ é uma função contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x), \forall x \in X \quad \text{e} \\ H(x, 1) &= g(x), \forall x \in X. \end{aligned}$$

Em outras palavras, em um segundo H deforma f em g de modo contínuo. Dizemos que f e g são **homotópicas**, denotado por $f \simeq g$ ou $H : f \simeq g$, se existe uma homotopia entre elas.

Ao longo do texto, escreveremos $I = [0, 1]$ para facilitar a escrita.

Observação 3.1. A homotopia é uma relação de equivalência.

Homotopias são muito bem comportadas em relação a composições:

Lema 3.2. *Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ e $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ tais que $f_1 \simeq f_2$ e $g_1 \simeq g_2$. Então $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.*

Um **caminho** em um espaço topológico X é uma função contínua $\gamma : I \rightarrow X$, em que $\gamma(0)$ é o ponto inicial e $\gamma(1)$ é o ponto final do caminho γ .

Dois caminhos $\gamma, \mu : I \rightarrow X$ que satisfazem $\gamma(0) = \mu(0) = x$ e $\gamma(1) = \mu(1) = y$ são ditos **homotópicos** se existe $h : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$h(s, t) = \begin{cases} h(s, 0) = \gamma(s), \quad \forall s \in I \\ h(s, 1) = \mu(s), \quad \forall s \in I \\ h(0, t) = x, \quad \forall t \in I \\ h(1, t) = y, \quad \forall t \in I \end{cases}$$

As últimas igualdades acima nos dizem que durante toda a homotopia os pontos inicial e final permanecem fixos.

A notação para homotopia de caminhos é a mesma que a de homotopia de funções. E da mesma forma, temos que a homotopia de caminhos é uma equivalência homotópica.

Definição 3.3. *Seja A um subespaço de um espaço topológico X . Dizemos que uma função contínua $r: X \rightarrow A$ é uma **retração de X sobre A** se a restrição $r|_A: A \rightarrow A$ é a identidade em A . Se existir tal r , dizemos que **A é um retrato de X** . O subespaço A é chamado de **retrato por deformação de X** se A é retrato de X e $i \circ r \simeq Id_X$, em que $r: X \rightarrow A$ é uma retração e $i: A \rightarrow X$ é a inclusão.*

A definição acima nos diz que X é deformado para dentro de A por meio de uma homotopia que deixam os pontos de A sempre dentro de A . Entretanto, podemos ter também uma homotopia que deixa os pontos de A sempre fixos. A esta deformação chamamos de retrato forte por deformação.

Definição 3.4. *Sejam A um subespaço de um espaço topológico X e $i: A \rightarrow X$ a inclusão. Dizemos que A é um **retrato forte por deformação** de X se existe uma função contínua $r: X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = Id_A$ e existe uma função contínua $F: X \times I \rightarrow X$ satisfazendo*

$$(i) \quad F(x, 0) = x, \forall x \in X.$$

$$(ii) \quad F(x, 1) \in A, \forall x \in X.$$

$$(iii) \quad F(a, t) = a, \forall a \in A \text{ e } t \in I.$$

Definição 3.5. *Uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ é uma **equivalência homotópica** se existe uma função contínua $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq Id_X$ e $f \circ g \simeq Id_Y$. Dizemos que os espaços X e Y possuem o mesmo **tipo de homotopia** quando existe uma equivalência homotópica de X para Y .*

Todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica. Em particular, a função Id_X é uma equivalência homotópica.

Definição 3.6. *Um espaço X é **contrátil** se possui o mesmo tipo de homotopia de um ponto, isto é, um espaço com um único elemento.*

3.2 CW-COMPLEXO

Iniciaremos esta seção construindo um espaço topológico X que é chamado de CW -complexo.

Para construir um CW -complexo, iniciamos com um conjunto discreto X^0 , cujos pontos são considerados 0-células. Indutivamente, formamos o **n -esqueleto** X^n a partir de X^{n-1} , anexando n -células e_α^n por meio de aplicações $\varphi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Isto significa que $X^n = \frac{X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n}{\sim}$, em que $x \sim \varphi_\alpha(x)$ quando $x \in \partial D_\alpha^n = S^{n-1}$. Como um conjunto, $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e_\alpha^n$ em que cada e_α^n é um disco.

Podemos parar este processo indutivo em um estágio finito, definindo $X = X^n$ para alguns $n < \infty$, ou podemos continuar indefinidamente, definindo $X = \bigcup_n X^n$. No último caso, X possui a topologia fraca relativa aos n -esqueletos: Um conjunto $A \subset X$ é aberto (ou fechado) se, e somente se, $A \cap X^n$ é aberto (ou fechado) em X^n para cada n .

A este espaço topológico X chamamos de **complexo celular** ou **CW-complexo**.

Cada célula e_α^n de um CW -complexo X possui uma **função característica** $\phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X$ que estende φ_α e é um homeomorfismo do interior de D_α^n dentro de e_α^n . Então, a função ϕ_α pode ser vista como a composição $D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$, em que $X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n$ é a função quociente que define X^n .

Exemplo 3.7. A esfera S^n possui a estrutura de um complexo celular com apenas duas células, e^0 e e^n .

Um **subcomplexo** de um complexo celular X é um subespaço fechado $A \subset X$ que é a união de células de X . A condição de A ser fechado o torna um CW -complexo.

Definição 3.8. Um par (X, A) é um **par CW** se X é um complexo celular e A é um subcomplexo.

Uma **função de pares** $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$. De modo semelhante, definimos uma **função de triplas** $f: (X, A, B) \rightarrow (Y, C, D)$.

Definição 3.9. Sejam (X, A) e (Y, B) pares de CW e $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ funções contínuas. Suponha que $X' \subset X$. Dizemos que f_0 é **homotópico a f_1 relativo a X'** , denotado por $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } X'$, se existe uma função $H: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ tal que

$$H(x, t) = \begin{cases} H(x, 0) = f_0(x), \quad \forall x \in X \\ H(x, 1) = f_1(x), \quad \forall x \in X \\ H(x', t) = f_0(x'), \quad \forall x' \in X' \text{ e } \forall t \in I \end{cases}$$

Os CW -complexos possuem algumas propriedades úteis, como por exemplo, todo CW -complexo é Hausdorff e normal. E o complexo celular é compacto se, e somente se, este possui uma quantidade finita de células.

Se X e Y são complexos celulares, então $X \times Y$ tem a estrutura de um complexo celular com as células produtos $e_\alpha^m \times e_\beta^n$, em que e_α^m varia ao longo das células de X e e_β^n varia ao longo das células de Y . A topologia produto e a topologia fraca em $X \times Y$, em geral, não coincidem, exceto quando X ou Y tem uma quantidade finita de células, ou se X e Y tem uma quantidade enumerável de células (Ver Hatcher [6]).

Exemplo 3.10. Seja $X = S^1 \times S^1$. Então o toro pode ser descrito através da estrutura celular de S^1 .

Definição 3.11. *Seja X um espaço topológico. O cone sobre X é o quociente $(X \times I)/(X \times \{0\})$.*

Definição 3.12. *Sejam X e Y espaços topológicos e $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. A soma wedge $X \vee Y$ é o quociente da união disjunta $X \amalg Y$ obtida através da identificação de x_0 e y_0 em um único ponto.*

3.3 EXTENSÃO HOMOTÓPICA

Dizemos que um par CW (X, A) possui a **propriedade de extensão homotópica** se toda função $X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$ pode ser estendida para uma função $X \times I \rightarrow Y$.

Proposição 3.13. *Se (X, A) é um par de CW , então $X \times \{0\} \cup A \times I$ é um retrato forte por deformação de $X \times I$ e (X, A) possui a propriedade de extensão homotópica.*

Demonstração. Ver em [6] página 15. □

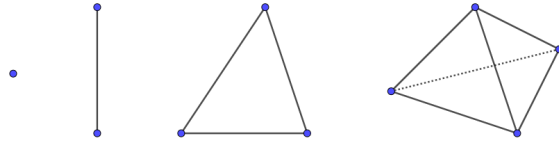
3.4 HOMOLOGIA SINGULAR

Seja R um anel comutativo com unidade.

O **n -simplexo padrão** Δ^n é o fecho convexo de $n + 1$ pontos $\{p_0, \dots, p_n\}$, $p_j \in \mathbb{R}^{n+1}$, em que as coordenadas de p_j são todas iguais a zero, exceto na $(j + 1)$ -ésima coordenada que é igual a 1, isto é,

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Figura 1 – Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.



Fonte: Produção do próprio autor.

Um **n -simplexo singular** no espaço topológico X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Denotaremos por $S(X; R)$ o R -módulo livre gerado pelo conjunto de todos n -simplexos singulares e chamaremos os seus elementos de **n -cadeias singulares** de X com coeficientes em R .

Definimos uma **i -ésima face** do n -simplexo $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ como sendo o $(n-1)$ -simplexo $\partial_i \sigma : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ dado por

$$\partial_i \sigma(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sigma(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

para $i = \{0, 1, \dots, n\}$. Um 0-simplexo não possui faces. Por definição temos que $S_n(X; R) = 0$ quando $n < 0$.

O **operador bordo** $\partial : S_n(X; R) \rightarrow S_{n-1}(X; R)$ é o homomorfismo dado por $\partial \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \sigma$ para todo n -simplexo $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

É possível mostrar que $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$. Desta forma, a sequência

$$\dots \longrightarrow S_n(X; R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \longrightarrow S_1(X; R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X; R)$$

é um complexo de cadeias, chamado de **complexo de cadeia singular** de X .

A **homologia singular**, denotada por $H_*^\Delta(X; R)$, é dada por

$$H_n^\Delta(X; R) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n-1})} = H_n(S(X; R)).$$

Uma função $f : X \rightarrow Y$ induz um homomorfismo de cadeia $f_\Delta : S(X; R) \rightarrow S(Y; R)$ definido por $f_\Delta(\sigma) = f \circ \sigma$. Com isso, temos que f_Δ produz um homomorfismo $f_* : H_n^\Delta(X; R) \rightarrow H_n^\Delta(Y; R)$, chamado de **homomorfismo induzido** por f_Δ (ou induzido por f).

Seja $g : Y \rightarrow Z$ uma função contínua. É possível mostrar que

$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X; R) \rightarrow H_n(Z; R)$, e a função identidade $Id_X : X \rightarrow X$ induz o homomorfismo identidade $Id_{H(X;R)} : H_n^\Delta(X; R) \rightarrow H_n^\Delta(X; R)$. Consequentemente, se $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo então $f_* : H_n^\Delta(X; R) \rightarrow H_n^\Delta(Y; R)$ é um isomorfismo.

Para $A \subset X$, a homologia do complexo de cadeia quociente $S_*(X; R)/S_*(A; R)$ é denotado por $H_*^\Delta(X, A; R)$. Quando $A \subset B \subset X$, existe um sequência exata curta de complexos de cadeia

$$0 \longrightarrow \frac{S_*(B; R)}{S_*(A; R)} \longrightarrow \frac{S_*(X; R)}{S_*(A; R)} \longrightarrow \frac{S_*(X; R)}{S_*(B; R)} \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

em que os homomorfismos são induzidos pelas inclusões.

Seja $f: (X, B, A) \rightarrow (Y, D, C)$ uma função de triplas, assim f induz um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{S_*(B; R)}{S_*(A; R)} & \longrightarrow & \frac{S_*(X; R)}{S_*(A; R)} & \longrightarrow & \frac{S_*(X; R)}{S_*(B; R)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \longrightarrow & \frac{S_*(D; R)}{S_*(C; R)} & \longrightarrow & \frac{S_*(Y; R)}{S_*(C; R)} & \longrightarrow & \frac{S_*(Y; R)}{S_*(D; R)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

em que f_* é um homomorfismo de cadeias. De (3.1), obtemos a seguinte sequência exata longa:

$$\rightarrow H_n^\Delta(B, A; R) \rightarrow H_n^\Delta(X, A; R) \rightarrow H_n^\Delta(X, B; R) \rightarrow H_{n-1}^\Delta(B, A; R) \rightarrow$$

Quando $A = \emptyset$, a sequência acima se torna uma sequência exata longa do par (X, B) :

$$\rightarrow H_n^\Delta(B; R) \rightarrow H_n^\Delta(X; R) \rightarrow H_n^\Delta(X, B; R) \rightarrow H_{n-1}^\Delta(B; R) \rightarrow$$

Proposição 3.14. *Se X é um espaço conexo por caminhos, então $H_0^\Delta(X; R) \approx R$.*

Demonstração. Ver em [6] página 109 ou [10] página 153. □

Proposição 3.15. *Seja $\{X_\lambda\}_\lambda$ a família das componentes conexas por caminhos do espaço X . Então $H_n^\Delta(X; R) \approx \bigoplus_\lambda H_n^\Delta(X_\lambda; R)$.*

Demonstração. Ver em [6] página 109 ou [10] página 153. □

Proposição 3.16. *Seja $X = \{x\}$. Então $H_n^\Delta(X; R) = 0$ para $n > 0$.*

Demonstração. Ver em [10] página 153. \square

3.5 HOMOLOGIA CELULAR

Quando X é um CW -complexo, os módulos de homologia $H_*^\Delta(X; R)$ podem ser calculados a partir de um complexo de cadeia muito menor do que $S_*(X; R)$. Em vista disso, defina $C_n(X; R) = H_n^\Delta(X^n, X^{n-1}; R)$.

Proposição 3.17. *Seja J o conjunto de índices das n -células de X . Então $C_n(X; R) \approx \bigoplus_{j \in J} R$.*

Demonstração. Ver em [5] página 40. \square

O homomorfismo $\partial: C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$ é dado pelo homomorfismo de conexão $\partial: H_n^\Delta(X^n, X^{n-1}; R) \rightarrow H_{n-1}^\Delta(X^{n-1}, X^{n-2}; R)$ na sequência exata longa da tripla (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) . O par $(C_*(X; R), \partial)$ é um complexo de cadeia chamado **complexo de cadeia celular** de X .

Uma função $f: X \rightarrow Y$ entre CW -complexos é dita **celular** se $f(X^n) \subset Y^n$ para todo $n \geq 0$. O fato principal é que funções contínuas entre dois CW -complexos são homotópicas as funções celulares. (Veja Geoghegan [5] página 30)

Proposição 3.18. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função celular então f induz um homomorfismo de cadeias $f_*: C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)$. Se $g: Y \rightarrow Z$ é uma função celular então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: C_n(X; R) \rightarrow C_n(Z; R)$ e $Id_* = Id: C_n(X; R) \rightarrow C_n(X; R)$.*

Demonstração. Ver em [5] página 41. \square

A **homologia celular** de X sobre R , $H_*(X; R)$, é a homologia do complexo de cadeia celular $C_*(X; R)$.

Teorema 3.19. $H_n(X; R) \approx H_n^\Delta(X; R)$.

Demonstração. Ver em [5] página 41. \square

Podemos fazer uma pequena modificação na homologia celular a fim de que um espaço X unitário possa ter em todas as dimensões, incluindo a dimensão zero, seus grupos de homologia iguais zero. Para isso, definimos a **homologia reduzida** $\tilde{H}_n(X; R)$ como sendo a homologia do complexo

$$\cdots \longrightarrow C_2(X; R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X; R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; R) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que $\varepsilon(\sum_i z_i \sigma_i) = \sum_i z_i$. Este complexo de cadeia é chamado de **complexo de cadeia celular aumentado**.

Proposição 3.20. *Se $X = \emptyset$ então $\tilde{H}_n(X; R) = 0$ se $n \neq -1$ e $\tilde{H}_{-1}(X; R) \approx R$. Quando $X \neq \emptyset$ temos que $\tilde{H}_n(X; R) \approx H_n(X; R)$ se $n \neq 0$ e existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X; R) \xrightarrow{q_*} H_0(X; R) \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

em que q_* é induzido pelo homomorfismo de cadeias $q: C_*(X; R) \rightarrow C_*(X; R)$ que é a identidade em todas as dimensões, exceto na dimensão -1 em que o homomorfismo é nulo.

Demonstração. Ver em [5] página 70. □

Corolário 3.21. *Se X é contrátil, então $\tilde{H}_n(X; R) = 0$ para todo n .*

3.6 GRUPOS DE HOMOTOPIA

Seja I^n o produto de n cópias do intervalo $[0, 1]$. O bordo ∂I^n de I^n é um subespaço que consiste nos pontos que possuem pelo menos uma coordenada igual a 0 ou 1.

Seja X um espaço com ponto base $x_0 \in X$. Seja $\pi_n(X, x_0)$ o **conjunto das classes de homotopia** das funções $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ em que as homotopias levam ∂I^n no ponto base x_0 , isto é, $\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$.

Quando $n = 0$, $\pi_0(X, x_0)$ se reduz ao conjunto das componentes conexas do espaço X .

Sejam $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ funções contínuas. Para $n > 0$ podemos definir a operação $*$ como sendo

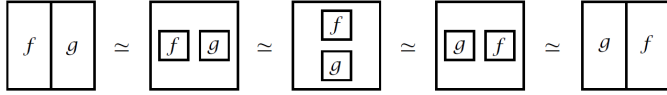
$$(f * g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Com esta operação o conjunto $\pi_n(X, x_0)$ torna-se um grupo, em que o elemento neutro é a função constante que leva I^n em x_0 e o elemento oposto de $f(s_1, s_2, \dots, s_n)$ é a função $f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$.

O grupo $\pi_1(X, x_0)$ é chamado de **grupo fundamental** que consiste nas classes dos laços que começam e terminam em x_0 .

Quando $n \geq 2$ temos que o grupo $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano. A figura abaixo mostra que $f * g \simeq g * f$.

Figura 2 – $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano quando $n \geq 2$.



Fonte: Hatcher [6].

As funções $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ podem ser identificadas com as funções que levam $I^n/\partial I^n = S^n$ em X e cujo ponto base $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$ é levado em x_0 . Desta forma, $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_0), (X, x_0)]$.

Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função contínua, definimos $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ como sendo $\pi_n(f)([\gamma]) = [f\gamma]$.

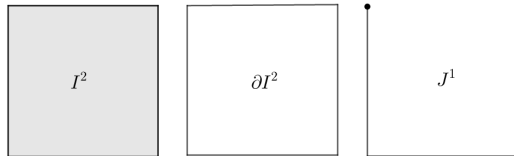
Proposição 3.22. *Sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ funções contínuas. Então temos as seguintes condições:*

- (i) $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$.
- (ii) $\pi_n(Id_X) = Id_{\pi_n(X)}$.
- (iii) Se $f \simeq g$, então $\pi_n(f) = \pi_n(g)$.

Demonstração. Ver em [6] página 342. □

Até agora vimos que existem grupos de homotopia de um espaço X . Entretanto, também é possível definir tais grupos para um par (X, A) . Dizemos que $\pi_n(X, A, x_0)$ é o **grupo de homotopia relativa** para o par (X, A) com ponto base $x_0 \in A$. Para $n \geq 1$, $\pi_n(X, A, x_0)$ é definido como sendo o conjunto das classes das funções $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, em que $J^{n-1} = \partial I^n - I^{n-1}$ com I^{n-1} sendo a face de I^n com a última coordenada $s_n = 0$. Por exemplo, se $n = 2$ temos

Figura 3 – A representação de $I^2, \partial I^2$ e J^1 .



Fonte: Produção do próprio autor.

A operação em $\pi_n(X, A, x_0)$ é dada da mesma forma que em $\pi_n(X, x_0)$, entretanto na última coordenada s_n agora desempenha um

papel especial e não está mais disponível para a operação. Desta forma, $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo quando $n \geq 2$ e é abeliano quando $n \geq 3$.

As funções $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ podem ser vistas como funções $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$, uma vez que J^{n-1} pode ser reduzido em um ponto. Assim, $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)]$. Em vista disto, a classe de $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ em $\pi_n(X, A, x_0)$ é nula se, e somente se, é homotópico *rel* S^{n-1} a uma função cuja imagem está contida em A .

Uma característica muito útil dos grupos de homotopia relativa é a existência da seguinte sequência exata longa (Veja Hatcher [6] página 344):

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

em que $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $j : (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ são as inclusões, respectivamente. A aplicação ∂ vem da restrição de $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ em I^{n-1} ou da restrição de $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ em S^{n-1} . A aplicação ∂ é um homomorfismo quando $n > 1$.

Dizemos que um espaço X com ponto base x_0 é **n -conexo** se $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$ e $i \leq n$.

Quando $i = 0$, temos que X é conexo por caminhos e se $i = 1$, temos que X é simplesmente conexo.

Este conceito também pode ser estendido para um par (X, A) . O par (X, A) é dito **n -conexo** se $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in A$ e $i \leq n$.

3.7 ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

Um **espaço de recobrimento** de X é um espaço \tilde{X} munido com uma função $p : \tilde{X} \rightarrow X$ satisfazendo a seguinte condição: Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X tal que para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ é a união disjunta de conjuntos abertos em \tilde{X} , cada um dos quais é levado homeomorficamente por p em U_α .

Exemplo 3.23. Um recobrimento de S^1 é o espaço \mathbb{R} em que $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é dada por $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Sejam $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e $f : Y \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que a função contínua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ é um **levanta-**

mento de f se $p \circ \tilde{f} = f$, isto é, se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

comuta. A partir daqui, denotaremos f_* para $\pi_1(f)$ e p_* para $\pi_1(p)$.

Existe um critério muito útil que nos diz quando que um levantamento existe.

Proposição 3.24. *Sejam $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento e $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma função contínua. Suponha que Y é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Então o levantamento $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ de f existe se, e somente se, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Demonstração. Ver em [6] página 61. □

Proposição 3.25 (Unicidade do levantameto). *Sejam $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e $f_1, f_2: Y \rightarrow \tilde{X}$ levantamento de $f: Y \rightarrow X$. Se Y é um espaço conexo e f_1 e f_2 coincidem em um ponto, então $f_1 = f_2$.*

Demonstração. Ver em [6] página 62. □

Para um recobrimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ o grupo dos automorfismos de p é dado por

$$\text{Aut}(p) = \{\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \mid \varphi \text{ é um homeomorfismo tal que } p \circ \varphi = p\}.$$

Podemos relacionar o grupo fundamental com o grupos dos automorfismo de p , conforme o seguinte teorema:

Teorema 3.26. *Se \tilde{X} é conexo e localmente conexo por caminhos e $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ em que $p(\tilde{x}_0) = x_0$, então*

$$\frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))} \approx \text{Aut}(p).$$

Em particular, se \tilde{X} é simplesmente conexo, então

$$\pi_1(X, x_0) \approx \text{Aut}(p).$$

Demonstração. Ver em [6] página 71. □

Um tipo especial de recobrimento é o chamado **recobrimento universal**. O recobrimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ é universal se \tilde{X} é simplesmente conexo. O nome vem do fato que este recobrimento recobre qualquer recobrimento conexo de X .

Sejam G um grupo e X um CW -complexo que satisfaz as condições:

- (i) X é conexo;
- (ii) $\pi_1(X) \approx G$;
- (iii) O recobrimento universal de X é contrátil.

Então dizemos que X um **complexo de Eilenberg-MacLane** do tipo $(G, 1)$ ou simplesmente $\mathbf{K}(G, 1)$.

Os espaços $K(G, 1)$ não são únicos, entretanto possuem o mesmo tipo de homotopia.

3.8 TEOREMA DE WHITEHEAD E HUREWICZ

Se uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, então $\pi_n(X, x_0) \approx \pi_n(Y, y_0)$ para todo n . O Teorema de Whitehead nos diz que a recíproca desta afirmação é válida para CW -complexos.

Teorema 3.27 (Whitehead). *Sejam X, Y CW -complexos. Considere $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua em que $f(x_0) = y_0$. Se $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é um isomorfismo para todo n , então f é uma equivalência homotópica. Se f for a inclusão de um subcomplexo X em Y , então X é um retrato forte por deformação de Y .*

Demonstração. Ver em [6] página 346. □

Corolário 3.28. *Seja X um CW -complexo. Então $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo n se, e somente se, X é contrátil.*

Demonstração. Suponha que $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo n .

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função constante em que $Y = \{y\}$. Note que $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ é o homomorfismo nulo e que $\pi_n(X, x_0) \approx \pi_n(Y, y)$, para todo n .

Logo f é uma equivalência homotópica e isto nos diz que X é contrátil.

Reciprocamente, suponha que X é contrátil. Então X possui o mesmo tipo de homotopia de um conjunto unitário, assim pela Proposição 3.22 segue que $\pi_n(X, x_0)$ é isomorfo ao grupo trivial para todo n . Portanto $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo n . \square

Seja $f: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ uma função contínua. Definimos a **aplicação de Hurewicz** como sendo

$$\begin{aligned} h: \pi_n(X, A, x_0) &\longrightarrow H_n(X, A) \\ h([f]) &\longmapsto f_*(\alpha) \end{aligned}$$

em que α é um gerador fixado de $H_n(D^n, \partial D^n)$ e

$$f_*: H_n(D^n, \partial D^n) \rightarrow H_n(X, A)$$

é induzida por f . Para $n > 1$, esta aplicação é um homomorfismo.

Seja $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma função contínua. O conjunto $\pi'_n(X, A, x_0)$ é o quociente de $\pi_n(X, A, x_0)$ por um subgrupo normal gerado pelos elementos da forma $[\gamma][f] - [f]$ em que $[\gamma] \in \pi_1(A, x_0)$. Então a aplicação h induz um homomorfismo $h': \pi'_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$.

Existe também uma aplicação de Hurewicz absoluta $h: \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ que é definida de modo similar por $h([f]) = f_*(\alpha)$ em que $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ e α é um gerador de $H_n(X)$. Isto nos leva ao seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(A, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, x_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A, x_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Teorema 3.29 (Hurewicz). *Seja (X, A) um par de espaços conexo por caminhos em que $A \neq \emptyset$. Se (X, A) é $(n-1)$ -conexo para $n \geq 2$, então $h': \pi'_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$ é um isomorfismo e $H_i(X, A) = 0$ para $i < n$.*

Demonstração. Ver em [6] página 371. \square

3.9 COMPLEXO SIMPLICIAL

Veremos agora um tipo especial de CW -complexo, o complexo simplicial.

Um **complexo simplicial** K consiste em um conjunto de vértices V_K e um conjunto S_K não-vazio de subconjuntos finitos de V_K que satisfazem:

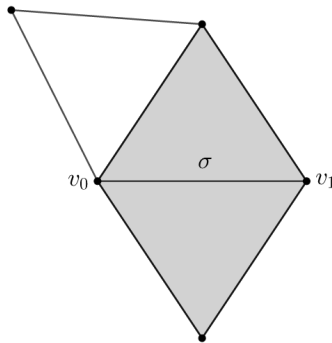
- (i) Todo subconjunto unitário de V_K pertence a S_K .
- (ii) Se $X \in S_K$, seus subconjuntos não-vazios pertencem a S_K .

Um n -simplexo de K é um elemento de S_K que contém $(n + 1)$ -vértices e n é a dimensão deste simplexo.

Se $\sigma, \tau \in S_K$ e $\sigma \subset \tau$, então dizemos que σ é uma face de τ . Considere o conjunto de todos os simplexos de K dos quais σ é uma face, então o subcomplexo gerado por estes simplexos é chamado de **estrela** de σ em K e é denotado por $st \sigma$. O **link** de σ em K , denotado por $lk \sigma$, é o subcomplexo de $st \sigma$ gerado pelos simplexos de $st \sigma$ os quais não possuem vértices de σ .

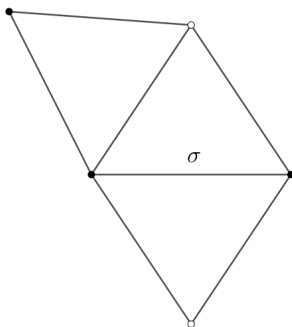
Se σ for a aresta formada por v_0 e v_1 , como a Figura 4, então $st \sigma$ é representada pela figura sombreada.

Figura 4 – Estrela de σ .



Fonte: Produção do próprio autor.

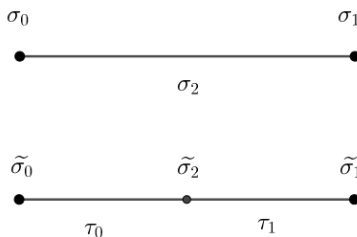
E $lk \sigma$ são os vértices brancos da figura abaixo.

Figura 5 – Link de σ .

Fonte: Produção do próprio autor.

Se K é um complexo simplicial, então definimos $sd K$ como sendo a **subdivisão baricêntrica** de K que tem a seguinte descrição: para cada vértice de K têm-se um vértice de $sd K$ e $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ é um n -simplexo se para todo $i < n$, σ_i é uma face própria de σ_{i+1} . Vejamos alguns exemplos.

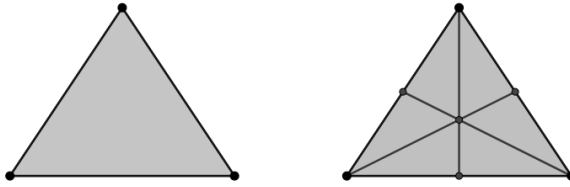
Exemplo 3.30. Considere K o complexo simplicial dado pelos vértices σ_0 e σ_1 e a aresta σ_2 , conforme a figura abaixo. Os simplexos σ_0, σ_1 e σ_2 formam três vértices em $sd K$. Os vértices σ_0 e σ_1 são faces próprias de σ_2 , isto produz os simplexos τ_0 e τ_1 em $sd K$, respectivamente.

Figura 6 – A subdivisão baricêntrica de K .

Fonte: Produção do próprio autor.

A figura abaixo mostra a subdivisão baricêntrica de um 2-simplexo.

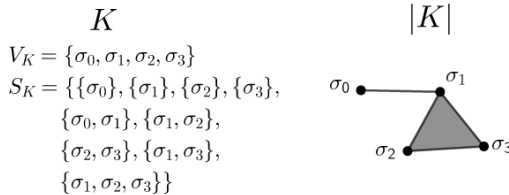
Figura 7 – Subdivisão baricêntrica de um 2-simplexo.



Fonte: Produção do próprio autor.

A cada complexo simplicial K podemos associar um CW -complexo de maneira óbvia, chamado de **realização geométrica** de K , denotado por $|K|$.

Exemplo 3.31. A figura abaixo mostra como associamos um complexo simplicial K com sua realização geométrica.

Figura 8 – Realização geométrica de K .

Fonte: Produção do próprio autor.

Um **conjunto parcialmente ordenado** (poset) é um conjunto P munido de uma relação de ordem parcial $<$.

Denotaremos por $|P|$ o complexo simplicial associado ao poset P , esta associação é feita da seguinte maneira: os vértices são elementos de P e $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é um n -simplexo de P se $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Teorema 3.32. *Se P é um conjunto dirigido então $|P|$ é contrátil.*

Demonstração. Seja $f: S^n \rightarrow |P|$ uma função celular. Observe que $f(S^n)$ é compacto, pois S^n é compacto. Assim $f(S^n)$ é um subcomplexo de $|P|$ com finitos vértices. Como P é dirigido, existe $v \in P$ tal que é possível construir um cone sobre $f(S^n)$.

Pelo fato do cone ser contrátil, conseguimos deformar $f(S^n)$ para um ponto. Portanto, f é homotópica a uma função constante. Logo, $\pi_n(|P|) = 0$, para todo n e pelo corolário anterior $|P|$ é contrátil. \square

Considere a cobertura $V = \{X_\alpha\}$ de um CW -complexo X . O **nervo** de V é um complexo simplicial $N(V)$ descrito da seguinte maneira: $N(V)$ possui um vértice v_α para cada X_α e um simplexo $\{v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_k}\}$ sempre que $\bigcap_{i=0}^k X_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Teorema 3.33. *Se $V = \{X_\alpha\}$ é uma cobertura finita e $\bigcap_{i=0}^k X_{\alpha_i}$ é contrátil sempre que é não-vazio, então $|N(V)|$ e X são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. Ver em [5] página 211. □

4 HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE GRUPOS

O objetivo deste capítulo é definir a (co)homologia de um grupo G com coeficientes em M , em que M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Podemos relacionar a (co)homologia de grupo com os grupos Tor e Ext que vimos no Capítulo 2. Há também uma interpretação topológica para a definição de homologia de G usando um espaço de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$.

Este capítulo está baseado em Brown [2] e Hilton [8].

4.1 $\mathbb{Z}G$ -MÓDULOS

Definição 4.1. *Seja G um grupo. Define-se $\mathbb{Z}G$ como sendo o conjunto das somas formais*

$$\sum_{g \in G} r_g g,$$

com $r_g \in \mathbb{Z}$ e $g \in G$, em que $r_g = 0$ exceto para uma quantidade finita de elementos $g \in G$, e no qual $+$ e \cdot são definidas por

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} s_g g \right) &= \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g, \\ \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} s_h h \right) &= \left(\sum_{g, h \in G} (r_g s_h) gh \right). \end{aligned}$$

Com estas operações $\mathbb{Z}G$ se torna um anel com unidade que é chamado de **anel de grupo**.

O anel de grupo $\mathbb{Z}G$ é caracterizado pela seguinte propriedade universal: Para qualquer função $f: G \rightarrow R$ que satisfaz $f(xy) = f(x)f(y)$ e $f(1_G) = 1_R$, existe único homomorfismo de anéis $f': \mathbb{Z}G \rightarrow R$ tal que $f' \circ i = f$, em que $i: G \rightarrow \mathbb{Z}G$ é a inclusão.

Dar uma estrutura de $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda ao grupo abeliano M equivale a munir este com um homomorfismo de grupos $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(M)$. De fato, como $\text{Aut}(M) \subseteq \text{End}(M)$ pela propriedade universal vista acima existe $\sigma': \mathbb{Z}G \rightarrow \text{End}(M)$, assim por meio de σ' temos que M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda. E se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda, podemos observar que o homomorfismo de anéis $\sigma': \mathbb{Z}G \rightarrow \text{End}(M)$

manda os elementos inversíveis de G em elementos inversíveis. Portanto um $\mathbb{Z}G$ -módulo pode ser visto como um \mathbb{Z} -módulo munido de uma ação de G . Daqui para frente omitiremos a palavra esquerda.

Dizemos que um $\mathbb{Z}G$ -módulo é **trivial** se os isomorfismos $\sigma(g): M \rightarrow M$ são todos iguais a identidade. Observe que todo grupo abeliano pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial para todo grupo G . Em particular, \mathbb{Z} é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.

Todo $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda M pode ser considerado um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita por meio da ação:

$$\begin{aligned}\varphi: M \times G &\longrightarrow M \\ (m, g) &\longmapsto g^{-1}m.\end{aligned}$$

Chama-se de homomorfismo de aumento o homomorfismo $\varepsilon: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. O kernel de ε é chamado de **ideal de aumento**.

Observação 4.2. Se G é gerado pelo conjunto S , então os elementos $s - 1$, com $s \in S$, geram $\text{Ker}(\varepsilon)$ como um ideal à esquerda de $\mathbb{Z}G$. De fato, considere o ideal $J = \langle s - 1, s \in S \rangle$ sobre $\mathbb{Z}G$. Observe que, se $x \in J$, então

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \sum_{s \in S} \varepsilon \left(\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) (s - 1) \right) = \sum_{s \in S} \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \varepsilon(s - 1) \\ &= \sum_{s \in S} \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

com $r_g \in \mathbb{Z}$ e $g \in G$. Ou seja, $J \subset \text{Ker}(\varepsilon)$.

Se $x \in \text{Ker}(\varepsilon)$, então $x = \sum_{g \in G} r_g g$ tal que $\sum_{g \in G} r_g = 0$. Assim,

$$x = \left(\sum_{g \in G} r_g g - \sum_{g \in G} r_g \right) = \sum_{g \in G} r_g (g - 1).$$

Desta forma, precisamos apenas mostrar que $g - 1 \in J$ para todo $g \in G$.

Como $G = \langle S \rangle$, então $x = s_1^{\pm 1} s_2^{\pm 1} \dots s_n^{\pm 1}$. E por meio das igualdades $xy - 1 = x(y - 1) + (x - 1)$ e $x^{-1} - 1 = -x^{-1}(x - 1)$, segue que $\text{Ker}(\varepsilon) \subset J$.

Se H é um subgrupo de G então podemos relacionar os anéis de

grupo $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}H$ conforme o seguinte lema.

Lema 4.3. *Seja H um subgrupo de G .*

(i) *Então $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$ -módulo livre.*

(ii) *Se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo projetivo então M é projetivo sobre $\mathbb{Z}H$.*

Demonstração. (i) Observe que $G = \dot{\bigcup}_{i \in I} Hg_i$, em que $Hg_i = \{hg_i \mid h \in H\}$.

Desta forma, $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[\dot{\bigcup}_{i \in I} Hg_i] = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[Hg_i]$. Com isso, temos que

$$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[Hg_i] \approx \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[H/H_{g_i}],$$

onde H_{g_i} é o estabilizador de g_i . Note que se $hg = g \Leftrightarrow h = 1$, e consequentemente $H_{g_i} = \{1\}$. Logo $\mathbb{Z}G \approx \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}H$.

(ii) Suponha que P é um $\mathbb{Z}G$ -módulo projetivo. Então $F = P \oplus K$, em que F é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre. Pelo item (i) temos que $\mathbb{Z}G \approx \bigoplus \mathbb{Z}H$, assim F é a soma direta de $\mathbb{Z}H$ -módulos livres e portanto F é um $\mathbb{Z}H$ -módulo livre. Logo P é um $\mathbb{Z}H$ -módulo projetivo. \square

4.2 GRUPO DE INVARIANTES E COINVARIANTES

Dado um grupo G e um $\mathbb{Z}G$ -módulo M podemos definir os grupos de invariantes e coinvariantes de M como segue.

Definição 4.4. *O grupo de invariantes de M , denotado por M^G , é definido por $M^G = \{m \in M \mid gm = m, \forall g \in G\}$. E o grupo de coinvariantes de M , denotado por M_G , é dado pela quociente M/N , em que N é um subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $gm - m$, $g \in G$ e $m \in M$.*

O grupo M_G é o maior quociente de M em que G atua de forma trivial. Observe que se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial, isto é $gm = m$ para todo $m \in M$ e todo $g \in G$, então $M_G \approx M \approx M^G$.

Proposição 4.5. *Se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo então $M_G \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $M^G \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$, com \mathbb{Z} visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.*

Demonstração. Mostremos que $M_G \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$.

Visto que \mathbb{Z} é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial e $1 \otimes gm = 1g \otimes m = 1 \otimes m$,

podemos construir o homomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi : M_G &\longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \\ m_g &\longmapsto 1 \otimes m,\end{aligned}$$

em que m_g é a imagem em M_G por um elemento $m \in M$.

Vejam que φ está bem definida. Sejam $m, n \in M$ tais que $m_g = n_g$. Isto nos diz que $m - n \in N$, em que N é um subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $gm - m$, $g \in G$ e $m \in M$. Assim,

$$m - n = \sum_{i=0}^k r_i (g_i m_i - m_i),$$

em que $g_i \in G$, $m_i \in M$ e $r_i \in \mathbb{Z}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}1 \otimes m - 1 \otimes n &= \sum_{i=0}^k (1 \otimes r_i g_i m_i - 1 \otimes r_i m_i) \\ &= \sum_{i=0}^k (r_i \otimes g_i m_i - r_i \otimes m_i) \\ &= \sum_{i=0}^k (r_i \cdot g_i \otimes m_i - r_i \otimes m_i) \\ &= \sum_{i=0}^k (r_i \otimes m_i - r_i \otimes m_i) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto $\varphi(m_g) = \varphi(n_g)$.

Pela propriedade universal do produto tensorial existe único homomorfismo de grupos $\psi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow M_G$ tal que $\psi(z \otimes m) = zm_g$. Note que $\varphi = \psi^{-1}$. Logo $M_G \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$.

Para mostrar que $M^G \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ defina

$$\begin{aligned}\alpha : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) &\longrightarrow M^G \\ f &\longmapsto f(1),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta : M^G &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \\ m &\longmapsto h_m,\end{aligned}$$

em que $h_m(z) = zm$. Note que $\beta(gm - m) = zgm - zm = zm - zm = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta(m) &= \alpha(h_m) = h_m(1) = 1m = m, \\ \beta \circ \alpha(f) &= \beta(f(1)) = h_{f(1)}(z) = zf(1) = f(z) = f.\end{aligned}$$

Portanto $M^G \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$. □

A Proposição 4.5 nos diz duas coisas importantes. Se tivermos uma sequência exata $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$, então a sequência

$$M'_G \longrightarrow M_G \longrightarrow M''_G \longrightarrow 0$$

também é exata, pois o funtor $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} _$ é exato à direita. E, se F é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base $(e_i)_{i \in I}$ então F_G é um \mathbb{Z} -módulo livre com base $(\bar{e}_i)_{i \in I}$. De fato, como F é livre temos que

$$F \approx \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G = \bigoplus_{i \in I} \langle e_i \rangle.$$

Aplicando o funtor $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} _$ obtemos

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F \approx \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G = \bigoplus_{i \in I} \langle \bar{e}_i \rangle.$$

Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$ -módulos à esquerda. (Como já vimos anteriormente podemos sempre considerar um $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda como um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita através da ação $mg = g^{-1}m$). Obtemos $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ introduzindo as relações $g^{-1}m \otimes n = m \otimes gn$ em $M \otimes N$. Se trocarmos m por gm obteremos a relação $m \otimes n = gm \otimes gn$. Definimos então a **ação diagonal** de G em $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = M \otimes N$ como sendo $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$. Isto nos leva a igualdade

$$M \otimes_{\mathbb{Z}G} N = (M \otimes N)_G.$$

Como $(M \otimes N)_G \approx (N \otimes M)_G$, então temos que $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N \approx N \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Considere agora $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) = \text{Hom}(M, N)$. A ação de G em

$\text{Hom}(M, N)$ é induzida pela ação de G em M e N dada por

$$\begin{aligned} G \times \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}(M, N) \\ (g, f) &\longmapsto gf, \end{aligned}$$

em que $(gf)(m) = gf(g^{-1}m)$ para $g \in G$, $f \in \text{Hom}(M, N)$ e $m \in M$. Por causa da contravariância de $\text{Hom}(_, N)$ é acrescentado g^{-1} na ação de G , isto faz com que M se torne um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita.

Seja $f \in \text{Hom}(M, N)$ então para todo $m \in M$ e $g \in G$ temos que

$$\begin{aligned} gf(m) = f(gm) &\Leftrightarrow f(m) = g^{-1}f(gm) \\ &\Leftrightarrow f(m) = g^{-1}f(m) \\ &\Leftrightarrow gf = f. \end{aligned}$$

Portanto $gf = f$ se, e somente se, $f \in (\text{Hom}(M, N))^G$. Logo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(M, N) = (\text{Hom}(M, N))^G$.

4.3 (CO)HOMOLOGIA DE UM GRUPO

Definição 4.6. *Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Definimos a **homologia** de G com coeficientes em M , denotado por $H_*(G, M)$, por*

$$H_*(G, M) = \text{Tor}_*^G(\mathbb{Z}, M).$$

A **cohomologia** de G com coeficientes em M , denotado por $H^*(G, M)$, é definida por

$$H^*(G, M) = \text{Ext}_G^*(\mathbb{Z}, M).$$

Em outras palavras, para calcularmos a homologia e a cohomologia de grupo podemos escolher uma resolução projetiva P de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, em que \mathbb{Z} é visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial. A homologia do grupo G é exatamente a homologia do complexo $P \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e a cohomologia de G é a cohomologia do complexo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, M)$.

Lema 4.7. *Seja $F: R\text{-mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$ um funtor aditivo da categoria dos R -módulos na categoria dos \mathbb{Z} -módulos. Se os homomorfismos de cadeias $f: (C, d) \rightarrow (C', d')$ e $g: (C, d) \rightarrow (C', d')$ são homotópicos, então $F(f): F(C) \rightarrow F(C')$ e $F(g): F(C) \rightarrow F(C')$ também são.*

Demonstração. Seja h uma homotopia entre f e g . Então $f - g =$

$h \circ d + d' \circ h$. Disto segue que

$$\begin{aligned} F(f) - F(g) &= F(f - g) \\ &= F(h \circ d + d' \circ h) = F(h \circ d) + F(d' \circ h) \\ &= F(h) \circ F(d) + F(d') \circ F(h). \end{aligned}$$

Portanto $F(h)$ é uma homotopia entre $F(f)$ e $F(g)$. \square

Sejam $\varepsilon: P \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\mu: P' \rightarrow \mathbb{Z}$ duas resoluções projetivas de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Já vimos que pelo Teorema 2.40 existe uma equivalência homotópica $\tau: P \rightarrow P'$. Considerando que os funtores $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(_, M)$ e $_ \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ são aditivos, segue do Lema 4.7 que $\varepsilon_*: \text{Hom}_G(P, M) \rightarrow \text{Hom}_G(P', M)$ e $\mu_*: P \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow P' \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ também são equivalências homotópicas. Portanto $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ independem da escolha da resolução projetiva.

Proposição 4.8. *Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então $H_0(G, M) \approx M_G$ e $H^0(G, M) \approx M^G$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon: P \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} .

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Aplicando o funtor $_ \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ em (4.1) obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\varepsilon_*} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0. \\ & & & & \downarrow f & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} H_0(G, M) &= \frac{\text{Ker}(f)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M}{\text{Im}(\partial_1)} \\ &= \frac{P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M}{\text{Ker}(\varepsilon_*)} \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \\ &= M_G. \end{aligned}$$

Portanto $H_0(G, M) \approx M_G$. De modo análogo, temos que $H^0(G, M) \approx M^G$. \square

Exemplo 4.9. Queremos calcular a homologia e a cohomologia do grupo cíclico $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$. A seqüência

$$\cdots \xrightarrow{t-1} C_4 \xrightarrow{N} C_3 \xrightarrow{t-1} C_2 \xrightarrow{N} C_1 \xrightarrow{t-1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, em que $N = 1 + t^2 + \cdots + t^{n-1}$ e $C_i = \langle a_i \rangle \approx \mathbb{Z}G$. De fato, existe uma homotopia de contração h dada por:

$$h_{2k}(t^i a_{2k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ (1 + t^2 + \cdots + t^{i-1})a_{2k+1} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

$$h_{2k-1}(t^i a_{2k-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq k < n-1 \\ a_{2k} & \text{se } k = n-1 \end{cases}$$

e visto que $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre segue que

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}G$.

Aplicando $-\otimes_{\mathbb{Z}G} M$ em (4.2) obtemos

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M,$$

que se reduz através do isomorfismo $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \approx M$ em

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} M \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} M,$$

em que $\partial_{2k}(m) = Nm$ e $\partial_{2k+1}(m) = (t-1)m$.

Assim, temos que

$$H_n(G, M) = \begin{cases} M_G, & \text{quando } n = 0 \\ \frac{\text{Ker}(\partial_{2k})}{(t-1)M}, & \text{quando } n \text{ é par} \\ \frac{M^G}{NM}, & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Aplicando $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ em (4.2) e através do isomorfismo

$\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) = M$ obtemos o seguinte complexo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} M \xrightarrow{\delta^3} \dots$$

em que $\delta^{2k}(m) = (t-1)m$ e $\delta^{2k+1}(m) = Nm$. Logo

$$H^n(G, M) = \begin{cases} M^G, & \text{quando } n = 0 \\ \frac{M^G}{NM}, & \text{quando } n \text{ é par} \\ \frac{\text{Ker}(\partial_{2k})}{(t-1)M}, & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Vejam os que acontece quando $M = \mathbb{Z}$. Considere os seguintes complexos

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Observe que ∂_{2k} é o homomorfismo nulo. De fato, considere

$$\begin{aligned} \partial_{2k} : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \\ 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} &\longmapsto 1_{\mathbb{Z}G}(t-1) \otimes 1_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{Z}G}(t-1) \otimes 1_{\mathbb{Z}} &= 1_{\mathbb{Z}} \otimes t - 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1_{\mathbb{Z}G} \\ &= 1_{\mathbb{Z}} \cdot t \otimes 1_{\mathbb{Z}G} - 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1_{\mathbb{Z}G} \\ &= 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1_{\mathbb{Z}G} - 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1_{\mathbb{Z}G} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned} \partial_{2k-1} : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \\ 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} &\longmapsto N \otimes 1_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
 N \otimes 1_{\mathbb{Z}} &= (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}) \otimes 1_{\mathbb{Z}} \\
 &= 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} + t \otimes 1_{\mathbb{Z}} + t^2 \otimes 1_{\mathbb{Z}} + \cdots + t^{n-1} \otimes 1_{\mathbb{Z}} \\
 &= 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}G} \otimes t \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}G} \otimes t^2 \cdot 1_{\mathbb{Z}} + \cdots + 1_{\mathbb{Z}G} \otimes t^{n-1} \cdot 1_{\mathbb{Z}} \\
 &= 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} + \cdots + 1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}} \\
 &= n(1_{\mathbb{Z}G} \otimes 1_{\mathbb{Z}}).
 \end{aligned}$$

Desta forma, o complexo (4.2) se reduz a

$$\cdots \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Logo

$$H_n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{quando } n = 0 \\ 0, & \text{quando } n \text{ é par} \\ \mathbb{Z}_n, & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Analogamente, temos que $\delta^{2k}(z) = 0$ e $\delta^{2k+1}(z) = nz$, com $z \in \mathbb{Z}$.

Portanto

$$H^n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{quando } n = 0 \\ \mathbb{Z}_n, & \text{quando } n \text{ é par} \\ 0, & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

4.4 MÓDULOS INDUZIDOS E COINDUZIDOS

Antes de falarmos sobre os módulos induzidos e coinduzidos, introduziremos o conceito de extensão e coextensão de escalares.

Considere os anéis R e S e um homomorfismo $\alpha: R \rightarrow S$. Dado M um S -módulo à esquerda, defina

$$\begin{aligned}
 \cdot : R \times M &\longrightarrow M \\
 (r, m) &\longmapsto r \cdot m := \alpha(r)m.
 \end{aligned}$$

Por meio desta ação podemos considerar M como um R -módulo à esquerda. Assim, definimos um funtor chamado de restrição de escalares, que sai da categoria dos S -módulos à esquerda para a categoria dos R -módulos à esquerda.

Construiremos a seguir a extensão e coextensão de escalares os

quais produzem um S -módulo a partir de um R -módulo.

Assuma agora que M é um R -módulo à esquerda. Considere o produto tensorial $S \otimes_R M$, em que S é visto como um R -módulo à direita por meio da ação $s \cdot r = s\alpha(r)$, para $s \in S$ e $r \in R$. Então podemos ver o produto $S \otimes_R M$ como um S -módulo à esquerda através da ação $s \cdot (s' \otimes m) = ss' \otimes m$, para $s \in S$, $r \in R$ e $m \in M$. Dizemos assim que este S -módulo é obtido de M pela **extensão de escalares** de R para S .

Considere o grupo abeliano $\text{Hom}_R(S, M)$, em que S é visto como um R -módulo à esquerda por meio da ação $r \cdot s = \alpha(r)s$, para $s \in S$ e $r \in R$. Assim $\text{Hom}_R(S, M)$ é um S -módulo à esquerda através de $(sf)(s') = f(s's)$, para $f \in \text{Hom}_R(S, M)$. Este S -módulo é dito ser obtido de M pela **coextensão de escalares** de R para S .

Exemplo 4.10. Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda. Suponha que o homomorfismo α seja o homomorfismo de aumento $\varepsilon: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$, então o \mathbb{Z} -módulo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ obtido de M pela extensão de escalares de $\mathbb{Z}G$ para \mathbb{Z} é o módulo M_G . E o \mathbb{Z} -módulo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ obtido de M pela coextensão de escalares é o módulo M^G .

Aplicaremos a extensão e a coextensão de escalares para o homomorfismo inclusão $i: \mathbb{Z}H \rightarrow \mathbb{Z}G$, em que H é um subgrupo de G .

Definição 4.11. *Seja H um subgrupo de G . Considere M um $\mathbb{Z}H$ -módulo. A **indução** é definida como sendo o $\mathbb{Z}G$ -módulo obtido de M pela extensão de escalares via i e escrevemos $\text{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$. Definimos também a **coindução** como sendo o $\mathbb{Z}G$ -módulo obtido de M pela coextensão de escalares via i e escrevemos $\text{Coind}_H^G M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$.*

No caso de $H = \{1\}$, chamamos $\text{Ind}_{\{1\}}^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M$ de **módulo induzido** e $\text{Coind}_{\{1\}}^G M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, M)$ de **módulo coinduzido**.

Seja M um $\mathbb{Z}H$ -módulo. Existe um homomorfismo $\beta: M \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ dado por $\beta(m) = 1 \otimes m$. Devido a

$$1 \otimes rm = 1 \cdot r \otimes m = i(r) \otimes m = i(r) \cdot (1 \otimes m),$$

em que $r \in \mathbb{Z}H$ e $m \in M$, temos que $\beta(rm) = i(r)\beta(m) = r\beta(m)$. Assim, β é um $\mathbb{Z}H$ -homomorfismo.

Dados um $\mathbb{Z}G$ -módulo N e um $\mathbb{Z}H$ -homomorfismo $f: M \rightarrow N$ existe um único $\mathbb{Z}G$ -homomorfismo $g: \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \rightarrow N$ tal que o

diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \\
 & \searrow f & \swarrow \text{---} g \\
 & & N
 \end{array} \tag{4.4}$$

comuta.

Proposição 4.12. *Se o índice de H em G é finito então $\text{Ind}_H^G M \approx \text{Coind}_H^G M$.*

Demonstração. Considere o seguinte $\mathbb{Z}H$ -homomorfismo

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 : M &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \\
 m &\longmapsto \varphi_0(m)(g) = \begin{cases} gm, & g \in H \\ 0, & g \notin H. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Em virtude de (4.4) existe um único $\mathbb{Z}G$ -homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$$

tal que $\beta \circ \varphi = \varphi_0$. Escolhendo representantes das classes laterais de H em G e expressando $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ (resp. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$) como uma soma (resp. produto) de cópias de M , verifica-se que φ é a inclusão canônica da soma direta no produto direto. Como $(G : H) < \infty$, φ é um isomorfismo. \square

O próximo resultado relaciona a homologia e a cohomologia de um grupo com a de seus subgrupos.

Proposição 4.13 (Lema de Shapiro). *Se H é um subgrupo de G e M é um $\mathbb{Z}H$ -módulo, então*

$$H_*(H, M) \approx H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$$

e

$$H^*(H, M) \approx H^*(G, \text{Coind}_H^G M)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Pelo Lema 4.3 vemos que $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$ também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}H$ -módulos.

Desta forma,

$$\begin{aligned} P \otimes_{\mathbb{Z}H} M &\approx (P \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}H} M \\ &\approx P \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \\ &\approx P \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Ind}_H^G M. \end{aligned}$$

Com isso, $H_*(H, M) \approx H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$.

Similarmente, temos que existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(P, M) &\approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, \text{Coind}_H^G M). \end{aligned}$$

Portanto $H^*(H, M) \approx H^*(G, \text{Coind}_H^G M)$. \square

Vejamus a seguir o que acontece quando aplicamos o Lema de Shapiro para $H = \{1\}$.

Corolário 4.14. *Seja M um $\mathbb{Z}H$ -módulo. Então $H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M) = 0$ e $H^n(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, M)) = 0$, para $n > 0$.*

Demonstração. Pela proposição anterior temos que $H_*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M) \approx H_*(1, M)$ e $H^*(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, M)) = H^*(1, M)$. Com isso, consideramos M como sendo um \mathbb{Z} -módulo e para calcular $H_*(1, M)$ e $H^*(1, M)$ precisamos de uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre \mathbb{Z} . Já que \mathbb{Z} é um \mathbb{Z} -módulo livre, e portanto projetivo, podemos escolher a seguinte resolução projetiva

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Portanto $H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M) = 0$ e $H^n(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, M)) = 0$, para $n > 0$. \square

4.5 INTERPRETAÇÃO TOPOLÓGICA

Nesta seção mostraremos a interpretação topológica para a homologia de grupo com coeficientes em \mathbb{Z} . Denotaremos $H_*(G)$ ao invés de $H_*(G, \mathbb{Z})$ e $C_*(X)$ ao invés de $C_*(X; \mathbb{Z})$.

Nosso objetivo neste momento é mostrar que o complexo de cadeia celular $C_*(X)$ de um CW-complexo X , sob determinadas hipóteses, é uma resolução livre de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.

Seja X um conjunto com uma ação de G , formamos assim o grupo abeliano livre $\mathbb{Z}X$ gerado por X . A ação de G em X induz uma

ação de G em $\mathbb{Z}X$. Dizemos que a ação de G em X é **livre** se $gx = x$ implica $g = 1$, em que $x \in X$.

Proposição 4.15. *Seja X um conjunto no qual G age livremente. Então $\mathbb{Z}X$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre, com base dada pelo conjunto dos representantes das G -órbitas em X .*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} = \{x_i; i \in I\}$ seja um conjunto formado pelos representantes de cada G -órbita em X . Podemos escrever $X = \bigcup_{x_i \in \mathcal{B}} G(x_i)$, em que $G(x_i) = \{gx_i; g \in G\}$. Assim,

$$\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}\left(\bigcup_{x_i \in \mathcal{B}} G(x_i)\right) = \bigoplus_{x_i \in \mathcal{B}} \mathbb{Z}(G(x_i)).$$

Defina

$$\begin{aligned} \varphi_i : G &\longrightarrow G(x_i) \\ g &\longmapsto gx_i. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ_i é bijetora.

Sejam $g, h \in G$ tais que $\varphi_i(g) = \varphi_i(h)$, assim $gx_i = hx_i$, ou seja, $h^{-1}gx_i = x_i$. Como a ação de G é livre em X segue que $h^{-1}g = 1$, portanto $h = g$. Dado $y \in G(x_i)$ temos que $y = gx_i = \varphi_i(g)$. Portanto φ_i é sobrejetora.

$$\text{Logo } \mathbb{Z}X = \bigoplus_{x_i \in \mathcal{B}} \mathbb{Z}(G(x_i)) \approx \bigoplus_{x_i \in \mathcal{B}} \mathbb{Z}G. \quad \square$$

Definição 4.16. *Um G -complexo é um CW-complexo X munido de uma ação de G sobre X que permuta suas células, isto é, temos para cada $g \in G$ um homeomorfismo $x \mapsto gx$ de X tal que a imagem $g\sigma$ de toda célula σ de X é novamente uma célula.*

Seja X um G -complexo. A ação de G em X induz uma ação de G em $C_n(X)$ da seguinte forma:

$$g \cdot (r_1\sigma_1 + \cdots + r_k\sigma_k) = r_1g\sigma_1 + \cdots + r_kg\sigma_k,$$

em que σ_i são n -células.

Com isso, $C_*(X)$ se torna um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}G$ -módulos. E definimos $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ como sendo $\varepsilon(\sigma) = 1$ para toda a 0-célula σ de X .

Dizemos que X é um G -complexo **livre** se G age livremente em X . Neste caso, o \mathbb{Z} -módulo $C_n(X)$ possui uma base na qual G permuta

livremente. Pela Proposição 4.15, $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com um elemento na base para cada G -órbita de células.

Proposição 4.17. *Seja X um G -complexo livre e contrátil. Então o complexo celular aumentado de X*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

é uma resolução livre de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.

Demonstração. Seja $X_n = \{\sigma \mid \sigma \text{ é uma célula de dimensão } n \text{ em } X\}$.

Como $C_n(X)$ é o grupo abeliano gerado pelos n -simplexos que compõem X , podemos identificá-lo com $\mathbb{Z}X_n$.

Por hipótese, a ação de G é livre sobre X , logo X_n é um G -complexo livre. Portanto pela proposição anterior $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre tendo como base um conjunto formado por um representante de cada G -órbita de X_n .

O fato de X ser contrátil nos diz que $H_n(X) = H_n(C(X)) = 0$, para $n > 0$. Consequentemente, $\text{Ker}(\partial_n) = \text{Im}(\partial_{n+1})$, para $n > 0$.

Vejam agora que $\text{Ker}(\varepsilon) = \text{Im}(\partial_1)$. Considere

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Pelo 1º Teorema do Isomorfismo, segue que $\frac{C_0(X)}{\text{Ker}(\varepsilon)} \approx \text{Im}(\varepsilon) = \mathbb{Z}$. Temos

$$\text{também que } \mathbb{Z} \approx H_0(X) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{C_0(X)}{\text{Im}(\partial_1)}.$$

Observe que

$$\mathbb{Z} \approx \frac{C_0(X)}{\text{Im}(\partial_1)} \approx \frac{\frac{C_0(X)}{\text{Im}(\partial_1)}}{\frac{\text{Ker}(\varepsilon)}{\text{Im}(\partial_1)}} \approx \frac{\mathbb{Z}}{\frac{\text{Ker}(\varepsilon)}{\text{Im}(\partial_1)}}.$$

Portanto $\text{Ker}(\varepsilon) = \text{Im}(\partial_1)$.

Logo

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

é uma resolução livre de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. □

Exemplo 4.18. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $G = \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}$. Podemos representar \mathbb{R} como um CW -complexo da seguinte forma: defina $\sigma_z^0 = \{z\}$ e $\sigma_z^1 = (z, z + 1)$, em que $z \in \mathbb{Z}$. Desta forma, representamos \mathbb{R} através de 0-células e 1-células, conforme a figura:

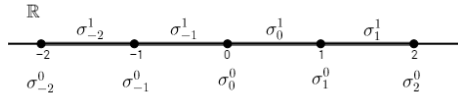


Figura 9 – Representação de \mathbb{R} como um CW -complexo

Considere a ação de \mathbb{Z} em \mathbb{R} dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t^n, x) &\longmapsto t^n x = n + x. \end{aligned}$$

Esta ação permuta as células, $t^n \sigma_z^0 = \sigma_{n+z}^0$ e $t^n \sigma_z^1 = \sigma_{n+z}^1$. Então \mathbb{R} é um \mathbb{Z} -complexo livre, e além disso é contrátil. Agora estamos nas hipóteses da proposição anterior.

Observe que existe apenas uma \mathbb{Z} -órbita de 0-células e também apenas uma de 1-células. Sejam σ^0 e σ^1 os representantes das \mathbb{Z} -órbitas de 0-células e 1-células, respectivamente.

Assim, temos que $C_0(\mathbb{R}) = \langle \sigma^0 \rangle \approx \mathbb{Z}\mathbb{Z}$ e $C_1(\mathbb{R}) = \langle \sigma^1 \rangle \approx \mathbb{Z}\mathbb{Z}$. Note que o homomorfismo $\partial_1: C_1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ é dado por $\partial_1(\sigma_z^1) = \sigma_{z+1}^0 - \sigma_z^0 = t\sigma_z^0 - \sigma_z^0 = (t - 1)\sigma_z^0$. Portanto

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$.

Estamos interessados em aplicar a proposição anterior para os espaços $K(G, 1)$.

Corolário 4.19. *Se X é um $K(G, 1)$, então o complexo celular aumentado do recobrimento universal de X é uma resolução livre de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$.*

Exemplo 4.20. Seja $G = F(S)$ o grupo livre gerado por um conjunto S . Seja $X = \bigvee_{i \in S} S_i$ um buquê de círculos. Então X é um CW -complexo que possui apenas um vértice e para cada elemento de S tem-se uma

1-célula. Como $\pi_1(X) \approx G$ e o recobrimento universal de X é contrátil segue que X é um $K(G, 1)$.

Como ponto base em \tilde{X} tomamos um vértice x_0 , este representa a única G -órbita de vértices de \tilde{X} e assim é um gerador para $C_0(\tilde{X})$. Como base para $C_1(\tilde{X})$ tome, para cada $i \in S$, uma 1-célula σ_i^1 de \tilde{X} sobre S_i^1 tendo x_0 como vértice inicial. Portanto

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i \in S} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

é uma resolução livre de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, em que $\partial_1(\sigma_i^1) = (i-1)x_0$ e uma base para $\bigoplus_{i \in S} \mathbb{Z}G$ é dada por $\{\sigma_i^1 ; i \in S\}$.

Proposição 4.21. *Seja X um G -complexo livre. Então $C_*(X/G) \approx C_*(X)_G$.*

Demonstração. A projeção $X \rightarrow X/G$ induz $C_*(X) \rightarrow C_*(X/G)$ que por sua vez induz $\varphi: C_*(X)_G \rightarrow C_*(X/G)$. Observe que cada módulo $C_n(X)_G$ é um \mathbb{Z} -módulo livre com um elemento na base para cada G -órbita de n -células de X . Além disso, $C_n(X/G)$ também é um \mathbb{Z} -módulo livre com um elemento na base para cada G -órbita de n -células de X . Portanto φ manda uma elemento da base de $C_*(X)_G$ para o elemento correspondente da base de $C_*(X/G)$. Logo φ é um isomorfismo. \square

Então se X for um $K(G, 1)$ -complexo sendo \tilde{X} seu recobrimento universal, vimos que $C_*(\tilde{X})$ é uma resolução livre de \mathbb{Z} considerado como um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Devido a $X \approx \tilde{X}/G$ temos que $C_*(\tilde{X})_G \approx C_*(X)$, assim obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.22. *Se X é um $K(G, 1)$ -complexo então $H_*(G) = H_*(X)$.*

Para calcular a homologia de um grupo G basta encontrar um CW-complexo X tal que seu recobrimento universal \tilde{X} é contrátil e $\pi_1(X) \approx G$, e a partir disso obtemos a homologia apenas calculando a homologia do complexo de cadeia celular de X .

Exemplo 4.23. Seja $X = \bigvee_{i \in S} S_i$. Como já vimos no Exemplo 4.20, X é um $K(F(S), 1)$. Então

$$H_n(F(S)) = H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \bigoplus_{i \in S} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Analogamente, temos que no caso cohomológico que

$$H^*(G) \approx H^*(K(G, 1)).$$

4.6 HOMOLOGIA EQUIVARIANTE

Lembre que $H_*(G, M)$ é definido como sendo $H_*(P \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$, em que P é uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Vamos generalizar esta definição considerando agora um complexo de cadeia não-negativo $C = (C_n)_{n \geq 0}$. A partir deste complexo definimos

$$H_*(G, C) = H_*(P \otimes_{\mathbb{Z}G} C)$$

em que $P \otimes_G C = \text{Tot}(P \otimes_{\mathbb{Z}G} C)$.

Estamos interessados em um complexo específico, já visto anteriormente, o complexo de cadeia celular $C(X)$ de um G -complexo X .

Definição 4.24. *A homologia de grupo equivariante, denotada por $H_*^G(X, M)$, é definida como sendo*

$$H_*^G(X, M) = H_*(G, C(X, M))$$

em que M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo e $C(X, M) = C(X) \otimes M$.

A homologia equivariante é simplesmente o cálculo da homologia de um complexo duplo.

Da seção 2.6 temos que existem duas sequências espectrais tais que

$$E_{p,q}^1 = H_q(G, C_p(X, M)) \Rightarrow H_{p+q}^G(X, M)$$

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X, M)) \Rightarrow H_{p+q}^G(X, M)$$

onde $H_*(X, M)$ é a homologia do complexo $C(X) \otimes M$.

Proposição 4.25. *Se um G -complexo X é acíclico então $H_*^G(X, M) \approx H_*(G, M)$.*

Demonstração. Por meio do Teorema dos coeficientes universais (veja Brown [2] página 8), segue que $H_q(X, M) = 0$ para $q > 0$. Então

$$E_{p,0}^2 = H_p(G, H_0(X, M)) = H_p(G, M).$$

Desta forma, $H_p(G, M) \Rightarrow H_p^G(X, M)$. Logo $H_*^G(X, M) \approx H_*(G, M)$. \square

5 CONDIÇÕES DE FINITUDE

É possível calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ por meio de resoluções projetivas de \mathbb{Z} sobre o anel $\mathbb{Z}G$, entretanto, encontrar uma resolução projetiva pode não ser uma tarefa fácil. Em vista disso, seria interessante encontrar resoluções projetivas que sejam, em certo sentido, menores possíveis. Quando dizemos “menor”, nos referimos a duas coisas: ao comprimento da resolução e a existência de um conjunto gerador finito para cada módulo projetivo da resolução. Isto nos leva a noção de dimensão cohomológica e às condições FP , FP_n e FP_∞ .

5.1 DIMENSÃO COHOMOLÓGICA

Definição 5.1. *Sejam R um anel e M um R -módulo. Então a **dimensão projetiva** de M , denotada por $\text{proj dim}_R M$, é definida como sendo o ínfimo do conjunto de inteiros não negativos n , de modo que M admite uma resolução projetiva*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (5.1)$$

Dizemos que (5.1) tem comprimento n . Se M não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, dizemos que $\text{proj dim}_R M = \infty$.

Lema 5.2. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) $\text{proj dim}_R M \leq n$;
- (ii) $\text{Ext}_R^i(M, _) = 0$, se $i > n$;
- (iii) $\text{Ext}_R^{n+1}(M, _) = 0$;
- (iv) Se $0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ é qualquer sequência exata de R -módulos com cada P_i projetivo, então K é projetivo.

Demonstração. (iii) \Rightarrow (iv) Considere a sequência exata dada em (iv). Completando esta resolução para uma resolução projetiva, temos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0, \\ & & \searrow f & & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & & & L & & K \end{array}$$

em que $L = \text{Ker}(d_n)$ e $K = \text{Ker}(d_{n-1})$. Para qualquer R -módulo N um $(n+1)$ -cociclo é um homomorfismo $\varphi \in \text{Hom}_R(P_{n+1}, N)$ tal que $\varphi \circ d_{n+2} = 0$. Como L também é igual ao Coker(d_{n+2}), pela propriedade universal do Cokernel temos que existe um homomorfismo $\psi: L \rightarrow N$ tal que $\psi \circ f = \varphi$. Portanto o $(n+1)$ -cociclo pode ser representado por um homomorfismo $L \rightarrow N$.

O cociclo é um cobordo se, e somente se, φ se estende para $P_n \rightarrow N$. Como $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ então todo homomorfismo $L \rightarrow N$ se estende para $P_n \rightarrow N$. Em particular, se $N = L$ temos que $\text{Id}_L: L \rightarrow L$ se estende para $P_n \rightarrow L$, isto nos diz que a sequência exata

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i} & P_n & \longrightarrow & K \longrightarrow 0 \\ & & & \searrow & \downarrow & & \\ & & & \text{Id}_L & L & & \end{array}$$

cinde. Portanto $P_n \approx L \oplus K$, ou seja, K é projetivo.

As implicações $(iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ seguem facilmente. \square

A partir de agora consideraremos o caso em que $R = \mathbb{Z}G$ e $M = \mathbb{Z}$.

Definição 5.3. Dizemos que $cd G = n$ é a **dimensão cohomológica** de G se n for o menor inteiro tal que satisfaz as condições do Lema 5.2. Se não existir tal inteiro então dizemos que $cd G = \infty$.

Exemplo 5.4. O grupo trivial possui $cd G = 0$. De fato, se $G = \{1\}$ temos a seguinte resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre \mathbb{Z} :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Através do Lema 5.2 temos que a dimensão cohomológica de G pode ser vista também como sendo

$$\begin{aligned} cd G &= \text{proj dim}_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \\ &= \text{inf}\{n : \mathbb{Z} \text{ admite uma resolução projetiva sobre } \mathbb{Z}G \\ &\quad \text{de comprimento } n\} \\ &= \text{inf}\{n : H^i(G, _) = 0, \text{ para } i > n\} \\ &= \text{sup}\{n : H^n(G, M) \neq 0, \text{ para algum } \mathbb{Z}G\text{-módulo } M\}. \end{aligned}$$

Proposição 5.5. *Se $cd G < \infty$, então*

$$cd G = \sup\{n : H^n(G, F) \neq 0, \text{ para algum } \mathbb{Z}G\text{-módulo livre } F\}.$$

Demonstração. Suponha que $cd G = n < \infty$. Considere a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0,$$

em que F é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre. Como $H^i(G, _) = 0$, para $i > n$, temos a seguinte sequência exata

$$\dots \longrightarrow H^n(G, \text{Ker}(\varphi)) \longrightarrow H^n(G, F) \longrightarrow H^n(G, M) \longrightarrow 0.$$

Existe um módulo M tal que $H^n(G, M) \neq 0$. E pelo fato de $H^n(G, F) \rightarrow H^n(G, M)$ ser um epimorfismo segue que $H^n(G, F) \neq 0$. \square

Proposição 5.6. *Se H é um subgrupo de G então $cd H \leq cd G$. A igualdade é válida quando $cd G < \infty$ e $(G : H) < \infty$.*

Demonstração. Dada uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ esta também é uma resolução projetiva sobre $\mathbb{Z}H$. Então segue que $cd H \leq cd G$.

Agora, suponha que $cd G = n < \infty$. Sabemos que $H^n(G, F) \neq 0$, para algum módulo livre F .

Suponha que F' é um $\mathbb{Z}H$ -módulo livre de mesmo posto de F , assim temos

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}G \otimes_H F' &\approx \mathbb{Z}G \otimes_H \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}H \right) \\ &\approx \bigoplus_{i \in I} (\mathbb{Z}G \otimes_H \mathbb{Z}H) \\ &\approx \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G \approx F. \end{aligned}$$

Isto nos diz que $F \approx \text{Ind}_H^G F'$.

Como $(G : H) < \infty$ então $\text{Ind}_H^G F' \approx \text{Coind}_H^G F'$, consequente-

mente $F \approx \text{Coind}_H^G F'$. Pelo Lema de Shapiro segue que

$$\begin{aligned} H^n(H, F') &\approx H^n(G, \text{Coind}_H^G F') \\ &\approx H^n(G, F) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto $cd H \geq n$. □

Corolário 5.7. *Se $cd G < \infty$, então G é livre de torção.*

Demonstração. Suponha que G possui um elemento t de ordem finita n . Considere o subgrupo cíclico $H = \langle t \rangle$ de G . Como $H^{2k}(H, \mathbb{Z}) \neq 0$ para todo k (Exemplo 4.9) temos, pela proposição anterior, que $cd H = \infty$. Logo $cd G = \infty$, absurdo. Portanto G é livre de torção. □

Veremos a seguir que é possível encontrar uma resolução livre de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ de modo que seu comprimento é exatamente igual a $cd G$. Para isso precisamos do seguinte lema:

Lema 5.8. *Se P é um R -módulo projetivo, então existe um R -módulo livre F tal que $P \oplus F \approx F$.*

Demonstração. Como P é projetivo, temos que existe um R -módulo Q tal que $P \oplus Q$ é livre. Seja F a soma direta enumerável

$$(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \cdots.$$

Uma vez que a soma de módulos livres é livre, segue que F é livre. Desta forma, podemos escrever F como sendo $(P \oplus P \oplus \cdots) \oplus (Q \oplus Q \oplus \cdots)$. Adicionando mais uma cópia de P , obtemos $P \oplus F \approx F$. □

Proposição 5.9. *Para qualquer grupo G existe uma resolução livre de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento igual a $cd G$.*

Demonstração. Seja $n = cd G$. Suponha que $0 < n < \infty$. Escolha uma resolução livre parcial

$$F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de comprimento $n - 1$ e seja $K = \text{Ker}\{F_{n-1} \rightarrow F_{n-2}\}$.

Por meio do Lema 5.2 sabemos que K é projetivo e através do Lema 5.8 temos que existe F tal que $F \oplus K$ é livre. Desta forma, trocando F_{n-1} por $F \oplus F_{n-1}$ e definindo $\partial(a, b) = i(a)$, em que $i: K \rightarrow F_{n-1}$ é a inclusão canônica, $a \in K$ e $b \in F$, obtemos a seguinte resolução livre

$$0 \longrightarrow F \oplus K \xrightarrow{\partial} F \oplus F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

□

5.2 GRUPOS DO TIPO FP

Iniciaremos esta seção tratando a respeito dos R -módulos finitamente apresentados. O Teorema 5.11 apresenta definições equivalentes destes módulos e a partir disto estenderemos este conceito para as resoluções do tipo finito.

Lema 5.10. *Sejam*

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow K' \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow 0$$

duas seqüências exatas, em que P e P' são módulos projetivos. Então $P \oplus K' \approx P' \oplus K$.

Demonstração. Seja Q o pullback do diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow \pi \\ P' & \xrightarrow{\pi'} & M \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p} & P \\ p' \downarrow & & \downarrow \pi \\ P' & \xrightarrow{\pi'} & M \end{array} ,$$

com $Q = \{(x', x) \in P' \times P \mid \pi'(x') = \pi(x)\}$. Assim, temos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & K & = & K & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & K' & \rightarrow & Q & \rightarrow & P \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & K' & \rightarrow & P' & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

A primeira seqüência horizontal cinde, visto que P é projetivo. Desta forma, temos que $Q \approx K' \oplus P$. E da mesma maneira, a primeira seqüência exata vertical cinde fazendo com que $Q \approx K \oplus P'$. Logo $K' \oplus P \approx K \oplus P'$. \square

Teorema 5.11. *As seguintes condições sobre um R -módulo M são equivalentes:*

(i) *Existe uma seqüência exata*

$$R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

para certos inteiros m, n .

(ii) *Existe uma seqüência exata*

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

para certos P_0 e P_1 projetivos finitamente gerados.

(iii) *O módulo M é finitamente gerado e para todo epimorfismo $\varepsilon: P \rightarrow M$ com P projetivo e finitamente gerado, $\text{Ker}(\varepsilon)$ é finitamente gerado.*

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Visto que R^n e R^m são módulos livres e portanto projetivos, segue trivialmente (ii).

(ii) \Rightarrow (iii) Como $P_0 \rightarrow M$ é um epimorfismo e P_0 é finitamente gerado, segue que M é finitamente gerado.

Aplicando o Lema 5.10 temos que dadas as sequências exatas

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

obtemos $P \oplus \text{Ker}(\varphi) \approx P_0 \oplus \text{Ker}(\varepsilon)$. Uma vez que $P \oplus \text{Ker}(\varphi)$ e P_0 são finitamente gerados, segue que $\text{Ker}(\varepsilon)$ também é finitamente gerado.

(iii) \Rightarrow (i) Como M é finitamente gerado, sabemos que existe um epimorfismo $\varphi: R^m \rightarrow M$. Visto que R^m é projetivo, temos por hipótese que $\text{Ker}(\varphi)$ é finitamente gerado. Desta forma, existe um epimorfismo $\psi: R^n \rightarrow \text{Ker}(\varphi)$. Assim, obtemos a sequência exata

$$R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

□

Um módulo que satisfaz as condições do Lema 5.11 é chamado de **módulo finitamente apresentado**.

Se M é um R -módulo finitamente apresentado, dizemos que a sequência

$$R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é uma **apresentação finita** para M . Podemos generalizar esta ideia estendendo a noção para as resoluções do tipo finito. Uma resolução P é dita do **tipo finito** se todos os módulos P_i são finitamente gerados. Dizemos que M é do **tipo FP_n** se existe uma resolução projetiva P de M tal que P_i é finitamente gerado para todo $i \leq n$. Note que se M é do tipo FP_0 , então M é finitamente gerado. E se M é do tipo FP_1 então M é finitamente apresentado.

A condição FP_n fornece informações a respeito de resoluções projetivas e equivalentemente podemos definir esta condição em relação a resoluções livres, conforme veremos na Proposição 5.13.

Lema 5.12. *Sejam*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

seqüências exatas com P_i e P'_i projetivos para $i \leq n-1$. Então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \approx P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots .$$

Demonstração. Provaremos usando indução em n .

Sejam $K = \text{Ker}(\{P_{n-2} \rightarrow P_{n-3}\})$ e $K' = \text{Ker}(\{P'_{n-2} \rightarrow P'_{n-3}\})$. Considere $Q = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$ e $Q' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots$, pela hipótese de indução temos que $K \oplus Q \approx K' \oplus Q'$. Assim, obtemos as seguintes seqüências exatas

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \oplus Q \longrightarrow K \oplus Q \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P'_{n-1} \oplus Q' \longrightarrow K' \oplus Q' \longrightarrow 0.$$

Uma vez que $P_{n-1} \oplus Q$ e $P'_{n-1} \oplus Q'$ são projetivos, obtemos do lema anterior que $P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q' \approx P'_n \oplus P_{n-1} \oplus Q$. \square

Proposição 5.13. *Para qualquer módulo M e qualquer inteiro $n \geq 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma resolução parcial*

$$F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

em que cada F_i é livre e de posto finito.

(ii) *M é do tipo FP_n .*

(iii) *M é finitamente gerado, e para toda resolução parcial projetiva*

$$P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

do tipo finito com $k < n$, temos que $\text{Ker}\{P_k \rightarrow P_{k-1}\}$ é finitamente gerado.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Diretamente da hipótese segue imediatamente que M é do tipo FP_n .

(ii) \Rightarrow (iii) Suponha que M é do tipo FP_n , assim existe uma resolução parcial projetiva $P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, com $k < n$ e em que cada P_i é finitamente gerado. Considere

$$P'_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma outra resolução parcial projetiva, em que cada P'_i é finitamente

gerado. Pelo fato de $\text{Ker}(\{P_k \rightarrow P_{k-1}\})$ ser finitamente gerado, obtemos do Lema 5.11 (iii) que $\text{Ker}(\{P'_k \rightarrow P'_{k-1}\})$ também é finitamente gerado.

(iii) \Rightarrow (i) Como M é finitamente gerado, existe um epimorfismo $\varepsilon: F_0 \rightarrow M$, em que F_0 é livre e finitamente gerado, e por hipótese temos que $\text{Ker}(\varepsilon)$ é finitamente gerado. Da mesma forma, existe um epimorfismo $f_1: F_1 \rightarrow \text{Ker}(\varepsilon)$, em que F_1 é livre e finitamente gerado. Assim, considere $d_1 = i_1 \circ f_1$, em que i_1 é a inclusão canônica. Repetindo este processo obtemos a seguinte resolução parcial livre

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ & & \searrow f_2 & & \nearrow i_1 & \searrow f_1 & \nearrow i_0 \\ & & & & \text{Ker}(d_1) & & \text{Ker}(\varepsilon) \end{array}$$

até a dimensão n . Logo (i) é satisfeito. \square

A condição FP_n nos dá informações apenas até a dimensão n de uma resolução, entretanto existem resoluções que possuem módulos finitamente gerados em todas as dimensões, em outras palavras, teríamos a condição FP_n para todo n . Desta forma, dizemos que M é do **tipo FP_∞** se satisfaz as condições da seguinte proposição:

Proposição 5.14. *Seja M um R -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) M admite uma resolução livre do tipo finito.
- (ii) M admite uma resolução projetiva do tipo finito.
- (iii) M é do tipo FP_n para todo inteiro $n \geq 0$.

Demonstração. A demonstração desta proposição é similar a Proposição 5.13. \square

Voltaremos novamente para o caso em que $R = \mathbb{Z}G$ e $M = \mathbb{Z}$. Assim, podemos aplicar as condições FP_n e FP_∞ para os grupos. Dizemos que um grupo G é do **tipo FP_n (resp. FP_∞)** se \mathbb{Z} é do tipo FP_n (resp. FP_∞) como um $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Exemplo 5.15. Uma vez que o homomorfismo de aumento $\varepsilon: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ é um epimorfismo, segue que todo grupo é do tipo FP_0 . Considere agora a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \hookrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Se G é do tipo FP_1 então G é finitamente gerado. E reciprocamente, se G é finitamente gerado temos que $\text{Ker}(\varphi)$ é finitamente gerado, e portanto a sequência acima é uma apresentação finita para \mathbb{Z} , ou seja, G é do tipo FP_1 .

As condições FP_n se comportam bem em relação aos subgrupos de índice finito.

Proposição 5.16. *Seja H um subgrupo de G de índice finito. Então G é do tipo FP_n se, e somente se H é do tipo FP_n , para $0 \leq n \leq \infty$.*

Demonstração. Se G é do tipo FP_n então existe uma resolução parcial $P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ projetiva do tipo finito sobre o anel $\mathbb{Z}G$. Desta forma, podemos considerar esta mesma resolução sobre $\mathbb{Z}H$. O fato de P_i ser finitamente gerado nos diz que $P_i \approx \frac{\mathbb{Z}G^n}{L}$, para algum submódulo L de $\mathbb{Z}G^n$. Como $(G : H) < \infty$, segue que $\mathbb{Z}G^n$ é a soma finita de cópias de $\mathbb{Z}H$, conseqüentemente P_i é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}H$. Portanto H é do tipo FP_n .

Reciprocamente, suponha que H é do tipo FP_n . Seja P uma resolução projetiva parcial de \mathbb{Z} visto como $\mathbb{Z}G$ -módulo, de comprimento $k < n$.

Sabemos que P pode ser visto como uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}H$ -módulos do tipo finito. Da Proposição 5.13 segue que $\text{Ker}(P_k \rightarrow P_{k-1})$ é finitamente gerado sobre o anel $\mathbb{Z}H$. Logo $\text{Ker}(P_k \rightarrow P_{k-1})$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}G$ e portanto G é do tipo FP_n . \square

Existe uma outra noção que diz respeito a resoluções finitas do tipo finito, a saber, a condição FP . Dizemos que G é do **tipo FP** se \mathbb{Z} admite uma resolução projetiva do tipo finito e de comprimento finito.

Proposição 5.17. *G é do tipo FP se, e somente se, $cd G < \infty$ e G é do tipo FP_∞ .*

Demonstração. Se G é do tipo FP segue facilmente que $cd G < \infty$ e G é do tipo FP_∞ . Reciprocamente, se G é do tipo FP_∞ existe uma resolução projetiva de tipo finito de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Considere esta resolução até a dimensão $n - 1$

$$P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que $cd G = n$. Seja $P_n = \text{Ker}(P_{n-1} \rightarrow P_{n-2})$. Note que P_n é projetivo devido ao Lema 5.2 e finitamente gerado em virtude da Proposição 5.13. Logo G é do tipo FP . \square

5.3 CRITÉRIO DE BIERI-ECKMANN

Nosso objetivo nesta seção é provar o Critério de Bieri-Eckmann [1], o qual nos fornece uma relação entre a condição FP_∞ e $H_*(G, \prod_I \mathbb{Z}G)$. Isto nos ajudará a mostrar que o grupo de Thompson F é do tipo FP_∞ .

Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ um sistema inverso de R -módulos, então temos que $\{Tor_k^R(B, A_i)\}_{i \in I}$ é um sistema inverso de grupos abelianos. A partir disto, existe um único homomorfismo natural

$$Tor_k^R(B, \varprojlim A_i) \longrightarrow \varprojlim Tor_k^R(B, A_i), \quad k = 0, 1, \dots$$

Suponha que $\varprojlim A_i = \prod_I R$ e considere o caso quando $k = 0$, então o homomorfismo acima se reduz em

$$\mu_B: B \otimes_R \prod_I R \rightarrow \prod_I B,$$

dado por $\mu_B(b \otimes \prod_{i \in I} r_i) = \prod_{i \in I} br_i$, em que $b \in B$ e $r_i \in R$.

Veremos a seguir quais as implicações do fato de B ser finitamente gerado ou finitamente apresentado, isto nos será útil para demonstrar o Critério de Bieri-Eckmann. Antes, é necessário ter em mente o seguinte resultado, que é válido para módulos quaisquer:

Lema 5.18. *Considere o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas de R -módulos:*

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Suponha que φ_2 é um isomorfismo e que φ_3 é um epimorfismo. Então φ_1 é um epimorfismo se, e somente se, φ_3 é um monomorfismo.

Demonstração. Basta fazer uma “caça” ao diagrama. \square

Lema 5.19. (i) *O homomorfismo μ_B é um epimorfismo para todo produto direto $\prod_I R$ se, e somente se, B é finitamente gerado.*

(ii) *O homomorfismo μ_B é um isomorfismo para todo produto direto $\prod_I R$ se, e somente se, B é finitamente apresentado.*

Demonstração. (i) Suponha que μ_B é um epimorfismo para todo I e seja $I = B$ o conjunto de índices. Dado $\prod_{b \in B} b \in \prod_B B$ existe $c \in B \otimes_R \prod_B R$ tal que $\mu_B(c) = \prod_{b \in B} b$.

Sabemos que $c = \sum_{k=1}^m (b_k \otimes \prod_{b \in B} r_{bk})$. Assim,

$$\mu_B(c) = \sum_{k=1}^m \mu_B \left(b_k \otimes \prod_{b \in B} r_{bk} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\prod_{b \in B} b_k r_{bk} \right) = \prod_{b \in B} b.$$

Isto nos diz que $b = \sum_{k=1}^m b_k r_{bk}$. Logo B é gerado por $\{b_k\}_{k=1}^m$.

Reciprocamente, suponha B finitamente gerado. Seja $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ um conjunto gerador de B . Então para qualquer $\prod_{j \in I} b_j \in \prod_I B$ temos que

$$\prod_{j \in I} b_j = \sum_{i=1}^m \left(\prod_{j \in I} x_i r_i^j \right) = \mu_B \left(x_i \otimes \sum_{i=1}^m \prod_{i \in I} r_i^j \right).$$

(ii) Seja B um R -módulo finitamente gerado. Considere

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

uma apresentação de B , em que F é um R -módulo livre de posto finito. Com isso produzimos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} K \otimes_R \prod_I R & \longrightarrow & F \otimes_R \prod_I R & \longrightarrow & B \otimes_R \prod_I R & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \mu_K & & \downarrow \mu_F & & \downarrow \mu_B & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod_I K & \longrightarrow & \prod_I F & \longrightarrow & \prod_I B \longrightarrow 0. \end{array}$$

Vejamos que μ_F é um isomorfismo.

Uma vez que $F \approx R^n$, então μ_F pode ser considerado como sendo um homomorfismo $R^n \otimes_R \prod_I R \rightarrow \prod_I (R^n)$.

Seja $\varphi : \prod_I R^n \rightarrow R^n \otimes_R \prod_I R$ o homomorfismo dado por

$$\varphi \left(\prod_{i \in I} r_i^1, \dots, \prod_{i \in I} r_i^n \right) = e_1 \otimes \prod_{i \in I} r_i^1 + \dots + e_n \otimes \prod_{i \in I} r_i^n,$$

com $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ no qual a j -ésima entrada é igual a 1. Observe que

$$\mu_F \circ \varphi \left(\prod_{i \in I} r_i^1, \dots, \prod_{i \in I} r_i^n \right) = \mu_F(e_1 \otimes \prod_{i \in I} r_i^1 + \dots + e_n \otimes \prod_{i \in I} r_i^n)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i \in I} e_1 r_i^1 + \cdots + \prod_{i \in I} e_n r_i^n \\
&= \left(\prod_{i \in I} r_i^1, \dots, \prod_{i \in I} r_i^n \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \mu \left((r_1, \dots, r_n) \otimes \prod_{i \in I} s_i \right) &= \varphi \left(\prod_{i \in I} (r_1, \dots, r_n) s_i \right) \\
&= \varphi \left(\prod_{i \in I} (r_1 s_i, \dots, r_n s_i) \right) \\
&= e_1 \otimes \prod_{i \in I} r_1 s_i + \cdots + e_n \otimes \prod_{i \in I} r_n s_i \\
&= e_1 \otimes r_1 \prod_{i \in I} s_i + \cdots + e_n \otimes r_n \prod_{i \in I} s_i \\
&= e_1 r_1 \otimes \prod_{i \in I} s_i + \cdots + e_n r_n \otimes \prod_{i \in I} s_i \\
&= \left((r_1, \dots, r_n) \otimes \prod_{i \in I} s_i \right).
\end{aligned}$$

Portanto $\mu_F^{-1} = \varphi$.

Suponha que μ_B é um isomorfismo para todo produto direto $\prod_I R$. Desta forma, estamos nas hipóteses do Lema 5.18, assim μ_K é um epimorfismo. Pelo item (i) segue que K é finitamente gerado.

Reciprocamente, se μ_K é um epimorfismo segue do Lema 5.18 que μ_B é um isomorfismo. □

A prova do Lema 5.19 nos diz que se B é um módulo finitamente apresentado então qualquer sequência

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

com F sendo um módulo livre e finitamente gerado, é uma apresentação finita de B .

Proposição 5.20. *O R -módulo B admite uma resolução livre $\varepsilon : F \rightarrow B$, com F_i finitamente gerado para todo $i \leq k$ se, e somente se B é finitamente apresentado e $\text{Tor}_i^R(B, \prod_I R) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k-1$, $k \geq 1$*

e todo produto direto \prod .

Demonstração. Se $\varepsilon: F \rightarrow B$ é uma resolução livre em que cada F_i é finitamente gerado quando $i \leq k$ e $k \geq 1$, então B é um módulo finitamente apresentado.

Seja

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad (5.2)$$

uma apresentação finita de B . Considere o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & Tor_1^R(B, \prod_I R) & \longrightarrow & K_0 \otimes_R \prod_I R & \longrightarrow & F_0 \otimes_R \prod_I R & \longrightarrow & B \otimes_R \prod_I R & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \mu_{K_0} & & \downarrow \mu_{F_0} & & \downarrow \mu_B & & \\ & 0 & \longrightarrow & \prod_I K_0 & \longrightarrow & \prod_I F_0 & \longrightarrow & \prod_I B & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

em que μ_B e μ_{F_0} são isomorfismos e μ_{K_0} é um epimorfismo.

Pelo Lema 5.19, K_0 é finitamente apresentado se, e somente se, μ_{K_0} é um monomorfismo, isto é, $Tor_1^R(B, \prod_I R) = 0$ para todo I .

Supondo que K_0 é finitamente apresentado, considere a apresentação finita

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0. \quad (5.3)$$

Aplicando o mesmo argumento acima segue que K_1 é finitamente apresentado se, e somente se, $Tor_1^R(K_0, \prod_I R) = 0$.

De (5.2) produzimos a seguinte seqüência exata longa:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Tor_2^R(B, \prod_I R) \longrightarrow Tor_1^R(K_0, \prod_I R) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

em que $Tor_2^R(F_0, \prod_I R) = Tor_1^R(F_0, \prod_I R) = 0$. Assim,

$$Tor_2^R\left(B, \prod_I R\right) \approx Tor_1^R\left(K_0, \prod_I R\right).$$

Repetindo este argumento obtemos o resultado. □

Teorema 5.21 (Critério de Bieri-Eckmann). *Um grupo G é do tipo FP_∞ se, e somente se, G é finitamente gerado e $H_k(G, \prod_I \mathbb{Z}G) = 0$ para todo $k \geq 1$ e todo produto direto $\prod_I \mathbb{Z}G$.*

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Suponha que G é do tipo FP_∞ , então temos que \mathbb{Z} é finitamente apresentado sobre $\mathbb{Z}G$. Então $\text{Ker}(\varepsilon)$ finitamente gerado, isto nos leva a concluir que G também é finitamente gerado (Observação 4.2). Portanto, da Proposição 5.20 temos que $\text{Tor}_i^G(\mathbb{Z}, \prod_I \mathbb{Z}G) = H_i(G, \prod_I \mathbb{Z}G) = 0$, para todo $i \geq 1$ e todo produto direto $\prod_I \mathbb{Z}G$.

Reciprocamente, se G é finitamente gerado temos que $\text{Ker}(\varepsilon)$ é finitamente gerado. Portanto, o resultado novamente segue da Proposição 5.20. \square

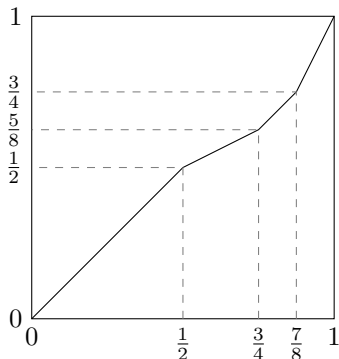
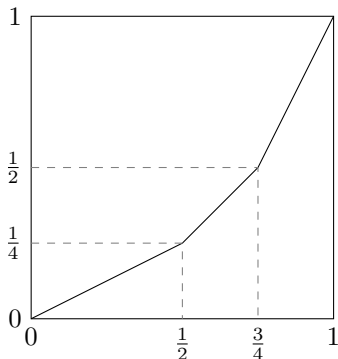
6 O GRUPO DE THOMPSON F

Neste capítulo mostraremos três propriedades que o grupo de Thompson satisfaz. Estas propriedades se referem à torção do grupo, sua dimensão cohomológica e à condição de finitude. Esta última, nos diz que o grupo é do tipo FP_∞ e para mostrarmos isto nos basearemos principalmente em Brown [3], e além de Bieri e Eckmann [1], Cannon et al. [4] e Higman [7]. Além disso, exibiremos duas apresentações para F .

Definição 6.1. *Seja F o conjunto dos homeomorfismos lineares por partes do intervalo $[0, 1]$ para $[0, 1]$ que são diferenciáveis exceto em uma quantidade finita de racionais diádicos (números da forma $\frac{a}{2^k}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$) e cujas derivadas são potências inteiras de 2. Tal conjunto é grupo por composição de funções um grupo, que é chamado grupo de Thompson F .*

Exemplo 6.2. Considere as funções $A(x)$ e $B(x)$ dadas por

$$A(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{8}, & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 2x - 1, & \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



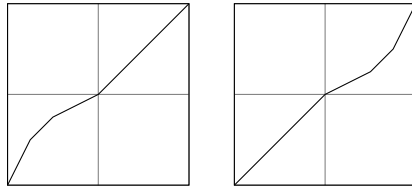
As funções $A(x)$ e $B(x)$ são elementos do grupo F . Posteriormente, veremos que estes homeomorfismos são geradores do grupo.

Vejamos agora as primeiras propriedades satisfeitas por F .

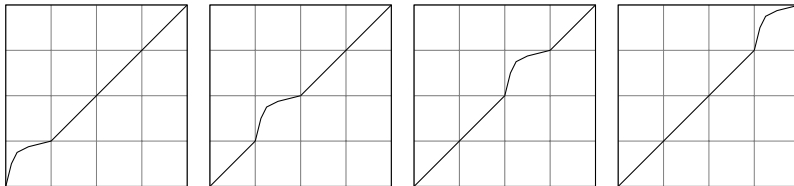
Teorema 6.3. *O grupo F é livre de torção e $cd(F) = \infty$.*

Demonstração. Vejamos que F é livre de torção. Seja $f \in F$ tal que $f \neq Id$. Seja x o maior elemento de $[0, 1]$ tal que $f|_{[0,x]} = Id_{[0,x]}$. Então a derivada pela direita em x é igual a 2^k para algum $k \neq 0$. Desta forma, neste ponto a derivada pela direita da função f^n é 2^{kn} para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $f^n \neq Id$.

Para mostrar que $cd(F) = \infty$, tome $f, g \in F$ tais que $fg = gf$. Estas funções sempre existem, por exemplo as funções representadas abaixo comutam entre si.



Então, $\mathbb{Z}^2 \approx \langle f, g \rangle$ é um subgrupo de F . Da mesma forma, podemos estender esta ideia para n elementos. Para $n = 4$, podemos tomar as seguintes funções:



Portanto F possui um subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^n . Pelo Lema de Shapiro obtemos $H^n(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \approx H^n(F, Coind_{\mathbb{Z}^n}^F \mathbb{Z})$.

O toro n -dimensional $Y = S^1 \times \dots \times S^1$ é um $K(\mathbb{Z}^n, 1)$, visto que seu recobrimento universal é \mathbb{R}^n que é contrátil. Assim, $H^n(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) = H^n(Y, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$. Isto nos diz que $cd(\mathbb{Z}^n) = n$. Portanto, $cd(F) \geq n$.

□

Este teorema juntamente com a Proposição 5.17 nos mostram que o grupo F não pode ser do tipo FP .

A definição do grupo de Thompson não é das mais amigáveis, entretanto existem maneiras de representar os elementos de F que

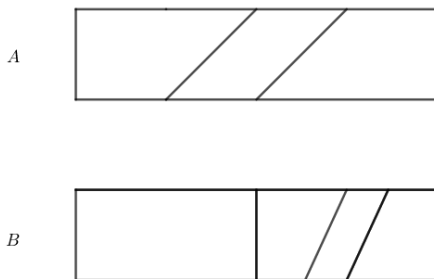
ajudam a trabalhar com ele. Veremos a seguir duas formas de representar estes elementos, primeiramente por meio de diagramas retangulares e, o mais importante para nossa teoria, mediante árvores binárias.

6.1 DIAGRAMAS RETANGULARES

Baseado em Cannon et al. [4], descreveremos os diagramas retangulares da seguinte forma: para cada elemento $f \in F$ podemos representá-lo construindo um retângulo, cuja parte superior corresponde ao domínio de f , enquanto a parte inferior representa a imagem de f . Para todo ponto x na parte superior do retângulo em que f não é diferenciável, construímos um segmento de reta que sai de x e chega em $f(x)$.

Exemplo 6.4. Os homeomorfismos $A(x)$ e $B(x)$ vistos anteriormente, são representados da seguinte maneira:

Figura 10 – Diagramas retangulares de A e B

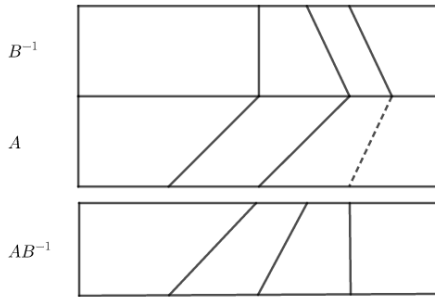


Fonte: adaptada de Cannon et al. [4]

Para representar a composição de homeomorfismos, é feita a justaposição dos retângulos de cada homeomorfismo. Vejamos os exemplos.

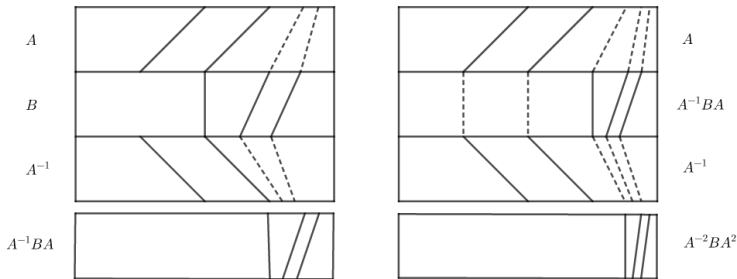
Exemplo 6.5. As figuras abaixo representam os diagramas retangulares dos elementos AB^{-1} , $A^{-1}BA$ e $A^{-2}BA^2$ de F .

Figura 11 – Diagrama retangular de AB^{-1}



Fonte: adaptada de Cannon et al. [4]

Figura 12 – Diagramas retangulares de $A^{-1}BA$ e $A^{-2}BA^2$



Fonte: adaptada de Cannon et al. [4]

Seguindo o padrão da Figura 12, conseguimos construir os diagramas retangulares dos homeomorfismos da forma $A^{-(n-1)}BA^{n-1}$. A partir disso, definiremos $X_n = A^{-(n-1)}BA^{n-1}$ para $n \geq 1$, que possui a seguinte representação

Figura 13 – Diagrama retangular de X_n 

Fonte: adaptada de Cannon et al. [4]

Quando $n = 0$, definiremos $X_0 = A$.

6.2 ÁLGEBRA DO TIPO 2

Introduziremos um sistema algébrico chamado de álgebra do tipo 2.

Considere o sistema algébrico que consiste em um conjunto infinito V munido de uma bijeção $\alpha: V \rightarrow V^2$. A aplicação α é descrita por meio das aplicações $\alpha_i: V \rightarrow V$, $i \in \{0, 1\}$. Conforme Brown [3] e Higman [7], denotaremos $x\alpha_i$ como sendo a imagem de x mediante α_i . Assim, a aplicação $\alpha: V \rightarrow V^2$ é descrita da seguinte forma

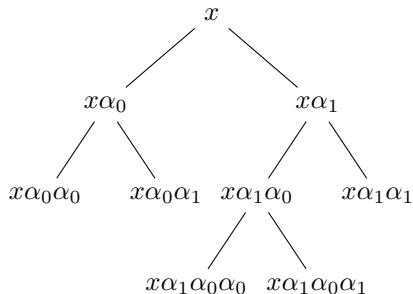
$$x\alpha \mapsto (x\alpha_0, x\alpha_1).$$

Definiremos a inversa de α como sendo a aplicação $\lambda: V^2 \rightarrow V$. As aplicações α_0 , α_1 e λ satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} (x\alpha_0, x\alpha_1)\lambda &= x \\ (x_0, x_1)\lambda\alpha_0 &= x_0 \\ (x_0, x_1)\lambda\alpha_1 &= x_1 \end{aligned}$$

para todo $x, x_0, x_1 \in V$. A este sistema, o conjunto V munido das aplicações α e λ que satisfazem as relações acima, chamaremos de **álgebra do tipo 2**.

Estas relações entre α e λ podem ser representadas por meio de árvores binárias, como por exemplo:



Dizemos que x é a **raiz** da árvore e chamaremos de **filhos** de x os nós representados pelas imagens de x por α_0 e α_1 . Os nós que não possuem filhos são chamados de **folhas**. No caso acima, temos cinco folhas na árvore.

A partir disso, dado um conjunto $X = \{x_j\}_{j \in J}$, construiremos uma álgebra gerada por X que denotaremos por $F(X)$ (Ver Higman [7]). Diremos ainda que X é uma **base** de $F(X)$.

Usaremos novamente as aplicações α_0, α_1 e λ para descrever $F(X)$. Seja $A = \{\alpha_0, \alpha_1\}$. Assumiremos que $X \cap (A \cup \{\lambda\}) = \emptyset$.

Dizemos que uma **forma padrão sobre X** é uma seqüência de elementos de $X \cup A \cup \{\lambda\}$ que satisfaz as seguintes regras:

- (i) $x\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$ é uma forma padrão sempre que $x \in X, k \geq 0$ e $0 \leq i_j \leq 1$ para $j = 1, 2, \dots, k$.
- (ii) Se w_0, w_1 são formas padrões, então $(w_0, w_1)\lambda$ também é, a menos que exista uma forma padrão u tal que $w_i = u\alpha_i$ para $i = 0, 1$.

O conjunto das formas padrão se torna uma álgebra do tipo 2, por meio das relações

$$\begin{aligned} (x\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})\alpha_i &= x\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\alpha_i \\ ((w_0, w_1)\lambda)\alpha_i &= w_i \end{aligned}$$

para $i = 0, 1$ e

$$(w_0, w_1)\lambda = w_0w_1\lambda$$

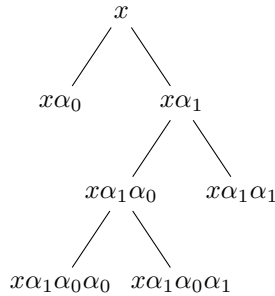
a menos que exista uma forma padrão u tal que $w_i = u\alpha_i$ para $i = 0, 1$, neste caso definimos

$$(w_0, w_1)\lambda = (u\alpha_0, u\alpha_1) = u.$$

Chamaremos esta estrutura de **álgebra livre** gerada por X .

Por meio da base $X = \{x_j\}$, podemos construir uma nova base de $F(X)$ removendo um determinado x_j e substituindo-o pelos seus filhos $x_j\alpha_0$ e $x_j\alpha_1$. Aplicando α_0 , α_1 e λ nos elementos da nova base, conseguimos obter toda a álgebra $F(X)$. Esta nova base é chamada de uma **expansão simples** de X . A operação obtida por meio de uma quantidade finita de composições de expansões simples resulta no que chamaremos de uma **expansão** de X .

Expansões de X são associadas a árvores binárias finitas, em que suas folhas são exatamente os elementos da nova base. Por exemplo, se $X = \{x\}$, a expansão $Y = \{x\alpha_0, x\alpha_1\alpha_0\alpha_0, x\alpha_1\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1\alpha_1\}$ é representada da seguinte forma:



Observando a árvore acima, é fácil ver, por exemplo, que a imagem de $x\alpha_1$ por meio de α resulta no par $(x\alpha_1\alpha_0, x\alpha_1\alpha_1)$ e a imagem do par $(x\alpha_1\alpha_0, x\alpha_1\alpha_1)$ por meio de λ é exatamente $x\alpha_1$. Porém, se aplicarmos λ no par $(x\alpha_1\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1\alpha_1)$, obteremos também um elemento de $F(X)$, mas tal elemento não será visível na árvore. A estes chamaremos de **elementos invisíveis** de $F(X)$.

Além de ser possível fazer expansões, podemos também através de λ , obter contrações. Dizemos que Z é uma **contração** de Y quando Z pode ser obtida de Y através uma quantidade finita de contrações simples. Uma **contração simples** consiste em tomar um par (y_0, y_1) de distintos elementos de Y e trocá-los por $(y_0, y_1)\lambda$. Ou seja, Z é uma contração de Y se Y é uma expansão de Z .

Uma base também pode ser formada a partir das contrações. Como por exemplo, se $Y = \{x\alpha_0, x\alpha_1\alpha_0\alpha_0, x\alpha_1\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1\alpha_1\}$, então $Y' = \{x\alpha_0, x\alpha_1\alpha_0\alpha_0, (x\alpha_1\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1\alpha_1)\lambda\}$ é uma base.

É usual denotar por V_2 a álgebra do tipo 2 gerada por um conjunto X unitário, mesmo que as contrações e expansões de bases mostrem que a cardinalidade de X não é um invariante de $F(X)$.

Um fato importante é que sempre existe uma expansão comum entre duas bases de $F(X)$.

Teorema 6.6. *Duas bases finitas de $F(X)$ possuem uma expansão em comum.*

A demonstração do teorema acima decorre dos dois próximos lemas. Antes, introduziremos uma notação baseada em Higman [7]. Seja X um subconjunto de uma álgebra V em V_2 e seja $A = \{\alpha_0, \alpha_1\}$. Denotaremos por $X \langle A \rangle$ a subálgebra gerada por X .

Lema 6.7. *Para cada $x \in V$ o conjunto $x \langle A \rangle \setminus X \langle A \rangle$ é finito.*

Demonstração. Suponha que para cada $x \in V$ temos que o número de λ envolvidos em x é m , então temos que $x\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} \in X \langle A \rangle$ em que $r \geq m$. Assim, os elementos de $x \langle A \rangle \setminus X \langle A \rangle$ são da forma $x\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} \in X \langle A \rangle$ em que $r < m$, e claramente é uma quantidade finita. \square

Lema 6.8. *Se X é um conjunto finito, então as seguintes condições em um subconjunto \mathcal{U} de $F(X)$ contido em $X \langle A \rangle$ são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{U} = X \langle A \rangle \cap Y \langle A \rangle$, para algum conjunto Y gerador de $F(X)$.
- (ii) \mathcal{U} é A -fechado e $X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}$ é finito.
- (iii) $\mathcal{U} = Z \langle A \rangle$, para alguma expansão Z de X .

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Suponha que $\mathcal{U} = X \langle A \rangle \cap Y \langle A \rangle$, em que Y é uma base de $F(X)$.

Sabemos que $X \langle A \rangle$ e $Y \langle A \rangle$ são A -fechados no sentido de que para todo elemento $x \in X \langle A \rangle$ e $y \in Y \langle A \rangle$, temos que $x\alpha_i \in X \langle A \rangle$ e $y\alpha_i \in Y \langle A \rangle$ para $i = 0, 1$. Consequentemente, \mathcal{U} é fechado.

Pelo Lema 6.7, temos que para qualquer $x \in X$ o conjunto $x \langle A \rangle \setminus Y \langle A \rangle$ é finito.

Como X é finito, isto nos diz que $X \langle A \rangle \setminus Y \langle A \rangle = X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}$ é finito.

(ii) \Rightarrow (iii) Provaremos utilizando o princípio de indução na cardinalidade de $X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}$.

Se $|X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}| = 0$ temos que $X = Z$.

Suponha que o resultado é válido para $|X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}| = n - 1$.

Seja $w \in X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}$ tal que w envolva o maior número possível de α_i . Considere $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cup \{w\}$. Note que \mathcal{U}^* também é A -fechado e que $|X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}^*| = |X \langle A \rangle \setminus \mathcal{U}| - 1 = n - 1$. Assim, pela hipótese de indução existe uma expansão Z^* de X tal que $\mathcal{U}^* = Z^* \langle A \rangle$.

O elemento $w \in Z^*$, pois caso contrário podemos escrever $w = z\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$, com $z \in Z^*$ e $r > 0$. Consequentemente, $z \in \mathcal{U}^* \setminus \{w\} = \mathcal{U}$. Mas como \mathcal{U} é A -fechado temos que $w \in \mathcal{U}$, absurdo. Portanto, $w \in Z^*$.

Seja $Z = (Z^* \setminus \{w\}) \cup \{w\alpha_0, w\alpha_1\}$. Assim, Z é uma expansão de X e pela forma como escolhemos w segue que $w\alpha_0, w\alpha_1 \in \mathcal{U}$. Logo, $U = Z \langle A \rangle$.

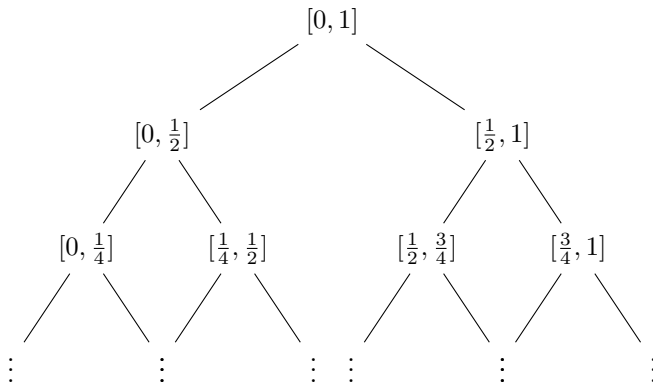
(iii) \Rightarrow (i) Tomando $Y = Z$ segue o resultado. □

A partir de agora, assumiremos que os elementos das bases de $F(X)$ são intervalos diádicos em $[0, 1]$, ou seja focaremos na construção de árvores binárias de intervalos diádicos em $[0, 1]$.

Um **intervalo diádico** em $[0, 1]$ é um intervalo da forma $\left[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}\right]$, em que a e n são inteiros não negativos tais que $a \leq 2^n - 1$.

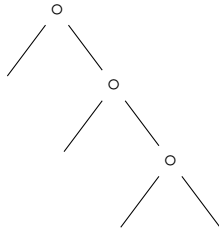
Denotaremos por Λ a árvore formada pelos intervalos diádicos. A árvore Λ é definida da seguinte forma:

- (i) A raiz de Λ é o intervalo $[0, 1]$;
- (ii) As arestas são os pares (I, J) , em que I e J são intervalos diádicos;
- (iii) A aresta (I, J) é uma aresta esquerda se I é a metade esquerda do intervalo J ;
- (iv) A aresta (I, J) é uma aresta direita se I é a metade direita do intervalo J ;

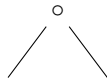


Denotaremos por Λ -tree uma subárvore finita qualquer de Λ com raiz em $[0, 1]$. Chamaremos de Λ_n a subárvore de Λ -tree que possui

$n + 1$ folhas e o lado direito da árvore tem comprimento n . Por exemplo, Λ_3 é da forma



Uma subárvore de Λ é dita **caret** quando possui apenas duas folhas, como representado abaixo.



Uma partição de $[0, 1]$ é chamada de **partição diádica** se, e somente se os intervalos da partição são diádicos.

Existe uma correspondência bijetora entre as partições diádicas e a árvore do tipo Λ -tree. Note que as folhas de Λ -tree são os intervalos de uma partição diádica. E os intervalos de uma partição diádica determinam uma quantidade finita de folhas.

Lema 6.9. *Seja $f \in F$. Então existe uma partição padrão diádica $0 = x_0 < x_2 < \dots < x_n = 1$ tal que f é linear em todo intervalo da partição e $0 = f(x_0) < f(x_2) < \dots < f(x_n) = 1$ é uma partição diádica.*

Demonstração. Escolha uma partição P de $[0, 1]$ no qual os pontos são números racionais diádicos, em que f é linear em todo intervalo de P .

Seja $[a, b]$ um intervalo de P . Suponha que a derivada de f é 2^{-k} . Seja m um inteiro tal que $m \geq 0$, $m + k \geq 0$, $2^m a \in \mathbb{Z}$, $2^m b \in \mathbb{Z}$, $2^{m+k} f(a) \in \mathbb{Z}$ e $2^{m+k} f(b) \in \mathbb{Z}$.

Então $a < a + \frac{1}{2^m} < a + \frac{2}{2^m} < a + \frac{3}{2^m} < \dots < b$ é uma partição diádica de $[0, 1]$, assim temos que

$$f(a) < f\left(a + \frac{1}{2^m}\right) < f\left(a + \frac{2}{2^m}\right) < f\left(a + \frac{3}{2^m}\right) < \dots < f(b),$$

ou seja,

$$f(a) < f(a) + \frac{1}{2^{m+k}} < f(a) + \frac{2}{2^{m+k}} < f(a) + \frac{3}{2^{m+k}} < \dots < f(b)$$

é uma partição diádica de $[f(a), f(b)]$. \square

Definição 6.10. *Um diagrama de árvores é um par (R, S) de árvores do tipo Λ -tree, tal que R e S têm o mesmo número de folhas. Este diagrama é representado da seguinte forma:*

$$R \longrightarrow S.$$

A árvore R é chamada de domínio, enquanto S é chamada de imagem do diagrama.

Os diagramas de árvores binárias nos auxiliam na representação dos elementos do grupo F . O Lema 6.9 nos diz que dado $f \in F$, sempre existem partições P e Q , tais que f é linear nos intervalos de P e f mapeia tais intervalos para os intervalos de Q . Assim, existe um diagrama de árvores (R, Q) , em que R, S são do tipo Λ -tree associadas às partições P e Q , respectivamente.

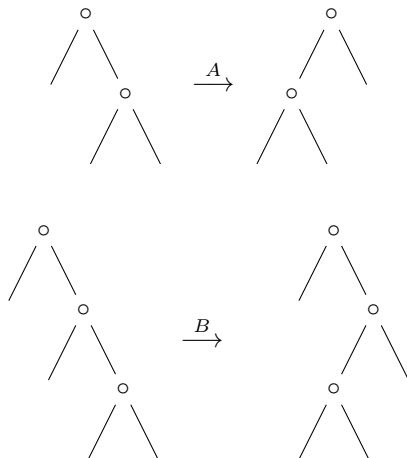
Observe que f não possui apenas uma representação, visto que P e Q não são únicos. Por exemplo, se (R, S) é um diagrama para f , basta acrescentar dois carets, um em R e outro em S . Se I, J são folhas que estão na posição n de R e S , respectivamente, para algum inteiro n , considere I_1 e I_2 as folhas de um caret C de raiz I . Da mesma forma, considere J_1 e J_2 folhas de um caret D de raiz J . Pelo fato de f ser linear em I e $f(I) = J$ segue que $f(I_1) = J_1$ e $f(I_2) = J_2$. Defina $R' = R \cup C$ e $S' = S \cup D$, assim (R', S') é um diagrama de árvores que também representa f .

Apesar de não existir apenas um diagrama que represente f , da mesma forma que podemos acrescentar carets no diagrama, podemos retirar. Porém, existe um momento que não é possível retirar mais carets, senão as informações contidas no diagrama sobre a função f são perdidas. Isto nos motiva a seguinte definição.

Definição 6.11. *Seja (R, S) um diagrama de árvores para $f \in F$. Seja n um inteiro positivo tal que as folhas das posições n e $n + 1$ de R , respectivamente S , estão em um caret C , respectivamente D . O diagrama (R, S) é chamado **reduzido** se não existe um inteiro positivo n tal que os carets C e D podem ser removidos a fim de obter outra representação de f .*

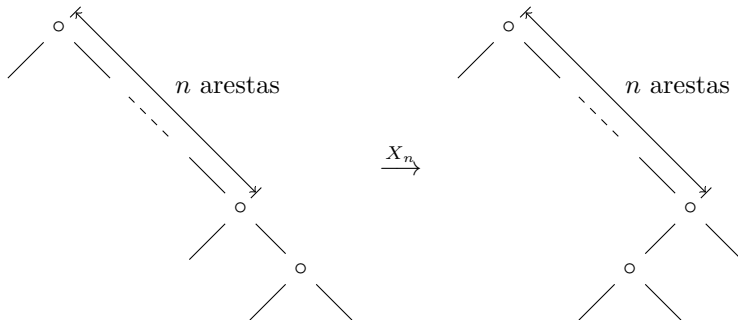
Qualquer elemento de F possui um único diagrama reduzido que o representa. Além disso, se (R, S) é um diagrama de árvore temos que existe $f \in F$ tal que f é linear em toda folha de R e f mapeia, em ordem, as folhas de R nas folhas de S .

Exemplo 6.12. Os elementos A e B são representados pelos seguintes diagramas reduzidos



Se (R, S) é uma representação para f e (R', R) é uma representação para g , então (R', S) é uma representação para fg .

A Figura 13 nos mostra que a representação por meio de árvores de X_n é dada por

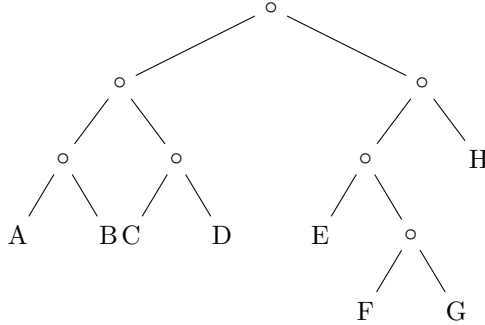


6.3 PRESENTAÇÃO DE F

Mostraremos, com base em Cannon et al. [4], duas apresentações do grupo de Thompson F . Uma envolvendo os homeomorfismos A e B , e outra envolvendo X_n . Para isso, definiremos o expoente de uma Λ -tree.

Definição 6.13. *Sejam I_0, \dots, I_n as folhas de uma Λ -tree R , nesta ordem. Para todo inteiro k , com $0 \leq k \leq n$, seja a_k o tamanho máximo da soma das arestas esquerdas que partem de I_k em R as quais não tocam a parte direita da árvore. Então a_k é o k -ésimo expoente de S .*

Exemplo 6.14. Considere a seguinte árvore de oito folhas.



Para encontrarmos os expoentes, precisamos contar quantas arestas esquerdas existem ligando as folhas que estão em uma aresta esquerda com a raiz da árvore. As folhas que estão em arestas direitas sempre possuem expoente igual a zero.

Por exemplo, a folha A é ligada por três arestas esquerdas até a raiz da árvore. Cada aresta conta como uma unidade, exceto quando a aresta toca a parte direita da árvore. Desta forma, a folha A tem o expoente igual a 2.

Na folha C, temos três arestas que a ligam até a raiz. Dentre as três arestas, uma toca a parte direita da árvore, outra é uma aresta direita e apenas uma é uma aresta esquerda que não toca a parte direita da árvore. Assim, a folha C tem expoente 1.

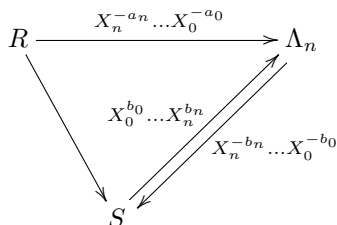
As folhas B, D, G e H estão em arestas direitas, então os expoentes são iguais a zero.

Desta forma, os expoentes desta árvore são, nesta ordem, 2, 0, 1, 0, 1, 1, 0 e 0.

Relacionaremos agora, mais efetivamente, os elementos de F com os diagramas de árvores.

Teorema 6.15. *Sejam R, S Λ -trees com $n + 1$ folhas, para algum inteiro não negativo n . Sejam a_0, \dots, a_n expoentes de R e b_0, \dots, b_n expoentes de S . Então a função em F representada pelo diagrama (R, S) é $X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n} X_n^{-a_n} \dots X_2^{-a_2} X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}$.*

Demonstração. Mostraremos que o diagrama de árvore (R, Λ_n) representa a função $X_n^{-a_n} \dots X_0^{-a_0}$, pois feito isto obtemos, por meio de composição, a função que é representada por (R, S) .

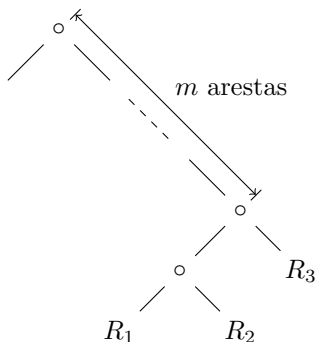


Vamos provar este teorema usando indução em $a = \sum_{i=0}^n a_i$.

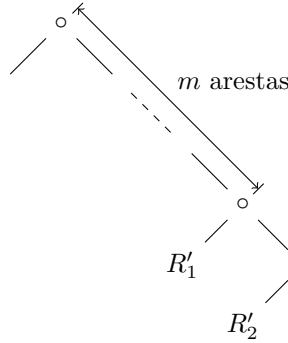
Se $a = 0$, temos que $R = \Lambda_n$.

Suponha que $a > 0$ e que (R, Λ_n) é o diagrama de $X_n^{-a_n} \dots X_0^{-a_0}$ para os valores menores que a .

Seja m o menor índice tal que $a_m > 0$. Então existem R_1, R_2 e R_3 subárvores de R que representam R da seguinte forma



Seja R' uma Λ -tree sendo R'_1, R'_2 e R'_3 suas subárvores que são isomorfas a R_1, R_2 e R_3 , respectivamente, sendo que um isomorfismo de árvores leva arestas esquerdas em arestas esquerdas e arestas direitas em arestas direitas. Representamos R' como abaixo



Observe que a função X_m^{-1} é representada por (R, R') . Se a'_0, \dots, a'_n são os expoentes de R' , então $a'_m = a_m - 1$ e quando $k \neq m$, devido ao isomorfismo, temos que $a'_k = a_k$. Assim, $a - 1 = \sum_{i=0}^n a_i - 1$ e pela hipótese de indução obtemos que o diagrama de $X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m+1} \dots X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}$ é (R', Λ_n) .

Como a_m é o menor tal que $a_m > 0$ e X_m^{-1} tem o diagrama (R, R') segue que

$$\begin{aligned} (X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m+1} \dots X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}) X_m^{-1} &= X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m} \\ &= X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m} \dots X_1^{-a_1} X_0^{-a_0} \end{aligned}$$

é representado por (R, Λ_n) . □

Teorema 6.16. *Sejam R, S Λ -trees com $n+1$ folhas, para algum inteiro não negativo n . Sejam a_0, \dots, a_n expoentes de R e b_0, \dots, b_n expoentes de S . O diagrama (R, S) é reduzido se, e somente se*

(i) *as últimas duas folhas de R estão em um caret, então as últimas folhas de S não estão em um caret;*

(ii) *para todo inteiro k com $0 \leq k \leq n$, se $a_k > 0$ e $b_k > 0$ então $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que (R, S) é reduzido.

Se as últimas folhas de R estão em um caret, então pelo fato de (R, S) ser reduzido, obrigatoriamente as últimas folhas de S não estão em um caret.

Suponha que $a_k > 0$ e $b_k > 0$ para todo k , com $0 \leq k \leq n$. Se $a_{k+1} = 0$ e $b_{k+1} = 0$ teríamos que a_k e a_{k+1} estariam em um caret, e da mesma forma b_k e b_{k+1} . Isto contraria a hipótese de (R, S) ser reduzida.

(\Leftarrow) Sejam C e D carets de R e S , respectivamente, em que seus vértices estão na posição k e $k+1$. Assim, $a_k > 0$ e $b_k > 0$ e por hipótese temos que $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$, portanto não existem tais carets.

Suponha que as últimas duas folhas de R estão em um caret, então por (i) temos que as últimas folhas de S não estão em um caret. Logo, (R, S) é reduzido. □

Os teoremas mostrados acima originam o seguinte resultado.

Corolário 6.17. *Todo elemento não nulo de F pode ser expresso unicamente na forma normal*

$$X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n} X_n^{-a_n} \dots X_2^{-a_2} X_1^{-a_1} X_0^{-a_0},$$

onde $n, a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ são inteiros tais que

(i) exatamente um dos a_n e b_n é diferente de zero;

(ii) se $a_k > 0$ e $b_k > 0$ para algum inteiro k com $0 \leq k \leq n$, então $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$. Além disso, todo elemento de F que é expresso na forma normal é não trivial.

O corolário anterior motiva a seguinte definição.

Definição 6.18. *As funções em F da forma $X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n}$, com $b_k \geq 0$ para todo $0 \leq k \leq n$, são chamados de positivos. As inversas de elementos positivos são chamados elementos negativos.*

A seguir, apresentaremos os últimos resultados desta seção que mostrarão duas apresentações para F . Considere os seguintes grupos

$$F_1 = \langle A, B; [AB^{-1}, A^{-1}BA] = 1, [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] = 1 \rangle$$

e

$$F_2 = \langle X_0, X_1, X_2, \dots; X_k^{-1} X_n X_k = X_{n+1}, \text{ para } k < n \rangle$$

Usaremos a notação $[x, y]$ para representar $xyx^{-1}y^{-1}$.

Primeiramente, mostremos que existe um isomorfismo entre os grupos F_1 e F_2 , e a partir disso produziremos um isomorfismo de F para F_1 e F_2 .

Teorema 6.19. *Existe um isomorfismo de grupos entre F_1 e F_2 , que manda A em X_0 e B em X_1 .*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned}\varphi : F &\longrightarrow F_2 \\ A &\longmapsto X_0 \\ B &\longmapsto X_1,\end{aligned}$$

em que F é o grupo livre gerado por A e B .

Dado um elemento $X_n \in F_2$ temos que $X_n = X_0^{-(n-1)} X_1 X_0^{n-1}$, então o elemento $A^{-(n-1)} B A^{n-1}$ é mapeado para X_n , ou seja, φ é sobrejetora.

Mostraremos agora que as relações definidas em F_1 estão no kernel de φ . De fato,

$$\begin{aligned}\varphi([AB^{-1}, A^{-1}BA]) &= \varphi(AB^{-1}A^{-1}BAB A^{-2}B^{-1}A) \\ &= X_0 X_1^{-1} \underbrace{X_0^{-1} X_1 X_0 X_1 X_0^{-2} X_1^{-1} X_0}_{X_2} \\ &= X_0 \underbrace{X_1^{-1} X_2 X_1}_{X_3} X_0^{-1} X_0^{-1} X_1^{-1} X_0 \\ &= X_0 \underbrace{X_3 X_0^{-1}}_{X_2} X_0^{-1} X_1^{-1} X_0 \\ &= X_2 \underbrace{X_0^{-1} X_1^{-1} X_0}_{X_2^{-1}} = X_2 X_2^{-1} = 1,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi([AB^{-1}, A^{-2}BA^2]) &= \varphi(AB^{-1}A^{-2}BA^2BA^{-1}A^{-2}B^{-1}A^2) \\ &= X_0 X_1^{-1} X_0^{-1} \underbrace{X_0^{-1} X_1 X_0 X_0 X_1 X_0^{-3} X_1^{-1} X_0 X_0}_{X_2} \\ &= X_0 X_1^{-1} \underbrace{X_0^{-1} X_2 X_0 X_1 X_0^{-1} X_0^{-1} X_0^{-1} X_1^{-1} X_0 X_0}_{X_3} \\ &= X_0 \underbrace{X_1^{-1} X_3 X_1}_{X_0^{-1} X_3 X_0} X_0^{-1} X_0^{-1} X_0^{-1} X_1^{-1} X_0 X_0 \\ &= X_0 X_0^{-1} X_3 X_0 X_0^{-1} X_0^{-1} X_0^{-1} X_1^{-1} X_0 X_0 \\ &= X_3 X_0^{-1} \underbrace{X_0^{-1} X_1^{-1} X_0 X_0}_{X_2^{-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X_3 \underbrace{X_0^{-1} X_2^{-1} X_0}_{X_3^{-1}} \\
&= X_3 X_3^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Defina agora

$$\begin{aligned}
\psi : F_2 &\longrightarrow F_1 \\
X_0 &\longmapsto A \\
X_1 &\longmapsto B.
\end{aligned}$$

Para provar que ψ está bem definida, mostraremos que $Y_k^{-1} Y_n Y_k = Y_{n+1}$, $k < n$, sendo $Y_0 = A$ e $Y_n = A^{-(n-1)} B A^{n-1}$. Para isso, provaremos primeiramente usando indução que $[A^{-1} B, Y_m] = 1$ para $m \geq 3$. Vejamos que $[A^{-1} B, Y_m] = 1$ para $m = 3$.

$$\begin{aligned}
[AB^{-1}, A^{-1}BA] = 1 &\implies AB^{-1}A^{-1}BABA^{-1}A^{-1}B^{-1}A = 1 \\
&\implies A^{-1}AB^{-1}A^{-1}BABA^{-1}A^{-1}B^{-1}AA = 1 \\
&\implies B^{-1}A^{-1}BABA^{-2}B^{-1}A^2 = 1 \\
&\implies B^{-1}AA^{-2}BA^2A^{-1}BA^{-2}B^{-1}A^2 = 1 \\
&\implies A^{-2}BA^2A^{-1}BA^{-2}B^{-1}A^2 = A^{-1}B \\
&\implies A^{-1}BA^2BA^2B^{-1}AA^{-2}B^{-1}A^2 = 1 \\
&\implies A^{-1}BY_3B^{-1}AY_3^{-1} = 1 \\
&\implies [A^{-1}B, Y_3] = 1.
\end{aligned}$$

Suponha por indução que $[A^{-1}B, Y_m] = 1$, mostraremos que $[A^{-1}B, Y_{m+1}] = 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
AB^{-1}Y_{m+1} &= AB^{-1}A^{-(m-2)}BA^{m-2} \\
&= AB^{-1}AA^{-(m-1)}BA^{m-1}A^{-1} \\
&= AB^{-1}AY_mA^{-1} \\
&= AY_mB^{-1}AA^{-1} \\
&= AY_mB^{-1} \\
&= AY_mA^{-1}AB^{-1} \\
&= Y_{m+1}AB^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, como $[A^{-1}B, Y_m] \stackrel{(*)}{=} 1$ para $m = n - k + 2$ então temos

$$\begin{aligned}
 \psi(X_n X_k) &= A^{-n+1} B A^{n-1} A^{-k+1} B A^{k-1} \\
 &= A^{-k+2} A^{-(n-k+1)} B A^{n-k+1} A^{-1} B A^{k-1} \\
 &= A^{-k+2} Y_{n-k+2} A^{-1} B A^{k-1} \\
 &\stackrel{(*)}{=} A^{-k+2} A^{-1} B X_{n-k+2} A^{k-1} \\
 &= A^{-k-1} B A^{k-1} A^{k-1} A^{-k+1} Y_{n-k+2} A^{k-1} \\
 &= Y_k A^{-k+1} Y_{n-k+2} A^{k-1} \\
 &= Y_k A^{-k+1} A^{-(n-k+1)} B A^{n-k+1} A^{k-1} \\
 &= Y_k A^{-n} B A^n \\
 &= Y_k Y_{n+1} \\
 &= \psi(X_k X_n).
 \end{aligned}$$

Logo, $F_1 \approx F_2$. □

Teorema 6.20. *Existe um isomorfismo de F_1 e F_2 para F o qual leva os símbolos $A, B, X_0, X_1, X_2, \dots$ para a função correspondente em F .*

Demonstração. As Figuras 11 e 12 nos mostram que AB^{-1} comuta com $A^{-1}BA$ e AB^{-1} comuta com $A^{-2}BA^2$. Então as funções A e B de F satisfazem as relações de F_1 .

Então existe um homomorfismo de grupos de F_1 para F que mapeia os símbolos A, B para as funções correspondentes em F . Por meio do Corolário 6.17, temos que este homomorfismo é sobrejetor. Como $F_1 \approx F_2$, temos também um homomorfismo sobrejetor de F_2 para F .

Assim, basta mostrar que o homomorfismo de F_2 para F , que leva os símbolos X_0, X_1, \dots para as funções correspondentes em F , é um monomorfismo.

Por meio das relações de F_2 , obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 X_k^{-1} X_n &= X_{n+1} X_k^{-1} \\
 X_n^{-1} X_k &= X_k X_{n+1}^{-1} \\
 X_n X_k &= X_k X_{n+1}, \quad k < n.
 \end{aligned}$$

Assim, todo elemento $x \in F_2$ não trivial pode ser escrito como o produto de um elemento positivo com um elemento negativo. Suponha

que X_k ocorra em ambas as partes, na parte positiva e negativa de x , mas X_{k+1} ocorre em nenhuma. Então é possível simplificar x deletando uma ocorrência de X_k na parte negativa e positiva, assim trocando toda ocorrência de X_n por X_{n+1} , usando a relação $X_k X_{n+1} X_k^{-1} = X_n$, para $n > k$.

Portanto, todo elemento não trivial de F_2 pode ser posto na forma normal, conforme o Corolário 6.17.

Logo, todo elemento não trivial de F_2 é levado em elemento não trivial de F , ou seja, o homomorfismo é injetor. \square

6.4 UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE

O objetivo desta seção é mostrar que um grupo G é do tipo FP_∞ quando existe um G -complexo X contrátil que satisfaz algumas condições. Para cumprir tal objetivo, necessitamos de alguns resultados preliminares, dentre eles o Critério de Bieri-Eckmann visto no Capítulo 5.

A partir de agora focaremos nossa atenção em definir um G -complexo X que nos ajudará a fornecer condições necessárias e suficientes para determinar quando o grupo G é do tipo FP_n .

Definição 6.21. *Um G -complexo X é dito n -ótimo relativo a G se satisfaz as seguintes condições:*

- (i) *X é acíclico em dimensões menores que n , isto é, a homologia reduzida $\tilde{H}_i(X) = 0$ para $i < n$.*
- (ii) *A ação de G em X é livre.*

Os espaços n -ótimo sempre existem, por exemplo, considere X como sendo um recobrimento universal de um espaço $K(G, 1)$. Visto que X é contrátil temos que $\tilde{H}_i(X) = 0$, para todo i . Além disso, o grupo fundamental age livremente sobre o recobrimento universal.

Proposição 6.22. *Suponha que G é finitamente gerado e que admite um espaço X n -ótimo tal que X^n/G é finito. Então G é do tipo FP_n .*

Demonstração. Considere o complexo de cadeia celular $C(X)$. Para todo $p \geq 0$, temos que

$$C_p(X) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \text{Ind}_{G_\sigma}^G \mathbb{Z} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} (\mathbb{Z}G \otimes_{G_\sigma} \mathbb{Z}),$$

em que Σ_p é um conjunto de representantes para as G -órbitas de p -células. Como a ação é livre, a igualdade se reduz a

$$C_p(X) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathbb{Z}G.$$

Considere a seguinte resolução projetiva sobre \mathbb{Z} :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{Id_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.1)$$

De (6.1), obtemos

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathbb{Z}G \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathbb{Z}G \longrightarrow 0. \quad (6.2)$$

Por hipótese X^n/G é finito e assim, as somas em (6.2) são finitas. Portanto cada soma é finitamente gerada, e conseqüentemente, o $\mathbb{Z}G$ -módulo $C_p(X)$ é do tipo FP_{∞} .

O fato de X ser acíclico nas dimensões menores que n nos diz que $H_i(G, M) = H_i^G(X, M)$, quando $i < n$. Por meio disso, queremos mostrar que $H_i(G, \prod_I \mathbb{Z}G) = 0$, para todo $i \geq 1$ e todo produto direto $\prod_I \mathbb{Z}G$ (Critério de Bieri-Eckmann).

Existe uma seqüência tal que

$$E_{p,q}^1 = H_q(G, C_p(X) \otimes \prod_I \mathbb{Z}G) \Rightarrow H_{p+q}^G(X, \prod_I \mathbb{Z}G).$$

Observe que

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &= H_q(G, C_p(X) \otimes \prod_I \mathbb{Z}G) \\ &= Tor_q^G(\mathbb{Z}, C_p(X) \otimes M) \\ &= Tor_q^G(\mathbb{Z}, \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathbb{Z}G \otimes \prod_I \mathbb{Z}G) \\ &= \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} Tor_q^G(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}G \otimes \prod_I \mathbb{Z}G) \\ &= \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G, \mathbb{Z}G \otimes \prod_I \mathbb{Z}G) \\ &= \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(\{1\}, \prod_I \mathbb{Z}G), \end{aligned}$$

em que na última igualdade foi utilizado o Lema de Shapiro. Assim,

$$E_{p,q}^1 = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ \mathbb{Z} \otimes_G (C_p(X) \otimes \prod_I \mathbb{Z}G), & q = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Como $C_p(X)$ é do tipo FP_∞ , concluímos que $C_p(X)$ é finitamente apresentado. Consequentemente, através do Lema 5.19 (ii), obtemos o isomorfismo $C_p(X) \otimes_G \prod_I \mathbb{Z}G \approx \prod_I C_p(X)$. Desta forma, $E_{p,0}^1 = \mathbb{Z} \otimes_G \prod_I C_p(X)$. Além disso,

$$\mathbb{Z} \otimes_G \prod_I C_p(X) = (\mathbb{Z} \otimes \prod_I C_p(X))_G = (\prod_I C_p(X))_G = \prod_I C_p(X).$$

A sequência (6.3) se reduz em

$$E_{p,q}^1 = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ \prod_I C_p(X), & q = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Visto que podemos encontrar $E_{p,q}^2$ através de $E_{p,q}^1$, concluímos que $E_{p,q}^2 = 0$ quando $0 < p + q < n$, e $E_{p,0}^2 = \prod_I H_p(X)$ quando $p < n$.

Portanto

$$H_i(G, \prod_I \mathbb{Z}G) = H_i^G(X, \prod_I \mathbb{Z}G) = \begin{cases} \prod_I \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & 0 < i < n. \end{cases}$$

Logo pelo Teorema 5.21, segue que G é do tipo FP_n . □

A Proposição 6.22 é uma boa ferramenta para fornecer condições de finitude a respeito de G . Entretanto, se o G -complexo X não possuir X^n/G finito, tal proposição não pode ser aplicada. Focaremos então em obter condições, necessárias e suficientes, em termos das propriedades de filtração de X , a fim de alcançar o critério FP_n para G .

Definição 6.23. *Uma **filtração** de X é uma família $\{X_\alpha\}_{\alpha \in D}$ de subcomplexos G -invariantes tal que $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ e D é um conjunto dirigido, em que $X_\alpha \subseteq X_\beta$ quando $\alpha \leq \beta$.*

No caso em que os subcomplexos X_α possuem X_α^n/G finito, chamaremos esta filtração de **finita do tipo n**.

Definição 6.24. *Um sistema direto de grupos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$ é chamado de **essencialmente trivial** se para cada $\alpha \in D$ existe $\beta \geq \alpha$ tal que o homomorfismo $A_\alpha \rightarrow A_\beta$ é o trivial.*

Antes de mostrarmos uma equivalência para esta definição, lembre que se $\varinjlim A_\alpha = X$ e $f_\alpha^\beta: A_\alpha \rightarrow A_\beta$, com $\alpha \leq \beta$, então

$$X = \frac{\bigoplus_{\alpha \in D} A_\alpha}{\sim}.$$

E $x_\alpha \sim x_\beta$ se existe $\gamma \geq \alpha, \beta$ tal que $f_\alpha^\gamma(x_\alpha) = f_\beta^\gamma(x_\beta)$, $x_\alpha \in X_\alpha$ e $x_\beta \in X_\beta$.

Lema 6.25. *Um sistema direto de grupos $\{A_\alpha\}$ é essencialmente trivial se, e somente se $\varinjlim \prod_J A_\alpha = 0$, para todo conjunto J .*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\{A_\alpha\}$ é essencialmente trivial, então para cada $\alpha \in D$ existe $f_\alpha^\beta: A_\alpha \rightarrow A_\beta$ trivial. Como em um sistema direto os homomorfismos comutam entre si, segue que $\varinjlim \prod_J A_\alpha = 0$.

(\Leftarrow) Seja $\{x_j\}_{j \in J} \in \prod_{j \in J} A_\alpha$.

Como $X = \frac{\bigoplus_{\alpha \in D} (\prod_{j \in J} A_\alpha)}{\sim} = 0$, para todo $j \in J$, então $\{x_j\}_{j \in J} \sim \{0\}_{j \in J}$. Ou seja, existe $\beta \in D$ tal que $\prod f_\alpha^\beta(\{x_j\}_{j \in J}) = \{0\}_{j \in J}$. Consequentemente, $f_\alpha^\beta(\{x_j\}_{j \in J}) = \{0\}_{j \in J}$.

Considere $J = A_\alpha$. Assim,

$$\{x_j\}_{j \in J} = \{x_z\}_{z \in A_\alpha} = \{z\}_{z \in A_\alpha}.$$

Portanto existe $f_\alpha^\beta: A_\alpha \rightarrow A_\beta$ tal que $f_\alpha^\beta(z) = 0$, para todo $z \in A_\alpha$. \square

Teorema 6.26. *Seja X um G -complexo n -ótimo com uma filtração $\{X_\alpha\}$ finita do tipo n . Então G é do tipo FP_n se, e somente se o sistema direto $\{\tilde{H}_i(X_\alpha)\}$ é essencialmente trivial para $i < n$.*

Demonstração. Semelhantemente ao que foi feito na Proposição 6.22, deduzimos que $H_i^G(X_\alpha, \prod_I \mathbb{Z}G) = \prod_I H_i(X_\alpha)$. Neste caso, $C_p(X_\alpha)$ é do tipo FP_∞ , isto é verdade pelo fato de X ser n -ótimo, X_α possuir X_α^n/G finito e além disso, cada X_α ser G -invariante.

Desta forma, para $i < n$ temos

$$\begin{aligned} H_i(G, \prod_J \mathbb{Z}G) &= H_i^G(X, \prod_I \mathbb{Z}G) \\ &= \varinjlim_{\alpha \in D} H_i^G(X_\alpha, \prod_I \mathbb{Z}G) \\ &= \varinjlim_{\alpha \in D} \prod_I H_i(X_\alpha). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Se $\{\tilde{H}_i(X_\alpha)\}$ é essencialmente trivial, de (6.5) concluímos que $H_i(G, \prod_I \mathbb{Z}G) = 0$, para todo $0 < i < n$ e todo I . Portanto, pelo Teorema 5.21 temos que G é do tipo FP_n . Além disso, se G é do tipo FP_n temos por meio da Proposição 6.22 que $\{\tilde{H}_i(X_\alpha)\}$ é essencialmente trivial para $0 < i < n$.

Vejam agora quando $i = 0$. Considere a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X_\alpha) \longrightarrow H_0(X_\alpha) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Tal sequência produz uma outra sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \varinjlim \prod_I \tilde{H}_0(X_\alpha) \longrightarrow \varinjlim \prod_I H_0(X_\alpha) \longrightarrow \prod_I \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Como $H_0^G(X_\alpha, \prod_I \mathbb{Z}G) \approx \prod_I H_0(X_\alpha)$ para todo I , então

$$\varinjlim \prod_I \tilde{H}_0(X_\alpha) = 0,$$

para todo I . Portanto $\{\tilde{H}_0(X_\alpha)\}$ é essencialmente trivial. \square

Dizemos que a conectividade do par (X_{j+1}, X_j) tende para ∞ quando j tende para ∞ se para cada $n > 0$, existe j_0 tal que $\pi_k(X_{j+1}, X_j) = 0$ para todo $j \geq j_0$ e $k \leq n$. Usaremos esta definição para provar o seguinte teorema:

Teorema 6.27. *Seja X um G -complexo contrátil livre. Seja $\{X_j\}_{j \geq 1}$ uma filtração tal que cada X_j/G é finito. Se a conectividade do par (X_{j+1}, X_j) tende para ∞ quando j tende para ∞ , então G é do tipo FP_∞ .*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que são satisfeitas as hipóteses do Teorema 6.26.

Visto que X é contrátil e o estabilizador G_σ é do tipo FP_∞ , segue que X é n -ótimo para todo n . Agora basta mostrar que $\{\tilde{H}_n(X_j)\}$ é essencialmente trivial para todo n .

Fixe $n > 0$. Então existe j_0 tal que $\pi_k(X_{j+1}, X_j) = 0$ para todo $j \geq j_0$ e todo $k \leq n$. Para $k \leq n$, temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \pi_k(X_{j+1}, X_j) & \rightarrow & \pi_{k-1}(X_j) & \rightarrow & \pi_{k-1}(X_{j+1}) & \rightarrow & \pi_{k-1}(X_{j+1}, X_j) & \rightarrow \\ & \downarrow \approx & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \approx & \\ \rightarrow & \tilde{H}_k(X_{j+1}, X_j) & \rightarrow & \tilde{H}_{k-1}(X_j) & \rightarrow & \tilde{H}_{k-1}(X_{j+1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{k-1}(X_{j+1}, X_j) & \rightarrow \end{array} .$$

Do diagrama acima, temos que $\tilde{H}_k(X_{j+1}, X_j) = 0$, e consequentemente $\tilde{H}_k(X_j) \approx \tilde{H}_k(X_{j+1})$ para todo $j \geq j_0$ e todo $k \leq n$. Os homomorfismos da sequência

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(X_j) \rightarrow \tilde{H}_n(X_{j+1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{H}_n(X_{j_0}) \xrightarrow{\approx} \tilde{H}_n(X_{j_0+1}) \xrightarrow{\approx} \cdots$$

são isomorfismos quando $j \geq j_0$. Seja $[z] \in \tilde{H}_n(X_{j_0})$, o qual pode ser visto como um elemento de $H_n(X)$. Como $\tilde{H}_n(X) = 0$, temos que existe $y \in S_{n+1}(X)$ tal que $z = \partial_{n+1}(y)$. Queremos mostrar que a classe de homologia de z é nula em $\tilde{H}_n(X_{j_0})$. Para isso, escreva $y = \sum_{i=1}^l \alpha_i f_i$, em que $f_i: \Delta^n \rightarrow X_{j_0}$ e $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Pela compacidade de $f_i(\Delta^n)$ temos que existe $J > j_0$ tal que $[z] \in \tilde{H}_n(X_J)$. Portanto $[z]$ é a classe nula em $\tilde{H}_n(X_J)$. E como existe um isomorfismo entre $\tilde{H}_n(X_{j_0})$ e $\tilde{H}_n(X_J)$ isto nos diz que $\tilde{H}_n(X_{j_0}) = 0$. Em vista disto os homomorfismos $\tilde{H}_n(X_j) \rightarrow \tilde{H}_n(X_{j+1})$ são triviais quando $j \geq j_0$.

Logo $\{\tilde{H}_n(X_j)\}$ é essencialmente trivial. □

6.5 CONDIÇÃO DE FINITUDE DE F

A última das três propriedades que mostraremos é do fato de F ser um grupo do tipo FP_∞ . Para alcançar tal objetivo, voltaremos a utilizar a representação por meio de árvores binárias.

Utilizaremos fortemente nesta seção as bases da álgebra livre $F(X)$. Por meio delas construiremos, com base em Brown [3], um espaço topológico em que o grupo de Thompson age, e assim teremos condições de aplicar o Teorema 6.27.

Considere o poset $(\mathcal{B}, <)$, em que \mathcal{B} é o conjunto de todas as bases da álgebra V_2 e $Y < Z$, se Z é uma expansão de Y , com $Y, Z \in \mathcal{B}$. Para qualquer $Y \in \mathcal{B}$, temos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{<Y} &= \{Z \in \mathcal{B} : Z < Y\}, \\ \mathcal{B}_{\leq Y} &= \{Z \in \mathcal{B} : Z \leq Y\}. \end{aligned}$$

O espaço topológico que estamos interessados é o complexo simplicial, denotado por $|\mathcal{B}|$, em que os vértices são as bases ordenadas de V_2 , isto é, aquelas obtidas a partir da base unitária fazendo expansões quaisquer e contrações apenas de elementos consecutivos. O conjunto

$\{Y_0, Y_1, \dots, Y_k\}$ é um simplexo se $Y_0 < Y_1 < \dots < Y_k$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que o complexo simplicial $|\mathcal{B}|$ é n -ótimo. Primeiramente, observe que $|\mathcal{B}|$ é contrátil por meio do Teorema 3.32. Portanto $\tilde{H}_n(|\mathcal{B}|) = 0$, para todo n .

Antes de calcularmos o estabilizador de cada elemento de $|\mathcal{B}|$, é necessário descrevermos a ação de F em $|\mathcal{B}|$.

Já vimos que todo elemento $g \in F$ é um par de árvores binárias. Denotaremos então $g = (R, S)$, em que (R, S) é um diagrama de árvores para g . Precisamos apenas entender como g age em um vértice $Y \in |\mathcal{B}|$, pois a ação de g nos vértices de $|\mathcal{B}|$ mostra como g age em qualquer simplexo. Denotaremos a ação através de gY .

Suponha que R é a árvore que representa Y , ou seja, as folhas de R são elementos da base Y . Neste caso temos que $gY = Z$, em que Z é a base representada pela árvore S . Suponha que R não representa Y , então existe uma base W que é representada por R . Então a ação de g em Y é descrita como segue:

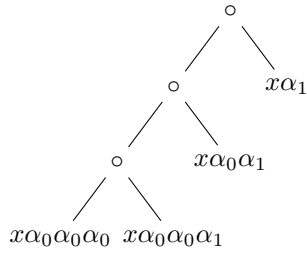
1. Encontre a menor expansão comum entre Y e W , digamos Z' .
2. Efetue expansões simples nas mesmas posições realizadas para encontrar Z' a partir de W na base W' representada por S .
3. Depois de encontrada a base derivada de W' , realize contrações simples nas mesmas posições as quais Z' contraído atinge Y .

Vejamos dois exemplos para ilustrar este caso.

Exemplo 6.28. Seja $g \in F$ o elemento representado pelo par de árvores

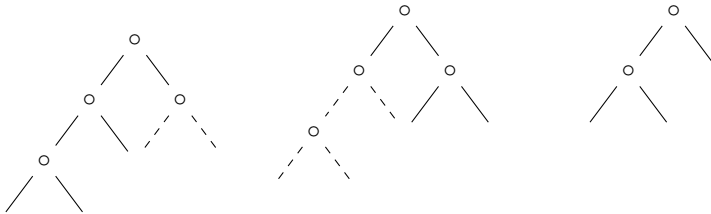


Suponha que $Y = \{x\alpha_0\alpha_0\alpha_0, x\alpha_0\alpha_0\alpha_1, x\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1\}$, o qual é representado pela árvore

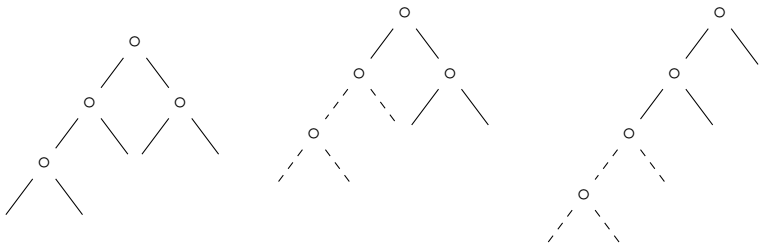


Então a ação de g em Y é descrita através dos seguintes passos:

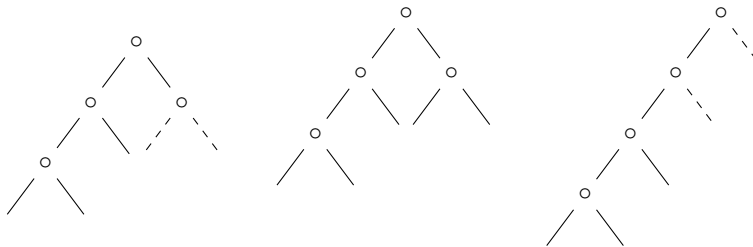
1. Encontrar uma expansão comum entre a árvore que representa a base Y e a árvore que representa o domínio de g .



2. Aplicar expansões na árvore que representa o contradomínio de g nas mesmas posições realizadas na árvore do domínio, conforme o passo 1.



3. Realizar contrações simples na árvore expandida do contradomínio nas mesmas posições em que a árvore de Y foi expandida para atingir a expansão comum.



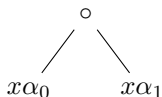
Desta forma, a ação de g em Y resulta na base

$$\{x\alpha_0\alpha_0\alpha_0\alpha_0, x\alpha_0\alpha_0\alpha_0\alpha_1, x\alpha_0\alpha_0\alpha_1, (x\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1)\lambda\}.$$

Exemplo 6.29. Seja $g \in F$ o elemento representado pelo par de árvores

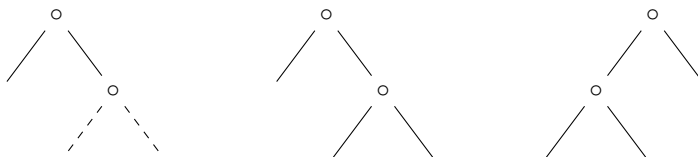


Suponha que $Y = \{x\alpha_0, x\alpha_1\}$, o qual é representado pela árvore

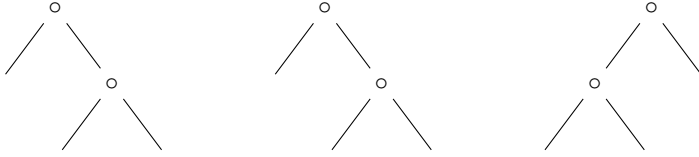


A ação de g em Y é dada da seguinte forma:

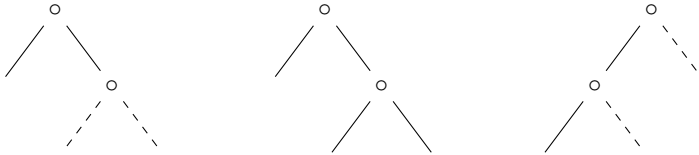
1. Encontrar uma expansão comum entre a árvore que representa a base Y e a árvore que representa o domínio de g .



2. Neste caso, a expansão comum é igual a árvore que representa o domínio da g . Desta forma, não aplicaremos expansões na árvore do contradomínio de g .



3. Realizar contrações simples nas mesmas posições em que a árvore que representa Y foi expandida.



Logo a ação é dada pela base $\{x\alpha_0\alpha_0, (x\alpha_0\alpha_1, x\alpha_1)\lambda\}$.

Compreendido a ação de F em \mathcal{B} , temos condições de cacular o estabilizador F_Y de uma base $Y \in \mathcal{B}$. O único elemento $g \in F$ que satisfaz $gY = Y$ é o par de árvores que representam a base Y , isto é, F_Y é o grupo trivial. Assim, F_Y é do tipo FP_n para todo n . Logo $|\mathcal{B}|$ é n -ótimo, para todo n .

O complexo simplicial $|\mathcal{B}|$ não possui um n -esqueleto mod F finito, pois as bases podem possuir cardinalidade arbitrariamente grande. Então é necessário fazer uma filtração em $|\mathcal{B}|$.

Para $Y \in \mathcal{B}$ seja $h(Y)$ o maior inteiro h tal que existe uma cadeia $Y = Y_h > \dots > Y_0 \in \mathcal{B}$, com isso temos que $h(Y) = \dim|\mathcal{B}_{\leq Y}|$. Chamaremos $h(Y)$ de altura de Y . Considere o conjunto

$$\mathcal{B}_h = \{Y \in \mathcal{B} : h(Y) \leq h\}.$$

Lema 6.30. *Suponha que Y_1, \dots, Y_k são contrações simples de dois elementos consecutivos de uma base Y . Então Y_1, \dots, Y_k possuem uma cota inferior em \mathcal{B} se, e somente se os k pares contraídos de Y para Y_1, \dots, Y_k são disjuntos dois a dois.*

Demonstração. Suponha que Y_1, \dots, Y_k possuem uma cota inferior W , ou seja, Y_1, \dots, Y_k são expansões de W .

Existe uma bijeção entre as bases que são expansões de W e as florestas que tem como raízes os elementos de W .

Como Y também é uma expansão de W , podemos representá-lo por uma floresta com raízes em W sendo suas folhas elementos de Y .

Seja \mathcal{F} a floresta associada a Y , note que a floresta \mathcal{F}_i associada a Y_i é obtida a partir de \mathcal{F} removendo dois irmãos, isto é, remover duas folhas de um determinado nó.

Com isso, temos que os k conjuntos de irmãos são disjuntos. A partir disso, as contrações dos pares são também disjuntas.

Neste caso Y_1, \dots, Y_k possuem ínfimo, digamos Z , que pode ser representado por uma árvore que consiste em retirar os k conjuntos de irmãos da árvore com raiz em W e folhas em Y , assim $W \leq Z$.

Reciprocamente, suponha que os k pares contraídos de Y para Y_1, \dots, Y_k são disjuntos dois a dois.

Então se W é a base representada pelas k duplas consecutivas contraídas de Y temos que W é uma cota inferior de Y_1, \dots, Y_k . \square

Lema 6.31. *Para qualquer $Y \in \mathcal{B}$, o complexo $|\mathcal{B}_{<Y}|$ é homotopicamente equivalente ao seguinte complexo simplicial $\Sigma = \Sigma(Y)$: Os vértices de Σ são os pares ordenados de elementos consecutivos distintos de Y , e uma coleção de tais pares é um simplexo de Σ se, e somente se os conjuntos subjacentes dos pares são dois a dois disjuntos.*

Demonstração. Seja $K = |\mathcal{B}_{<Y}|$. Para qualquer $Y' < Y$, seja $K_{Y'}$ o subcomplexo $|K_{\leq Y'}|$ de K . Pela definição de $K_{Y'}$ temos que este subcomplexo é um cone, pois Y' esta em $K_{Y'}$ e é ligado a todas as outras bases.

Observe que $K = \bigcup K_{Y'}$, em que Y' é uma contração simples de Y .

Dada uma coleção $\{Y_i\}$ de contrações simples de elementos consecutivos de Y , a interseção $L = \bigcap K_{Y_i}$ é diferente do vazio se, e somente se, Y_i possui cota inferior. Neste caso, se Z é a maior das cotas inferiores de Y_i , o complexo L é exatamente K_Z .

Pelo Teorema 3.33, temos que K é homotopicamente equivalente ao nervo da cobertura $\{K_{Y'}\}$.

Note que o nervo $N(K_{Y'})$ é um complexo simplicial tal que $\{v_{Y_0}, \dots, v_{Y_k}\}$ é um simplexo sempre que $\bigcap_{i=0}^k K_{Y'_i} \neq \emptyset$, ou seja, temos um simplexo quando Y'_1, \dots, Y'_k possuem cota inferior. Pelo lema anterior temos que $N(K_{Y'}) = \Sigma$. \square

Lema 6.32. *Para todo inteiro $k \geq 0$ existe um inteiro $\mu(k)$ tal que $\Sigma(Y)$ é k -conexo sempre que $\text{card}(Y) \geq \mu(k)$.*

Demonstração. A prova deste resultado segue da seguinte afirmação:

(A_k) Existem inteiros $\mu(k)$ e $v(k)$ tais que se $\text{card}(Y) \geq \mu(k)$ o k -esqueleto $\Sigma(Y)^k$ é homotopicamente equivalente a um ponto em $\Sigma(Y)$ por uma homotopia sobre a qual qualquer k -simplexo permanece em um subcomplexo que tenha no máximo $v(k)$ -vértices.

Usaremos o princípio de indução em k para mostrar a afirmação.

Se $\text{card}(Y) \geq 5$, então para qualquer dois vértices de $\Sigma(Y)$ podem ser unidos por um caminho de tamanho menor ou igual a 3.

Então defina $\mu(0) = 5$. Mais precisamente, se tomarmos $v(0) = 4$, provamos a afirmação para $k = 0$.

Suponha que $\mu(k-1)$ e $v(k-1)$ estão bem definidos e que (A_{k-1}) é verdadeira.

Considere $\text{card}(Y) \geq \mu(k-1)$ e escolha uma homotopia de Σ^{k-1} como definido em (A_{k-1}).

Seja $\sigma \in \Sigma(Y)$ um k -simplexo. Considere suas faces de codimensão 1, isto é, faces formadas a partir da retirada de um vértice de σ . Pela hipótese de indução, se τ representa uma face de codimensão 1, temos que τ permanece, por meio da homotopia, a um subcomplexo que possui no máximo $v(k-1)$ vértices. Sabemos que σ possui $(k+1)$ -vértices e por isso temos que a quantidade de faces de codimensão 1 de σ é exatamente $k+1$. Assim, $\partial\sigma$ permanece em um subcomplexo, que denotaremos por $\Sigma'(Y)$, que contém no máximo $(k+1)v(k-1) = m$ vértices.

Se $\text{card}(Y) \geq c = 3m + 2$, note que m vértices utilizam no máximo $3m$ elementos de Y , assim existe um vértice v que é ligado com os m vértices.

Assim, $\Sigma'(Y)$ está contido no $lk(v)$. Podemos estender a homotopia para σ construindo um cone de v com base $\Sigma'(Y)$. Desta forma, σ permanece no subcomplexo gerado por $\Sigma'(Y)$ e v .

Portanto (A_k) é verdadeira para $\mu(k) = \max\{\mu(k-1), c\}$ e $v(k) = m + 1$. \square

Teorema 6.33. *O grupo F é do tipo FP_∞ .*

Demonstração. Vejamos primeiramente que $(|\mathcal{B}_{h+1}|, |\mathcal{B}_h|)$ é um par CW . Para cada $Y \in \mathcal{B}$ com $h(Y) = h+1$ é possível construir um cone sobre $|\mathcal{B}_h|$, desta forma podemos ver $|\mathcal{B}_h|$ como um subcomplexo de $|\mathcal{B}_{h+1}|$. Pelo Lema 6.31 temos que $|\mathcal{B}_h|$ é homotopicamente equivalente a $\Sigma(Y)$, e conseqüentemente pelo Lema 6.32, $|\mathcal{B}_h|$ é k -conexo. A partir da seqüência exata de homotopia

$$\cdots \rightarrow \pi_k(|\mathcal{B}_{h+1}|) \rightarrow \pi_k(|\mathcal{B}_{h+1}|, |\mathcal{B}_h|) \rightarrow \pi_{k-1}(|\mathcal{B}_h|) \rightarrow \cdots,$$

concluimos que $(|\mathcal{B}_{h+1}|, |\mathcal{B}_h|)$ é k -conexo.

Quando h tende para ∞ temos a conectividade de $(|\mathcal{B}_{h+1}|, |\mathcal{B}_h|)$ tende para ∞ . Assim, pelo Teorema 6.27 segue que F é do tipo FP_∞ . \square

REFERÊNCIAS

- [1] BIERI, Robert; ECKMANN, Beno. Finiteness properties of duality groups. **Commentarii Mathematici Helvetici**. Zúrique, p. 74-83. dez. 1974. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02566720?LI=true>. Acesso em: 24 ago. 2017
- [2] BROWN, Kenneth S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [3] BROWN, Kenneth S.. Finiteness properties of groups. **Journal Of Pure And Applied Algebra**. p. 45-75. fev. 1978. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404987900156>. Acesso em: 07 ago. 2017.
- [4] CANNON, James W.; WILLAM, Floyd J.; WALTER, Parry R.. Introductory notes on Richard Thompson's groups. **Enseignement Mathématique**. p. 215-256. 1996. Disponível em: <http://people.math.binghamton.edu/matt/thompson/cfp.pdf>. Acesso em: 02 ago. 2017.
- [5] GEOGHEGAN, Ross. **Topological Methods in Group Theory**. New York: Springer, 2007.
- [6] HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.
- [7] HIGMAN, Graham. **Finitely presented infinite simple groups**. Notes on Pure Mathematics. Australian National University, Canberra: 1974.
- [8] HILTON, P. J.; STAMMBACH, U.. **A Course in Homological Algebra**. Springer-verlag, 1971.
- [9] HUNGERFORD, Thomas W.. **Algebra**. New York: Springer, 1974. 504 p.
- [10] LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. Rio de Janeiro : IMPA, 2009.
- [11] MC CLEARY, J. **A user's guide to spectral sequences**. 2 ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

- [12] OSBORNE, M. Scott. **Basic Homological Algebra**. New York: Springer, 2000.
- [13] ROTMAN, Joseph. **An introduction to homological algebra**. Springer Science and Business Media, 2008.
- [14] WEIBEL, Charles A. **An introduction to homological algebra**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.