Leonardo Businhani Biz

Grupos mediáveis e suas ações sobre C-álgebras*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Mestre em Matemática Pura e Aplicada, com Área de Concentração em Ánalise.

Orientador:
Prof. Dr. Alcides Buss

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Biz, Leonardo Businhani
Grupos mediávies e suas ações sobre C*-álgebras / Leonardo Businhani Biz ; orientador, Alcides Buss - Florianópolis, SC, 2017.
198 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. grupo mediável. 3. ação mediável. 4. ação parcial com a propriedade de aproximação. I. Buss, Alcides. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Leonardo Businhani Biz

Grupos mediáveis e suas ações sobre C*-álgebras

Florianópolis

2017

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador de Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alcides Buss (UFSC)
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gonçalves (UFSC)

Prof. Dr. Danilo Royer (UFSC)

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari (UFSC)

Prof. Dr. Vladimir Pestov (UOTTAWA)

Aos meus pais.

"Ninguém pode chamar uma investigação de ciência

se não pode demonstrá-la matematicamente."

— Leonardo da Vinci

Agradecimento

Agradeço por ter o que agradecer. Aos meus pais e meu irmão pelo o apoio e carinho dado. Amo muito vocês.

Em todo este tempo que vivi Florianópolis muitas pessoas especiais passaram e ficaram na minha vida. Preciso citar algumas que tem extrema importância neste momento. A Eduardo Pandini por cada vitória diária, saiba sempre que você me motiva a continuar nesta jornada. Ao meu parceiro de mestrado Douglas Guimarães, pelas horas de estudos. A fofura e as aventuras de Priscilla Sayuri. Pela parceria e inteligência de Natã Machado. A Sabrina Vigano por todos shows e sextas-feiras. Ao companheirismo de Daniella Losso e Aline Becher. Não posso deixar de mencionar o lugar do encontro de todas pessoas elencadas acima chamado Janika.

Aos paulistas Letícia de Melo e Gabriel Maciel. E ao meu virginiano favorito Gabriel Lukiantchuki.

Além de amigos, tive alguns mestres para me inspirar. Primeiramente, agradecer a oportunidade que tive de trabalhar com José Luiz Rosas Pinho e Danilo Royer durante a graduação. E de aprender muito com Silvia Martini de Holanda Janesch e Giuliano Boava.

Durante o mestrado tive também grandes professores que não posso deixar de gratificar, como Gilles Gonçalves de Castro, Fernando de Lacerda Mortari e Daniel Gonçalves. Além deles, gostaria de citar a orientação acadêmica do professor Raphael Falcão da Hora.

Agradeço, em especial, todo tempo de dedicação do meu orientador, Alcides Buss, que teve a enorme paciência de resolver meus problemas, além das aulas extras que tive com ele.

Muito obrigado a todos os professores que participaram deste trabalho. E agradeço a Daniel Gonçalves, Danilo Royer, Fernando de Lacerda Mortari e Vladimir Pestov por aceitarem o convite de participar da banca e lerem atentamente minha dissertação. Tenho certeza que cada observação foi uma melhoria para este trabalho.

Gostaria de agradecer, de forma geral, a todos os funcionários da UFSC e principalmente aos já citados acima. Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, a todos que me alegram e me fazem esquecer parte dos problemas como Renato, Chico, Lenine, Nando, Caetano, Humberto, Adriana, Gal, Maria Rita e entre muitos outros e outras.

Resumo

Dado um grupo discreto, estudamos algumas propriedades e equivalências de mediabilidade de grupos. Em particular, veremos que se o grupo for mediável temos um isomorfismo entre a C^*-álgebra cheia e a C^*-álgebra reduzida do grupo. Com intuito de generalizar este resultado, estudamos os produtos cruzados associados a um C^*-sistema dinâmico e mostramos que os produtos cruzados cheio e reduzido são isomorfos, caso o grupo seja mediável. Ainda mais, é provado este mesmo resultado trocando a hipótese do grupo ser mediável por a ação ser mediável. Por fim, vimos as ações parciais com a intenção de definir os produtos cruzados parciais cheio e reduzido e depois estudamos as ações parciais com propriedade de aproximação. Veremos que se uma ação parcial possui esta propriedade os produtos cruzados parciais cheio e reduzidos são isomorfos.

PALAVRAS-CHAVE: Grupo Mediável. Produto Cruzado. Ação Mediável. Ação com Propriedade de Aproximação.

Abstract

Given a discrete group, we study some properties and equivalences of amenable groups. In particular, we see that if the group is amenable, we have an isomorphism between the full C^*-algebra and the reduced C^*-algebra of the group. In order to generalize this result, we study the crossed products associated with C^*-dynamical system and we demonstrate that the full and reduced crossed products are isomorphic. Further, this same result is proven by exchanging the hypothesis of the group being amenable to an amenable action. Finally, we study partial actions with an intention to define the full and reduced partial crossed products and then study partial actions with approximation property. We see that if a partial action has this property then the full and reduced partial crossed products are isomorphic.

KEY-WORDS: Amenable Group. Crossed Product. Amenable Action. Action with Approximation Property.

Sumário

Introdução

Os grupos mediáveis foram primeiramente introduzidos em 1929 pelo famoso matemático John von Neumann, embora com um nome diferente, a definição foi em termos de uma medida finitamente aditiva invariante de subconjuntos do grupo. O nome dado por von Neumann foi a palavra em alemão "messbar" que significa mensurável, em virtude do paradoxo de Banach-Tarski.

Em inglês o matemático Mahlon M. Day utilizou o termo "amenable", há indícios que o termo foi introduzido em 1949, em um encontro de verão da sociedade americana de matemática. Dizem que Day os denominou assim pois tais grupos admitem uma certa média especial (do inglês "mean"), e eles formam uma classe "amigável" para se trabalhar levando o nome de "amenable", que do inglês significa amigável, dócil. Além de nomear estes grupos, Day teve colaborações importantes nesta área. Muitas referências citam ele como o primeiro a demonstrar algumas equivalências de grupos mediáveis como o Teorema 2.24. Em português, as literaturas traduzem este termo para "grupo mediável" que será a termologia utilizada neste trabalho.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, além de seus apêndices de suporte. Recomenda-se ter um conhecimento inicial na área de Análise Funcional, Topologia e Álgebra. É importante ressaltar que aqui fixamos o grupo G com a topologia discreta.

O primeiro capítulo serve de base para todo o decorrer do trabalho. Inicialmente, temos os principais resultados da área de C^*-álgebra que utilizamos em toda dissertação, além de exemplos muito recorrentes de C^*-álgebras. A seguir, temos a introdução do produto tensorial minimal e maximal de C^*-álgebras. Por fim construímos as C^*-álgebras de grupos cheia e reduzida. As referências primordiais para este capítulo foram [5] e [18].

No segundo capítulo introduzimos formalmente a noção de grupos mediáveis e já vemos alguns exemplos triviais, como grupos finitos e abelianos, e além disso, demonstramos algumas propriedades básicas de grupos mediáveis, como por exemplo, todo subgrupo de um grupo mediável é mediável. Utilizamos para esta seção as ideias contidas em [7] e [14]. Depois estudamos um grande teorema que contém 7 equivalências para mediabilidade de um grupo. Foram utilizados [5], [8], [14] e [21].

Para o capítulo três, dado (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico, construímos $A \rtimes_\alpha G$ e $A \rtimes_{\alpha,r} G$ os produtos cruzados cheio e reduzido associados, respectivamente. Depois mostramos que se G é um grupo mediável então estes produtos cruzados são isomorfos. Para a demonstração deste resultado utilizamos algumas notas de aulas da disciplina de C^*-álgebras e [9].

Ainda observando quando os produtos cruzados cheio e reduzidos são isomorfos, no quarto capítulo, definimos as ações mediáveis e mostramos que dado um C^*-sistema dinâmico sendo a ação mediável, os produtos cruzados são isomorfos. Foram utilizados [5] e [20] como referências.

Por fim, no quinto capítulo, introduzimos as ações parciais e construímos os produtos cruzados parciais associados ao C^*-sistema dinâmico parcial (A, G, θ). Com a noção de ações parciais com a propriedade de aproximação, mostramos que os produtos cruzados parciais cheios e reduzidos são isomorfos. Para este capítulo utilizamos as ideias de [12], reduzidas aos produtos cruzados parciais.

Ainda mais, o apêndice sobre funções positivas definidas será utilizado em quase todo trabalho e tem um papel fundamental no Capítulo 2. O apêndice tratando as álgebras de multiplicadores foi elaborado para a demonstrarmos que o produto cruzado parcial algébrico é associativo. Para mais informações sobre estes temas aconselha-se [5] e [18], respectivamente.

1 *C*-Álgebras*

1.1 Revisão sobre C*-Álgebras

Neste capítulo introduziremos as noções básicas sobre C*-álgebras que serão necessárias no decorrer deste trabalho. Recomenda-se ter um conhecimento inicial na área de Análise Funcional e Álgebra. Para esta primeira seção os resultados foram retirados de [18].

Definição 1.1. *Seja A um* álgebra *sobre $\mathbb{C}$, ou seja, um espaço vetorial complexo munido de uma multiplicação bilinear e associativa. Uma* involução *sobre A é uma aplicação $*\colon A \to A$ que satisfaz:*

(i) $(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda} a^* + b^*$*, para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, onde $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ é o conjugado de λ;*

(ii) $(a^*)^* = a$*, para todo $a \in A$;*

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$*, para todo $a, b \in A$.*

Chamamos de **-álgebra* uma álgebra munida de involução. Podemos agora destacar alguns elementos especiais de uma $*$-álgebra em termos de sua involução.

Definição 1.2. *Seja A uma *-álgebra. Dado $a \in A$, dizemos que* *(i)* $a \in A$ *é* auto-adjunto*, se* $a^* = a$*;*

(ii) $a \in A$ *é* normal*, se* $a^*a = aa^*$*;*

(iii) Se A *possui unidade,* $a \in A$ *é* unitário*, se* $a^*a = 1_A = aa^*$*;*

(iv) Dado $D \subseteq A$*, definimos* $D^* = \{a^*; a \in D\}$*. Dizemos que* D *é* auto-adjunto *se* $D = D^*$*. Ainda mais, uma* $*$-subálgebra de A *é uma subálgebra auto-adjunta de* A*.*

Observe que pelo item (iii) se $a \in A$ é unitário então $a^* = a^{-1}$.

Sejam A e B *-álgebras e $\varphi\colon A \to B$ *homomorfismo de álgebras*, isto é, φ é uma aplicação linear tal que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in A$. Dizemos que φ é um $*$-*homomorfismo* se φ preserva involução, isto é, $\varphi(a^*) = [\varphi(a)]^*$. Um $*$-*isomorfismo* é um $*$-homomorfismo bijetor. Note que a inversa de um $*$-isomorfismo é também um $*$-isomorfismo.

Dizemos que A é uma *álgebra normada* se A é uma álgebra munida de uma norma $\|\cdot\|\colon A \to \mathbb{R}$ que satisfaz o seguinte axioma, chamado de *submultiplicatividade*:

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\| \text{ para todo } a, b \in A.$$

Uma $*$-*álgebra normada* é uma álgebra normada munida de uma involução isométrica, ou seja, $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in A$. Por fim, se A é uma $*$-álgebra normada completa, dizemos que A é $*$-*álgebra de Banach.*

Definição 1.3. *Seja* B *uma* $*-$*álgebra. Uma* C^*-seminorma *é uma seminorma* $p\colon B \to \mathbb{R}$ *tal que*

(1) $p(ab) \leq p(a)p(b)$ *para todo* $a, b \in B$*;*

(2) $p(a^*) = p(a)$ *para todo* $a \in B$*;*

(3) $p(a^*a) = p(a)^2$ *para todo* $a \in B$.

Se, além disso, p *é uma norma, ou seja, se* $p(a) = 0$ *implica* $a = 0$, *dizemos que* p *é uma* C*-norma.

Definição 1.4. *Uma* C^*-álgebra A *é uma* $*$*-álgebra de Banach satisfazendo*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \qquad \textit{para todo } a \in A. \tag{1.1}$$

Chamaremos a Equação 1.1 de Identidade C^*.

É possível mostrar que existe somente uma C^*-norma para cada C^*-álgebra, veja [18]. Se B é uma C^*-álgebra e p é uma C^*-seminorma sobre B, então $p(b) \leq \|b\|_B$ para todo $b \in B$. Mais ainda, se p é uma C^*-norma, então $p = \|\cdot\|_B$.

Uma C^**-subálgebra* de uma C^*-álgebra é, por definição, uma $*$-subálgebra que é fechada. Note que toda C^*-subálgebra é também uma C^*-álgebra.

Se a C^*-álgebra A for unital então $\|1_A\|_A = 1$. De fato, basta vermos que $\|1_A\|_A = \|1_A^* 1_A\|_A = \|1_A\|_A^2$. Observe que $\|1_A\|_A \neq 0$, caso contrário a norma $\|\cdot\|_A$ não satisfaria a submultiplicatividade da norma. Da mesma forma, se $u \in A$ for um unitário, temos que $\|u\|_A = 1$ pois $\|u\|_A^2 = \|u^*u\|_A = \|1_A\|_A = 1$.

Vejamos agora alguns exemplos de C^*-álgebras que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

Exemplo 1.5. *(1) O exemplo mais conhecido é* $\mathbb{C}$ *com as operações usuais, a involução dada pela conjugação, e a norma dado pelo módulo do número complexo.*

(2) Dado X *um conjunto qualquer, definimos* $l^\infty(X)$ *como o conjunto*

das funções limitadas de X em $\mathbb{C}$, ou seja,

$$l^{\infty}(X) = \{f \colon X \to \mathbb{C};\ f \text{ é limitada } \}.$$

Com as operações definidas pontualmente, isto é,

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

para todo $f, g \in l^{\infty}(X)$, $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ e a norma do supremo

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

o conjunto $l^{\infty}(X)$ é uma álgebra de Banach. Além disso, com a operação de involução definida por $f^{*}(x) := \overline{f(x)}$, obtemos que $l^{\infty}(X)$ é uma $C^{*}-$álgebra.

(3) Podemos generalizar o exemplo do item acima. Trocando $\mathbb{C}$ por outra $C^{*}-$álgebra temos

$$l^{\infty}(X, A) = \{f \colon X \to A;\ f \text{ é limitada } \}.$$

O conjunto $l^{\infty}(X, A)$ é uma $C^{*}-$álgebra.

(4) Seja X um espaço topológico, definimos

$$C_b(X) = \{f \colon X \to \mathbb{C} : f \text{ é função limitada e contínua}\}.$$

Com as operações iguais de $l^{\infty}(X)$ temos que $C_b(X)$ é uma subálgebra de $l^{\infty}(X)$. Assim, $C_b(X)$ é uma álgebra normada, pela norma induzida. Ainda mais, $C_b(X)$ é uma $C^{*}-$álgebra.

(5) Seja X um espaço topológico localmente compacto Hausdorff (LCH). Dizemos que uma função $f \colon X \to \mathbb{C}$ tem suporte compacto se

supp$(f)\colon=\overline{\{x\in X; f(x)\neq 0\}}$ *for um conjunto compacto. Agora definimos o conjunto*

$$C_c(X)=\{f\colon X\to\mathbb{C}; f \text{ é função de suporte compacto}\}.$$

Com as mesmas operações e norma de $l^\infty(X)$. *Ainda mais,* $C_c(X)$ *pode não ser uma álgebra de Banach. O fecho de* $C_c(X)$ *em* $C_b(X)$ *é uma* C^*-*álgebra que denotamos por* $C_0(X)$, *onde os elementos deste conjunto são as funções* $f\colon X\to\mathbb{C}$ *que* se anulam no infinito, *isto é, para todo* $\epsilon>0$, *existe um compacto* $K\subset X$ *tal que* $|f(x)|<\epsilon$ *para todo* $x\in K\backslash X$. *Com isto* $C_0(X)$ *é uma* C^*-*álgebra. Podemos generalizar* $C_0(X)$ *trocando* $\mathbb{C}$ *por qualquer* C^*-*álgebra* A, *denotaremos por* $C_0(X,A)$. *Ainda assim,* $C_0(X,A)$ *é uma* C^*-*álgebra.*

(6) O conjunto das matrizes complexas quadradas de ordem $n\in\mathbb{N}$, *denotada por* $M_n(\mathbb{C})$ *é uma* C^*-*álgebra com as operações usuais de matrizes, a involução sendo a transposta conjugada da matriz. E a norma*

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|,$$

sendo $A\in M_n(\mathbb{C})$ *e* $x\in\mathbb{C}^{n\times 1}$.

(7) Denotamos por $\mathbb{B}(X,Y)$ *o espaço dos operadores lineares limitados de* X *em* Y, *sendo* X,Y *espaços vetoriais normados. Quando* $X=Y$, *utilizaremos apenas* $\mathbb{B}(X)$. *Ainda mais, se* H *é um espaço de Hilbert, o conjunto* $\mathbb{B}(H)$ *é uma* C^*-*álgebra com as operações de multiplicação por escalar e soma usuais de operadores, a multiplicação dada pela a composição, a involução dada pela adjunção de operadores no espaço de Hilbert e a norma de operadores*

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|,$$

sendo $T\in\mathbb{B}(H)$ *e* $x\in H$.

Seja A uma C^*-álgebra. Dizemos que o elemento $a \in A$ é positivo, e escrevemos $a \geq 0$, se existe $b \in A$ tal que $a = b^*b$. Denotamos o conjunto dos elementos positivos de A por $A_+ = \{a^*a; a \in A\}$. Normalmente define-se $a \ \geq 0$ se a é auto-adjunto, isto é $a = a^*$, e o espectro de a é um conjunto real positivo, ou seja, o espectro esta contido em $[0, \infty)$. A equivalência entre estas duas definições é demonstrada em [18].

Definição 1.6. *Sejam A, B C^*-álgebras. Uma aplicação linear φ : $A \to B$ é dita* positiva *se $\varphi(A_+) \subseteq B_+$, ou seja, leva elementos positivos de A em elementos positivos de B. Além disso, dizemos que um funcional linear limitado $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ é um estado se $\|\varphi\| = 1$ e φ for positivo.*

Escrevemos $\varphi \geq 0$ se φ é uma aplicação linear positiva. Uma propriedade muito importante de C^*-álgebra é que toda C^*-álgebra A possui unidade aproximada, isto é, existe uma net $(e_i)_{i \in I}$ em A_+, satisfazendo:

(1) $\|e_i\| \leq 1$ para todo $i \in I$;

(2) $(e_i)_{i \in I}$ é crescente;

(3) $\lim\limits_{i \in I} e_i a = a$ para todo $a \in A$.

A demonstração deste fato pode ser vista em [18]. Temos outra propriedade importante que as C^*-álgebras possuem que segue abaixo.

Definição 1.7. *Seja A uma C^*-álgebra. Uma* representação *de A é um par (H, φ), onde H é um espaço de Hilbert e $\varphi\colon A \to \mathbb{B}(H)$ é um $*$-homomorfismo.*

Ainda mais, (H, φ) é dita *representação fiel* se o $*-$homomorfismo é injetor. O fato geral é que toda C^*-álgebra admite uma representação fiel (H, φ). A prova dessa propriedade pode ser vista em [18] na seção 3.4.

Agora que já introduzimos as representações podemos generalizar o item 6 do Exemplo 1.5.

Exemplo 1.8. *Seja A uma C^*-álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Defina $M_n(A)$ como o conjunto da matrizes $n \times n$ com entradas em A. Então $M_n(A)$ é uma C^*-álgebra com as operações de soma e multiplicação usuais de matrizes e a involução $(a_{ij})^* := (a_{ji}^*)$. A norma em $M_n(A)$ pode ser obtida representando-se A fielmente num espaço de Hilbert H e considerando-se daí a representação induzida canônica de $M_n(A)$ em H^n (soma direta de n cópias de H). Veja a seção 3.4 de [18] para mais detalhes. O conjunto $M_n(A)$ é uma C^*-álgebra.*

1.2 Produtos Tensoriais

Nesta seção introduziremos o conceito de produtos tensoriais de C^*-álgebras. Conforme explicaremos no que segue, existem dois produtos tensoriais canônicos usados em C^*-álgebra, o *minimal* e o *maximal*, dependendo da norma que se usa para completar o produto tensorial algébrico. Uma boa referência é [18].

Espera-se que o leitor tenha um conhecimento preliminar de produtos tensoriais algébricos. Caso contrário, todos os resultados que iremos utilizar aqui podem ser consultados em [1]. Dados X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$, denotaremos por $X \otimes_{alg} Y$ o produto tensorial algébrico de X e Y. Lembramos que $X \otimes_{alg} Y$ consiste de combinações lineares de elementos da forma $x \otimes y$, chamados *tensores elementares*, e estes satisfazem as seguintes propriedades:

- $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$;

- $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$;
- $c(x \otimes y) = cx \otimes y = x \otimes cy$,

para todos $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ e $c \in \mathbb{C}$. A seguinte propriedade universal do produto tensorial algébrico o caracteriza (a menos de isomorfismo) e é de extrema importância em decorrência dos resultados que podem ser extraídos.

Proposição 1.9. *(Propriedade universal do produto tensorial) Sejam X, Y, Z espaços vetoriais e $\sigma\colon X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear. Então existe uma única aplicação linear $\tilde{\sigma}\colon X \otimes_{alg} Y \to Z$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} & X \otimes_{alg} Y \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ X \times Y \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\sigma"'] & & Z \end{tikzcd}$$

onde $i\colon X \times Y \to X \otimes_{alg} Y$ é uma aplicação dada por $i(x, y) = x \otimes y$.

Como consequência da propriedade universal, dados X e Y espaços vetoriais e $f\colon X \to \mathbb{C}$ e $g\colon Y \to \mathbb{C}$ funcionais lineares existe único funcional linear no produto tensorial $f \otimes_{alg} g\colon X \otimes_{alg} Y \to \mathbb{C}$ tal que $(f \otimes_{alg} g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Similarmente, dados f, g funcionais conjugados lineares (isto é, $f(cx) = \bar{c}f(x)$, para todo $c \in \mathbb{C}$ e $x \in X$), existe $f \otimes g$ funcional conjugado linear sobre $X \otimes_{alg} Y$ tal que $(f \otimes_{alg} g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Isto pode ser obtido através da consideração dos espaços conjugados (onde a multiplicação por escalar é redefinida por $\lambda \cdot x := \overline{\lambda}x$).

Se X e Y são espaços normados, pode-se, a princípio, definir várias normas em $X \otimes_{alg} Y$ a fim de torná-lo um espaço normado. O objetivo desta seção é definir e estudar certas normas especiais sobre $X \otimes_{alg} Y$ no caso em que X e Y são C^*-álgebra a fim de obter novas C^*-álgebras através do completamento.

Como a norma de toda C^*-álgebra pode ser descrita através de uma representação em um espaço de Hilbert, vamos primeiramente analisar o produto tensorial de tais espaços. A próxima proposição dá os primeiros passos nesta direção.

Proposição 1.10. *Sejam H e K espaços de Hilbert, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ os respectivos produtos internos. Então existe único produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \otimes_{alg} K \to \mathbb{C}$ tal que $\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_H \langle y_1, y_2 \rangle_K$ para todo $x_1, x_2 \in H$ e $y_1, y_2 \in K$.*

Demonstração. Por H e K serem espaços de Hilbert, temos pelo teorema de representação de Riez que, dado $x \in H$ definimos um funcional conjugado linear $f_x \colon H \to \mathbb{C}$ por $f_x(h) = \langle x, h \rangle_H$ para todo $h \in H$. Analogamente, dado $y \in K$, definimos $g_y(k) = \langle y, k \rangle_K$ para todo $k \in K$.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todos funcionais conjugados lineares de $H \otimes_{alg} K$. Defina a aplicação $m \colon H \times K \to \mathcal{C}$ por $(x, y) \mapsto f_x \otimes g_y$, onde $f_x \otimes g_y \colon H \otimes_{alg} K \to \mathbb{C}$ é obtido a partir da propriedade universal conforme explicado anteriormente. Observe que a aplicação m é bilinear pois f_x e g_y é um funcional linear. Pela propriedade universal do produto tensorial existe único $M \colon H \otimes_{alg} K \to \mathcal{C}$ tal que $M(x \otimes y) = f_x \otimes g_y$ para todo $x \in H$ e $y \in K$.

Agora, $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon (H \otimes_{alg} K) \times (H \otimes_{alg} K) \to \mathbb{C}$ definida por $(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) \mapsto M(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = f_{x_1} \otimes g_{y_1}(x_2 \otimes y_2) = f_{x_1}(x_2) \otimes g_{y_1}(y_2) = \langle x_1, x_2 \rangle_H \langle y_1, y_2 \rangle_K$ segue das propriedades do produto interno de H e K que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma sesquilinear em $H \otimes_{alg} K$.

Por fim, vejamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno sobre $H \otimes_{alg} K$.

Seja $z \in H \otimes_{alg} K$ assim, $z = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ para algum $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ e $y_1, \ldots, y_n \in K$. Seja $e_1, e_2, \ldots e_m$ base ortonormal para o span linear de $y_1, \ldots y_n$. Assim $z = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^{'} \otimes e_j$ para $x_1^{'}, \ldots, x_m^{'} \in H$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle z, z\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{m} x_i^{'} \otimes e_i, \sum_{j=1}^{m} x_j^{'} \otimes e_j \rangle = \sum_{j,i=1}^{m} \langle x_i^{'} \otimes e_i, x_j^{'} \otimes e_j \rangle \\ &= \sum_{j,i=1}^{m} \langle x_i^{'}, x_j^{'} \rangle_H \langle e_i \otimes e_j \rangle_K = \sum_{j=1}^{m} \langle x_j^{'}, x_j^{'} \rangle_H = \sum_{j=1}^{m} \|x_j^{'}\|_H^2.\end{aligned}$$

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo, ou seja, $\langle z, z\rangle \geq 0$ para todo $z \in H \otimes_{alg} K$. E se $\langle z, z\rangle = 0$ então $x_j^{'} = 0$ para todo j, assim $z = \sum\limits_{j=1}^{m} 0 \otimes e_j = 0$. Portanto, podemos concluir que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno sobre $H \otimes_{alg} K$. $\square$

Denotaremos o completamento de $H \otimes_{alg} K$ com a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon (H \otimes_{alg} K) \times (H \otimes_{alg} K) \to \mathbb{C}$ como definido no proposição 1.10 por $H \widehat{\otimes} K$. Observe que $\|x_1 \otimes x_2\|_{H \tilde{\otimes} K} = \|x_1\|_H \|x_2\|_K$ para todo $x_1 \in H$ e $y_1 \in K$.

Sejam A e B C^*-álgebras. Para obtermos uma estrutura de $*-$álgebra em $A \otimes_{alg} B$ precisamos definir a multiplicação e a involução. A multiplicação é definida por $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ para todos $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. E a involução é dada por $(a_1 \otimes b_1)^* = a_1^* \otimes b_1^*$ para todo $a_1 \in A$ e $b_1 \in B$. Para mostrar que estas operações existem e estão bem definidas basta usar a propriedade universal do produto tensorial algébrico, veja [5] para mais detalhes.

Outra consequência da propriedade universal do produto tensorial é a seguinte.

Proposição 1.11. *Sejam A, B e C $*-$álgebras e $f \colon A \to C$ e $g \colon B \to C$ $*-$homomorfismos de álgebras tal que todo elemento de $f(A)$ comuta com todos elementos de $g(B)$. Então existe único $*-$homomorfismo*

$h\colon A \otimes_{alg} B \to C$ tal que $h(a \otimes b) = f(a)g(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

Demonstração. Basta considerar a aplicação $H\colon A \times B \to C$ definida por $H(a,b) = f(a)g(b)$ que é bilinear. Por fim, aplique a propriedade universal do produto tensorial. $\square$

Agora estamos caminhando no sentido de definir algumas C^*--normas para que $A \otimes_{alg} B$ se torne uma C^*-álgebra.

Teorema 1.12. *Sejam A, B e C $*-$álgebras e (H,ϕ) , (K,ψ) representações de A e B, respectivamente. Então existe único $*-$homomorfismo $\pi\colon A \otimes_{alg} B \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}K)$ tal que $\pi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Além disso, se $\phi\colon A \to \mathbb{B}(H)$ e $\psi\colon B \to \mathbb{B}(K)$ são injetivas então π é injetiva.*

Demonstração. Seja $\Phi\colon \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}K)$ tal que $a \mapsto \phi(a)\otimes Id_K$ e $\Psi\colon B \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}K)$ onde $b \mapsto Id_h \otimes \psi(b)$, onde Id_H e Id_K são os operadores identidade em H e K.

Observe que

$$\begin{aligned}(\phi(a) \otimes Id_K)(Id_H \otimes \psi(b)) &= \phi(a) \circ Id_H \otimes Id_K \circ \psi(b)\\ &= Id_H \circ \phi(a) \otimes \psi(b) \circ Id_K\\ &= (Id_H \otimes \psi(b))(\phi(a) \otimes Id_K).\end{aligned}$$

Ou seja, $\Phi(A)$ e $\Psi(B)$ comutam. Pela proposição anterior e lembrando que $\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}K)$ é uma C^*-álgebra, existe um único $*-$homomorfismo $\pi\colon A \otimes B \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}K)$ sendo

$$\begin{aligned}\pi(a \otimes b) &= \Phi(a)\Psi(b)\\ &= (\phi(a) \otimes Id_K)(Id_H \otimes \psi(b))\\ &= \phi(a) \circ Id_H \otimes Id_K \circ \psi(b)\end{aligned}$$

$$= \phi(a) \otimes \psi(b).$$

Além disso, tome $c \in \ker(\pi) \subseteq A \otimes B$, podemos escrever $c = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j$, sendo $b_1, \ldots, b_n$ elementos linearmente independentes. Por ψ ser $*-$homomorfismo injetor, $\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n)$ são linearmente independentes. Assim

$$0 = \pi(c) = \pi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \phi(a_j) \otimes \psi(b_j)$$

donde segue, $\phi(a_1) = \cdots = \phi(a_n) = 0$. Porém, ϕ é injetora, logo $a_1 = \cdots = a_n = 0$, ou seja, $c = \sum_{j=1}^{n} 0 \otimes b_j = 0$. Portanto, $\ker(\pi) = \{0\}$, ou seja, π é injetivo.

□

Agora temos condições suficientes para definir algumas normas sobre $A \otimes_{alg} B$.

Definição 1.13. *Sejam A e B C^*-álgebras. Sejam (ϕ, H) e (ψ, K) representações fieis de A e B, respectivamente. A norma minimal em $A \otimes_{alg} B$ é definida por*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{min} \colon A \otimes B &\to \mathbb{R} \\ a \otimes b &\mapsto \|a \otimes b\|_{min} = \|\phi(a) \otimes \psi(b)\|_{\mathbb{B}(H \otimes K)} \end{aligned}$$

Na notação do Teorema 1.12 temos $\pi(a \otimes b) = \phi(a) \otimes \psi(b)$. Como as representações são fieis, $\|.\|_{min}$ é mesmo uma C^*-norma sobre $A \otimes_{alg} B$. Em algumas referências a norma acima é chamada de norma espacial.

Denotaremos o completamento de $A \otimes_{alg} B$ pela norma $\|\cdot\|_{min}$ por $A \otimes_{min} B$. É possível ver que a norma minimal do produto tensorial independe da escolha das representações fieis $\phi \colon A \to \mathbb{B}(H)$ e $\psi \colon B \to$

$\mathbb{B}(K)$, a demonstração deste fato encontra-se em [5].

Além disso, a norma acima é chamada de minimal pois é a menor C*-norma sobre $A \otimes_{alg} B$. Existe ainda uma a C^*-norma máxima sobre $A \otimes_{alg} B$ definida como segue.

Definição 1.14. *Sejam A e B C^*-álgebras. Definimos a C^*-norma maximal sobre $A \otimes_{alg} B$ por $\| \cdot \|_{max} \colon A \otimes_{alg} B \to \mathbb{R}$ com*

$$\|a \otimes b\|_{max} = \sup_{\pi}\{\|\pi(a \otimes b)\|_{\mathbb{B}(H)}\},$$

onde o supremo é tomado sobre a coleção de todos os $\pi \colon A \otimes B \to \mathbb{B}(H)$ $*-$homomorfismos e H um espaço de Hilbert.

Denotaremos por $A \otimes_{max} B$ o completamento de $A \otimes_{alg} B$ com a C^*-norma acima.

Não utilizaremos esta norma no decorrer deste trabalho, por isso os resultados relacionados a esta norma não serão enunciados, como por exemplo a limitação desta norma. Caso tenha interesse em estudar sobre a norma maximal, uma referência básica é o capítulo 6 de [18].

Em geral, para que $\| \cdot \|_\gamma$ seja uma C^*-norma sobre $A \otimes_{alg} B$, a norma $\| \cdot \|_\gamma$ deve satisfazer:

1. $\|xy\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma \|y\|_\gamma$;
2. $\|x^*\|_\gamma = \|x\|_\gamma^*$;
3. $\|x^* x\|_\gamma = \|x\|_\gamma^2$,

para todo $x, y \in A \otimes B$. É denotado por $A \otimes_\gamma B$ o completamento de $A \otimes B$ por $\| \cdot \|_\gamma$. Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 1.15. *Seja A uma C^*-álgebra. Existe única C^*-norma em $M_n(\mathbb{C}) \otimes_{alg} A$.*

Demonstração. Defina $\phi\colon M_n(\mathbb{C}) \otimes_{alg} A \to M_n(A)$ por $\sum\limits_{i,j} e_{i,j} \otimes a_{i,j} \mapsto [a_{i,j}]_{i,j}$, onde $[a_{i,j}]_{i,j}$ são as entradas da matriz em $M_n(A)$. Observe que ϕ é um $*-$isomorfismo. Portanto $M_n(A) \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes_{alg} A$.

Como $M_n(A)$ é uma C^*-álgebra, existe uma única, a menos de isomorfismo, C^*-norma em $M_n(A)$. Assim, $A \otimes M_n(\mathbb{C})$ é uma C^*-álgebra com respeito a norma oriunda de $M_n(A)$. Neste caso, $M_n(\mathbb{C}) \otimes_{alg} A \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes_{max} A$. □

1.3 C*-Álgebras associadas a Grupos Discretos

Nesta seção definiremos as C^*-álgebras de grupos. Mais tarde, veremos no capítulo 3 que a C^*-álgebra de grupo é um caso especial de produto cruzado discreto. Neste caso, esta seção serve como uma introdução para o capítulo 3. Para mais informações sobre esta seção basta consultar [5].

Seja G um grupo discreto. Seja $s \in G$ um elemento qualquer, denote por $\delta_s = \chi_{\{s\}}$ onde $\chi_{\{s\}}$ é a função característica de $\{s\}$.

Primeiramente vamos definir uma $*$-álgebra, denotada por $\mathbb{C}[G]$ e chamada a álgebra do grupo G. Seja

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{s \in G} a_s \delta_s ;\ \text{apenas finitos } a_s \in \mathbb{C} \text{ são não nulas} \right\}.$$

O conjunto acima, é o conjunto das funções complexas a de suporte finito sobre G. Aqui $a\colon G \to \mathbb{C}$ é uma função de suporte finito em que $s \mapsto a(s) = a_s$. Assim, $a_s\delta_s(g) = \begin{cases} a_s, & \text{se } g = s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$. Podemos ver os elementos de $\mathbb{C}[G]$ como combinações lineares de $a_s\delta_s$. Observe que para cada função $a \in \mathbb{C}[G]$, existe uma única família $(a_s)_{s\in G}$ de números complexos tal que $a_s \neq 0$ para uma quantidade finita de $s \in G$. Vamos munir $\mathbb{C}[G]$ com a operação de soma definida por

$$\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) + \left(\sum_{t\in G} b_t\delta_t\right) := \sum_{t,s\in G} a_s\delta_s + b_t\delta_t,$$

a multiplicação por escalar $z \in \mathbb{C}$ por

$$z\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) := \sum_{s\in G}(za_s)\delta_s$$

e a multiplicação dada por

$$\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)\left(\sum_{t\in G} b_t\delta_t\right) := \sum_{s,t\in G} a_s b_t\delta_{st}.$$

Ainda podemos definir uma operação de involução por

$$\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)^* := \sum_{s\in G} \overline{a_s}\delta_{s^{-1}}.$$

Aqui denotamos por s^{-1} o inverso de $s \in G$ e $\overline{a_s}$ o conjugado de $a_s \in \mathbb{C}$. Com as operações acima $\mathbb{C}[G]$ é uma *-álgebra unital, com a unidade $1_{\mathbb{C}[G]} = 1_{\mathbb{C}}\delta_e$, sendo $e \in G$ a unidade do grupo.

Seja $l^2(G)$ um espaço de Hilbert tal que $\{\delta_t; t \in G\}$ é a base vetorial canônica ortonormal de $l^2(G)$. Dado $s \in G$, defina $\lambda\colon G \to \mathbb{B}(l^2(G))$ por $\lambda(s) := \lambda_s$ tal que $\lambda_s(\delta_t) = \delta_{st}$, para todo $t \in G$. Ainda mais, λ é uma aplicação injetiva. A aplicação λ é chamada a *representação regular à esquerda*. Observe que $\lambda(st) = \delta_{st} = \delta_s\delta_t = \lambda(s)\lambda(t)$ para todo $s, t \in G$. Além disso a representação é unitária (isto é, cada λ_s é unitário e $s \to \lambda_s h$ é contínua, com $h \in l^2(G)$, com relação topologia induzida pela norma de $\mathbb{B}(l^2(G))$), pois $\lambda(e) = \delta_e$ e $\lambda(s)^* = \lambda_s^* = \lambda_{s^{-1}}$.

Proposição 1.16. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\pi\colon G \to \mathbb{B}(H)$ uma* *representação unitária. Então existe extensão de π para $\tilde{\pi} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{B}(H)$ um $*-$representação unital satisfazendo*

$$\tilde{\pi}\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) := \sum_{s\in G} a_s\pi(s).$$

Ainda mais, esta aplicação nos dá uma bijeção entre as representações unitárias de G em H com as representações unitais de $\mathbb{C}[G]$ em H.

Em particular, λ pode ser estendida a um $*$- homomorfismo $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{B}(l^2(G)$ que, por abuso de notação, denotaremos por λ. Mais ainda λ: $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{B}(l^2(G))$ é injetor. Como λ é injetor, vemos que $\lambda(\mathbb{C}[G]) = \mathbb{C}[G] \subset \mathbb{B}(l^2(G))$, assim conseguimos definir uma C^*-norma $\|x\|_r = \|\lambda(x)\|_{\mathbb{B}(l^2(G))}$ para todo $x \in \mathbb{C}[G]$, fazendo com que $\mathbb{C}[G]$ seja uma *-álgebra normada. Observe que é importante que λ seja injetora sobre $\mathbb{C}[G]$ para que $\|\cdot\|_r$ seja uma norma, caso contrário $\|\cdot\|_r$ seria somente uma seminorma.

Agora temos o necessário para definir as C*-álgebras de G.

Definição 1.17. *A C*-álgebra reduzida de G é o completamento de $\mathbb{C}[G]$ com respeito a norma*

$$\|x\|_r = \|\lambda(x)\|_{\mathbb{B}(l^2(G))}$$

Denotamos a C*-álgebra reduzida de G por $C^*_r(G)$. Ou seja, $C^*_r(G) = \overline{\mathbb{C}[G]}^{\|\cdot\|_r}$.

Definição 1.18. *A C*-álgebra cheia de G é o completamento de $\mathbb{C}[G]$ com respeito a norma*

$$\|x\|_u = \sup_{\pi}\{\|\pi(x)\|_{\mathbb{B}(l^2(G))}\},$$

onde o supremo varia sobre a coleção de todas as $*$- representações

$\pi\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{B}(H)$ com H espaço de Hilbert. Ou seja, $C^*(G) = \overline{\mathbb{C}[G]}^{\|\cdot\|_u}$.

Note que o supremo acima é limitado, pois

$$\|x\|_u = \left\| \sum_{s\in G} x_s\lambda_s \right\|_u = \sup_\pi \left\| \pi\Big(\sum_{s\in G} x_s\lambda_s \Big) \right\| \leq \sum_{s\in G} |x_s| = \|x\|_1.$$

Exemplo 1.19. *Vamos ver que $C^*(\mathbb{Z}) \cong C(\mathbb{T})$, onde $\mathbb{T}$ é o circulo unitário e $C(\mathbb{T})$ é o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{T}$ em $\mathbb{C}$.*

Como $G = (\mathbb{Z}, +)$ temos $\delta_n\delta_m = \delta_{n+m}$. Defina o $*-$homomorfismo $\varphi : C(\mathbb{T}) \to C^*(\mathbb{Z})$ tal que $z \mapsto \delta_1$. Com isto, $z^n \mapsto \delta_n$.

Por outro lado, podemos considerar os unitários $z^n \in C(\mathbb{T})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z^n z^m = z^{n+m}$. Agora, considere $\psi : C^*(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$ definido por $\delta_n \mapsto z^n$.

Fazendo $\psi \circ \varphi(z) = \psi(\delta_1) = z^1 = z$ e $\varphi \circ \psi(\delta_n) = \varphi(z^n) = \delta_n$ temos que $\psi = \varphi^{-1}$. Com isto temos nosso isomorfismo.

Pela construção dos completamentos feitos acima, podemos estender λ de tal forma que $\lambda : C^*(G) \to C^*_r(G)$ é um homomorfismo sobrejetor. Para ver isto, primeiramente estenda λ para $C^*(G)$ e depois observe que $\lambda(C^*(G)) = C^*_r(G)$. Veremos no próximo capítulo que, em geral, $\lambda : C^*(G) \to C^*_r(G)$ não é injetivo.

Aproveitando a notação utilizada acima para λ, dado $s \in G$ definimos $\tau_s\colon l^\infty(G) \to l^\infty(G)$ por $f \mapsto \tau_s(f)$ tal que $\tau_s(f)(t) = f(s^{-1}t)$, para $t \in G$. Veremos em um próximo capítulo que $s \to \tau_s$ define uma ação de grupos de G sobre $l^\infty(G)$, oriunda da representação regular à esquerda.

Podemos representar $l^\infty(G)$ em $\mathbb{B}(l^2(G))$ através de operadores de multiplicação, pois sabemos que $l^\infty(G)$ é um C^*-álgebra, logo existe $M\colon l^\infty(G) \to \mathbb{B}(l^2(G))$ tal que $f \mapsto M_f$, onde $M_f(\xi) = f \cdot \xi$ para todo

$\xi \in l^2(G)$. Vendo $l^\infty(G) \subseteq \mathbb{B}(l^2(G))$ as vezes iremos omitir a aplicação M. Ainda mais, observe que $\tau_s(\delta_t)(g) = \delta_t(s^{-1}g) = \delta_{st}(g)$, para todo $s, t, g \in G$, ou seja, nas funções δ_t as aplicações τ_s e λ_s coincidem para todo $s, t \in G$.

Assim, dados $t \in G$ e $f \in l^\infty(G)$ temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_s M_f \lambda_{s^{-1}}(\delta_t) &= \lambda_s M_f(\delta_{s^{-1}t}) \\
&= \lambda_s f(s^{-1}t)(\delta_{s^{-1}t}) \\
&= f(s^{-1}t)(\delta_t) \\
&= \tau_s(f)(t)\delta_t \\
&= M_{\tau_s(f)}\delta_t.
\end{aligned}$$

Como $f \in l^\infty(G)$, $\xi \in l^2(G)$ e $t \in G$ foram quaisquer, omitindo M, podemos ver como

$$\lambda_s f \lambda_s^* = \tau_s(f). \tag{1.2}$$

Utilizaremos esta igualdade acima na demonstração do teorema 2.24.

Ainda aproveitando as notações já introduzidas podemos definir

$$l^1(G) = \overline{\mathbb{C}[G]}^{\|\cdot\|_1},$$

ou seja, o completamento de $\mathbb{C}[G]$ com a norma $\|\cdot\|_1$, definida por $\left\| \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s \right\|_1 = \sum\limits_{s\in G} |a_s|$. As operações de $\mathbb{C}[G]$ se estendem à $l^1(G)$ pois, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s \right) \left(\sum_{t\in G} b_t\delta_t \right) \right\|_1 &= \sum_{s,t\in G} |a_s b_t| \leq \sum_{s,t\in G} |a_s||b_t| \\
&= \left\| \sum_{s\in G} a_s\delta_s \right\|_1 \left\| \sum_{t\in G} b_t\delta_t \right\|_1
\end{aligned}$$

e

$$\left\| \left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s \right)^* \right\|_1 = \left\| \sum_{s\in G} \bar{a_s}\ \delta_{s^{-1}} \right\|_1 = \sum_{s\in G} |\ \bar{a_s}\ |$$
$$= \sum_{s\in G} |a_s| = \left\| \sum_{s\in G} a_s\delta_s \right\|_1.$$

Logo, teremos que $l^1(G)$ é uma $*$-álgebra de Banach.

Podemos também definir $l^1(G)$ como o conjunto

$$l^1(G) = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \sum_{s\in G} \|f(s)\| < \infty \right\}$$

com as operações de soma pontual, a multiplicação dada pela convolução $f * g(t) = \sum\limits_{s\in G} f(s)g(s^{-1}t)$ e a involução $[f(t)]^* = \overline{f(t^{-1})}$ é uma $*$-álgebra. Além disso, com a norma $\|f\|_1 = \sum\limits_{s\in G} \|f(s)\|$, sendo $f, g \in l^1(G)$ e $s, t \in G$, o conjunto $l^1(G)$ é uma $*$-álgebra de Banach. Observe que as duas definições de $l^1(G)$ são análogas.

2 Grupos Discretos Mediáveis

Neste capítulo introduziremos a mediabilidade de grupos discretos e com alguns resultados chegaremos em um teorema com 7 equivalências de grupos mediáveis. Para este capítulo recomenda-se ao leitor que não está familiarizado com a noção de funções positivas definidas para C^*-álgebras que leia o apêndice A.

2.1 Mediabilidade e Exemplos

Veremos nesta seção a definição de mediabilidade de grupo e alguns exemplos básicos. Para esta seção utilizamos [7]. Fixamos aqui G um grupo discreto. Lembre que

$$l^\infty(G) = \{f \colon G \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é limitada}\},$$

com a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in G}\{|f(t)|\}$ sobre $l^\infty(G)$ é uma C^*-álgebra. Note ainda que $l^\infty(G)$ possui unidade, que denotaremos por $1_{l^\infty(G)}$.

Definição 2.1. *Um grupo G é* mediável *se existe um funcional linear limitado $\varphi\colon l^\infty(G) \to \mathbb{C}$ que é um estado invariante à esquerda, ou seja, φ satisfaz* *(i)* $\varphi(f) \geq 0$ *para* $f \geq 0$*;*

(ii) $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1_{l^\infty(G)})$*;*

(iii) $\varphi(\tau_s(f)) = \varphi(f)$*, onde* $\tau_s(f)(t) = f(s^{-1}t)$ $\forall s, t \in G$ *e* $f \in l^\infty(G)$*.*

Diremos que um funcional φ como acima é uma *média invariante* sobre G. Assim, um grupo G é mediável se ele admite uma média invariante. A partir de φ conseguimos obter uma medida através do funcional φ como será explicado a seguir.

Seja G um grupo e $\varphi \in l^\infty(G)' = \{f : l^\infty(G) \to \mathbb{C}; f$ é linear e limitado$\}$ um estado invariante à esquerda. Seja $\mathcal{P}(G)$ o conjunto das partes de G. Podemos definir $m\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ tal que $E \in \mathcal{P}(G) \mapsto m(E) = \varphi(1_E) \in [0,1]$, como uma medida de probabilidade finitamente aditiva, ou seja, se $E, F \in \mathcal{P}(G)$ é tal que $E \cap F = \emptyset$, então $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ e $m(G) = 1$. Por φ ser invariante à esquerda, temos que m também herda essa propriedade, isto é, $m(sE) = \varphi(1_{sE}) = \varphi(\tau_s(1_E)) = \varphi(1_E)$ para todo $s \in G$ e $E \in \mathcal{P}(G)$, onde $sE = \{sx; x \in E\}$.

É conhecido que a associação $\varphi \mapsto m$ que acabamos de definir nos dá uma bijeção entre o conjunto dos estados invariantes à esquerda sobre $l^\infty(G)$ e o conjunto das medida finitamente aditivas de probabilidade que são invariantes à esquerda. Isto pode ser deduzido de um resultado ainda mais geral, ver em [21] que descreve o espaço dual de $l^2(X)$ de um conjunto arbitrário em termos de medida finitamente aditivas sobre X. É importante salientar que, em geral, a medida m associada a φ pode não ser σ-aditiva. Como consequência, um grupo G é mediável se e somente se existe uma medida finitamente aditiva de probabilidade e invariante à esquerda sobre G.

O conceito de mediabilidade pode ser generalizado para grupos topológicos localmente compactos. Na definição acima podemos trocar a invariância à esquerda pela invariância à direita, pois é possível demonstrar que existe uma média invariante à esquerda se e somente se existe uma média invariante à direita. Neste trabalho vamos usar apenas funcionais ou médias invariantes à esquerda.

Agora, vejamos com detalhes alguns exemplos básicos de grupos mediáveis. Precisaremos também de resultados auxiliares que serão descritos no decorrer deste capítulo.

Proposição 2.2. *Todo grupo G finito é mediável.*

Demonstração. Como G é finito, seja $|G| = n \in \mathbb{N}$, onde $|G|$ é a cardinalidade de G . Defina

$$\begin{aligned} \varphi\colon l^\infty(G) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t). \end{aligned}$$

Vamos verificar que φ é um estado invariante à esquerda. Primeiramente, vejamos que φ é um funcional linear positivo. Dados $f, g \in l^\infty(G)$, temos a linearidade por:

$$\begin{aligned} \varphi(f+g) &= \frac{1}{n}\sum_{t\in G}(f+g)(t) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t) + g(t) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t) + \frac{1}{n}\sum_{t\in G} g(t) \\ &= \varphi(f) + \varphi(g). \end{aligned}$$

Se $f(t) \geq 0$ para todo $t \in G$, então $\varphi(f) = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t) \geq 0$.

Além disso,

$$\varphi(1_{l^\infty(G)}) = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} 1_{l^\infty(G)}(t) = \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n}}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_\infty &= \sup_{\|f\|=1}\{|\varphi(f)|\} = \sup_{\|f\|=1}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\right|\right\}\\ &\leq \sup_{\|f\|=1}\frac{1}{n}\left\{\sum_{t\in G}|f(t)|\right\} \leq \frac{n}{n} = 1.\end{aligned}$$

Do provado acima, como $\varphi(1_{l^\infty(G)}) = 1$ temos $\|\varphi\|_\infty = 1$. Logo, φ é um estado. Falta mostrar que φ é invariante à esquerda. Dado $s \in G$ e $f \in l^\infty(G)$ temos

$$\varphi(\tau_s(f)) = \frac{1}{n}\sum_{t\in G}\tau_s(f(t)) = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(s^{-1}t) = \frac{1}{n}\sum_{u\in G} f(u) = \varphi(f).$$

Portanto, provamos que φ é uma média invariante sobre G.

$\square$

Por esta proposição já temos exemplos concretos de grupos mediáveis, tais como os grupos de permutações, rotações e translações finitas e conseguimos neste caso explicitar uma média invariante.

Para a próxima exemplificação, usaremos aqui um teorema de ponto fixo de Markov-Kakutani, que está enunciado a seguir:

Teorema 2.3. *[Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani]*

Seja E uma espaço vetorial topológico Hausdorff e $X \subset E$ subconjunto compacto e convexo. Seja Υ uma coleção de transformações lineares limitadas de E em E, tal que $T(X) \subset X$, para todo $T \in \Upsilon$. Se Υ é comutativo então existe um ponto $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$, para *todo* $T \in \Upsilon$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [21], no Teorema 0.14. $\square$

Com este resultado, segue que:

Corolário 2.4. *Todo grupo abeliano discreto é mediável.*

Demonstração. Sejam G grupo (discreto) abeliano e $E = l^{\infty}(G)' = \{\varphi\colon l^{\infty}(G) \to \mathbb{C}; \varphi$ é linear limitado$\}$ com a topologia fraca$-*$. Defina $X = \{\varphi \in E;\ \|\varphi\| \leq 1,\ \varphi(1_E) = 1$ e $\varphi(f^*f) \geq 0,\ \forall f \in l^{\infty}(G)\}$. Note que X é um subconjunto dos funcionais lineares positivos com norma menor ou igual que 1 de $l^{\infty}(G)$, que além disso é fechado e convexo dentro da bola unitária em E. Assim, pelo teorema de Banach-Alaoglu, X é compacto.

Para cada $s \in G$, defina

$$\tau'_s\colon E \to E$$

$$\phi \mapsto \phi \circ \tau_s,$$

onde τ_s é a função já definida anteriormente. Vejamos que τ'_s é uma transformação linear limitada. Dado $\gamma, \eta \in E$ e $c \in \mathbb{C}$, temos que

$$\tau'_s(c\gamma+\eta) = (c\gamma+\eta)\circ\tau_s = c\gamma\circ\tau_s+\eta\circ\tau_s = c(\gamma\circ\tau_s)+\eta\circ\tau_s = c\tau'_s(\gamma)+\tau'_s(\eta)$$

e

$$\|\tau'_s\| = \sup_{\|\phi\|=1} \|\tau'_s(\phi)\| = \sup_{\|\phi\|=1} \|\phi \circ \tau_s\| \leq \|\tau_s\| \leq 1.$$

Seja $\Upsilon = \{\lambda'_s; s \in G\}$ uma coleção de transformações lineares limitadas em E. Como G é abeliano, dados $s, t \in G$, temos $\tau_s\tau_t =$

$\tau_{st} = \tau_{ts} = \tau_t\tau_s$. Assim, dado $\phi \in E$, obtemos

$$\tau'_s\tau'_t(\phi) = \tau'_s(\phi \circ \tau_t) = \phi \circ \tau_t \circ \tau_s = \phi \circ \tau_s \circ \tau_t = \tau'_t(\phi \circ \tau_s) = \tau'_t\tau'_s(\phi),$$

e portantoΥ é comutativo. Por fim, $\tau'_s(X) = \{\varphi \circ \tau_s; \varphi \in E\} \subset X$, pois cada τ_s é um automorfismo de C^*-álgebras (veremos este resultado no próximo capítulo).

Agora temos condições suficientes para aplicar o Teorema 2.3. Pelo teorema, existe $\varphi_0 \in X$ tal que $\tau'_s(\varphi_0) = \varphi_0$, para todo $s \in G$, ou seja, $\varphi_0 \circ \tau_s = \varphi_0$, isto é, φ_0 é invariante à esquerda. Como $\varphi_0 \in X \subset l^\infty(G)$ temos que φ_0 é um estado invariante à esquerda.

Portanto, φ_0 é uma média invariante à esquerda, logo G é mediável.

$\square$

O corolário acima pode ser generalizado para grupos localmente compactos Hausdorff e abelianos, como pode ser visto nos apêndices de [24]. Agora temos mais uma gama de exemplos de grupos mediáveis, como $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ entre outros. Observe que provamos a existência da média invariante, porém neste caso, não a explicitamos. Veremos que não é fácil expressar a média invariante como no caso finito.

Esta dificuldade de explicitar uma média invariante φ sobre G é que $\varphi(C_0(G)) = \{0\}$, isto é, $\varphi(f) = 0$ para todo $f \in C_0(G)$.

De fato, para isto basta mostrar que $\varphi(\delta_t) = 0$ para todo $t \in G$ pois $C_0(G) \cong \overline{span}\{\delta_t; t \in G\}$. Sabemos que $\lambda_t(\delta_e) = \delta_t$ e por invariância temos $\varphi(\delta_t) = \varphi(\lambda_t(\delta_e)) = \varphi(\delta_e)$. Tome $t_1, \cdots, t_k$ um conjunto finito de k pontos distintos de G, então

$$k|\varphi(\delta_e)| = |\varphi(\delta_{t_1} + \delta_{t_k})| \leq 1.$$

Isto implica que $k|\varphi(\delta_e)| \leq 1$ e assim $\varphi(\delta_e) = 0$. E portanto, $\varphi(\delta_t) =$

$\varphi(\delta_e) = 0$.

Já vimos os exemplos mais básicos de grupos mediáveis, porém ainda não vimos nenhum grupo que não é mediável. Será que todo grupo é mediável? Está questão será respondida com o próximo exemplo.

Seja $\mathbb{F}_2$ o grupo livre gerado por dois elementos, digamos $\{a, b\}$, isto é, os elementos de $\mathbb{F}_2$ são gerados pelo span algébrico de $\{a, b\}$, ou seja, como multiplicações de potências de a e b onde a multiplicação em $\mathbb{F}_2$ é a concatenação de elementos.

Exemplo 2.5. *O grupo $\mathbb{F}_2$ não é mediável.*

Todo elemento $g \in \mathbb{F}_2$, pode ser escrito unicamente de forma $g = a^n b^{m_1} a^{n_1} \dots b^{b_k} a^{n_k}$, com $k \in \mathbb{N} \cup 0$ e sendo $n, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$. Seja U_0 o subconjunto de $\mathbb{F}_2$ dos elementos que começam com potências pares de a (incluindo o zero, ou seja, os elementos que começam com potências de b) e U_1 o subconjunto de $\mathbb{F}_2$ que se inicia com potências impares de a. Claramente $aU_0 = U_1$ e $\mathbb{F}_2 = U_0 \dot{\cup} U_1$.

Se $\mathbb{F}_2$ fosse mediável, existiria uma média finitamente aditiva m como fizemos após a definição de grupo mediável. Então $m(U_1) = m(aU_0) = m(U_0)$ e

$$\begin{aligned} 1 &= m(\mathbb{F}_2) \\ &= m(U_0 \cup U_1) \\ &= m(U_0) + m(U_1) \\ &= m(U_1) + m(U_1) \\ &= 2m(U_1). \end{aligned}$$

Ou seja, $m(U_1) = \dfrac{1}{2}$.

Agora particionamos $\mathbb{F}_2$ *através dos subconjuntos* V_0, V_1 *e* V_2 *dos elementos* $y \in \mathbb{F}_2$ *que iniciam com potências de* b *das formas* $3n, 3n+1$ *e* $3n+2$*, com* $n \in \mathbb{Z}$*, respectivamente. Note que* $\mathbb{F}_2 = V_0 \dot{\cup} V_1 \dot{\cup} V_2$ *e* $b^2 V_1 = bV_1 = V_0$*. Além disso,*

$$\begin{aligned} 1 &= m(\mathbb{F}_2) \\ &= m(V_0 \dot{\cup} V_1 \dot{\cup} V_2) \\ &= m(V_0) + m(V_1) + m(V_2) \\ &= m(V_0) + m(b^2 V_1) + m(bV_2) \\ &= m(V_0) + m(V_0) + m(V_0) \\ &= 3m(V_0). \end{aligned}$$

Portanto, $m(V_0) = \dfrac{1}{3}$.

Observe que $U_1 \subseteq V_0$*, assim* $\dfrac{1}{2} = m(U_1) \leq m(V_0) = \dfrac{1}{3}$*, temos um absurdo. Logo,* $\mathbb{F}_2$ *não é mediável.*

Do exemplo acima e da Proposição 2.7 seguirá que todo grupo que contém $\mathbb{F}_2$ como subgrupo não é mediável. Para isto, basta supor que este tal grupo seja mediável então teríamos uma contradição com o provado acima.

Na década de 30, o matemático von Neumann fez a seguinte conjetura:

Conjectura 2.6. *Se* G *não é mediável se e somente se* G *possui* $\mathbb{F}_2$ *como um subgrupo.*

Quase 50 anos depois, em 1980, foi provado por Alexander Ol'shanskii [19] que a conjectura é falsa. Ele demonstrou que o "grupo monstro de Tarski", é um contra-exemplo para a conjectura. Dois anos depois, Sergei Adian mostrou que certos grupos de Burnside também são contra-exemplos para esta conjectura. Historicamente o primeiro contra-exemplo potencial é o grupo de Thompson. Porém, até hoje ainda não se sabe se ele é mediável.

Em 2012, Nicolas Monod encontrou um contra-exemplo para a conjectura. Em 2013, Lodha e Moore encontraram um subgrupo finamente gerado não mediável do grupo de Monod.

Nossos próximos resultados mostram como se comportam os subgrupos e os quocientes de grupos mediáveis.

Proposição 2.7. *Todo subgrupo de um grupo mediável G é mediável.*

Demonstração. Seja H um subgrupo de G. Assim,

$$G = \bigcup_{s \in G} Hs = \dot{\bigcup_{i \in I}} Hs_i,$$

sendo I o conjunto de índices e s_i representante da classe lateral à direita.

Dado $f \in l^\infty(H)$ defina $\tilde{f} \colon G \to \mathbb{C}$ tal que $s = hs_i \mapsto f(h)$. Então $\tilde{f} \in l^\infty(G)$ pois $f \in l^\infty(H)$.

Vejamos que a aplicação $l^\infty(H) \to l^\infty(G)$ tal que $f \mapsto \tilde{f}$ é linear positivo e que $1_{l^\infty(G)} = \tilde{1}_{l^\infty(H)}$. Dados $f, g \in l^\infty(H)$, $s = h_1 s_1 \in G$ e $i \in l^\infty(H)$ elemento positivo. Primeiramente a linearidade,

$$\begin{aligned}
\widetilde{f+g}(s) &= \widetilde{f+g}(h_1 s_1) = (f+g)(h_1) \\
&= f(h_1) + g(h_1) = \tilde{f}(h_1 s_1) + \tilde{g}(h_1 s_1) \\
&= \tilde{f}(s) + \tilde{g}(s) = (\tilde{f} + \tilde{g})(s).
\end{aligned}$$

Note que $\tilde{i} \geq 0$ pois $i \geq 0$. Por fim, $\tilde{1}_H(s) = \tilde{1}_H(h_1 s_1) = 1_H(h_1) = 1 = 1_G(s)$.

Por hipótese G é mediável, donde existe $\varphi \in l^\infty(G)'$ uma média invariante sobre G. Defina a aplicação

$$\psi\colon l^\infty(H) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \varphi(\tilde{f}).$$

Pelo provado anteriormente, segue que ψ é um estado. Basta mostrar que é invariante à esquerda para provarmos que ψ é uma média invariante sobre H.

Dado $t, s \in G$ tal que $s = h_1 s_1$, com $h_1 \in H$ e $s_1 \in G$, e $f \in l^\infty(H)$ temos

$$\begin{aligned}\psi(\tau_t(f(s)) &= \varphi(\widetilde{\tau_t(f(s)}) = \varphi(\tau_t(\widetilde{f(h_1 s}_1))) \\ &= \varphi(\tau_t(f(h_1))) = \varphi(f(h_1)) \\ &= \varphi(\tilde{f}(h_1 s_1)) = \varphi(\tilde{f}(s)) = \psi(f(s)).\end{aligned}$$

Ou seja, ψ é uma média invariante à esquerda sobre H. Portanto, H é mediável. $\square$

Proposição 2.8. *Se G é um grupo mediável e $H \trianglelefteq G$ é subgrupo normal de G, então $\dfrac{G}{H}$ é mediável.*

Demonstração. Sejam $\varphi \in l^\infty(G)'$ uma média invariante à esquerda sobre G e $q\colon G \longrightarrow \dfrac{G}{H}$, a projeção canônica e sobrejetiva.

Defina

$$\pi\colon l^\infty\left(\frac{G}{H}\right) \to l^\infty(G)$$
$$f \mapsto f \circ q.$$

Vejamos que π está bem definido, ou seja, dado $f \in l^\infty(G/H)$ temos $\pi(f) \in l^\infty(G)$. Seja $s, t \in G$. Temos

$$\pi(f)(s+t) = f \circ q(s+t) = f(q(s) + q(t))$$

$$= f \circ q(s) + f \circ q(t) = \pi(f)(s) + \pi(f)(t)$$

e

$$\|\pi\| = \sup_{\|f\|=1} \|\pi(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \|f \circ q\| \leq 1.$$

Logo, $\pi(f) \in l^\infty(G)$. Além disso,

$$\pi(1_{G/H}) = 1_{G/H} \circ q = 1_G.$$

Portanto, $\|\pi\| = 1$ e facilmente π preservar a positividade.

Defina agora

$$\psi = \varphi \circ \pi \colon l^\infty(G/H) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \longmapsto \varphi(\pi(f)).$$

Pelo provado anteriormente, note que ψ é um estado. Agora vamos mostrar que ψ é invariante à esquerda. Dados $f \in l^\infty(G/H)$, $s \in G$ tal que $x = q(s) \in G/H$ e $h \in G/H$, observe que

$$\begin{aligned}\pi(\tau_x(f))(h) &= \tau_{q(s)}(f) \circ q(h) = \tau_{q(s)} f(q(h)) \\ &= f([q(s)]^{-1} \cdot q(h)) = f(q(s^{-1}) \cdot q(h)) \\ &= f(q(s^{-1}h)) = \pi(f)(s^{-1}h) = \tau_s(\pi(f))(h).\end{aligned}$$

Ou seja, $\pi(\tau_x(f)) = \tau_s(\pi(f))$ para toda $f \in l^\infty(G/H)$, sendo $x = q(s)$.

Por fim,

$$\psi(\tau_x(f)) = \varphi(\pi(\tau_x(f))) = \varphi(\tau_s(\pi(f))) = \varphi(\pi(f)) = \psi(f).$$

Logo, ψ é uma média invariante sobre G/H. Portanto G/H é mediável. $\square$

Agora analisaremos como se comporta o limite indutivo de grupos mediáveis.

Definição 2.9. *Sejam* $(I, \leq)$ *um conjunto dirigido,* $\{G_i; i \in I\}$ *uma família de grupos e* $\{\phi_{ji};\ \ i, j \in I,\ \ i \leq j\}$ *uma família de homomorfismos de grupos* $\phi_{ji}\colon G_i \longrightarrow G_j$ *tal que*

(i) $\phi_{ii} = Id_{G_i}$*, para todo* $i \in I$*;*

(ii) $\phi_{ki} = \phi_{kj} \circ \phi_{ji}$ *sempre que* $i \leq j \leq k$.

O par $(G_i, \phi_{ji})_i$ *é dito* sistema dirigido*.*

Lembre-se que o limite indutivo para o sistema dirigido $(G_i, \phi_{ji})_i$ é um grupo G, que denotaremos por $G = \lim\limits_{\rightarrow} G_i$, munido de homomorfismos $\psi_i\colon G_i \to G$ tal que para todo $i \leq j$ temos que $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ji}$. Na forma de diagramas comutativos, temos

$$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[dr, "\psi_j"] & \\ G_i \arrow[ur, "\phi_{ji}"] \arrow[rr, "\psi_i"'] & & G \end{tikzcd}$$

Além disso, se G' grupo e $\psi'_j\colon G_i \to G'$ satisfazem a propriedade acima, existe um único homomorfismo $\alpha\colon G' \to G$ tal que $\psi'_i = \alpha \circ \psi_i$, para todo $i \in I$. Sabemos, da teoria de grupos, que o limite indutivo para $(G_i, \phi_{ji})_i$ existe unicamente, a menos de isomorfismo, e denotaremos por $\lim\limits_{\rightarrow} G_i$.

Proposição 2.10. *Sejam* $\{G_i; i \in I\}_i$ *e* $\{\phi_{ji}; i \leq j$ *tal que* $i, j \in I\}$ *com* I *conjunto dirigido, sendo* $(G_i, \phi_{ji})_i$ *um sistema dirigido. Se cada* G_i *é mediável então* $\lim\limits_{\rightarrow} G_i = G$ *é mediável.*

Demonstração. Seja $\psi_i\colon G_i \to G$ o homomorfismo de grupo do limite indutivo. Então

$$G = \bigcup_{i\in I} \psi_i(G_i).$$

Para cada $i \in I$ denote por $H_i = \psi_i(G_i)$, pelo 1º Teorema dos Isomorfismos de grupos temos que $H_i \cong \dfrac{G_i}{\ker\psi_i}$, onde $\ker\psi_i$ é o núcleo de cada homomorfismo ψ_i. Pela Proposição 2.8, cada H_i é mediável.

Para cada $i \in I$, como G_i é mediável, existe $\varphi_i \in l^\infty(G_i)'$ uma média invariante.

Considere

$$V_i\colon l^\infty(G) \to \mathbb{C}$$

$$f \mapsto \varphi_i(f\big|_{H_i}),$$

que claramente é um estado, porém não necessariamente é invariante. Como o espaço dos estados em $l^\infty(G)'$ é compacto com a topologia fraca-*, temos que existe uma subnet, digamos $\{V_{k_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$, que converge para V no espaço dos estados. Agora, basta mostrar que V é invariante à esquerda. Dados $f \in l^\infty(G)$ e $s \in G$, tome $k_0 \in I$ tal que $g \in H_{k_0}$. Então denotando por τ^G quando queremos a função τ definida de $l^\infty(G)$ em $l^\infty(G)$ e τ^{H_j} quando queremos a função τ definida de $l^\infty(H_j)$ em $l^\infty(H_j)$, temos $\forall j \geq k_0$,

$$V_j(\tau_s(f)) = \varphi_j(\tau_s^G(f\big|_{H_j})) = \varphi_j(\tau_s^{H_j}(f\big|_{H_j})) = \varphi_j(f\big|_{H_j}) = V_j(f).$$

Tomando o limite, temos que $V(\tau_s(f)) = V(f)$, ou seja, V é uma média invariante sobre $l^\infty(G)'$. Portanto, G é mediável. $\square$

Temos um corolário imediado da proposição acima.

Corolário 2.11. *Se um grupo pode ser escrito com união direta de grupos mediáveis então o grupo é mediável.*

Proposição 2.12. *Seja* $1 \to H \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{q}{\twoheadrightarrow} K \to 1$ *uma sequência exata de grupos. Se* H *e* K *são mediáveis então* G *é mediável.*

Demonstração. Como H e K são mediáveis, denote por $\varphi_H \in l^\infty(H)'$ e $\varphi_K \in l^\infty(K)'$ as médias invariantes associadas aos grupos H e K, respectivamente. Por hipótese, vamos denotar o homomorfismo injetor de H para G por i e por $q\colon G \to K$ o homomorfismo sobrejetor de G para K.

Defina $\phi\colon l^\infty(G) \to \mathbb{C}$ tal que, dado $f \in l^\infty(G)$ e $g \in G$,

$$\phi(f)|_{q(g)} = \varphi_H(\tau_{g^{-1}}(f)|_H).$$

Como a sequência é exata e φ_H é invariante à esquerda, então ϕ está bem definida.

Defina agora, $\varphi_G \in l^\infty(G)'$ por $\varphi_G = \varphi_K \circ \phi$. Por contas anteriores que φ_G é um estado. Vamos mostrar que φ_G é invariante à esquerda. Denotando por τ^G quando queremos a função τ definida de $l^\infty(G)$ em $l^\infty(G)$ e τ^K quando queremos a função τ definida de $l^\infty(K)$ em $l^\infty(K)$. Note que, dado $s \in G$,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\tau_g^G(f)\Big|_{q(s)}\right) &= \varphi_H\left(\tau^G_{s^{-1}}(\tau_g^G(f))\Big|_H\right)\\
&= \varphi_H\left(\tau^G_{(g^{-1}s)^{-1}}(f)\Big|_H\right)\\
&= \phi\left(f\Big|_{q(g)^{-1}q(s)}\right)\\
&= \tau^K_{q(g)}\left(\phi(f)\Big|_{q(s)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi(\tau_g^G(f)) = \lambda^K_{q(g)}(\phi(f))$.

Assim,

$$\varphi_G(\tau_s^G(f)) = \varphi_K(\phi(\tau_s^G(f))) = \varphi_K(\tau_{q(s)}^K(\phi(f))) = \varphi_K(\phi(f)) = \varphi_G(f),$$

ou seja, φ_G é uma média invariante sobre G. Aqui concluímos que G é mediável. $\square$

Corolário 2.13. *Sejam G um grupo e H subgrupo normal de G. Se H e $\dfrac{G}{H}$ são mediáveis então G é mediável.*

Como decorrência deste resultado temos o seguinte exemplo;

Exemplo 2.14. *Seja G grupo das matrizes na forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ com a operação de composição sendo a multiplicação usual de matrizes. Então G é um grupo mediável.*

De fato, sejam os subgrupos $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \neq 0 \right\}$ e $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R} \right\}$. Ainda mais, observe que H é um subgrupo normal de G, isto é, $gHg^{-1} \subseteq H$ para todo $g \in G$, pois,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \end{aligned}$$

Observe ainda que $H \cong (\mathbb{R}, +)$ e portanto é abeliano e mediável.

Além disso, $\dfrac{G}{H} \cong K$, pois $K \cap H = \{Id\}$ e $K \cdot H = H \cdot K = G$. Note que $K \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ e portanto é mediável. Assim, pelo corolário acima, temos G mediável.

Corolário 2.15. *Se H e K são mediável então $H \oplus K$ é mediável.*

Demonstração. Basta notar que $1 \to H \to H \oplus K \to K \to 1$ é sequência exata. $\square$

Segue, por indução, do resultado acima que soma direta finita de grupos mediáveis é mediável. Além disso, deste resultado temos que somas diretas arbitrárias de grupos mediáveis é mediável. Para isto, basta ver a soma direta como um limite indutivo em que cada conjunto é mediável.

Corolário 2.16. *Seja Λ um conjunto de índices e cada G_λ grupo mediável, sendo $\lambda \in \Lambda$. Então $G = \oplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ é mediável.*

Demonstração. Seja $\mathbb{F}(\Lambda) = \{F \subseteq \Lambda; F \text{ é finito }\}$. Para cada $F = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\} \in \mathbb{F}(\Lambda)$, considere $G_F = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_n}$.

Note que $G = \lim\limits_{\rightarrow} G_F$ e pelo corolário anterior cada G_F é mediável então $G = \oplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$é mediável.

$\square$

Com isto, vimos que a classe dos grupos mediáveis é fechada tomando subgrupos, quocientes, limite indutivo e extensões. Assim, qualquer grupo construído, a partir destes grupos, com essas operações, é mediável. Chamamos de *grupos mediáveis elementares* estes tais grupos.

2.2 Caracterizações de Mediabilidade

Existem muitas caracterizações diferentes de mediabilidade de grupos. Nesta seção iremos definir conceitos e alguns resultados para chegarmos em um Teorema com 7 equivalências para mediabilidade de grupos. Existem muitos artigos com esta demonstrações semelhantes a deste resultado.

Lembrando que $l^1(G)$ pode ser visto como o conjunto

$$\left\{ f\colon G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \sum_{s\in G} \|f(s)\| < \infty \right\}$$

e com as operações de soma pontual, a multiplicação dada pela convolução $f * g(t) = \sum_{s\in G} f(s)g(s^{-1}t)$ e a involução $[f(t)^*] = \overline{f(t^{-1})}$ é uma $*$-álgebra. Além disso, com a norma $\|f\|_1 = \sum_{s\in G} \|f(s)\|$, sendo $f, g \in l^1(G)$ e $t \in G$, o conjunto $l^1(G)$ é uma $*$-álgebra de Banach.

Vamos denotar por

$$Prob(G) = \left\{ \mu \in l^1(G);\ \mu \geq 0 \ \ e \ \sum_{g\in G} \mu(g) = 1 \right\}$$

o espaço de todas as medidas de probabilidade em G. Utilizamos aqui as medidas de probabilidade pois se G é enumerável, conseguimos para cada $\mu \in Prob(G)$, definir uma medida sobre a $\sigma-$álgebra das partes de G.

Observe que a ação de translação à esquerda τ de G sobre $l^\infty(G)$ torna o subespaço $Prob(G)$ invariante. Assim podemos continuar utilizando $s \to \tau_s$ para denotar a ação canônica de G sobre $Prob(G)$.

Definição 2.17. *O grupo G possui uma* média invariante aproximada *se dados $\varepsilon > 0$ e $E \subset G$ subconjunto finito, existe um $\mu \in Prob(G)$ tal que*

$$\|\tau_s(\mu) - \mu\|_1 < \epsilon \text{ para todo } s \in E.$$

Dados $E, F \subset G$, denotamos por $E \triangle F = (E \cup F) \backslash (E \cap F)$ o operador da diferença simétrica, isto é, $E \triangle F$ é o conjunto de elementos em exatamente um dos conjuntos E ou F.

Veremos agora como caracterizar mediabilidade através da condição de Følner.

Definição 2.18. *Dizemos que G satisfaz a* condição de Følner*, se dado $\epsilon > 0$ e qualquer subconjunto finito $E \subset G$, existe um subconjunto finito $F \subset G$ tal que*

$$\max_{s\in E} \frac{|sF \triangle F|}{|F|} < \varepsilon,$$

onde $sF = \{st; t \in F\}$ e $|C|$ denota a cardinalidade do conjunto C.

Observe que $sF\triangle F = (sF \cup F)\backslash(sF \cap F) = [sF\backslash(sF \cap F)] \cup [F\backslash(sF \cap F)]$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{|sF\triangle F|}{|F|} &= \frac{|[sF\backslash(sF \cap F)] \cup [F\backslash(sF \cap F)]|}{|F|} \\
&= \frac{|sF|}{|F|} - \frac{|sF \cap F|}{|F|} + \frac{|F|}{|F|} - \frac{|sF \cap F|}{|F|} \\
&= 2 - 2\frac{|sF \cap F|}{|F|}.
\end{aligned}$$

Logo, a condição de Følner é o mesmo que pedir

$$\max_{s\in E} \frac{|sF \cap F|}{|F|} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja I um conjunto dirigido e considere a net de subconjuntos finitos $\{F_i\}_{i\in I} \subset G$ tal que

$$\frac{|sF_i\triangle F_i|}{|F_i|} \longrightarrow 0, \quad \forall s \in G \tag{2.1}$$

é chamada *net de Følner*. Veja que a condição de Følner é equivalente a existência de uma net de Følner. A demonstração deste fato pode ser vista no primeiro capítulo de [6].

No caso que G é enumerável, observe que a net pode ser substituída por uma sequência de Følner. Vejamos um exemplo de uma sequência de Følner.

Exemplo 2.19. *Seja* $G = \mathbb{Z}$ *com a operação de soma. Tome* $F_n = [-n, n]$ *e* $s \in \mathbb{Z}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}\frac{|sF_n \triangle F_n|}{|F_n|} &= \frac{|s[-n,n] \triangle [-n,n]|}{[-n,n]} = 2 - 2\frac{|s[-n,n] \cap [-n,n]|}{|[-n,n]|} \\ &= 2 - 2\frac{|[-n,n]|}{|[-n,n]|} = 0.\end{aligned}$$

Com um resultado que veremos nesta seção e as contas feitas acima temos que $\mathbb{Z}$ *é um grupo mediável. Já sabíamos isto pois* $\mathbb{Z}$ *é um grupo abeliano e portanto mediável.*

Supondo a condição de Følner, vejamos que existe uma média invariante aproximada. Para isso, basta normalizar a função característica χ_F do subconjunto F, ou seja, $\frac{1}{|F|}\chi_F \in Prob(G)$, e ver que

$$\frac{|sF \triangle F|}{|F|} = \left\| \tau_s \left(\frac{1}{|F|}\chi_F \right) - \frac{1}{|F|}\chi_F \right\|_1.$$

Assim,

$$\max_{s \in E} \left\| \tau_s \left(\frac{1}{|F|}\chi_F \right) - \frac{1}{|F|}\chi_F \right\|_1 = \max_{s \in E} \frac{|sF \triangle F|}{|F|} < \varepsilon.$$

No Teorema 2.24 provaremos a recíproca do feito acima.

Vamos relembrar dois teoremas de uso decorrente em Análise Funcional, que serão utilizados no Teorema 2.24. Este primeiro resultado foi provado por Herman Goldstine. O segundo é conhecido como Teorema de Separação de Hanh-Banach. As provas serão omitidas neste trabalho. Também relembremos algumas definições para estes teoremas.

Teorema 2.20 (Teorema de Goldstine)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então a imagem da bola unitária fechada $B \subset X$ através da aplicação canônica na bola unitária B'' do espaço bidual X'' é densa na bola unitária com respeito a topologia fraca-$*$.*

Na hipótese do próximo teorema precisamos de um espaço vetorial localmente convexo, aproveitamos aqui para definir-lo e também o envoltório convexo.

Definição 2.21. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. O espaço V é um* espaço vetorial convexo *se $(1-t)x + ty \in V$, para todo $x, y \in V$ e $t \in [0,1]$.*

Definição 2.22. *Seja X um conjunto qualquer, o* envoltório convexo de *X é o conjunto*

$$Conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i ; x_i \in X, t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \text{ e } t_1 + \ldots + t_n = 1 \right\}$$

Além disso, o $Conv(X)$ é o menor conjunto convexo que contém X.

Teorema 2.23 (Separação de Hanh-Banach)**.** *Seja V um espaço vetorial localmente convexo sobre $\mathbb{C}$. Se A e B são conjuntos não vazios convexos e disjuntos, sendo A compacto e B fechado, então existe uma aplicação linear $\vartheta\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\vartheta(a)) < \alpha < \beta < Re(\vartheta(b))$ para todo $a \in A, b \in B$.*

Agora temos as ferramentas necessárias para demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.24. *Seja G um grupo discreto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) G é mediável;

(2) G possui uma média invariante aproximada;

(3) G satisfaz a condição de Følner;

(4) Existem vetores unitários $\xi_i \in l^2(G)$ tais que $\|\lambda_s(\xi_i) - \xi_i\|_2 \longrightarrow 0$, para todo $s \in G$;

(5) Existe uma net $(\varphi_i)_i$ de funções definidas positivas de suporte finito em G tal que $\varphi_i \longrightarrow 1$ pontualmente;

(6) $C^*(G)$ é isomorfo à $C^*_r(G)$ como C^*-álgebras;

(7) $C^*_r(G)$ admite uma representação de dimensão 1, ou seja, um carácter $\chi\colon C^*_r(G) \to \mathbb{C}$.

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$

Seja $\varphi \in l^\infty(G)'$ uma média invariante à esquerda sobre G. Sabe-se que $l^\infty(G) \cong l^1(G)'$, através do isomorfismo que identifica $\kappa \in l^\infty(G)$ com o funcional dado por

$$\kappa(f) = \sum_{s \in G} f(s)\kappa(s), \qquad \forall f \in l^1(G).$$

Pela identificação feita acima, $\varphi \in l^\infty(G)' \cong l^1(G)''$. Dado $f \in l^1(G)$, denotaremos por $\tilde{f}$ sua imagem no bidual $l^1(G)''$. Assim $\tilde{f}$ é o funcional sobre $l^1(G)'$ dado por avaliação: $\tilde{f}(\phi) := \phi(f)$. Usando a identificação canônica $l^1(G)' \cong l^\infty(G)$, isto pode ser escrito como $\tilde{f}(\phi) = \sum_{s \in G} f(s)\phi(s)$.

Pelo Teorema de Goldstine, a bola unitária de $l^1(G)$ é fraca-$*$ densa na bola unitária de $l^\infty(G)'$, donde existe uma net $\{f_i\}_{i \in I} \subset l^1(G)$ com $\|f_i\|_{l^1(G)} \leq 1$ tal que $\tilde{f}_i \longrightarrow \varphi$ na topologia fraca-$*$, sendo I um conjunto dirigido. Além disso, como $\mathbb{C}[G]$ é denso em $l^1(G)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que cada $f_i \in \mathbb{C}[G]$.

Defina $f_i' = \dfrac{f_i + \overline{f_i}}{2}$, e note que ainda continuamos com $f_i' \in \mathbb{C}[G]$ e $\|f_i'\|_{l^1(G)} \leq 1$, para todo $i \in I$. Mais ainda, $\tilde{f}_i' \longrightarrow \varphi$ na topologia fraca-$*$. De fato, dado $\phi \in l^1(G)' = l^\infty(G)$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i'(\phi) &= \phi(f_i') = \phi\left(\frac{f_i + \overline{f_i}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\phi(f_i) + \frac{1}{2}\phi(\overline{f_i}) = \frac{1}{2}\left(\phi(f_i) + \overline{\overline{\phi}(f_i)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}_i(\phi) + \overline{\tilde{f}_i(\overline{\phi})}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\varphi(\phi) + \overline{\varphi(\overline{\phi})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi(\phi) + \varphi(\phi)\right) = \varphi(\phi).
\end{aligned}$$

Defina agora $f_i'' = |f_i'|$. Ainda temos $f_i' \in \mathbb{C}[G]$, $\|f_i''\|_1 = \|f_i'\|_1 \leq 1$ e $f_i'' \geq 0$.

Para mostrar que $\tilde{f}_i'' \longrightarrow \varphi$, vejamos que $\|f_i' - f_i''\|_1 \longrightarrow 0$. Primeiro note que $\|f_i'\| \longrightarrow 1$, pois $|1_{l^\infty(G)}(f_i')| \leq \|f_i'\|$, assim

$$\begin{aligned}
1 = \varphi(1_{l^\infty(G)}) = |\varphi(1_{l^\infty(G)})| &= |\lim_i \tilde{f}_i'(1_{l^\infty(G)})| \\
&= |\lim_i 1_{l^\infty(G)}(f_i')| \leq \|f_i'\| \leq 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|f_i'' - f_i'\|_1 &= \sum_{s\in G} |f_i''(s) - f_i'(s)| = \sum_{s \in G} ||f_i'(s)| - f_i'(s)| \\
&= \sum_{s\in G} |f_i'(s)| - \sum_{s\in G} f_i'(s) = \|f_i'\|_1 - 1_{l^\infty(G)}(f_i') \\
&= \|f_i'\|_1 - \tilde{f}_i(1_{l^\infty(G)}) \longrightarrow 1 - \varphi(1_{l^\infty(G)}) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Com isto, $\tilde{f}_i''$ converge fraco-$*$ para φ. Por fim, normalizando f_i'', definimos

$$\varphi_i = \frac{f_i''}{\|f_i''\|}, \forall i \in I.$$

Observe que $\varphi_i \in Prob(G)$. Assim, $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ é uma net em $Prob(G)$ tal que $\tilde{\varphi}_i$ converge fraco-$*$ para φ.

Vejamos que $(\tau_s(\varphi_i) - \varphi_i) \longrightarrow 0$ fracamente em $l^1(G)$, para todo $s \in G$.

Primeiramente, observe que, dado $\kappa \in l^\infty(G)$, temos

$$\begin{aligned}\kappa(\tau_s(\varphi_i)) &= \sum_{g\in G} \lambda_s(\varphi_i(g))\kappa(g) = \sum_{g\in G} \varphi_i(s^{-1}g)\kappa(g)\\ &= \sum_{h\in G} \varphi_i(h)\kappa(sh) = (\tau_{s^{-1}}(\kappa))(\varphi_i)\\ &= \tilde{\varphi}_i(\tau_{s^{-1}}(\kappa)) \longrightarrow \varphi(\tau_{s^{-1}}(\kappa)) = \varphi(\kappa).\end{aligned}$$

Analogamente, $\kappa(\varphi_i) = \tilde{\varphi}_i(\kappa) \longrightarrow \varphi(\kappa)$. Assim,

$$\kappa(\tau_s(\varphi_i) - \varphi_i) = \kappa(\tau_s(\varphi_i)) - \kappa(\varphi_i) \longrightarrow \varphi(\kappa) - \varphi(\kappa) = 0.$$

Como $s \in G$ foi qualquer, segue que $\tau_s(\varphi_i) - \varphi_i$ converge fracamente para 0 , para todo $s \in G$.

Seja $\Lambda = \mathbb{F}(G) = \{F \subset G; F \text{ é finito } \}$. Note que Λ é dirigido pela inclusão. Dado $F = \{s_1, \dots s_m\} \subset \Lambda$, com $|F| = m$, considere

$$\underbrace{l^1(G) \oplus l^1(G) \oplus \cdots \oplus l^1(G)}_{m}$$

com a norma do máximo, isto é, para $x = (x_1, x_2, , \dots, x_m) \in l^1(G) \oplus \cdots \oplus l^1(G)$

$$\|(x)\|_{max} = \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \|x_i\|.$$

Seja $B_0 = Conv(\{(\tau_{s_k}(\varphi_i) - \varphi_i)_{k=1}^m; i \in I\}$ o envoltório convexo do conjunto das m-uplas $(\tau_{s_1}(\varphi_i) - \varphi_i, \dots, \tau_{s_m}(\varphi_i) - \varphi_i)$ em $l^1(G) \oplus \cdots \oplus l^1(G)$ e $B_1 = \overline{B_0}$ o seu fecho com respeito a norma acima. Vamos mostrar que $0 \in B$.

Suponha que $0 \notin B$. Denotando $A = \{0\}$ e $B = B_1$ como no Teorema 2.23 em que as hipóteses são facilmente verificadas, existe $\vartheta \in (l^1(G) \oplus \cdots \oplus l^1(G))' = l^\infty(G) \oplus \cdots \oplus l^\infty(G)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\vartheta(a)) < \alpha < \beta < Re(\vartheta(b))$. Como $A = \{0\}$ temos que $Re(\vartheta(a)) = 0$, em particular

$$0 < \alpha \leq \inf_{i \in I} Re(\vartheta(((\tau_{s_k}(\varphi_i) - \varphi_i)_{k=1}^m)).$$

Então $\alpha = 0$, pois $\lambda_s(\varphi_i) - \varphi_i$ converge fracamente para 0, o que seria um absurdo já que $\alpha > 0$. Logo, $0 \in B$.

Por fim, como B é um subconjunto convexo em um espaço de Banach, o fecho fraco e o fecho na norma coincidem. Segue que, dado $F \in \Lambda$ existe uma combinação convexa φ_F dos φ_i tal que

$$\|\tau_s(\varphi_F) - \varphi_F\| \leq \frac{1}{|F|}, \qquad \forall s \in F.$$

Isto implica o item (2).

$(2 \Rightarrow 3)$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $E \subset G$ finito. Por hipótese, existe $\mu \in Prob(G)$ tal que

$$\sum_{s \in E} \|\tau_s(\mu) - \mu\|_1 < \epsilon.$$

Dado $r \geq 0$, definimos o conjunto $F(\mu, r) = \{s \in G; \mu(s) > r\}$. Seja $\chi_{F(\mu,r)}$ a função característica associada ao conjunto $F(\mu, r)$.

Sejam $f, h \in l^1(G)$ tal que $\|f\|_1 = \|h\|_1 = 1$. Observe que $|\chi_{F(f,r)}(t) - \chi_{F(h,r)}(t)| = 1$ se somente se $f(t) \leq r \leq h(t)$ ou $h(t) \leq r \leq f(t)$, para todo $t \in G$. Ainda mais, se f e h são superiormente limitadas por 1, temos

$$|f(t) - h(t)| = \int_0^1 |\chi_{F(f,r)}(t) - \chi_{F(h,r)}(t)|dr.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\tau_s(\mu) - \mu\|_1 &= \sum_{t\in G} |\tau_s(\mu)(t) - \mu(t)| \\
&= \sum_{t\in G} \int_0^1 |\chi_{F(\tau_s(\mu),r)}(t) - \chi_{F(\mu,r)}(t)|dr \\
&= \int_0^1 \sum_{t\in G} |\chi_{sF(\mu,r)}(t) - \chi_{F(\mu,r)}(t)|dr \\
&= \int_0^1 |sF(\mu,r)\triangle F(\mu,r)|dr.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|\tau_s(\mu) - \mu\|_1 = \int_0^1 |sF(\mu,r)\triangle F(\mu,r)|dr.$$

Ainda que,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{s\in E} |sF(\mu,r)\triangle F(\mu,r)|dr &= \sum_{s\in E} \|\tau_s(\mu) - \mu\|_1 \\
&< \varepsilon = \varepsilon \sum_{t\in G} \mu(t) \\
&= \varepsilon \sum_{t\in G} \int_0^{\mu(t)} dr \\
&= \varepsilon \int_0^1 |\{t \in G; \mu(t) > r\}|dr
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon \int_0^1 |F(\mu, r)| dr.$$

Então, para algum $r \in (0, \infty)$, temos

$$\sum_{s \in E} |sF(\mu, r) \triangle F(\mu, r)| < \varepsilon |F(\mu, r)|.$$

Portanto,

$$\max_{s \in E} \frac{|sF(\mu, r) \triangle F(\mu, r)|}{|F(\mu, r)|} < \varepsilon.$$

Isto mostra que G satisfaz a condição de Følner.

$(3 \Rightarrow 4)$

Sejam $\{F_i\}_{i \in I}$ uma net de Følner e $\xi_i = \dfrac{\chi_{F_i}}{\sqrt{|F_i|}}$, as funções características de cada F_i normalizada. Claramente $\|\xi_i\|_2 = 1$ e pode ser vista como um elemento em $l^2(G)$. Logo, dado $s \in G$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda_s(\xi_i) - \xi_i\|_{l^2(G)} &= \left\| \lambda_s\left(\frac{\chi_{F_i}}{\sqrt{|F_i|}} \right) - \frac{\chi_{F_i}}{\sqrt{|F_i|}} \right\|_{l^2(G)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|F_i|}} \|\lambda_s(\chi_{F_i}) - \chi_{F_i}\|_{l^2(G)} \\
&\leq \frac{1}{|F_i|} \|\chi_{sF_i} - \chi_{F_i}\| = \frac{|sF_i \triangle F_i|}{|F_i|} \xrightarrow{i} 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\xi_i \in l^2(G)$ satisfaz a condição (4).

$(4 \Rightarrow 5)$

Seja $\xi_i \in l^2(G)$ como na hipótese. Defina $\varphi_i \colon G \to \mathbb{C}$ por $s \mapsto \langle s\xi_i, \xi_i \rangle$. Observe que pelo Teorema A.4, a função φ_i é positiva definida.

Note que, dado $s \in G$, temos

$$\begin{aligned} |\varphi_i(s) - 1| &= |\langle s\xi_i, \xi_i \rangle - 1| \\ &= |\langle s\xi_i, \xi_i \rangle - \langle \xi_i, \xi_i \rangle| \\ &= |\langle s\xi_i - \xi_i, s\xi_i - \xi_i \rangle| \\ &= \|\lambda_s(\xi_i) - \xi_i\|^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Por fim, para tornar φ_i funções de suporte finito, basta tomar os $\xi_i \in l^2(G)$ de suporte finito. Logo, φ_i satisfaz a condição (5).

$(5 \Rightarrow 6)$

Seja φ_i uma net de funções positivas definidas de suporte finito em G tal que $\varphi_i \longrightarrow 1$ pontualmente, sendo $i \in I$ um conjunto dirigido. Pelo Teorema A.4, para cada $i \in I$, o multiplicador m_{φ_i} se estende a uma aplicação, digamos $m^c_{\varphi_i}$, positiva unital em $C^*(G)$ e estende-se a uma aplicação, digamos $m^r_{\varphi_i}$, positiva unital em $C^*_r(G)$.

Dado $a = \sum_{s \in G} a_s \delta_s \in \mathbb{C}[G]$, temos

$$\begin{aligned} \lambda \circ m^c_{\varphi_i}\left(\sum_{s \in G} a_s \delta_s\right) &= \lambda\left(\sum_{s \in G} \varphi_i(s) a_s \delta_s\right) \\ &= \sum_{s \in G} \varphi_i(s) a_s \lambda(\delta_s) \\ &= m^r_{\varphi_i}\left(\sum_{s \in G} a_s \lambda(\delta_s)\right) \\ &= m^r_{\varphi_i} \circ \lambda\left(\sum_{s \in G} a_s \delta_s\right). \end{aligned}$$

Ou seja, $\lambda \circ m^c_{\varphi_i} = m^r_{\varphi_i} \circ \lambda$ em $\mathbb{C}[G]$, para todo $i \in I$. Ainda mais temos que a igualdade vale em $C^*(G)$, pois vale no subconjunto denso.

Observe que, dado $a = \sum\limits_{s \in G} a_s \delta_s \in \mathbb{C}[G]$,

$$m^c_{\varphi_i}(a) = m^c_{\varphi_i}\left(\sum_{s \in G} a_s \delta_s\right) = \sum_{s \in G} \varphi_i(s) a_s \delta_s \longrightarrow \sum_{s \in G} 1 a_s \delta_s = a.$$

Como $m^c_{\varphi_i}(a) \longrightarrow a$ para todo $a \in \mathbb{C}[G]$ temos $m^c_{\varphi_i}(a) \longrightarrow a$ para todo $a \in C^*(G)$.

Agora, suponha que $a \in C^*(G)$ é tal que $\lambda(a) = 0$. Temos $\lambda \circ m^c_{\varphi_i}(a) = m^r_{\varphi_i} \circ \lambda(a) = 0$, para todo $i \in I$. Por hipótese, cada φ_i tem suporte finito, logo $\lambda \circ m^c_{\varphi_i}(a) = 0$ implica $m^c_{\varphi_i}(a) = 0$. Assim, $a = \lim\limits_i m^c_{\varphi_i}(a) = 0$. Isto mostra que $\lambda \colon C^*(G) \to C^*_r(G)$ é um $*-$homomorfismo injetivo.

Observe que $\lambda(C^*(G)) = C^*_r(G)$, ou seja, λ é sobrejetiva. Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo, segue que (6) é válido.

$(6 \Rightarrow 7)$

Basta estender a representação trivial ϵ dada por $a = \sum\limits_{s \in G} a_s \delta_s \in \mathbb{C}[G] \mapsto \sum\limits_{s \in G} a_s \in \mathbb{C}$ para $C^*_r(G) \cong C^*(G)$.

$(7 \Rightarrow 1)$

Seja $\chi \colon C^*_r(G) \to \mathbb{C}$ um carácter, em particular, χ é um estado. Pelo Teorema de Hanh-Banach, podemos estender τ a um funcional linear em $\mathbb{B}(l^2(G))$.

Afirmação: Seja $T \in \mathbb{B}(l^2(G))$ tal que $|\chi(T)|^2 = |\chi(T^*T)| = |\pi(TT^*)|$ então $\chi(TS) = \chi(T)\chi(S)$ e $\chi(ST) = \chi(S)\chi(T)$ para todo $S \in \mathbb{B}(l^2(G))$.

De fato, como χ é um estado, podemos escrever $\chi(T) = \langle \xi, \sigma(T)\xi \rangle$, sendo $\xi \in H$ e $\sigma \colon \mathbb{B}(l^2(G)) \to \mathbb{B}(H)$ um $*-$homomorfismo. Logo,

$$\langle \sigma(T)\xi, \sigma(T)\xi \rangle = \langle \xi, \sigma(T^*T)\xi \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= |\chi(T^*T)| = |\chi(T)|^2 \\
&= \langle \sigma(T)\xi, \xi\rangle\langle \xi, \sigma(T)\xi\rangle \\
&= \langle \sigma(T)\xi, \xi\langle \xi, \sigma(T)\xi\rangle\rangle \\
&= \langle \sigma(T)\xi, |\xi\rangle\langle\xi|(\sigma(T)\xi)\rangle,
\end{aligned}
$$

onde $|\xi_1\rangle\langle\xi_2|(\sigma(T)\xi) := \xi_1\langle\xi_2, \sigma(T)\xi\rangle$. Pelas contas acima

$$\langle \sigma(T)\xi, \sigma(T)\xi\rangle = \langle \sigma(T)\xi, |\xi\rangle\langle\xi|(\sigma(T)\xi)\rangle.$$

Assim, $\langle [1-|\xi\rangle\langle\xi|]^{1/2}(\sigma(T)\xi), [1-|\xi\rangle\langle\xi|]^{1/2}(\sigma(T)\xi)\rangle = 0$, ou seja, $[1-|\xi\rangle\langle\xi|]^{1/2}\sigma(T)\xi = 0$. Logo, dado $S \in \mathbb{B}(l^2(G))$, temos

$$
\begin{aligned}
\chi(ST) - \chi(S)\pi(T) &= \langle \xi, \sigma(ST)\xi\rangle - \langle \xi, \sigma(S)\xi\rangle\langle\xi, \sigma(T)\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \sigma(S)\sigma(T)\xi\rangle - \langle \xi, \sigma(S)\langle\xi, \sigma(T)\xi\rangle\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \sigma(S)\sigma(T)\xi\rangle - \langle \xi, \sigma(S)|\xi\rangle\langle\xi|\sigma(T)\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \sigma(S)[1-|\xi\rangle\langle\xi|]\sigma(T)\xi\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $\chi(ST) = \chi(S)\chi(T)$, para todo $S \in \mathbb{B}(l^2(G))$. Analogamente, obtem-se $\chi(TS) = \chi(T)\chi(S)$. Com isto demonstramos nossa afirmação.

Observe que $|\chi(\lambda_s)| = 1$ para todo $s \in G$. Assim, dado $s \in G$ e $f \in l^\infty(G)$, vendo $l^\infty(G) \subset \mathbb{B}(l^2(G))$ pela representação M_f que foi feita no capítulo anterior, temos que, pela Igualdade 1.2 e pela afirmação demonstrada acima,

$$\chi(\tau_s(f)) = \chi(\lambda_s f \lambda_s^*) = \chi(\lambda_s)\chi(f)\chi(\lambda_s^*) = \chi(\lambda_s)\chi(f)\overline{\chi(\lambda_s)} = \chi(f)$$

Como, $s \in G$ e $f \in l^\infty(G)$ são arbitrários, temos que χ é invariante. Logo, G possui uma média invariante, e assim G é mediável.

$\square$

Com este teorema temos mais 6 maneiras de caracterizar os grupos mediáveis. Algumas caracterizações ajudam nas demonstrações de alguns resultados, como na seção anterior, por exemplo, demonstrar que todo grupo finito é mediável, fica mais simples usando a net de Følner.

De fato, seja G um grupo finito, digamos $|G| = n$. Considere $F_i = G$ para todo $i \in I$, temos

$$\frac{|sF_i \triangle F_i|}{|F_i|} = \frac{|sG \triangle G|}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Pelo Teorema 2.24, todo grupo finito é mediável.

3 Produto Cruzado e Mediabilidade

3.1 A Construção do Produto Cruzado

O produto cruzado tem uma grande importância no estudos de Álgebra de Operadores, e em particular para C^*-álgebras. Neste capítulo, introduziremos o conceito de produto cruzado para grupos discretos, e nesse caso, chamaremos de produto cruzado discreto. Mais informações podem ser vistas em [5].

Definição 3.1. *Seja G um grupo (discreto) e A uma C^*-álgebra. Uma ação de G sobre A é um homomorfismo de grupos α de G no grupo de $*-$automorfismos de A.*

Lembrando que $*-$automorfismos de A são os $*-$isomorfismos de A em A. Denotaremos o conjunto dos $*-$automorfismos de A em A por $Aut(A)$. Uma C^*-álgebra munida com uma ação de G em A, é chamada de $G-C^*-$álgebra. Além disso, denotamos a ação que age de G para os automorfismos de A por $G \curvearrowright A$. Para cada $s \in G$, associaremos α_s o automorfismo de A em A. Obviamente, podem existir diferentes ações de G em A, podendo gerar diferentes estruturas algébricas em $G-C^*-$álgebra.

Exemplo 3.2. *Seja G um grupo. Defina $\tau : G \to Aut(l^\infty(G))$ por*

$s \mapsto \tau(s) = \tau_s$, onde $\tau_s(f)(t) = f(s^{-1}t)$ para todo $f \in l^\infty(G)$ e $t \in G$. Vejamos que τ é uma ação.

De fato, dado $r, s \in G$ quaisquer, $e \in G$ o elemento neutro de G, temos

$$\tau_r \circ \tau_s(f)(t) = \tau_s(f(r^{-1}t)) = f(s^{-1}r^{-1}t) = f((rs)^{-1}t) = \tau_{rs}(f)(t)$$

e

$$\tau_e(f)(t) = f(e^{-1}t) = f(et) = f(t)$$

para todo $f \in l^\infty(G)$ e $t \in G$, ou seja, $s \mapsto \tau_s$ é um homomorfismo de grupo.

Além disso, τ_s é homomorfismo de álgebra. De fato,

$$\begin{aligned}\tau_s(f + cg)(t) &= (f + cg)(s^{-1}t) = f(s^{-1}t) + c.g(s^{-1}t) \\ &= \tau_s(f)(t) + c\tau_s(g)(t) = [\tau_s(f) + c\tau_s(g)](t),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tau_s(fg)(t) &= fg(s^{-1}t) = f(s^{-1}t)g(s^{-1}t) \\ &= \tau_s(f)(t).\tau_s(g)(t) = [\tau_s(f)\tau_s(g)](t).\end{aligned}$$

Ainda mais,

$$\tau_s(f^*)(t) = f^*(s^{-1}t) = [f(s^{-1}t)]^* = [\tau_s(f)]^*(t),$$

para todo $f, g \in l^\infty(G)$, $t \in G$ e $c \in \mathbb{C}$, isto é, τ_s é um $*-$automorfismo de A.

Definição 3.3. *Um C^*-*sistema dinâmico *de um grupo discreto é uma tripla (A, G, α) onde A uma C^*-álgebra, G um grupo (discreto) e α uma ação de G sobre A.*

É possível generalizar a definição acima para grupos topológicos.

Uma C^*-álgebra A equipada com uma ação de G sobre A é chamada de $G - C^*-$*álgebra*.

Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico. Denotamos o conjunto das funções de G em A com suporte compacto por $C_c(G, A)$, porém como G é discreto, basta tomarmos o suporte finito das funções.

Vamos agora construir o *produto cruzado algébrico* associado à (A, G, α). Denotaremos este conjunto por $A \rtimes_{\alpha,alg} G$. Tome $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ como um subespaço de $C_c(G, A)$. Assim, vamos denotar um elemento $S \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$ como uma soma finita da forma $S = \sum\limits_{s \in G} a_s\delta_s$ tal que $\sum\limits_{s \in G} \|a_s\| < \infty$, onde $a_s = a(s)$ é uma função de G em A e $a_s\delta_s(g) = \begin{cases} a_s, & \text{se } g = s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Dados $S, T \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$, $c \in \mathbb{C}$, sendo $S = \sum\limits_{s \in G} a_s\delta_s$ e $T = \sum\limits_{t \in G} b_t\delta_t$, definimos as operações de soma por

$$S + T = \sum_{s \in G} a_s\delta_s + \sum_{t \in G} b_t\delta_t = \sum_{s,t \in G} a_s\delta_s + b_t\delta_t.$$

O produto escalar como sendo

$$cS = c\left(\sum_{s \in G} a_s\delta_s\right) = \sum_{s \in G} ca_s\delta_s,$$

e o produto por

$$S *_\alpha T = \left(\sum_{s \in G} a_s\delta_s\right) *_\alpha \left(\sum_{t \in G} b_t\delta_t\right) = \sum_{s,t \in G} a_s\alpha_s(b_t)\delta_{st}.$$

Ainda podemos munir $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ com uma involução dada por

$$S^* = \left(\sum_{s \in G} a_s\delta_s\right)^* = \sum_{s \in G} \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}}.$$

Vejamos que em $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ as operações estão bem definidas. Dados $S, T \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$ sendo $S = \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s$ e $T = \sum\limits_{t\in G} b_t\delta_t$, teremos $S+T, S *_\alpha T$ e $S^* \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$. De fato,

$$\sum_{s,t\in G} \|a_s + b_t\| \leq \sum_{s,t\in G} \|a_s\| + \|b_t\| < \infty,$$

$$\sum_{s,t\in G} \|a_s\alpha_s(b_t)\| \leq \sum_{s,t\in G} \|a_s b_t\| \leq \sum_{s,t\in G} \|a_s\|\|b_t\| < \infty,$$

e

$$\sum_{s\in G} \|\alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\| \leq \sum_{s\in G} \|(a_s^*)\| < \infty.$$

É possível provar que $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ é uma $*-$álgebra.

Queremos tornar $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ uma $*-$álgebra onde todos os automorfismos α_s se tornam internos. Vejamos a seguir o que queremos dizer com automorfismos internos e a demonstração que para cada $s \in G$ todo automorfismo α_s pode ser definido como $\alpha_s(a) = sas^{-1}$. Vamos fazer essa motivação apenas para C^*-álgebra unital.

Definição 3.4. *Seja α um $*-$automorfismo da C^*-álgebra A. Dizemos que α é um* automorfismo interno de A *se existe $u \in A$ unitário tal que $\alpha(a) = uau^{-1}$, para todo $a \in A$.*

Vamos ver que, dado $s \in G$, os automorfismos α_s de A unital são restrições de automorfismos internos de $A \rtimes_{\alpha,alg} G$. Para isto, definimos,

$$u : G \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,alg} G$$

$$t \longmapsto u_t := 1_A\delta_t.$$

Note que u_e é a unidade de $A \rtimes_{\alpha,alg} G$, onde $e \in G$ é o elemento neutro do grupo. De fato, dado $S \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$ tal que $S = \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s$, temos

$$\begin{aligned} S *_\alpha u_e &= \left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) *_\alpha 1_A\delta_e \\ &= \sum_{s\in G} a_s\alpha_s(1_A)\delta_{se} \\ &= \sum_{s\in G} a_s 1_A\delta_s \\ &= \sum_{s\in G} a_s\delta_s = S. \end{aligned}$$

Por outro lado, analogamente, temos

$$\begin{aligned} u_e *_\alpha S &= 1_A\delta_e *_\alpha \left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) \\ &= \sum_{s\in G} 1_A\alpha_e(a_s)\delta_{es} \\ &= \sum_{s\in G} \alpha_e(a_s)\delta_s \\ &= \sum_{s\in G} a_s\delta_s = S. \end{aligned}$$

Assim, provamos que u_e é unidade. Além disso, temos que u_t é um homomorfismo de grupos. Dados $g, h, s \in G$, temos

$$\begin{aligned} u(g) *_\alpha u(h) &= 1_A\delta_g *_\alpha 1_A\delta_h \\ &= 1_A\alpha_g(1_A)\delta_{gh} \\ &= \delta_{gh} \\ &= u_{gh}. \end{aligned}$$

Como $g, h \in G$ e $s \in G$ foram quaisquer temos que $u_g u_h = u_{gh}$.

Note agora que , dado $t \in G$, u_t é unitário, isto é, $u_t^* u_t = 1_A = u_t u_t^*$, pois $u_t^* u_t = u_{t^{-1}} u_t = u_{t^{-1}t} = u_e = u_{tt^{-1}} = u_t u_{t^{-1}} = u_t u_t^*$.

Podemos ver que A pode ser incluída em $A \rtimes_{\alpha,alg} G$, da seguinte maneira,

$$i : A \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,alg} G$$
$$a \longmapsto \sum_{s \in G} a\delta_s.$$

Proposição 3.5. *Seja A uma $G - C^*-$álgebra unital. Dado $t \in G$, o automorfismo $\alpha_t \in Aut(A)$ é uma restrição de um automorfismo interno em $A \rtimes_{\alpha,alg} G$, ou seja, $u_t i(a) u_t^* = i(\alpha_t(a))$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Dado $a \in A$ e $g \in G$ quaisquer. Façamos primeiro $u_t *_\alpha i(a)$.

$$\begin{aligned} u_t *_\alpha i(a) &= 1_A\delta_t *_\alpha \left(\sum_{s \in G} a\delta_s \right) \\ &= \sum_{s \in G} 1_A \alpha_t(a) \delta_{ts} \\ &= \sum_{s \in G} \alpha_t(a) \delta_{ts}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_t *_\alpha i(a) *_\alpha u_t^* &= \left(\sum_{s \in G} \alpha_t(a)\delta_{ts} \right) *_\alpha 1_A \delta_{t^{-1}} \\ &= \sum_{s \in G} \alpha_t(a) \alpha_{ts}(1_A) \delta_{tst^{-1}} \\ &= \sum_{s \in G} \alpha_t(a) \delta_{tst^{-1}} \\ &= i(\alpha_t(a)). \end{aligned}$$

Temos o que queríamos. □

Como decorrência deste resultado, temos que dado $s \in G$, o automorfismo α_s pode ser visto como $\alpha_s(a) = \delta_s a \delta_{s^{-1}}$, para todo $a \in A$.

Agora conseguimos ver a motivação das operações em $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ como acima, por exemplo para a multiplicação $*_\alpha$, dados $S, T \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$ tal que $S = \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s$ e $T = \sum\limits_{t\in G} b_t\delta_t$. A definição acima vem do cálculo formal de

$$\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)\left(\sum_{t\in G} b_t\delta_t\right) = \sum_{s,t\in G} a_s\delta_s(b_t)\delta_t = \sum_{s,t\in G} a_s\delta_s(b_t)\delta_{s^{-1}}\delta_s\delta_t$$
$$= \sum_{s,t\in G} a_s\alpha_s(b_t)\delta_{st} = S *_\alpha T.$$

Com isto, note que se $A = \mathbb{C}$ com a ação trivial $s \mapsto \nu_s$ tal que $\nu_s(a) = a$, temos que $A \rtimes_{\nu,alg} G = \mathbb{C}[G]$. Podemos nos perguntar, qual completamento faremos para que $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ seja uma C^*-álgebra tal que A esteja contido no completamento ? Para C^*-álgebra de grupos fizemos duas alternativas. Vejamos as escolhas para o completamento de $A \rtimes_{\alpha,alg} G$. Para defini-las ainda precisamos de alguns artifícios.

Definição 3.6. *Sejam G um grupo e A uma $G - C^*-$álgebra. Uma representação covariante é uma tripla (u, π, H), onde H é um espaço de Hilbert, (u, H) é uma representação unitária de G e (π, H) uma $*-$representação de A tal que $u_s\pi(a)u_s^* = \pi(\alpha_s(a))$ para todo $s \in G$ e $a \in A$.*

Observe que para cada representação covariante (u, π, H) podemos associar uma $*-$ representação para $A \rtimes_{\alpha,alg} G$. Basta definir $\sigma : A \rtimes_{\alpha,alg} G \to \mathbb{B}(H)$ tal que $\sigma\left(\sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s\right) = \sum\limits_{s\in G} \pi(a_s)u_s$. Veja que, dados $S = \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s$ e $T = \sum\limits_{t\in G} b_t\delta_t$ temos,

$$\sigma(S)\sigma(T) = \sigma\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)\sigma\left(\sum_{t\in G} b_t\delta_t\right) = \sum_{s\in G} \pi(a_s)u_s \sum_{t\in G} \pi(b_t)u_t$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s,t\in G} \pi(a_s)u_s\pi(b_t)u_t = \sum_{s,t\in G} \pi(a_s)(u_s\pi(b_t)u_s^*)u_su_t \\
&= \sum_{s,t\in G} \pi(a_s)\pi(\alpha_s(b_t))u_{st} = \sum_{s,t\in G} \pi(a_s\alpha_s(b_t))u_{st} \\
&= \sigma\Bigg(\sum_{s,t\in G} a_s\alpha_s(b_t)\delta_{st}\Bigg) = \sigma\Bigg(\sum_{s\in G} a_s\delta_s *_\alpha \sum_{t\in G} b_t\delta_t\Bigg) \\
&= \sigma(S *_\alpha T)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sigma(S)^* &= \sigma\Bigg(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Bigg)^* = \sum_{s\in G} u_s^*\pi(a_s)^* \\
&= \sum_{s\in G} u_{s^{-1}}\pi(a_s^*)u_su_{s^{-1}} = \sum_{s\in G} \pi(\alpha_{s^{-1}}(a_s^*))u_{s^{-1}} \\
&= \sigma\Bigg(\sum_{s\in G} \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}}\Bigg) = \sigma\Bigg(\Bigg[\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Bigg]^*\Bigg) = \sigma(S^*).
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos uma $*-$representação. Ainda mais, é possível mostrar que o conjuntos das representações covariantes possui uma bijeção com o conjunto das $*-$representações não-degeneradas, este resultado pode ser visto no capítulo 2 de [24].

Definição 3.7. *Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico. O* produto cruzado cheio *é o completamento de $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ com respeito a norma*

$$\|S\|_u = \sup_\pi \|\pi(S)\|,$$

sendo que $\pi : A \rtimes_{\alpha,alg} G \longrightarrow \mathbb{B}(H)$ são $*-$homomorfismos.

Denotamos o produto cruzado cheio do C^*-sistema dinâmico (A, G, α) como $A \rtimes_\alpha G$. Assim,

$$A \rtimes_\alpha G = \overline{A \rtimes_{\alpha,alg} G}^{\|\cdot\|_u}.$$

Esta norma $\|\cdot\|_u$ é limitada, pois

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big\|_u^2 &= \Big\|\pi\Big(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big)\Big\|^2 \\
&= \Big\|\pi\Big(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big)^*\pi\Big(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big)\Big\| \\
&\leq \Big\|\pi\Big(\sum_{s\in G} \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}}\Big)\pi\Big(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big)\Big\| \\
&= \Big\|\pi\Big(\sum_{s\in G} \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}} *_\alpha \sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big)\Big\| \\
&= \Big\|\pi\Big(\sum_{s\in G} \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\alpha_{s^{-1}}(a_s)\delta_e\Big)\Big\| \\
&\leq \Big\|\sum_{s\in G} \alpha_{s^{-1}}(a_s^* a_s)\Big\|_A \\
&\leq \sum_{s\in G} \|a_s^* a_s\|_A \\
&= \sum_{s\in G} \|a_s\|_A^2 \leq \Big\|\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big\|_1^2.
\end{aligned}$$

Com o próximo exemplo, vemos que a C^*-álgebra do grupo é um caso particular de produto cruzado.

Exemplo 3.8. *Relembrando da definição dada no capítulo passado, vemos que $C^*(G) \cong \mathbb{C} \rtimes_\nu G$, sendo ν a ação trivial.*

Segue diretamente a propriedade universal para o produto cruzado cheio.

Proposição 3.9. *(Propriedade universal do produto cruzado cheio) Para toda representação covariante (u, π, H) de uma $G - C^*-$álgebra existe único $*-$homomorfismo $\sigma : A \rtimes_\alpha G \to \mathbb{B}(H)$ tal que*

$$\sigma\Big(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\Big) = \sum_{s\in G} \pi(a_s)u_s.$$

Demonstração. Esta demonstração pode ser vista no capítulo 2 de [24].

□

Exemplo 3.10. *Vamos ver que* $C(\mathbb{Z}_n)\rtimes_\tau \mathbb{Z}_n \cong M_n(\mathbb{C})$, *onde* $\tau_s(f)(t) = f(t-s)$ *para todo* $s, t \in G$ *e* $f \in C(\mathbb{Z}_n)$ *é chamada de* ação de translação *de* $\mathbb{Z}_n$ *sobre* $C(\mathbb{Z}_n)$.

De fato, fixe $n \in \mathbb{N}$, *considere a aplicação* $\pi : C(\mathbb{Z}_n) \to M_n(\mathbb{C})$ *tal que*

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(n-1) \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que π *é um* $*-$*homomorfismo e* $\|\pi(f)\| = \|f\|$. *Tome agora,*

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } S^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando $u_m = S^m$ *para* $m \in \mathbb{Z}_n$, *a função* $u : m \mapsto u_m$ *define uma representação unitária de* $\mathbb{Z}_n$ *sobre* $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$. *Ainda mais,* $u_m\pi(f)u_m^* = \pi(\tau_m(f))$, *ou seja,* $(\pi, u, \mathbb{C}^n)$ *é uma representação covariante. Pela propriedade universal, temos* $\sigma : C(\mathbb{Z}_n) \rtimes_\tau \mathbb{Z}_n \to M_n(\mathbb{C})$ *tal que* $\sigma\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}_n} a_m\delta_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_n} \pi(a_m)u_m$. *Neste caso, prova-se que* σ *é um* $*-$*isomorfismo. Para isto, basta ver que os conjunto tem a mesma dimensão e mostrar que a aplicação é injetiva.*

Exemplo 3.11. *É possível generalizar o exemplo acima. Se* G *é um grupo finito com* $|G| = n$, *então* $C(G) \rtimes_\tau G \cong M_n(\mathbb{C})$, *sendo* τ *a ação de translação à esquerda. A demonstração pode ser vista em [24].*

Exemplo 3.12. *Pra quem conhece a álgebra de rotação A_θ, ela pode ser vista como um produto cruzado. Mais especificamente, $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\gamma_\theta} \mathbb{Z} \cong A_\theta$ onde $\gamma_\theta(f)(z) = f(e^{-2\pi i\theta}z)$ é chamada de* ação de rotação. *A álgebra de rotação é a C^*-álgebra universal gerada por dois elementos unitários U e V satisfazendo $UV = e^{2\pi i\theta}VU$. Não iremos ver mais detalhes sobre esta C^*-álgebra. Esta construção pode ser vista no capítulo 7 de [7].*

Agora, vamos definir o produto cruzado reduzido. Sejam (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico, (π, H) uma representação fiel sendo (u, π, H) sua representação covariante.

Defina $\tilde{\pi} : A \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ por $\tilde{\pi}(a)(\upsilon \otimes \delta_g) = (\alpha_{g^{-1}}(a)(\upsilon) \otimes \delta_g)$, onde $\{\delta_g\}_{g\in G}$ é a base canônica ortonormal de $l^2(G)$. Observe que as vezes iremos omitir a representação π, como por exemplo, $a\upsilon = \pi(a)\upsilon$. Identificando $H\widehat{\otimes}l^2(G) \cong \oplus_{g\in G}H$, temos $\tilde{\pi}(a) = \bigoplus\limits_{g\in G} \alpha_g^{-1}(a)$. Além disso, $\tilde{\pi}$ é um $*-$homomorfismo, ou seja, é uma $*-$representação de A sobre $H\widehat{\otimes}l^2(G)$.

Agora, seja $\tilde{u} : G \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ onde $s \mapsto Id_H \otimes \lambda_s$ (lembrando que λ_s é a representação regular à esquerda de G). Assim, $\tilde{u}$ é uma representação do grupo G em $H\widehat{\otimes}l^2(G)$. Vejamos que $(\tilde{u}, \tilde{\pi}, H\widehat{\otimes}l^2(G))$ é uma representação covariante, para isto é necessário mostrar que $\tilde{u}_s\tilde{\pi}(a)\tilde{u}_s^* = \tilde{\pi}(\alpha_s(a))$ para todo $s \in G$ e $a \in A$. Temos

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_s\tilde{\pi}(a)\tilde{u}_s^*(\upsilon \otimes \delta_g) &= (Id_H \otimes \lambda_s)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_s^*)(\upsilon \otimes \delta_g) \\
&= (Id_H \otimes \lambda_s)\tilde{\pi}(a)(\upsilon \otimes \delta_{s^{-1}g}) \\
&= (Id_H \otimes \lambda_s)([\alpha_{g^{-1}s}(a)(\upsilon)] \otimes \delta_{s^{-1}g}) \\
&= ([\alpha_{g^{-1}}(\alpha_s(a))(\upsilon)] \otimes \delta_g) \\
&= \tilde{\pi}(\alpha_s(a))(\upsilon \otimes \delta_g).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos um representação covariante $(\tilde{u}, \tilde{\pi}, H\widehat{\otimes}l^2(G))$ para a $G - C^*-$álgebra A. Podemos agora induzir uma representação para $A \rtimes_{\alpha,alg} G$ sobre $\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$. Defina $(Id_H \otimes \lambda) \times \tilde{\pi} : A \rtimes_{\alpha,alg} G \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ por $\sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s \mapsto \sum\limits_{s\in G} \tilde{\pi}(a_s)(Id_H \otimes \lambda_s)$. Chamaremos a representação $(Id_H \otimes \lambda) \times \tilde{\pi}$ de *representação regular de* $A \rtimes_{\alpha,alg} G$. Com isto, podemos definir o produto cruzado reduzido discreto de um C^*-sistema dinâmico.

Definição 3.13. *Seja* (A, G, α) *um* C^*-*sistema dinâmico. O* produto cruzado reduzido *é definido como o completamento da imagem de representação regular de* $A \rtimes_{\alpha,alg} G \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ *pela norma em* $\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$. *Denotaremos o produto cruzado reduzido, por* $A \rtimes_{\alpha,r} G$.

Ou seja, podemos definir

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_r :& A \rtimes_{\alpha,alg} G \to \mathbb{R} \\ \|a\|_r &= \Big\|[(Id_H \otimes \lambda) \times \pi](a)\Big\|_{\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))}. \end{aligned}$$

E assim, $A \rtimes_{\alpha,r} G = \overline{A \rtimes_{\alpha,alg} G}^{\|\cdot\|_r}$.

Denotaremos por Λ, como fizemos nas C^*-álgebras de grupo, o $*-$homomorfismo $\Lambda\colon A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ que é sobrejetivo. Algumas literaturas veem Λ como a aplicação quociente.

Exemplo 3.14. *Considere* $(\mathbb{C}, G, \nu)$ *onde* ν *é ação trivial. Por construção vemos que* $\mathbb{C} \rtimes_{\nu,r} G \cong C^*_r(G)$.

Veremos mais exemplos no final deste capítulo. Sabe-se que a definição acima não depende da escolha da representação fiel (π, H). Vamos ver este resultado.

Teorema 3.15. *Seja* (A, G, α) *um* C^*-*sistema dinâmico. Então* $A \rtimes_{\alpha,r} G$ *não depende da escolha da representação fiel* $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$.

Demonstração. Seja $F \subset G$ um subconjunto finito. Defina $P_F \in \mathbb{B}(l^2(G))$ como a projeção de posto $|F|$ sobre o span de $\{\delta_g; g \in F\}$, ou seja, $P : l^2(G) \to span\{\delta_g; g \in F\} \subset l^2(G)$.

Seja $\{e_{p,q}\}_{p,q\in F}$ a matrizes unidades canônica de $M_{|F|}(\mathbb{C})$ que é isomorfo à $P_F\mathbb{B}(l^2(G))P_F$. Essencialmente, podemos pensar que $\{e_{p,q}\}_{p,q\in F}$ é uma matriz quadrada de ordem $|F|$ que na entrada p, q tem o valor 1 e nas demais entradas vale zero. Podemos ver $e_{p,q}$ com um operador em $l^2(G)$ definido por

$$\begin{aligned} e_{p,q}(\delta_r) &:= |\delta_p\rangle\langle\delta_q|(\delta_r) := \delta_p\langle\delta_r, \delta_q\rangle \\ &= \delta_q(r)\delta_p = \begin{cases} \delta_p, & \text{se } q = r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \end{aligned}$$

Lembre que

$$\tilde{\pi}(a) = \sum_{p\in G} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}.$$

Assim,

$$(Id_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a) = (Id_H \otimes P_F) \sum_{p\in G} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p} = \sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}$$

e

$$\begin{aligned} (Id_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes P_F) &= \left(\sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}\right)(Id_H \otimes P_F) \\ &= \sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}. \end{aligned}$$

Temos então que $(Id_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a) = (Id_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes P_F)$.

Sabemos que dado $T \in \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$, temos que

$$\|T\|_{\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))} = \sup_{F\subset G} \|(Id_H \otimes P_F)T(Id_H \otimes P_F)\|_{\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))}.$$

Seja $(Id_H \otimes \lambda) \times \tilde{\pi}$ a representação regular. Observe que, para todo $r \in G$ temos

$$\lambda_s(e_{p,p})(\delta_r) = e_{p,p}(\delta_{sr}) = \begin{cases} \delta_p, & \text{se } p = sr \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \delta_p, & \text{se } s^{-1}p = r \\ 0, & \text{c .c.} \end{cases} = e_{p,s^{-1}p}(\delta_r).$$

Ou seja, $\lambda_s(e_{p,p}) = e_{p,s^{-1}p}$.

Agora, dado $s \in G$, denote $sF = \{st; t \in F\}$. Com isto, temos

$$\begin{aligned}
&(Id_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_s)(Id_H \otimes P_F) \\
&\quad = (Id_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes P_F)(Id_H \otimes \lambda_s)(Id_H \otimes P_F) \\
&\quad = \left(\sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}\right)(Id_H \otimes P_F\lambda_s P_F) \\
&\quad = \left(\sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}\right)\left(\sum_{p\in F} Id_H \otimes P_F(e_{p,s^{-1}p})\right) \\
&\quad = \left(\sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}\right)\left(\sum_{p\in F\cap sF} Id_H \otimes e_{p,s^{-1}p}\right) \\
&\quad = \sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}e_{p,s^{-1}p} \\
&\quad = \sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,s^{-1}p}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tome $f = \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s \in A \rtimes_{\alpha,alg} G \subset \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$, para isto, basta fazer $a_s\delta_s \in A \rtimes_{\alpha,alg} G \mapsto \tilde{\pi}(a_s) \in \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$. Temos assim,

$$(Id_H \otimes P_F)f(Id_H \otimes P_F) = \sum_{s\in G}\sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a_s) \otimes e_{p,s^{-1}p}.$$

Como vimos no exemplo 1.15, temos que $\mathbb{M}_F(A) \cong \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \otimes A$

possui norma única, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))} &= \sup_{F\subset G} \|(Id_H\otimes P_F)f(Id_H\otimes P_F)\| \\
&= \sup_{F\subset G} \left\| \sum_{s\in G}\sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a_s)\otimes e_{p,s^{-1}p} \right\| \\
&= \sup_{F\subset G} \left\| \sum_{s\in G}(Id_H\otimes P_F)\tilde{\pi}(a_s)(Id_H\otimes\lambda_s)(Id_H\otimes P_F) \right\| \\
&= \sup_{F\subset G} \left\| (Id_H\otimes P_F)\Big[(Id_H\otimes\lambda)\times\tilde{\pi}(f)\Big](Id_H\otimes P_F) \right\| \\
&= \|(Id_H\otimes\lambda)\times\tilde{\pi}(f)\| = \|f\|_r.
\end{aligned}$$

Com isto provamos que a norma $\|\cdot\|_r$ não depende da escolha de representação fiel $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$. Portanto, temos que $A \rtimes_{\alpha,r} G$ não depende da representação. $\square$

Por fim, vamos demonstrar um lema que será utilizado futuramente na demonstração do Lema 4.6.

Lema 3.16. *Sejam A, B C^*-álgebras e $\alpha : G \to Aut(A)$ uma ação de G sobre A. Se $Id_B\otimes\alpha : G \to Aut(B\otimes A)$ definida por $(Id_B\otimes\alpha)(g) = Id_B\otimes\alpha_g$ é uma ação, então*

$$(B\otimes_{min} A)\rtimes_{Id_B\otimes\alpha,r} G \cong B\otimes_{min}(A\rtimes_{\alpha,r} G).$$

Demonstração. Considere as representações fieis π e ρ de A e B nos espaços de Hilbert H e K, respectivamente. Como vimos no Teorema 1.12, $\rho\otimes\pi$ é a representação do produto tensorial algébrico $B\otimes A$ em $K\widehat{\otimes}H$.

Para o produto cruzado reduzido $A\rtimes_{\alpha,r} G$, consideramos a representação $\tilde{\pi}$ que forma um par covariante em $H\widehat{\otimes}l^2(G)$ com $Id_H\otimes\lambda$. Obtemos uma representação fiel $\rho\otimes(\tilde{\pi}\rtimes(Id_H\otimes\lambda))$ de $B\otimes_{\min}(A\rtimes_{\alpha,r} G)$ em $K\widehat{\otimes}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$, por definição do produto tensorial minimal.

Por outro lado, temos a representação fiel $\rho\otimes\pi$ de $B\otimes A$ que define o produto tensorial minimal. Desta representação obtemos o produto cruzado reduzido $(B\otimes_{min}A)\rtimes_{Id_B\otimes\alpha,r}G$, considerando $\widetilde{\rho\otimes\pi}$ que forma um par covariante com $(Id_{K\otimes H})\otimes\lambda$.

Temos $B\otimes_{\min}(A\rtimes_{\alpha,r}G)$ representada fielmente em $K\widehat{\otimes}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ através da representação $\rho\otimes(\tilde{\pi}\rtimes(1_H\otimes\lambda))$, e $(B\otimes_{\min}A)\rtimes_{\mathrm{Id}\otimes\alpha,r}G$ representada fielmente em $(K\widehat{\otimes}H)\widehat{\otimes}l^2(G)$ através de $\widetilde{\rho\otimes\pi}\rtimes(1_{K\otimes H}\otimes\lambda)$.

Temos um isomorfismo $\mathcal{A}$ canônico associativo de espaços de Hilbert

$$K\widehat{\otimes}(H\widehat{\otimes}l^2(G))\cong(K\widehat{\otimes}H)\widehat{\otimes}l^2(G)$$

que identifica o tensor elementar $\eta\otimes(\xi\otimes\delta_s)\in K\widehat{\otimes}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ com $(\eta\otimes\xi)\otimes\delta_s\in(K\widehat{\otimes}H)\widehat{\otimes}l^2(G)$. E ainda este isomorfismo se estende para

$$\mathbb{B}(K\widehat{\otimes}(H\widehat{\otimes}l^2(G)))\cong\mathbb{B}((K\widehat{\otimes}H)\widehat{\otimes}l^2(G)).$$

Por abuso de notação iremos denotar este isomorfismo por $\mathcal{A}$.

Sabemos que $B\otimes_{\min}(A\rtimes_{\alpha,r}G)\cong\rho\otimes(\tilde{\pi}\rtimes(1_H\otimes\lambda))(B\otimes_{\min}(A\rtimes_{\alpha,r}G))$ e $(B\otimes_{\min}A)\rtimes_{\mathrm{Id}\otimes\alpha,r}G\cong\widetilde{\rho\otimes\pi}\rtimes(1_{K\otimes H}\otimes\lambda)((B\otimes_{\min}A)\rtimes_{\mathrm{Id}\otimes\alpha,r}G)$. Assim, para vermos o isomorfismo do enunciado, basta $\rho\otimes(\tilde{\pi}\rtimes(1_H\otimes\lambda))(B\otimes_{\min}(A\rtimes_{\alpha,r}G))=\widetilde{\rho\otimes\pi}\rtimes(1_{K\otimes H}\otimes\lambda)((B\otimes_{\min}A)\rtimes_{\mathrm{Id}\otimes\alpha,r}G)$. Para mostrar este isomorfismo vejamos que, dados $a\in A$, $b\in B$, $s\in G$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\widetilde{\rho\otimes\pi}\rtimes(1_{K\otimes H}\otimes\lambda)(b\otimes a)\delta_s) &= \mathcal{A}(\widetilde{\rho\otimes\pi}(b\otimes a)(1_{K\otimes H}\otimes\delta_s))\\
&= \mathcal{A}([\rho(b)\otimes\alpha_{s^{-1}}(a)]\otimes\delta_s)\\
&= \rho(b)\otimes[\alpha_s^{-1}(a)\otimes\delta_s]\\
&= \rho(b)\otimes[\tilde{\pi}(a)\otimes\delta_s]\\
&= \rho(b)\otimes[\tilde{\pi}(a)(1_H\otimes\lambda_s)]
\end{aligned}$$

$$= \rho \otimes (\tilde{\pi} \rtimes (1_H \otimes \lambda))(b \otimes a\delta_s).$$

Ou seja, $\mathcal{A}(\widetilde{\rho \otimes \pi} \rtimes (1_{K\otimes H} \otimes \lambda)((B \otimes_{\min} A) \rtimes_{\mathrm{Id}\otimes\alpha,r} G)) = \rho \otimes (\tilde{\pi} \rtimes (1_H \otimes \lambda))(B \otimes_{\min} (A \rtimes_{\alpha,r} G))$. Portanto, $(B \otimes_{min} A) \rtimes_{Id_B\otimes\alpha,r} G \cong B \otimes_{min} (A \rtimes_{\alpha,r} G)$. $\square$

Podemos também ver o isomorfismo do lema acima via $\mathcal{F}$, definido nos geradores por:

$$\mathcal{F} : (B \otimes_{min} A) \rtimes_{Id_B\otimes\alpha,r} G \to B \otimes_{min} (A \rtimes_{\alpha,r} G)$$
$$(b \otimes a)\delta_s \mapsto b \otimes a\delta_s.$$

3.2 Mediabilidade e Produto Cruzado

No Teorema 2.24 vimos que se G é mediável, então $C^*_r(G) \cong C^*(G)$ e na seção anterior, vimos que $\mathbb{C} \rtimes_{\alpha,r} G \cong \mathbb{C} \rtimes_\alpha G$. Podemos nos perguntar quando $A \rtimes_{\alpha,r} G \cong A \rtimes_\alpha G$, dependendo de G e α. Daremos uma resposta nos próximos capítulos.

Queremos mostrar que dado G um grupo mediável e α uma ação de G sobre A então $A \rtimes_{\alpha,r} G \cong A \rtimes_\alpha G$. Utilizando o Teorema 2.24, temos muitas maneiras de demonstrar o desejado. Neste trabalho vamos mostrar este fato utilizando certos homomorfismos especiais que "conectam" de uma certa forma produtos cruzados e álgebras de grupos.

Definição 3.17. *Sejam A uma C^*-álgebra e $B \subseteq A$ uma C^*-subálgebra. Uma* esperança condicional *$E : A \to B$ é uma aplicação linear sobrejetiva que satisfaz:*

(1) $\|E\| \leq 1$;

(2) $E^2 = E$, *isto é,* $E(E(a)) = E(a)$ *para todo* $a \in A$;

(3) $E(a) \geq 0$ *para todo* $a \geq 0$ *em* A*;*

(4) $E(ab) = E(a)b$ *para todo* $a \in A$ *e* $b \in B$*;*

(5) $E(ba) = bE(a)$ *para todo* $a \in A$ *e* $b \in B$*.*

Além disso, se $E(a^*a) = 0$ *implica que* $a = 0$*, para todo* $a \in A$*, ou seja, se* E *é injetiva nos elementos positivos de* A*, dizemos que* E *é uma esperança condicional* fiel.

Vamos mostrar que para qualquer C^*-sistema dinâmico (A, G, α) existe uma esperança condicional $E\colon A \rtimes_\alpha G \to A$ sendo $E(a\delta_s) = a\delta_{s,e} = \begin{cases} a\delta_e, & \text{se } e = s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$. Ainda mais, em geral E não é fiel. Veremos que E será fiel se e somente se $A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_{\alpha,r} G$. Além disso, sempre existe uma esperança condicional fiel $E_r\colon A \rtimes_{\alpha,r} G \to A$ tal que $E_r(a\delta_s) = a\delta_{s,e}$.

Como vimos na seção anterior, sabemos que $A \rtimes_{\alpha,r} G \cong \Lambda(A \rtimes_\alpha G) \cong \overline{A \rtimes_{\alpha,alg} G}^{\|\cdot\|_r} \subseteq \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))$, onde $\|S\|_r = \|\Lambda(S)\|_{\mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))}$.

Considere o operador

$$\begin{aligned} \tilde{\delta_e}\colon H &\to H\widehat{\otimes} l^2(G) \\ h &\mapsto h \otimes \delta_e. \end{aligned}$$

Vejamos que $\tilde{\delta_e}$ é linear e limitado. Dados $h, g \in H$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\delta_e}(h+g) &= h + g \otimes \delta_e \\ &= h \otimes \delta_e + g \otimes \delta_e \\ &= \tilde{\delta_e}(h) + \tilde{\delta_e}(g). \end{aligned}$$

e $\|\tilde{\delta_e}(h)\|^2_{H\widehat{\otimes} l^2(G)} = \langle h, h\rangle\langle \delta_e, \delta_e\rangle = \|h\|^2_H$, ou seja $\|\tilde{\delta_e}\| \leq 1$.

Observe que $\tilde{\delta_e}^*(h \otimes \delta_s) = \langle \delta_e, \delta_s \rangle h$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} E \colon \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G)) &\to \mathbb{B}(H) \\ T &\mapsto \tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e}. \end{aligned}$$

Facilmente temos que E é uma aplicação linear e limitada pois são composições de tais. Observe que esta aplicação tem algumas propriedades muito úteis, essas propriedades serão utilizadas daqui pra frente. Sejam $\xi, \eta \in H$, temos

$$\begin{aligned} \langle \xi, E(T)\eta \rangle &= \langle \xi, \tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e}(\eta) \rangle \\ &= \langle \tilde{\delta_e}(\xi), T(\eta \otimes \delta_e) \rangle \\ &= \langle (\xi \otimes \delta_e), T(\eta \otimes \delta_e) \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, se $T = S \otimes Id$ para $S \in \mathbb{B}(H)$, temos

$$\begin{aligned} E(S \otimes Id)(h) &= \tilde{\delta_e}^* (S \otimes Id) \tilde{\delta_e} \\ &= \tilde{\delta_e}^* (S \otimes Id)(h \otimes \delta_e) \\ &= \tilde{\delta_e}^* (S(h) \otimes \delta_e) \\ &= \langle \delta_e, \delta_e \rangle S(h) \\ &= S(h). \end{aligned}$$

Com esta aplicação temos $E(\mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))) = \mathbb{B}(H)$.

Mais ainda, para quaisquer $S \in \mathbb{B}(H)$ e $R \in \mathbb{B}(l^2(G))$, temos

$$\begin{aligned} E(S \otimes R)(h) &= \tilde{\delta_e}^* (S \otimes R) \tilde{\delta_e}(h) \\ &= \tilde{\delta_e}^* (S \otimes R)(h \otimes \delta_e) \\ &= \tilde{\delta_e}^* (S(h) \otimes R(\delta_e)) \\ &= \langle \delta_e, R(\delta_e) \rangle S(h). \end{aligned}$$

Podemos afirmar que $E\colon \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G)) \to \mathbb{B}(H)$ é uma esperança condicional. Para isto basta identificarmos da maneira canônica:

$$\begin{aligned}&\mathbb{B}(H) \hookrightarrow \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))\\ &S \mapsto S \otimes Id.\end{aligned}$$

Vamos verificar as propriedades da esperança condicional. Já vimos antes que E é uma aplicação linear e sobrejetiva. Mostraremos os outro 5 itens necessários:

Dados $S \in \mathbb{B}(H)$, $T \in \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))$ e $h \in H$.

1) Facilmente $\|E\| \leq 1$ pois $\|\tilde{\delta_e}\| \leq 1$.

2) E é idempotente, pois

$$\begin{aligned}E(E(T))(h) &= E(\tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e} \otimes Id)(h)\\ &= \tilde{\delta_e}^* (\tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e} \otimes Id)\tilde{\delta_e}(h)\\ &= \tilde{\delta_e}^* (\tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e} \otimes Id)(h \otimes \delta_e)\\ &= \tilde{\delta_e}^* (\tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e}(h) \otimes \delta_e)\\ &= \langle \delta_e, \delta_e \rangle \tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e}(h)\\ &= \tilde{\delta_e}^* T \tilde{\delta_e}(h)\\ &= E(T).\end{aligned}$$

3) Vejamos que E é positiva, isto é, $E(T^*T) \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle \xi, E(T^*T)\xi \rangle &= \langle (\xi \otimes \delta_e), T^*T(\xi \otimes \delta_e) \rangle\\ &= \langle T(\xi \otimes \delta_e), T(\xi \otimes \delta_e) \rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Então, $E(T^*T) \geq 0$.

4) Vendo $S = S \otimes Id$, temos

$$\begin{aligned}
\langle h, E(T(S \otimes Id))h \rangle &= \langle h \otimes \delta_e, T(S \otimes Id)h \otimes \delta_e \rangle \\
&= \langle h \otimes \delta_e, T(S(h) \otimes \delta_e) \rangle \\
&= \langle h, E(T)S(h) \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $E(T(S \otimes Id))(h) = E(T)S(h)$.

5) Para ver essa condição, basta ver $S\tilde{\delta_e}^* = \tilde{\delta_e}^*(S \otimes Id)$, pois

$$\begin{aligned}
\langle h, E((S \otimes Id)T)(h) \rangle &= \langle h, \tilde{\delta_e}^*(S \otimes Id)T(h \otimes \delta_e) \rangle \\
&= \langle h, S\tilde{\delta_e}^* T(h \otimes \delta_e) \rangle \\
&= \langle h, SE(T)(h) \rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja, $E((S \otimes Id)T)(h) = SE(T)(h)$.

Com isto concluímos que E é uma esperança condicional.

Podemos portanto restringir E à $A \rtimes_{\alpha,r} G \subseteq \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))$. Vamos verificar que $E(A \rtimes_{\alpha,r} G) \subseteq A \subseteq \mathbb{B}(H)$ e E tem as propriedades desejadas, isto é, $E_r \colon A \rtimes_{\alpha,r} G \to A$ é esperança condicional fiel e $E_r(a\delta_g) = a\delta_{g,e}$ para todo $a \in A$ e $g \in G$.

Vendo $A \rtimes_{\alpha,r} G \subseteq \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))$ via Λ e dados $\xi, \eta \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda(a\delta_g)(\eta \otimes \delta_e) &= \tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_g)(\eta \otimes \delta_e) \\
&= \tilde{\pi}(a)(\eta \otimes \delta_g) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(a)\eta \otimes \delta_g.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \xi, E(\Lambda(a\delta_g))\eta \rangle &= \langle \xi \otimes \delta_e, \Lambda(a\delta_g)(\eta \otimes \delta_e) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_e, \alpha_{g^{-1}}(a)\eta \otimes \delta_g \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \xi, \tilde{\delta_e}^*(\alpha_{g^{-1}}(a)\eta \otimes \delta_g)\rangle$$
$$= \langle \xi, \langle \delta_e, \delta_g\rangle \alpha_{g^{-1}}(a)\eta\rangle$$
$$= \langle \xi, \delta_{e,g}\alpha_{g^{-1}}(a)\eta\rangle.$$

Ou seja, $E(\Lambda(a\delta_g)) = \delta_{e,g}\alpha_{g^{-1}}(a)$. Mais ainda, identificando $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ por π, podemos ver $E(a\delta_g) = \delta_{e,g}a$. As vezes iremos omitir a identificação, ou seja, já estamos fazendo a identificação e vamos denotar por $a\xi = \pi(a)\xi$.

Isto nos dá a fórmula desejada para E e mostra que $E(A \rtimes_{\alpha,r} G) = A$. Portanto obtemos a esperança condicional $E_r \colon A \rtimes_{\alpha,r} G \to A$.

Compondo com $\Lambda\colon A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ obtemos outra esperança condicional
$$E_c = E_r \circ \Lambda : A \rtimes_\alpha G \to A.$$

Ainda precisamos provar a fidelidade de E_r. Sejam $x \in A \rtimes_{\alpha,r} G$ e $g \in G$. Defina $\widehat{x}(g) := E_r(xId_H \otimes \lambda_{g^{-1}})$.

Vamos mostrar duas igualdades antes para facilitar nossa demonstração da fidelidade de E_r. A primeira equação diz que $\langle \xi, \widehat{x}(g)\eta\rangle = \langle \xi \otimes \delta_e, x(\eta \otimes \delta_{g^{-1}})\rangle$ para todo $\xi, \eta \in H$, $x \in A \rtimes_{\alpha,r} G$ e $g \in G$. Para demonstra-la, basta verificar para $x = \Lambda(a\delta_h)$.

Primeiramente, suponha que $h \neq g$. Temos

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(g) &= E_r(\Lambda(a\delta_h)Id_H \otimes \lambda_{g^{-1}}) \\
&= E_r(\widetilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_h)Id_H \otimes \lambda_{g^{-1}})) \\
&= E_r(\widetilde{\pi}(a)Id_H \otimes \lambda_{hg^{-1}})) \\
&= E_c(a\delta_{hg^{-1}}) \\
&= a\delta_{e,hg^{-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\langle \xi, \widehat{x}(g)\eta \rangle = 0$. E também

$$\begin{aligned}
\langle \xi \otimes \delta_e, x(\eta \otimes \delta_{g^{-1}}) \rangle &= \langle \xi \otimes \delta_e, \Lambda(a\delta_h)(\eta \otimes \delta_{g^{-1}}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_e, \widetilde{\pi}(a)(\eta \otimes \delta_{hg^{-1}}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_e, \alpha_{gh^{-1}}(a)\eta \otimes \delta_{hg^{-1}}) \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Agora se $h = g$,

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \widehat{x}(g)\eta \rangle &= \langle \xi, E_r(xId_H \otimes \lambda_{g^{-1}})\eta \rangle \\
&= \langle \xi, E_r(\Lambda(a\delta_g)Id_H \otimes \lambda_{g^{-1}})\eta \rangle \\
&= \langle \xi, E_r(\widetilde{\pi}(a)(Id \otimes \lambda_g)Id_H \otimes \lambda_{g^{-1}})\eta \rangle \\
&= \langle \xi, E_r(\widetilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_e)\eta \rangle \\
&= \langle \xi, E_r(\Lambda(a\delta_e))\eta \rangle \\
&= \langle \xi, E(a\delta_e)\eta \rangle \\
&= \langle \xi, a\eta \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle \xi \otimes \delta_e, x(\eta \otimes \delta_{g^{-1}}) \rangle &= \langle \xi \otimes \delta_e, \Lambda(a\delta_g)(\eta \otimes \delta_{g^{-1}}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_e, \widetilde{\pi}(a)Id \otimes \lambda_g(\eta \otimes \delta_{g^{-1}}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_e, \widetilde{\pi}(a)(\eta \otimes \delta_e) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_e, (a\eta \otimes \delta_e) \rangle \\
&= \langle \xi, a\eta \rangle.
\end{aligned}$$

Com isto mostramos que $\langle \xi, \widehat{x}(g)\eta \rangle = \langle \xi \otimes \delta_e, x(\eta \otimes \delta_{g^{-1}}) \rangle$.

Provamos analogamente que $\langle \xi \otimes \delta_g, x(\eta \otimes \delta_e) \rangle = \langle \xi, \alpha_g^{-1}(\widehat{x}(g))\eta \rangle$. Se $g \neq h$, temos facilmente $\langle \xi \otimes \delta_g, x(\eta \otimes \delta_e) \rangle = \langle \xi, \alpha_g^{-1}(\widehat{x}(g))\eta \rangle = 0$. Se $g = h$, temos

$$\langle \xi \otimes \delta_g, x(\eta \otimes \delta_e) \rangle = \langle \xi \otimes \delta_g, \Lambda(a\delta_g)(\eta \otimes \delta_e) \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \xi \otimes \delta_g, \widetilde{\pi}(a)(Id \otimes \lambda_g)(\eta \otimes \delta_e)\rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_g, \widetilde{\pi}(a)(\eta \otimes \delta_g)\rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_g, \alpha_g^{-1}(a)\eta \otimes \delta_g\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(a)\eta\rangle.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\langle \xi, \alpha_g^{-1}(\widehat{x}(g))\eta\rangle &= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(E_r(\Lambda(a\delta_g)Id_H \otimes \lambda_g))\eta\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(E_r(\widetilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_e)))\eta\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(E_r(\Lambda(a\delta_e)))\eta\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(E_c(a\delta_e))\eta\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(a)\eta\rangle,
\end{aligned}
$$

mostrando a segunda igualdade. Agora temos os artifícios suficientes para mostrar a fidelidade de E_r.

Seja $x \in A \rtimes_{\alpha,r} G$ tal que $E_r(x^*x) = 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle x(\xi \otimes \delta_g), x(\xi \otimes \delta_g)\rangle &= \langle \xi \otimes \delta_g, x^*x(\xi \otimes \delta_g)\rangle \\
&= \langle \xi \otimes \delta_g, (x^*x(Id_H \otimes \lambda_g))(\xi \otimes \delta_e)\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(x^*x\widehat{(Id \otimes} \lambda_g)(g))\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(E_r(x^*x(Id \otimes \lambda_g)(Id \otimes \lambda_{g^{-1}})))\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \alpha_g^{-1}(E_r(x^*x))\xi\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Segue que $x(\xi \otimes \delta_g) = 0$ para todo $g \in G$ e $\xi \in H$. Isto implica que $x = 0$. Portanto, E_r é sempre fiel.

Há outras formas de construir as esperanças condicionais acima. Iremos agora dar uma ideia de como seria esta construção. Alguns resultados serão omitidos pois é feito de maneira análoga ao feito anteriormente. A próxima construção é feita via as *coações duais.* Como iremos fazer a construção nenhuma das propriedades gerais de coações serão utilizadas aqui, sem que seja mostrada junto da construção. Intrinsecamente iremos utilizar alguns resultados relacionados as funções chamadas em inglês de *slice maps.* Para mais informações sobre esse tipo de funções podem ser vistas em [4],[18] ou [5]. Um resultado importante que utilizaremos está enunciado abaixo.

Lema 3.18. *Seja $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo sobre uma C^*-álgebra B e C qualquer outra C^*-álgebra. Então a aplicação (slice map)* $\mathrm{Id} \otimes \varphi\colon C \otimes_{\min} B \to C$ *é uma aplicação linear positiva fiel.*

Demonstração. A prova pode ser vista em [4]. □

Um fato importante é que este fato é válido somente para o produto tensorial minimal. Para o produto tensorial maximal também existem este tipo de aplicações, porém nem sempre temos a fidelidade.

Considere $*-$homomorfismo $\rho : A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_\alpha G \otimes_{min} C^*(G)$ por $a\delta_s \mapsto a\delta_s \otimes \delta_s$. Observe que se A possui unidade temos o homomorfismo unital ρ. Vejamos que ρ é injetiva mostrando que ρ possui inversa à esquerda. Esta aplicação é geralmente chamada de *coação dual* na teoria de coações, veja [22]. Seja a representação trivial $\epsilon : C^*(G) \to \mathbb{C}$ dada por $\sum_{s\in G} a_s\delta_s \mapsto \sum_{s\in G} a_s$.

De acordo com a Lema 3.18, podemos considerar

$$Id_{A\rtimes_\alpha G} \otimes \epsilon : A \rtimes_\alpha G \otimes_{min} C^*(G) \to A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_\alpha G \otimes_{min} \mathbb{C}$$

$$a\delta_s \otimes b_t\delta_t \mapsto a\delta_s[\epsilon(b_t\delta_t)].$$

Vejamos que $(Id_{A\rtimes_\alpha G} \otimes \epsilon) \circ \rho = Id_{A\rtimes_\alpha G}$. Dado $a\delta_s \in A \rtimes_\alpha G$

qualquer, teremos

$$
\begin{aligned}
(Id_{A\rtimes_\alpha G}\otimes\epsilon)\circ\rho(a\delta_s) &= (Id_{A\rtimes_\alpha G}\epsilon)(a\delta_s\otimes_{min}\delta_s)\\
&= a\delta_s[\epsilon(\delta_s)]\\
&= a\delta_s 1_{\mathbb{C}}\\
&= a\delta_s\\
&= Id_{A\rtimes_\alpha G}(a\delta_s).
\end{aligned}
$$

Portanto ρ é injetiva.

Vamos construir $\rho_r : A\rtimes_{\alpha,r} G \to A\rtimes_{\alpha,r} G\otimes_{min} C^*_r(G)$ um $*-$homomorfismo injetivo de álgebras. Considerando A representada fielmente em H, podemos ver $A\rtimes_{\alpha,r} G\subseteq\mathbb{B}(H\otimes_{min} l^2(G))$ e $C^*_r(G)\subseteq\mathbb{B}(l^2(G))$, pelas construções feitas anteriormente. Pelas propriedades do produto tensorial minimal podemos ver $A\rtimes_{\alpha,r} G\otimes_{min} C^*_r(G)\subseteq\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G))$. De fato, basta considerar a aplicação que manda um tensor elementar $x\otimes y\in A\rtimes_{\alpha,r} G\otimes C^*_r(G)$ no operador $x\otimes_{op} y$ sobre $H\widehat{\otimes}l^2(G)$ definido por $(x\otimes_{op} y)(\xi\otimes_{min}\eta) = x(\xi)\otimes_{min} y(\eta)$ para todo $\xi\in H\otimes_{min} l^2(G)$ e $\eta\in l^2(G)$.

Vamos definir

$$
W : H\widehat{\otimes}l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G)\to H\widehat{\otimes}l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G)
$$

$$
h\otimes\delta_s\otimes\delta_t\mapsto h\otimes\tilde{w}(\delta_s\otimes\delta_t),
$$

onde $\tilde{w}$ é o operador sobre $l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G)$ definido na base canônica por $\tilde{w}(\delta_s\otimes\delta_t) = \delta_s\otimes\delta_{st}$ para todo $s,t\in G$.

Observe que $W\in\mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G))$ e é unitário, pois $\tilde{w}\in\mathbb{B}(l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G))$ é unitário já que leva a base ortonormal $(\delta_s\otimes\delta_t)_{s,t\in G}$ na base ortonormal $(\delta_s\otimes\delta_{st})_{s,t\in G}$.

Defina

$$\varpi_r : \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G)) \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G)\widehat{\otimes}l^2(G))$$

$$T \to W(T \otimes 1_{l^2(G)})W^*.$$

Observe que ϖ_r é um *-homomorfismo já que é dado como conjugação por um unitário. Também note que ϖ_r é injetivo pois $W(T \otimes 1)W^* = 0$ implica $T \otimes 1 = 0$ e assim $T = 0$.

Além disso, vendo $A \rtimes_{\alpha,r} G \subseteq \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$ pela representação regular, temos

$$\begin{aligned}
\varpi_r(\Lambda(a\delta_s))(h \otimes \delta_r \otimes \delta_t) &= W(\Lambda(a\delta_s) \otimes 1_{l^2(G)})W^*(h \otimes \delta_r \otimes \delta_t) \\
&= W(\Lambda(a\delta_s) \otimes 1_{l^2(G)})(h \otimes \delta_r \otimes \delta_{r^{-1}t}) \\
&= W(\alpha_{sr}^{-1}(a)h \otimes \delta_{sr} \otimes \delta_{r^{-1}t}) \\
&= \alpha_{sr}^{-1}(a)h \otimes \delta_{sr} \otimes \delta_{srr^{-1}t} \\
&= \alpha_{sr}^{-1}(a)h \otimes \delta_{sr} \otimes \delta_{st} \\
&= (\Lambda(a\delta_s) \otimes \delta_s)(h \otimes \delta_r \otimes \delta_t).
\end{aligned}$$

Assim, temos a existência de um $*-$homomorfismo $\rho_r : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A \rtimes_{\alpha,r} G \otimes_{min} C_r^*(G)$ injetivo de C^*-álgebras.

Definimos

$$E_r : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A$$

$$E_r(x) = (Id_{A\rtimes_{\alpha,r}G} \otimes_{min} \varphi_r)(\rho_r(x)),$$

onde $\varphi_r : C_r^*(G) \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x) = \langle x(\delta_e), \delta_e \rangle$ para todo $x \in C_r^*(G) \subseteq \mathbb{B}(l^2(G))$. Aqui o produto interno é linear na primeira entrada. Note que φ_r é um estado fiel, pois $\varphi(x^*x) = \langle x^*x(\delta_e), \delta_e \rangle = \langle x(\delta_e), x(\delta_e) \rangle \geq 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
E_r(a\delta_s) &= (Id_{A\rtimes_\alpha G} \otimes_{min} \varphi)(\rho(a\delta_s)) \\
&= (Id_{A\rtimes_\alpha G} \otimes_{min} \varphi)(a\delta_s \otimes_{min} \delta_s) \\
&= a\delta_s \otimes \varphi_r(\lambda(\delta_s)) \\
&= a\delta_{s,e}.
\end{aligned}$$

Observe que nossa esperança condicional construída via a coação dual coincidiu com a construção feita anteriormente. De maneira análoga prova-se que E_r é de fato uma esperança condicional. Como fizemos na construção anterior, para termos um estado sobre $C^*(G)$ vamos compor φ_r com a representação regular $\lambda : C^*(G) \to C^*_r(G)$. Ou seja, $\varphi = \varphi_r \circ \lambda$. Observe que $\varphi(\delta_s) = \varphi_r \circ \lambda(\delta_s) = \langle \delta_s(\delta_e), \delta_e \rangle = \delta_{s,e}$. A aplicação φ será fiel se o grupo G for mediável, pois nesse caso já vimos que λ seria injetiva.

Defina

$$E : A \rtimes_\alpha G \to A$$

$$E(a\delta_s) = (Id_{A\rtimes_\alpha G} \otimes \varphi)(\rho(a\delta_s)).$$

Analogamente, temos que E coincide com a esperança condicional E_c nos geradores. Prova-se que E é de fato uma esperança condicional.

Agora estamos caminhando para provar o teorema mais importante deste capítulo. Este resultado mostrará que se G é um grupo mediável, então os produtos cruzados cheio e reduzido são isomorfos.

Teorema 3.19. *Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico. Se G é um grupo mediável então $A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_{\alpha,r} G$.*

Demonstração. Por construção, é fácil ver que $E_c = E_r \circ \Lambda$ é fiel se e somente se Λ é injetivo e assim teremos um isomorfismo $A \rtimes_\alpha G \xrightarrow{\sim}$

$A \rtimes_{\alpha,\mathrm{r}} G$. Para verificar a afirmação acima, basta notar que

$$\ker(\Lambda) = \{x \in A \rtimes_\alpha G : E_c(x^*x) = 0\}.$$

Assim, precisamos apenas provar que E_c é fiel. Por outro lado, sabemos que E_c também se escreve como composição $(\mathrm{Id} \otimes \varphi) \circ \rho$, onde $\rho\colon A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_\alpha G \otimes_{\min} C^*(G)$ é um $*-$homomorfismo injetivo e $\varphi\colon C^*(G) \to \mathbb{C}$ denota o estado dado nos geradores por $\varphi(\delta_s) = \delta_{s,e}$.

Vimos que φ é fiel se e somente se G é mediável pois $\varphi = \varphi_r \circ \lambda$, onde $\varphi_r\colon C_r^*(G) \to \mathbb{C}$ é o estado fiel dado por $\varphi_r(x) = \langle x\delta_e|\delta_e\rangle$. Com a hipótese que G é mediável, então φ é fiel, e como ρ sempre é fiel, segue que a composição $E = (\mathrm{Id} \otimes \varphi) \circ \rho$ é fiel.

Sabemos que $\Lambda : A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ é uma aplicação sobrejetiva. Pelo feito acima podemos ver o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \rtimes_{\alpha,r} G \arrow[dr, "E_r"] & \\
A \rtimes_\alpha G \arrow[ur, "\Lambda"] \arrow[rr, "E_c"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Como E_c é fiel então Λ é injetiva, já que E_r é sempre fiel. De fato, seja $x \in A \rtimes_\alpha G$ tal que $\Lambda(x) = 0$, assim, $\Lambda(x^*x) = 0$. Temos, $0 = E_r(\Lambda(x^*x)) = E_c(x^*x)$ como E_c é fiel temos $x^*x = 0$, ou seja, $x = 0$. Portanto, Λ é injetivo.

Pelo Teorema do Isomorfismo temos o desejado. $\square$

Algumas decorrências diretas deste resultado são os exemplos de produtos cruzados reduzidos.

Exemplo 3.20. *(1) Se G é um grupo mediável, pelo Teorema 2.24, temos $C^*(G) \cong C_r^*(G)$. Assim, pelos exemplos 3.8 e 3.14, que nos* *diz que* $\mathbb{C} \rtimes_{\nu} G \cong C^*(G)$ *e* $\mathbb{C} \rtimes_{\nu,r} G \cong C^*_r(G)$*, sendo* ν *a ação trivial. Com isto,* $\mathbb{C} \rtimes_{\nu} G \cong \mathbb{C} \rtimes_{\nu,r} G$*.*

(2) Como todo grupo finito é mediável, temos $C(\mathbb{Z}_n) \rtimes_{\tau} \mathbb{Z}_n \cong M_n(\mathbb{C}) \cong C(\mathbb{Z}_n) \rtimes_{\tau,r} \mathbb{Z}_n$*, onde* $\tau_s(f)(t) = f(t-s)$ *para todo* $s, t \in G$ *e* $f \in C(\mathbb{Z}_n)$*. Ainda mais, se* G *é um grupo finito* G *qualquer com* $|G| = n$*, temos* $C(G) \rtimes_{\tau} G \cong C(G) \rtimes_{\tau,r} G \cong M_n(\mathbb{C})$*.*

(3) Por fim, com $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano e portanto mediável, segue que* $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\gamma_\theta} \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}) \rtimes_{\gamma_\theta,r} \mathbb{Z} \cong A_\theta$ *onde* $\gamma_\theta(f)(z) = f(e^{-2\pi i\theta}z)$ *é a ação de rotação.*

A recíproca do Teorema 3.19 não é verdadeira. Ou seja, pode acontecer que $A \rtimes_{\alpha} G \cong A \rtimes_{\alpha,r} G$ sem que G seja mediável. Como por exemplo $C(\partial\mathbb{F}_2) \rtimes_{\tau} \mathbb{F}_2 \cong C(\partial\mathbb{F}_2) \rtimes_{\tau,r} \mathbb{F}_2$, mas sabemos que $\mathbb{F}_2$ não é mediável. No próximo capítulo daremos mais detalhes sobre este exemplo e outra condição para que os produtos cruzados sejam isomorfos.

4 Ações Mediáveis

Neste capítulo estudamos ações mediáveis e suas implicações sobre produtos cruzados. Estudaremos uma outra forma do produto cruzado cheio e reduzido serem isomorfos. Os primeiros artigos a trabalhar com este tipo de ações foram [3] e [2].

Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico. Vamos definir um norma sobre $A \rtimes_{\alpha,alg} G$. Primeiramente, dados $S, T \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$ definimos:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : A \rtimes_{\alpha,alg} G \times A \rtimes_{\alpha,alg} G \to A$$

$$\langle S, T \rangle_2 = \sum_{g \in G} S(g)^* T(g).$$

Agora, definimos $\| \cdot \|_2 : A \rtimes_{\alpha,alg} G \to \mathbb{R}$ por

$$\|S\|_2 = \|\langle S, S \rangle_2\|_A^{1/2}.$$

Observe que vale a seguinte desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|\langle S, T \rangle_2\|_A \leq \|S\|_2 \|T\|_2,$$

pois

$$\|\langle S, T \rangle_2\|_A = \left\| \sum_{g \in G} S(g)^* T(g) \right\|_A$$

$$\le \left\| \sum_{g\in G} T^*(g)S(g)S^*(g)T(g) \right\|_A^{1/2}$$
$$\le \left\| \sum_{g\in G} S(g)^*S(g) \right\|_A^{1/2} \left\| \sum_{g\in G} T(g)^*T(g) \right\|_A^{1/2}$$
$$= \|\langle S,S\rangle_2\|_A^{1/2} \|\langle T,T\rangle_2\|_A^{1/2} = \|S\|_2 \|T\|_2.$$

Definição 4.1. *Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico com A unital. A ação α é* mediável *se existem aplicações de suporte finito $T_i : G \to A$ com $i \in I$ um conjunto dirigido, satisfazendo:*

(1) $T_i(g) \ge 0$ e $T_i(g) \in \mathcal{Z}(A)$ para todo $i \in I$ e $g \in G$, onde $\mathcal{Z}(A)$ é o centro de A, isto é, $\mathcal{Z}(A) = \{b \in A; ab = ba, \ \ \forall a \in A\}$;

(2) $\langle T_i, T_i\rangle_2 = \sum_{g\in G} T_i(g)^*T_i(g) = \sum_{g\in G} T_i(g)^2 = 1_A$ para todo $i \in I$;

(3) $\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2 \longrightarrow 0$ para todo $s \in G$, onde $\delta_s \in A \rtimes_{\alpha,alg} G$ é a função tal que $s \mapsto 1_A$ e $g \mapsto 0$ se $g \neq s$.

Os exemplos de ações mediáveis são um pouco mais complexos. Vejamos o exemplo trivial.

Exemplo 4.2. *Seja G um grupo finito, assim, $A = C_0(G)$ é uma C^*-álgebra unital. Considere a ação de translação à esquerda τ tal que $\tau_s(f)(t) = f(s^{-1}t)$.*

Defina $T_i : G \to C_0(G)$ a aplicação $g \mapsto \dfrac{1_A}{\sqrt{|G|}}$, onde $i \in I$ um conjunto dirigido. Facilmente temos que T_i satisfaz os itens (1) *e* (2) *da Definição 4.1. Para o item* (3) *basta ver que*

$$\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2^2 = \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\rangle$$
$$= \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle - \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, T_i\rangle - \langle T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle + \langle T_i, T_i\rangle$$
$$= 1_A - 1_A - 1_A + 1_A = 0.$$

Mais exemplos podem ser visto em [2]. Agora veremos uma proposição que nos ajudará a minimizar as contas desta seção.

Proposição 4.3. *Sejam A uma $G-C^*-$álgebra e $T : G \to A$ função de suporte finito tal que $0 \leq T(g) \in \mathcal{Z}(A)$ para todo $g \in G$ e $\sum_{g\in G} T(g)^2 = 1_A$. Então valem as seguintes propriedades:*

(i) $T *_\alpha T^*(s) = \sum_{p\in F\cap sF} T(p)\alpha_s(T(s^{-1}p))$, *onde F é o suporte de T;*

(ii) $\|1_A - T *_\alpha T^*(s)\|_A \leq \|T - 1_A\delta_s *_\alpha T\|_2$, *para todo $s \in G$.*

Demonstração. Seja $T = \sum_{g\in G} t_g\delta_g$. Como $T(s) \geq 0$ sabemos que $T(s) = T(s)^*$.

Primeiro façamos

$$\begin{aligned}
1_A\delta_s *_\alpha T(p) &= 1_A\delta_s *_\alpha \left(\sum_{g\in G} t_g\delta_g(p)\right) \\
&= \sum_{g\in G} 1_A\alpha_s(t_g)\delta_s\delta_g(p) \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_s(t_g)\delta_g(s^{-1}p) \\
&= \alpha_s(T(s^{-1}p)).
\end{aligned}$$

Assim, facilmente segue a afirmação (i). Para a afirmação (ii) temos

$$\begin{aligned}
1_A - T *_\alpha T^*(s) &= \sum_{p\in G} T(p)^2 - \sum_{p\in F\cap sF} T(p)\alpha_s(T(s^{-1}p)) \\
&= \sum_{p\in G} T(p)^*[T(p) - \alpha_s(T(s^{-1}p))] \\
&= \langle T, T - \delta_s *_\alpha T\rangle_2.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela hipótese que $\|T\|_2 = 1$

temos

$$\begin{aligned}\|1_A - T *_\alpha T^*(s)\| &= \|\langle T, T - \delta_s *_\alpha T\rangle_2\|_A \\ &\leq \|T\|_2 \|T - \delta_s *_\alpha T\|_2 \\ &= \|T - 1_A \delta_s *_\alpha T\|_2.\end{aligned}$$

Com isto, concluímos a afirmação (ii). □

Com esta simplificação acima vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.4. *Seja $\mathbb{F}_2$ o grupo livre gerado por $\{a, b\}$. Considere $\partial\mathbb{F}_2$ a fronteira do grupo livre, os elementos deste conjuntos são as palavras infinitas na forma reduzida geradas pelo alfabeto $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, isto é, $t \in \partial\mathbb{F}_2$ é escrito na forma reduzida como $t = x_1 x_2 \cdots$, onde $x_i \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ e $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$. Este conjunto possui uma topologia natural, oriunda da topologia produto, em que $\partial\mathbb{F}_2$ é compacto. Com isto, temos a C^*-álgebra $C(\partial\mathbb{F}_2)$ unital.*

Seja τ a ação de $\mathbb{F}_2$ sobre $C(\partial\mathbb{F}_2)$ a ação de translação à esquerda por concatenação, isto é, $\alpha_s(f(t)) = f(s^{-1}t)$ para todo $s \in \mathbb{F}_2$, $f \in C(\partial\mathbb{F}_2)$ e $t \in \partial\mathbb{F}_2$.

Dado $t \in \partial\mathbb{F}_2$, isto é, $t = t_1 t_2 \cdots$ sendo cada t_i uma potência de um elemento de $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, denotamos $t(k) = t_1 \cdots t_k$ e $t(0) = e$ para $k \in \mathbb{N}$. Defina

$$\begin{aligned}\mu_n : \partial\mathbb{F}_2 &\to Prob(\mathbb{F}_2) \\ t &\mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{t(k)}.\end{aligned}$$

Conseguimos ver que μ_n tem suporte finito para subconjuntos finitos de $\mathbb{F}_2$ e ainda, $\|\tau_s(\mu^t) - \mu^{s^{-1}t}\| \leq \dfrac{2|s|}{n}$, onde $\mu(t) = \mu^t$, $s \in \mathbb{F}_2$ e

$t \in \partial\mathbb{F}_2$. *Com isto, temos*

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{t\in\mathbb{F}_2}\|\tau_s(\mu^t)-\mu^{s^{-1}t}\|_1)=0.$$

A partir desta aplicação iremos definir uma função de suporte finito de $\mathbb{F}_2$ *para* $C(\partial\mathbb{F}_2)$, *para isto, defina* $S_n : \mathbb{F}_2 \to C(\partial\mathbb{F}_2)$ *por* $S_n(g)(t) = \mu_n^t(g)$. *Para cada* $t \in \partial\mathbb{F}_2$ *temos*

$$\sum_{g\in\mathbb{F}_2} S_n(g)(t) = \sum_{g\in\mathbb{F}_2}\mu_n^t(g) = \sum_{g\in\mathbb{F}_2}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{t(k)}(g) = 1$$

Seja $\tilde{T}_n(g) = \sqrt{S_n(g)}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle\tilde{T}_n,\tilde{T}_n\rangle_2 = \sum_{g\in\mathbb{F}_2}\tilde{T}_n(g)^*\tilde{T}_n(g) = \sum_{g\in\mathbb{F}_2}S_n(g) = 1_{C(X)}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}1\delta_s *_\tau \tilde{T}_n(g)(x) &= \tau_s(\tilde{T}_n(s^{-1}g))(x) = \tilde{T}_n(s^{-1}g)(s^{-1}x)\\ &= \sqrt{S_n(s^{-1}g)(s^{-1}x)} = \sqrt{\mu_n^{s^{-1}x}(s^{-1}g)}\\ &= \sqrt{\tau_s(\mu_n^{s^{-1}x})(g)}.\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade $(a-b)^2 \le |a^2-b^2|$ *para qualquer elemento positivo* a, b *temos,*

$$\begin{aligned}\|1_A\delta_s *_\tau \tilde{T}_n(g)-\tilde{T}_n\|_2^2 &= \sup_{x\in\partial\mathbb{F}_2}\left(\sum_{g\in\mathbb{F}_2}|\sqrt{\tau_s(\mu_n^{s^{-1}x})(g)}-\sqrt{\mu_n^x(g)}|^2\right)\\ &\le \sup_{x\in\partial\mathbb{F}_2}\left(\sum_{g\in\mathbb{F}_2}|\tau_s(\mu_n^{s^{-1}x})(g)-\mu_n^x(g)|\right)\\ &= \sup_{y\in\partial\mathbb{F}_2}\left(\sum_{g\in\mathbb{F}_2}|\tau_s(\mu_n^{y})(g)-\mu_n^{s^{-1}y}(g)|\right)\\ &= \sup_{y\in\partial\mathbb{F}_2}\|\tau_s(\mu_n^y)-\mu_n^{s^{-1}y}\|_1 \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Com isto provamos que $\tilde{T}_n$ satisfaz as condições $(i), (ii)$ e (iii) da Definição 4.1 porém não conseguimos garantir que $\tilde{T}_n$ tem suporte finito. Seja $F_n \subset F_{n+1}$ uma sequência de subconjuntos finitos de $\mathbb{F}_2$ tal que $\cup F_n = \mathbb{F}_2$. Por fim, defina

$$T_n(g) = \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{g \in F_n} \tilde{T}_n(g)^2}} \tilde{T}_n(g).$$

Analogamente, $T_n : \mathbb{F}_2 \to C(\partial \mathbb{F}_2)$ é uma função que satisfaz os 3 itens do definição de ações mediáveis. Portanto, τ_s é uma ação mediável de $\mathbb{F}_2$ sobre $C(\partial \mathbb{F}_2)$.

Agora demonstraremos um lema técnico que nos ajudará para provarmos um resultado preliminar para o Teorema 4.8.

Lema 4.5. *Sejam A uma C^*-álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Todo elemento positivo em $M_n(A)$ é a soma de n elementos na forma $[a_i^* a_j]_{i,j=1}^n$, onde $a_{i,j} = a_i^* a_j$ são as entradas das matrizes.*

Demonstração. Seja $x \in M_n(A)$ um elemento positivo, ou seja, $x = a^* a$, onde $a \in M_n(A)$. Escreva

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como consequência,

$$a^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^* + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^*.$$

Denotando por

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \cdots, A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Temos que $A_j^* A_i = 0$ para todo $i \neq j$. Logo, $a^*a = A_1^*A_1 + A_2^*A_2 + \cdots + A_n^*A_n$. Portanto, $[x_{ij}] = \sum\limits_{i,j}^{n} [a_i^* a_j]$.

$\square$

Lema 4.6. *Seja A uma $G - C^*-$álgebra com a ação α. Se $F \subset G$ é um subconjunto finito com n elementos então a aplicação $\mu : A \otimes_{min} M_n(\mathbb{C}) \to A \rtimes_{\alpha,alg} G \subset A \rtimes_{\alpha,r} G$ definida por $\mu(a \otimes e_{p,q}) = \alpha_p(a)\delta_{pq^{-1}}$ é completamente positiva.*

Demonstração. Dadas duas $C*-$álgebras A, B, lembre que uma aplicação linear $\varphi : A \to B$ é completamente positiva se $\varphi_F : \mathbb{M}_n(A) \to \mathbb{M}_n(B)$ dada por $\varphi_n([a_{i,j}]_{i,j=1}^n) = [\varphi(a_{i,j})]_{i,j=1}^n$, assim, φ_F é uma aplicação positiva. Como $\mathbb{M}_n(A) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A$, podemos ver $\varphi_n : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} B$, e desta forma, $\varphi_n = \varphi \otimes Id_{\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}$.

Tomando $B := M_n(C)$ e lembrando do Lema 3.16 e que o produto tensorial é associativo, temos $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} (A \rtimes_{\alpha,r} G) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A) \rtimes_{Id_{\mathbb{M}_n(\mathbb{C})} \otimes \alpha, r} G$ e $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} (A \otimes_{min} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min}$

$A) \otimes_{min} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Com estas informações temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes (A \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{A}} & (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes A) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\
\downarrow{\scriptstyle Id\otimes\mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} \\
\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes (A \rtimes_{\alpha,r} G) & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{F}} & (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes A) \rtimes_{Id\otimes\alpha,r} G,
\end{array}$$

onde $A : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} (A \otimes_{min} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \to (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A) \otimes_{min} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é a associatividade do produto tensorial e $\mathcal{F} : (B \otimes_{min} A) \rtimes_{Id_B \otimes \alpha,r} G \to B \otimes_{min} (A \rtimes_{\alpha,r} G)$ foi definida no Lema 3.16, sendo $\mathcal{F}((b \otimes a)\delta_s) = b \otimes a\delta_s$. Observe que $\mu_1 : (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A) \otimes_{min} \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} (A \rtimes_{\alpha,r} G)$ é a aplicação μ para a álgebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} A$.

É simples verificar que o diagrama acima é comutativo. De fato, dados $e_{p,q} \otimes (a \otimes e_{r,s}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes (A \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ temos

$$\mu \circ \mathcal{A}(e_{p,q} \otimes (a \otimes e_{r,s})) = \mu((e_{p,q} \otimes a) \otimes e_{r,s}) = (Id \otimes \alpha_r)((e_{p,q} \otimes a)\delta_{rs^{-1}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \circ (Id \otimes \mu)(e_{p,q} \otimes (a \otimes e_{r,s})) = \mathcal{F}(e_{p,q} \otimes (\alpha_r(a)\delta_{rs^{-1}})) &= (e_{p,q} \otimes \alpha_r(a))\delta_{rs^{-1}} \\
&= (Id \otimes \alpha_r)(e_{p,q} \otimes a)\delta_{rs^{-1}},
\end{aligned}$$

ou seja, o diagrama é comutativo.

Agora precisamos mostrar que μ_n é positiva, mas pelo diagrama e com $\mu_n = \mu \otimes Id_{\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}$, basta vermos que μ é positiva. Pelo Lema 4.5, basta verificarmos que μ é positiva para elementos da forma $\sum\limits_{p,q \in G} a_p^* a_q \otimes e_{p,q} \in A \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Portanto,

$$\mu\Bigg(\sum_{p,q \in G} a_p^* a_q \otimes e_{p,q} \Bigg) = \sum_{p,q \in G} \alpha_p(a_p^* a_q)\delta_{pq^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p\in G} \alpha_p(a_p^*)\delta_{p^{-1}} \sum_{q\in G} \alpha_p(a_p^* a_q)\delta_{pq^{-1}} \\
&= \sum_{p\in G} \alpha_p(a_p^*)\alpha_p(a_q)\delta_{pq^{-1}} \\
&= \Big(\sum_{p\in G} \alpha_p(a_p^*)\delta_p\Big)\Big(\sum_{q\in G} a_q\delta_{q^{-1}}\Big) \\
&= \Big(\sum_{p\in G} a_p\delta_{p^{-1}}\Big)^*\Big(\sum_{p\in G} a_p\delta_{p^{-1}}\Big).
\end{aligned}
$$

Com isto, vemos que μ é positiva, portanto é uma aplicação completamente positiva. □

Proposição 4.7. *Sejam A uma $G - C^*-$álgebra unital e $T : G \to A$ uma função de suporte finito F tal que $0 \leq T(g) \in \mathcal{Z}(A)$ para todo $g \in G$ e $\sum\limits_{g\in G} T(g)^2 = 1_A$. Então existem uma aplicação completamente positiva unital $\varphi : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C})$ e uma aplicação completamente positiva unital $\psi : A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ tal que $\psi \circ \varphi(a\delta_s) = (T *_\alpha T^*(s))(a\delta_s)$ para todo $s \in G$ e $a \in A$.*

Demonstração. Seja $(e_{p,q})$ a base canônica de $M_{|F|}(\mathbb{C})$ consistindo das matrizes $e_{p,q}$ que valem 1 na entrada p, q e zero nas demais entradas.

Pelo Teorema 3.15, sabemos que $\varphi : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C})$ definida nos elementos geradores $a_s\delta_s$ de $A \rtimes_{\alpha,r} G$ por $\varphi(a_s\delta_s) = \sum\limits_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a_s) \otimes e_{p,s^{-1}p}$ é uma aplicação completamente positiva, pois

$$
\begin{aligned}
(1_H \otimes P_F)\tilde{\pi}(a)(1_H \otimes \lambda_s)(1_H \otimes P_F) &= \varphi(a_s\delta_s) \\
&= \sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a_s) \otimes e_{p,s^{-1}p} \in A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

Como P_F é uma projeção, φ é uma aplicação completamente positiva. Além disso, φ é unital.

Defina $V = \sum\limits_{p\in F} \alpha_p^{-1}(T(p)) \otimes e_{p,p}$. Observe que

$$\begin{aligned} V^* &= \left(\sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(T(p)) \otimes e_{p,p} \right)^* \\ &= \sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(T(p)^*) \otimes e_{p,p} \\ &= \sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(T(p)) \otimes e_{p,p} = V, \end{aligned}$$

ou seja, $V = V^*$. Seja $Ad_V : A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \to A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C})$ a compressão por V, isto é,

$$K \in A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \mapsto VKV^* = VKV \in A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}).$$

Logo, a compressão Ad_V será uma aplicação completamente positiva. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} &Ad_V(\varphi(a\delta_s)) = V\varphi(a\delta_s)V = \\ &= \left(\sum_{p\in F} \alpha_p^{-1}(T(p)) \otimes e_{p,p} \right) \left(\sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,s^{-1}p} \right) V \\ &= \left(\sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(T(p))\alpha_p^{-1}(a) \otimes e_{p,p}e_{p,s^{-1}p} \right) V \\ &= \left(\sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(T(p)a) \otimes e_{p,s^{-1}p} \right) V \\ &= \sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(T(p)a)\alpha_{s^{-1}p}^{-1}(T(s^{-1})) \otimes e_{p,s^{-1}p}(e_{s^{-1}p,s^{-1}p}) \\ &= \sum_{p\in F\cap sF} \alpha_p^{-1}(T(p)a)\alpha_{s^{-1}p}^{-1}(T(s^{-1}p)) \otimes e_{p,s^{-1}p}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.6, a aplicação

$$\mu : A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \to A \rtimes_{\alpha,r} G$$

$$a \otimes e_{p,q} \mapsto \alpha_p(a)\delta_{pq^{-1}}$$

é completamente positiva. Mais ainda, μ é unital, pois $\mu(1_A \otimes e_{p,p}) = \alpha_p(1_A)\delta_{pp^{-1}} = 1_A\delta_e$. Assim, podemos definir outra aplicação completamente positiva unital $\psi : A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ por composição de μ e Ad_V,

$$\psi : A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \xrightarrow{Ad_V} A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mu} A \rtimes_{\alpha,r} G.$$

Isto é, $\psi(a \otimes e_{p,q}) = \mu(V(a \otimes e_{p,q})V)$, ou seja, $\psi = \mu \circ Ad_V$.

Por fim, seja $T(s) \in \mathcal{Z}(A)$ para todo $s \in G$ temos

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(a\delta_s) &= \mu \circ Ad_V(\varphi(a\delta_s)) \\
&= \mu\Bigg(\sum_{p \in F \cap sF} \alpha_p^{-1}(T(p)a)\alpha_{s^{-1}p}^{-1}(T(s^{-1})) \otimes e_{p,s^{-1}p}\Bigg) \\
&= \sum_{p \in F \cap sF} \alpha_p\Bigg(\alpha_p^{-1}(T(p)a)\alpha_{s^{-1}p}^{-1}(T(s^{-1}p))\Bigg)\delta_{pp^{-1}s} \\
&= \sum_{p \in F \cap sF} \alpha_p\Bigg(\alpha_p^{-1}(T(p)a)\Bigg)\alpha_p\Bigg(\alpha_{p^{-1}s}(T(s^{-1}p))\Bigg)\delta_s \\
&= \sum_{p \in F \cap sF} \alpha_{pp^{-1}}(T(p)a)\alpha_{pp^{-1}s}(T(s^{-1}p))\Bigg)\delta_s.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 4.3,

$$\psi \circ \varphi(a\delta_s) = \sum_{p \in F \cap sF} T(p)\alpha_s(T(s^{-1}p))a\delta_s = (T *_\alpha T^*(s))(a\delta_s).$$

Para vermos que é unital, veja que

$$\psi \circ \varphi(1_A\delta_e) = \sum_{p \in F \cap eF} T(p)\alpha_e(T(e^{-1}p))1_A\delta_e = \sum_{p \in F} T(p)^*(T(p)) = 1_A.$$

Por construção temos o requerido.

□

Agora temos os artifícios suficientes para provar o resultado mais importante deste capítulo.

Teorema 4.8. *Se α é uma ação mediável de G sobre A então $A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_{\alpha,r} G$.*

Demonstração. Para mostrar este fato, basta ver que o homomorfismo canônico $\pi : A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ é injetor, pois já sabemos que π é sobrejetor. Para isto, é suficiente mostrar que existe uma net de aplicações completamente positivas e unitais $\Psi_i : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A \rtimes_\alpha G$ tal que $\|S - \Psi_i \circ \pi(S)\|_u \longrightarrow 0$ para todo $S \in A \rtimes_{\alpha,alg} G \subset A \rtimes_\alpha G$.

Como α é uma ação mediável, existem $T_i : F_i \subset G \to A$ aplicações de suporte finito F_i. Defina $\Psi_i : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A \rtimes_\alpha G$ por $\Psi_i = \psi_i \circ \varphi_i$, onde $\varphi_i : A \rtimes_{\alpha,r} G \to A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C})$ e $\psi_i : A \otimes_{min} \mathbb{M}_F(\mathbb{C}) \to A \rtimes_\alpha G$ são aplicações completamente positivas unitais definidas na proposição anterior. Além disso, Ψ_i é uma aplicação completamente positiva e unital e

$$\Psi_i(a\delta_s) = \psi_i \circ \varphi_i(a\delta_s) = (T_i *_\alpha T_i^*(s))(a\delta_s).$$

Assim, dado $S \in A \rtimes_{\alpha,alg} G \subset A \rtimes_\alpha G$, tal que $S = \sum\limits_{s \in G} a_s \delta_s$, temos

$$\begin{aligned}
\|S - \Psi_i \circ \pi(S)\|_u &= \left\| \sum_{s \in G} a_s\delta_s - \Psi_i \circ \pi\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)\right\|_u \\
&= \left\| \sum_{s \in G} a_s\delta_s - (T_i *_\alpha T_i^*(s))\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)\right\|_u \\
&= \left\| [1_A - (T_i *_\alpha T_i^*(s))]\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right)\right\|_u \\
&\leq \|1_A - (T_i *_\alpha T_i^*(s))\|_A \left\| \sum_{s\in G} a_s\delta_s\right\|_u \\
&\leq \|T_i - \delta_s *_\alpha T_i\|_2 \left\| \sum_{s\in G} a_s\delta_s\right\|_u \xrightarrow{i} 0.
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. $\square$

Do Exemplo 4.2, temos para qualquer grupo finito G, que $C_0(G) \rtimes_\tau G \cong C_0(G) \rtimes_{\tau,r} G$.

A recíproca do Teorema 4.8 é um problema em aberto, porém existe uma resposta parcial para este problema. Esta provado em [16], que vale a recíproca se $A = C_0(X)$ é comutativa e G um grupo *exato*. Um grupo G é *exato* se $C_r^*(G)$ é exata. Por fim, um C^*-álgebra A é *exata* se para todo sequência exata de C^*-álgebras $0 \to B \to C \to D \to 0$ a sequência $0 \to B \otimes_{min} A \to C \otimes_{min} A \to D \otimes_{min} A \to 0$ for exata. Muitas equivalências sobre a exatidão de um grupo podem ser vistas no capítulo 5 de [5], como o grupo G é exato se e somente se a ação de translação τ de G sobre $l^\infty(G)$ é mediável. Ainda, todo grupo mediável é exato, porém $\mathbb{F}_2$ é um grupo exato e não mediável. Existem grupos não exatos, porém este caso são mais complexos, como os "Gromov's Monster Groups".

5 *Ações Parciais e Mediabilidade*

Neste capítulo introduziremos ações parciais e construir os produtos cruzados associados a tais ações, que chamaremos de produto cruzado parcial cheio e reduzido, que são C^*-álgebras. Além disso, estes objetos irão generalizar os produtos cruzados vistos anteriormente. Vamos definir certas propriedades de aproximação de ações parciais e mostrar que os produtos cruzados cheios e reduzidos são isomorfos caso esta propriedade seja satisfeita. Aqui, usamos as ideias de [12], porém nos restringimos aos produtos cruzados parciais.

5.1 Ações Parciais

Nesta seção iremos definir ações parciais sobre C^*-álgebras. As ações parciais generalizam a noção de ações que vimos anteriormente, as quais chamaremos de *ações globais* daqui para frente.

Definição 5.1. *Sejam G um grupo(discreto) e A uma C^*-álgebra. Uma* ação parcial *de G sobre A é um par $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$, onde cada D_g são ideais bilaterais fechados de A e $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ são $*-$isomorfismos de C^*-álgebra que satisfazem:*

(1) $D_e = A$;

(2) $\theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}g^{-1}} = D_{(gh)^{-1}}$*, para todo* $g, h \in G$*;*

(3) $\theta_g \circ \theta_h(a) = \theta_{gh}(a)$*, para todo* $a \in \theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$ *e todo* $g, h \in G$*.*

Por simplicidade, denotaremos a ação parcial $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ apenas por θ. Observe que, se $D_g = A$ para todo $g \in G$, dizemos que a ação é global.

Os item (1) e (3) implicam que α_e é um automorfismo idempotente, ou seja, $\alpha_e \circ \alpha_e = \alpha_e$, donde segue que $\alpha_e = id_A$.

Ainda mais, podemos mostrar que $\theta_h^{-1} = \theta_{h^{-1}}$ para todo $h \in G$. De fato, tomando $g = h^{-1}$ no item (3), temos $\theta_{h^{-1}} \circ \theta_h(a) = \theta_{h^{-1}h}(a)$ para todo $a \in \theta_h^{-1}(D_h \cap D_h) = D_{(h^{-1}h)^{-1}} = D_e = A$. Ou seja, $\theta_{h^{-1}} \circ \theta_h(a) = \theta_e(a) = 1_A$. Analogamente $\theta_h \circ \theta_{h^{-1}}(a) = 1_A$. Isto é, $\theta_h^{-1} = \theta_{h^{-1}}$.

Não é tão simples construir exemplos de ações parciais. Porém pode-se obter uma classe grande de exemplos de ações parciais à partir de restrições de ações globais.

Exemplo 5.2. *Sejam* A *uma* $G-C^*-$*álgebra, sendo a ação denotada por* α*, e* $I \subseteq A$ *um ideal bilateral fechado. Então* α *se restringe à uma ação parcial de* G *sobre* I *como segue.*

Considere, para cada $g \in G$*,* $D_g = \alpha_g(I) \cap I$*. Vamos ver que* $\theta_g = \alpha_g\Big|_{D_{g^{-1}}}$ *é uma ação parcial. Note que* α_g *leva* $D_{g^{-1}}$ *sobre* D_g *e assim sua restrição define um isomorfismo* $D_{g^{-1}} \xrightarrow{\sim} D_g$*.*

Com efeito, cada D_g *é um ideal de* I *pois* $\alpha_g(I)$ *e* I *são ideais. Tome* $a \in D_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}(I) \cap I$*. Assim,* $\theta_g(a) = \alpha_g\Big|_{D_{g^{-1}}}(a) = \alpha_g(a)$*.*

Como α *é uma ação, seguem todas as propriedades de ação parcial.*

Agora que sabemos o que é uma ação parcial, já podemos definir um C^*-sistema dinâmico parcial.

Definição 5.3. *Sejam G um grupo, A uma C^*-álgebra e θ uma ação parcial de G em A. Um C^*-sistema dinâmico parcial é a tripla ordenada (A, G, θ).*

Temos uma condição equivalente ao item (2) da Definição 5.1 que veremos agora.

Proposição 5.4. *A condição* (2) *da Definição 5.1 é equivalente à*

$$(2') \quad \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

Demonstração. Suponha que $(2')$ seja válida, então fazendo $g = i^{-1}$ e $h = j^{-1}$, temos

$$\theta_{i^{-1}}(D_i \cap D_{j^{-1}}) = D_{i^{-1}} \cap D_{i^{-1}j^{-1}} = D_{i^{-1}} \cap D_{(ji)^{-1}} \subseteq D_{(ji)^{-1}}.$$

Agora, suponha que (2) é válido, tome $a \in D_g \cap D_{gh}$. Assim $\theta_{g^{-1}}(a) \in \theta_g^{-1}(D_g \cap D_{gh}) \subseteq D_{([gh]^{-1}g)^{-1}} = D_{(h^{-1}g^{-1}g)^{-1}} = D_h$ e como $\theta_{g^{-1}} : D_g \to D_{g^{-1}}$, temos que $\theta_{g^{-1}}(a) \in D_{g^{-1}}$. Portanto, $\theta_{g^{-1}}(a) \in D_{g^{-1}} \cap D_h$, ou seja,

$$\theta_{g^{-1}}(D_g \cap D_{gh}) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_h.$$

Fazendo $g = i^{-1}$, temos $\theta_i(D_{i^{-1}} \cap D_{i^{-1}h}) \subseteq D_i \cap D_h$. Por fim, substituindo $i^{-1}h = j$ temos $\theta_i(D_{i^{-1}} \cap D_j) \subseteq D_i \cap D_{(ij)}$.

Por outro lado, observe que $\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)) = a$, isto é, $D_g \cap D_{gh} \subseteq \theta_g(D_{g^{-1}} \cup D_h)$.

Portanto, temos que (2) é equivalente a $(2')$. $\square$

5.2 Produto Cruzado Parcial Algébrico e seus C^*-Completamentos

Agora vamos construir o produto cruzado parcial algébrico, as ideias aqui serão análogas as utilizadas anteriormente, porém agora iremos agir com a ação parcial de um grupo G em uma C^*-álgebra A. Depois disso, vamos completar o produto cruzado parcial algébrico afim de obter uma C^*-álgebra.

Dado um C^*-sistema dinâmico parcial (A, G, θ). Lembre que $C_c(G, A)$ denota o espaço vetorial das funções de suporte finito $G \to A$, e que este espaço é gerado linearmente pelas funções $a\delta_g$ com $a \in A$ e $g \in G$.

Considere agora $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ o subespaço de $C_c(G, A)$ gerado por somas finitas de funções da forma $a\delta_g$ com $g \in G$ e $a \in D_g$, isto é, $A \rtimes^p_{\theta,alg} G = \left\{ \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g ; a_g \in D_g \right\}$. Vamos agora definir novas operações em $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$. Dados $a_g \in D_g$, $b_h \in D_h$ e $c \in \mathbb{C}$ sendo $g, h \in G$. Vamos definir a multiplicação nos geradores de $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$, estabeleça

$$(a_g\delta_g) *_\theta (b_h\delta_h) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}.$$

Claramente podemos calcular $\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)$, pois $\theta_{g^{-1}}(a_g) \in D_{g^{-1}}$ e $b_h \in D_h$. Portanto, $\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$. Por fim, $\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h) \in D_g \cap D_{gh}$.

Agora estendemos linearmente a multiplicação definida acima nos geradores, ou seja, dados $a, b \in W$ tal que $a = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$ e $b = \sum\limits_{h\in G} b_h\delta_h$, temos

$$
\begin{aligned}
a *_\theta b &= \Big(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big) *_\theta \Big(\sum_{h\in G} b_h\delta_h\Big)\\
&= \Big(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big)\Big(\sum_{h\in G} b_h\delta_h\Big)\\
&= \sum_{g,h\in G} a_g\delta_g *_\theta b_h\delta_h\\
&= \sum_{g,h\in G} \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{k=gh} \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_{g^{-1}k})\delta_k\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_{g^{-1}h})\delta_h\\
&= \sum_{g\in G}\Big(\sum_{h\in G} \theta_h(\theta_{h^{-1}}(a_h)b_{h^{-1}g})\Big)\delta_g.
\end{aligned}
$$

O *produto cruzado parcial algébrico* de um C^*-sistema dinâmico parcial (A, G, θ) é o espaço $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ munido das operações definidas acima. Já denotamos este conjunto por $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$.

Já foi provado em [12] que $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ é uma álgebra. O maior problema de demonstrar este fato, é mostrar que o produto definido acima é associativo. Vamos demonstrar a associatividade do produto cruzado em seguida. Para o leitor que não está familiarizado com álgebras de multiplicadores, aconselha-se ler o Apêndice B sobre o assunto. Parte dos resultados que utilizaremos na próxima demonstração está indicada no apêndice.

Proposição 5.5. *Sejam (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial, sendo*

$$\theta = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}).$$

O produto cruzado parcial algébrico $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ é associativo.

Demonstração. Sejam $a_r \in D_r$, $b_s \in D_s$ e $c_t \in D_t$, sendo r, s e $t \in G$. Como os elementos de $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ são escritos na forma $\sum\limits_{r\in G} a_r\delta_r$, pela linearidade precisamos mostrar apenas que

$$(a_r\delta_r b_s\delta_s)c_t\delta_t = a_r\delta_r(b_s\delta_s c_t\delta_t). \tag{5.1}$$

Vamos calcular o lado esquerdo da Equação 5.1.

$$\begin{aligned}(a_r\delta_r b_s\delta_s)c_t\delta_t &= [\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s)\delta_{rs}]c_t\delta_t \\ &= \theta_{rs}\Big(\theta_{(rs)^{-1}}\big(\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s\big)c_t)\Big)\delta_{rst}.\end{aligned}$$

Observe que $\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s \in D_{r^{-1}} \cap D_s$ pela proposição 5.4, temos $\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s) \in D_r \cap D_{rs}$.

Assim,

$$\theta_{(rs)^{-1}}\big(\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s\big) \in \theta_{(rs)^{-1}}\big(D_{rs} \cap D_r\big) = D_{(rs)^{-1}} \cap D_s.$$

Pelo item (3) da Definição 5.1, temos

$$\begin{aligned}\theta_{(rs)^{-1}}\big(\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s\big) &= \theta_{s^{-1}r^{-1}}\big(\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s\big) \\ &= \theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}\big(\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s\big)) \\ &= \theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s).\end{aligned}$$

Agora, observe que $\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s \in D_{r^{-1}} \cap D_s$, onde $\theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s)$ $\in \theta_{s^{-1}}(D_{r^{-1}} \cap D_s) \subseteq D_{s^{-1}} \cap D_{(rs)^{-1}}$.

Temos,

$$\begin{aligned}(a_r\delta_r b_s\delta_s)c_t\delta_t &= \theta_{rs}\Big(\theta_{(rs)^{-1}}\big(\theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s\big)c_t\Big)\delta_{rst} \\ &= \theta_{rs}\Big(\theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s)\big)c_t\Big)\delta_{rst}\end{aligned}$$

$$= \theta_r(\theta_s\Big(\theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s)\big)c_t\Big))\delta_{rst}.$$

Calculando o outro lado da equação 5.1,

$$\begin{aligned} a_r\delta_r(b_s\delta_s c_t\delta_t) &= a_r\delta_r(\theta_s(\theta_{s^{-1}}(b_s)c_t))\delta_{st} \\ &= \theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)[\theta_s(\theta_{s^{-1}}(b_s)c_t]))\delta_{rst}. \end{aligned}$$

Assim, comparando ambos lados da equação

$$\theta_r(\theta_s\Big((\theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s)c_t)\Big))\delta_{rst} = \theta_r(\theta_{r^{-1}}(a_r)\theta_s(\theta_{s^{-1}}(b_s)c_t))\delta_{rst}.$$

Como cada θ_r é um isomorfismo, para que a equação 5.1 seja válida, é o mesmo que

$$\theta_s\Big(\theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(a_r)b_s)\big)c_t\Big) = \theta_{r^{-1}}(a_r)\theta_s(\theta_{s^{-1}}(b_s)c_t).$$

Além disso, $\theta_{r^{-1}} : D_r \to D_{r^{-1}}$ é um isomorfismo, assim, $\theta_{r^{-1}}(a_r) = a_{r^{-1}}$. Substituindo na equação

$$\theta_s\Big(\theta_{s^{-1}}(a_{r^{-1}}b_s)\big)c_t\Big) = a_{r^{-1}}[\theta_s(\theta_{s^{-1}}(b_s)c_t]),$$

sendo $a_{r^{-1}} \in D_{r^{-1}}$, $b_s \in D_s$ e $c_t \in D_t$, para r, s e $t \in G$ quaisquer.

Tome, em particular, $e = r = t$ e portanto $D_r = D_t = A$. Logo, $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ será associativo se

$$\theta_s\Big(\theta_{s^{-1}}(ab_s)\big)c\Big) = a[\theta_s(\theta_{s^{-1}}(b_s)c)], \tag{5.2}$$

sendo $a, c \in A$ e $b_s \in D_s$, para $s \in G$ quaisquer.

A equação acima é o mesmo que dizer que

$$(\theta_s \circ R_c \circ \theta_{s^{-1}}) \circ L_a(b_t) = L_a \circ (\theta_s \circ R_c \circ \theta_{s^{-1}}),$$

onde L_a é o multiplicador à esquerda de D_s e R_c o multiplicador à direita de $D_{s^{-1}}$.

Pelo Lema B.7, $(\theta_s \circ R_c \circ \theta_{s^{-1}})$ é um multiplicador a direita de $D_{s^{-1}}$.

Como $D_{s^{-1}}$ é uma C^*-subálgebra, em particular é uma C^*-álgebra, pela proposição B.5 que toda C^*-álgebra é $(L,R)-$associativa. Assim a Equação 5.2 é válida. Portanto, o produto cruzado parcial algébrico $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ é associativo. $\square$

Considere (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial, queremos que os completamentos de $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ tenha também a mesma estrutura que A, ou seja, uma C^*-álgebra. Para isto, precisamos que $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ possua uma involução e uma C^*-norma satisfazendo a identidade C^* no completamento. Defina

$$* : A \rtimes^p_{\theta,alg} G \to A \rtimes^p_{\theta,alg} G$$

$$a_g\delta_g \mapsto \theta_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}.$$

Sejam $c \in \mathbb{C}$,$a_g, b_g \in D_g$ e $b_h \in D_h$, com $h, g \in G$ arbitrários. Temos que

$$\begin{aligned}
[(ca_g + b_g)\delta_g]^* &= \theta_{g^{-1}}(ca_g + b_g\delta_g)\delta_{g^{-1}} \\
&= [\overline{c}\theta_{g^{-1}}(a_g) + \theta_{g^{-1}}(b_g\delta_g)]\delta_{g^{-1}} \\
&= \overline{c}[a_g\delta_g]^* + [b_g\delta_g]^*
\end{aligned}$$

e

$$[(a_g\delta_g)^*]^* = [\theta_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}]^*$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta_g([\theta_{g^{-1}}(a_g^*)]^*)\delta_g \\
&= \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g))\delta_g \\
&= a_g\delta_g.
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
[(a_g\delta_g)(b_h\delta_h)]^* &= [\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}]^* \\
&= \theta_{(gh)^{-1}}([\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)]^*)\delta_{(gh)^{-1}} \\
&= \theta_{(gh)^{-1}}(\theta_g(b_h^*(\theta_{g^{-1}}(a_g))^*))\delta_{(gh)^{-1}} \\
&= \theta_{h^{-1}g^{-1}}(\theta_g(b_h^*(\theta_{g^{-1}}(a_g))^*))\delta_{(gh)^{-1}} \\
&= \theta_{h^{-1}}(b_h^*(\theta_{g^{-1}}(a_g))^*)\delta_{(gh)^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(b_h\delta_h)^*(a_g\delta_g)^* &= (\theta_{h^{-1}}(b_h^*)\delta_{h^{-1}})(\theta_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}) \\
&= \theta_{h^{-1}}(\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b_h^*)\theta_{g^{-1}}(a_g^*)))\delta_{h^{-1}g^{-1}} \\
&= \theta_{h^{-1}}(b_h^*(\theta_{g^{-1}}(a_g))^*)\delta_{(gh)^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que a operação definida acima é uma involução sobre $A \rtimes_{\theta,alg}^{p} G$, ou seja, esta álgebra é uma $*-$álgebra.

Analogamente, como vimos no produto cruzado para ações globais, dado (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial gostaríamos de uma inclusão que $A \subseteq A \rtimes_{\theta,alg}^{p} G$. Para isto basta consideramos que a aplicação

$$
\begin{aligned}
\iota : A &\to A \rtimes_{\theta,alg}^{p} G \\
a &\mapsto a\delta_e.
\end{aligned}
$$

é um homomorfismo injetor de álgebras. Ainda mais, ι é uma $*-$homomorfismo injetor. Dados $a, b \in A$ e $z \in \mathbb{C}$

$$\iota(za+b) = (za+b)\delta_e = za\delta_e + b\delta_e = z\iota(A) + \iota(b)$$

e

$$\iota(ab) = ab\delta_e = \theta_e(\theta_{e^{-1}}(a)b)\delta_{ee} = a\delta_e b\delta_e = \iota(a)\iota(b).$$

Para a injetividade, suponha que $\iota(a) = 0$, isto é, $a\delta_e = 0$. Isto ocorre, se e somente se, $a = 0$. Além disso, $\iota(a^*) = a^*\delta_e = \theta_{e^{-1}}(a^*)\delta_{e^{-1}} = (a\delta_e)^* = \iota(a)^*$. Portanto, ι é um $*-$homomorfismo injetivo.

Vamos usar a inclusão ι para identificar A como uma subálgebra de $A \rtimes^p_{\alpha,alg} G$, ou seja, escreveremos $A = A\delta_e$.

Proposição 5.6. *Seja (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial. Se p é uma C^*-seminorma sobre $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ então para todo $a = \sum_{s\in G} a_s\delta_s \in A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ temos*

$$p(a) \leq \sum_{s\in G} \|a_s\|_A.$$

Demonstração. Primeiramente vamos considerar os geradores $a_s\delta_s$ e calcular:

$$\begin{aligned} p(a_s\delta_s)^2 &= p(a_s\delta_s(a_s\delta_s)^*) \\ &= p(a_s\delta_s(\theta_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}})) \\ &= p(\theta_s(\theta_{s^{-1}}(a_s)\theta_{s^{-1}}(a_s^*))\delta_{ss^{-1}}) \\ &= p(\theta_s(\theta_{s^{-1}}(a_s a_s^*))\delta_e) \\ &= p(a_s a_s^*\delta_e). \end{aligned}$$

Como $a_s a_s^*\delta_e \in A\delta_e = A$ e A é uma C^*-álgebra, temos

$$\begin{aligned} p(a_s\delta_s)^2 &= p(a_s a_s^*\delta_e) \\ &\leq \|a_s a_s^*\|_A \\ &= \|a_s\|_A^2. \end{aligned}$$

Assim, $p(a_s\delta_s) \leq \|a_s\|_A$.

Agora para um elemento da forma $a = \sum\limits_{s\in G} a_s\delta_s \in A \rtimes^p_{\theta,alg} G$, basta utilizarmos a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} p\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) &\leq \sum_{s\in G} p(a_s\delta_s) \\ &\leq \sum_{s\in G} \|a_s\|_A. \end{aligned}$$

Portanto, $p(a) \leq \sum\limits_{s\in G} \|a_s\|_A$. □

Com isto, agora conseguimos definir uma C^*-seminorma sobre $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$:

$$\|a\|_{max} = \sup_p \{p(a); p \text{ é } C^* - \text{seminorma sobre } A \rtimes^p_{\theta,alg} G\}.$$

Pela proposição anterior, vemos que $\|\cdot\|_{max}$ é limitada. Futuramente poderemos ver que $\|\cdot\|_{max}$ é uma C^*-norma sobre $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$, isto se tornará mais simples quando construirmos a representação regular associada. Logo, podemos fazer o completamento de $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$.

Definição 5.7. *Seja (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial. O produto cruzado parcial cheio $A \rtimes^p_\theta G$ é o completamento de $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ com a norma $\|\cdot\|_{max}$. Ou seja,*

$$A \rtimes^p_\theta G = \overline{A \rtimes^p_{\theta,alg} G}^{\|\cdot\|_{max}}.$$

Além disso, como $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ é uma subálgebra densa de $A \rtimes^p_\theta G$, vamos denotar $\kappa : A \rtimes^p_{\theta,alg} G \to A \rtimes^p_\theta G$ o $*-$homomorfismo do completamento. Para o produto cruzado parcial cheio temos a seguinte propriedade universal.

Proposição 5.8 (Propriedade universal do produto cruzado parcial)**.**

Sejam B uma C^*-álgebra e $\varphi_{alg} : A \rtimes^p_{\theta,alg} G \to B$ um $*-$homomorfismo. Então existe um único $*-$homomorfismo $\varphi : A \rtimes^p_\theta G \to B$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & A \rtimes^p_\theta G \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A \rtimes^p_{\theta,alg} G \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{alg}"'] & & B \end{tikzcd}$$

Demonstração. Definindo $p(a) = \|\varphi_{alg}(a)\|_B$ segue que p é uma C^*-seminorma sobre $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$, donde é limitada por $\|a\|_{max}$. Assim, podemos estender φ_{alg} ao completamento, e assim obtemos um $*-$homomorfismo de $A \rtimes^p_\theta G$ em B como desejado. $\square$

Exemplo 5.9. *Já foi provado que a álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ é isomorfa a um produto cruzado parcial. Este resultado pode ser visto em [11]. Essencialmente, $\mathcal{O}_n \cong C(X) \rtimes^p_\theta \mathbb{F}_n$, onde $X = \{1, 2, \cdots, n\}^{\mathbb{N}}$.*

Iremos definir o produto cruzado parcial reduzido utilizando ideias de McClanahan [17]. Para isto é útil apresentarmos o conceito de representação covariante parcial.

Definição 5.10. *Seja (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial. Uma* representação parcial covariante *é a tripla (π, u, H), onde é um representação $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ de A em um espaço de Hilbert H e $u : G \to \mathbb{B}(H)$é uma aplicação cuja imagem consiste de isometrias parciais satisfazendo:*

(1) $u_g^* = u_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$;

(2) $u_g\pi(a)u_{g^{-1}} = \pi(\theta_g(a))$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$;

(3) $\pi(a)[u_g u_h - u_{gh}] = 0$, para todo $a \in D_g \cap D_{gh}$ e $g, h \in G$.

Dado um par (π, u) consistindo de uma representação $\pi : A \to B(H)$ de A em H e uma representação unitária $u : G \to \mathbb{B}(H)$ uma representação unitária satisfazendo apenas o item (2) da definição anterior, defina $v_g := u_g P_{g^{-1}}$, onde P_g é a projeção ortogonal sobre $[\pi(D_g)H]$. Observe que $v_g = P_g u_g$, pois $u_g^* = u_{g^{-1}}$ e P_g é projeção. Então v_g é isometria parcial, tal que (π, v, H) é uma representação parcial covariante.

De fato, se $v_g = u_g P_{g^{-1}} = P_g u_g$, já temos que $v_{g^{-1}} = P_{g^{-1}} u_{g^{-1}} = P_{g^{-1}}^* u_g^* = (u_g P_{g^{-1}})^* = v_g^*$, ou seja, satisfaz (1). Observe que como P_g é a projeção ortogonal sobre $[\pi(D_g)H]$, temos que $\pi(a)v_g = \pi(a)u_g$ e $v_{g^{-1}}\pi(a) = u_{g^{-1}}\pi(a)$, sendo $a \in D_g$. Com isto (2) é válido, pois $u_g \pi(a) u_{g^{-1}} = \pi(\theta_g(a))$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$.

Assim,

$$\pi(a)[v_g v_h - v_{gh}] = \pi(a)u_g v_h - \pi(a)u_{gh}.$$

Como $u_g \pi(a) u_{g^{-1}} = \pi(\theta_g(a))$ é o mesmo que $\pi(a)u_g = u_g \pi(\theta_{g^{-1}}(a))$e como $\alpha_{g^{-1}}(D_g \cap D_{gh}) \subseteq D_h$, segue que

$$\begin{aligned}\pi(a)u_g v_h - \pi(a)u_{gh} &= u_g \pi(\theta_{g^{-1}}(a))u_h - \pi(a)u_{gh} \\ &= \pi(a)u_g u_h - \pi(a)u_{gh} = 0.\end{aligned}$$

Com isto, (π, v, H) é uma representação parcial covariante.

Agora vamos caminhar para definirmos o produto cruzado parcial reduzido. Para isto fixamos como acima (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial, consistindo de isomorfismos $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, onde cada D_g é um ideal bilateral de A. Queremos encontrar uma representação de A em $\mathbb{B}(l^2(G, H)) \cong \mathbb{B}(H \widehat{\otimes} l^2(G))$, onde H é um espaço de Hilbert.

Seja $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ uma representação fiel. Para cada $g \in G$, defina

$$\pi_g : D_g \to \mathbb{B}(H)$$

$$a_g \mapsto \pi(\theta_{g^{-1}}(a_g)).$$

Como θ_g é um isomorfismo e π uma representação, cada π_g também uma representação de D_g. Por este próximo resultado podemos estender nossa representação.

Proposição 5.11. *Se temos $\sigma : I \to \mathbb{B}(H)$ representação de $I \trianglelefteq A$ ideal de A então existe $\sigma' : A \to \mathbb{B}(H)$ que estende σ. Além disso, se exigirmos que $\sigma'(a)\xi = 0$ para todo $\xi \in [\sigma(I)H]^{\perp} \subseteq H$ e $a \in A$, ou seja, se σ' aniquila $[\sigma(I)H]^{\perp} \subseteq H$, então σ' é único.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [13]. □

Assim, para cada $g \in G$, considere $\pi'_g : A \to \mathbb{B}(H)$ a extensão de π_g. Podemos ver a aplicação $\pi'_g : A \to \mathbb{B}(H)$ como $x \mapsto s{-}\lim_{\lambda} \pi_g(e_{\lambda}x)$, onde (e_{λ}) é a unidade aproximada de D_g. Assim, se I for um ideal bilateral fechado de A e (f_{λ}) a unidade aproximada de $D_g \cap I$ então a extensão $\pi'_g : I \to \mathbb{B}(H)$ é dada por $\pi'_g(x) = s - \lim_{\lambda} \pi(f_{\lambda}x)$ para todo $x \in I$. De fato, considere π_g a representação de $I \cap D_g$ e π'_g sua única extensão a I que aniquila $[\pi_g(I \cap D_g)H]^{\perp}$. Assim, $\pi'_g(x) = s - \lim_{\lambda} \pi(f_{\lambda}x)$ para todo $x \in I$.

Agora, defina

$$\tilde{\pi} : A \to \mathbb{B}(l^2(G, H)) \cong \mathbb{B}(H \widehat{\otimes} l^2(G))$$

$$a \to \tilde{\pi}(a)$$

onde

$$\tilde{\pi}(a)(h \otimes \delta_g) = \pi'_g(a)h \otimes \delta_g.$$

Lembre que $\lambda_s : l^2(G) \to l^2(G)$ é dado por $\lambda_s(\delta_g) = \delta_{sg}$ para

$s, g \in G$. Como já fizemos antes, considere

$$Id_H \otimes \lambda_s : H\widehat{\otimes}l^2(G) \to H\widehat{\otimes}l^2(G)$$

$$(h \otimes \delta_g) \mapsto (h \otimes \delta_{sg}),$$

onde facilmente é verificado que $(Id_H \otimes \lambda_s)^* = (Id_H \otimes \lambda_{s^{-1}})$. Vamos verificar que $(Id_H \otimes \lambda_s)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_s)^* = \tilde{\pi}(\theta_s(a))$. Dados $h \in H$ e $g \in G$, sendo $a \in D_{g^{-1}}$ e (e_λ) a unidade aproximada de $D_{g^{-1}h} \cap D_{g^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}
(Id_H \otimes \lambda_s)\tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_s)^*(h \otimes \delta_g) &= (Id_H \otimes \lambda_s)\tilde{\pi}(a)(h \otimes \delta_{s^{-1}g}) \\
&= (Id_H \otimes \lambda_s)[\pi'_{s^{-1}g}(a)h \otimes \delta_{s^{-1}g}] \\
&= \pi'_{s^{-1}g}(a)h \otimes \delta_g \\
&= s - \lim_\lambda \pi(\theta_{g^{-1}s}(e_\lambda a))h \otimes \delta_g \\
&= s - \lim_\lambda \pi(\theta_{g^{-1}}(\theta_s(e_\lambda a)))h \otimes \delta_g \\
&= \pi'_g(\theta_s(a))h \otimes \delta_g \\
&= \tilde{\pi}(\theta_s(a))(h \otimes \delta_g).
\end{aligned}$$

Ainda mais, pela observação feita depois da Definição 5.10, se $\overline{(Id_H \otimes \lambda_s)} = Id_H \otimes \lambda_s P_{s^{-1}}$, onde P_s é uma projeção sobre o conjunto $[\tilde{\pi}(D_s)H\widehat{\otimes}l^2(G)]$ então $(\tilde{\pi}, \overline{(Id_H\widehat{\otimes}\lambda_s)}, H \otimes l^2(G))$ é uma representação covariante para o C^*-sistema dinâmico (A, G, θ). Caso isto ocorra continuaremos usando $(\tilde{\pi}, Id_H \otimes \lambda_s, H\widehat{\otimes}l^2(G))$ como notação.

Podemos considerar um $*-$homomorfismo

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi} \rtimes (Id_H \otimes \lambda) : & A \rtimes^p_{\theta,alg} G \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G) \\
& a\delta_s \mapsto \tilde{\pi}(a)(Id_H \otimes \lambda_s).
\end{aligned}$$

A aplicação $\tilde{\pi} \rtimes (Id_H \otimes \lambda)$ é chamada de *representação regular*.

Definição 5.12. *Dado um C^*-sistema dinâmico parcial (A, G, θ), o* produto cruzado parcial reduzido, *denotado por* $A \rtimes^p_{\theta,r} G$ *é o fecho da imagem de* $A \rtimes^p_{\theta,alg} G$ *pela representação regular* $\tilde{\pi} \rtimes (Id_H \otimes \lambda)$*, ou seja,*

$$A \rtimes^p_{\theta,r} G = \overline{[\tilde{\pi} \rtimes (Id_H \otimes \lambda)](A \rtimes^p_{\theta,alg} G)}^{\mathbb{B}(H \widehat{\otimes} l^2(G))}.$$

O fato que $A \rtimes^p_{\theta,r} G$ não depende de representação também pode ser vista em [17]. Como a representação é fiel, obtemos uma inclusão $A \rtimes^p_{\theta,alg} G \subseteq A \rtimes^p_{\theta,r} G$, ou seja, vemos o produto cruzado reduzido como um completamento do produto cruzado algébrico. Como fizemos no caso global, denotaremos por Λ o $*-$homomorfismo sobrejetor $\Lambda : A \rtimes^p_{\theta} G \to A \rtimes^p_{\theta,r} G$.

Considere $E^r_g : A \rtimes^p_{\theta,r} G \to D_g$ definido nos geradores por $E^r_g(a\delta_s) = a\delta_{g,s}$, onde cada D_g é um ideal bilateral de A e $D_g\delta_g$ são os elementos da forma $a_g\delta_g$ com $a_g \in D_g$. Observe que $E^r_e : A \rtimes^p_{\theta,r} G \to D_e\delta_e \cong A$ é uma esperança condicional, para provar isto basta proceder de maneira análoga a caso de ações globais como vimos anteriormente ou consultar [12].

Além disso, podemos incluir D_g em $A \rtimes^p_{\theta} G$. Denotaremos essa inclusão por $\zeta_g : D_g \to A \rtimes^p_{\theta} G$.

Agora vamos definir o que seria uma família covariante de cada D_g. E veremos que as representações do produto cruzado cheio correspondem bijetivamente com as famílias covariantes.

Definição 5.13. *Sejam* (A, G, θ) *um* C^*-*sistema dinâmico parcial e* C *uma* C^*-*álgebra. Uma* família covariante *é uma família de aplicações lineares* $\varpi_g : D_g \to C$ *satisfazendo:*

(i) $\varpi_g(a_g)\varpi_h(a_h) = \varpi_{gh}(\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)a_h))$ *sendo* $a_g \in D_g$ *e* $a_h \in D_h$*;*

(ii) $\varpi_g(a_g)^* = \varpi_{g^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a_g^*))$ *para* $a_g \in D_g$*.*

Um exemplo de família covariante de $\{D_g\}_{g\in G}$ são as inclusões $\{\zeta_g : D_g \to A \rtimes_\theta^p G\}$.

Proposição 5.14. *O conjunto* $X = \{\pi\colon A \rtimes_\theta^p G \to \mathbb{B}(H)\}$ *correspondem bijetivamente com o conjunto das famílias covariantes* $Y = \{\varpi_g : D_g \to C\}$*.*

Demonstração. Considere

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ \pi &\mapsto \pi_g := \pi \circ \zeta_g. \end{aligned}$$

Verificamos que $\pi \circ \zeta \in Y$. Este é calculo se torna mais fácil pois sabemos que ζ_g é uma família covariante. Facilmente $\pi_g\colon D_g \to \mathbb{B}(H)$ é uma aplicação linear, pois é composição de tais. Dados $a_g \in D_g$ e $a_h \in D_h$, temos que π satisfaz:

$$\begin{aligned} \pi_g(a_g)\pi_h(a_h) &= \pi \circ \zeta_g(a_g)\pi \circ \zeta_h(a_h) \\ &= \pi(\zeta_g(a_g)\zeta_h(a_h)) \\ &= \pi(\zeta_{gh}(\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)a_h))) \\ &= \pi_{gh}(\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)a_h)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_g(a_g)^* = [\pi(\zeta_g(a_g))]^* &= \pi(\zeta_g(a_g)^*) \\ &= \pi(\zeta_{g^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a_g^*))) = \pi_{g^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a_g^*)). \end{aligned}$$

Com isto, vemos que $\{\pi_g\}$ é uma família covariante.

Por outro lado, defina

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y &\to X \\ \varpi_g &\mapsto W_\varpi, \end{aligned}$$

onde $\varpi_g : D_g \to C \subset \mathbb{B}(H)$ e $W_\varpi : A \rtimes_\theta^p \to C \subset \mathbb{B}(H)$ é definida por $\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g \right) \mapsto \sum_{g \in G} \varpi_g(a_g)$. Observe que $W_\varpi \in X$ pois é linear, e como $\{\varpi_g\}$ é uma família covariante, temos

$$\begin{aligned} W_\varpi(a_g\delta_g *_\theta a_h\delta_t) &= W_\varpi(\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)a_h)\delta_{gh}) \\ &= \varpi_{gh}(\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)a_h)) \\ &= \varpi_g(a_g)\varpi_h(a_h) \\ &= W_\varpi(a_g\delta_g)W_\varpi(a_h\delta_h) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [W_\varpi(a_g\delta_g)]^* = [\varpi_g(a_g)]^* &= \varpi_{g^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a_g^*)) \\ &= W_\varpi(\theta_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}) = W_\varpi(a_g\delta_g^*), \end{aligned}$$

ou seja, $W_\varpi \in X$.

Por fim, basta verificarmos que $f^{-1}f = Id$ e $ff^{-1} = Id$. De fato,

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(\pi)(a_g\delta_g) &= f^{-1}(\pi \circ \zeta_g)(a_g\delta_g) \\ &= W_{\pi\circ\zeta}(a_g\delta_g) \\ &= \pi(\zeta_g(a_g)) \\ &= \pi(a_g\delta_g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(\pi_g)(a_g) &= f(W_\pi)(a_g) \\ &= W_\pi \circ \zeta_g(a_g) \\ &= W_\pi(a_g\delta_g) \\ &= \pi_g(a_g). \end{aligned}$$

Com isto temos nossa bijeção entre as representações e as famílias covariantes. $\square$

A bijeção acima é uma consequência da propriedade universal do produto cruzado parcial. Com isto, podemos ter como decorrência direta destes resultados:

Proposição 5.15. *Sejam (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial e C uma C^*-álgebra. Se $\{\varpi_g : D_g \to C\}$ é um família covariante então existe um único $*-$homomorfismo $\varphi : A \rtimes_\theta^p G \to C$ tal que $\varphi \circ \zeta_g = \varpi_g$ para todo $g \in G$.*

O $*-$homomorfismo φ é chamado de *forma integrada* de $\{\varpi_g\}_{g \in G}$.

5.3 Mediabilidade e Ações Parciais

Nesta seção iremos generalizar as ações mediáveis que vimos no capítulo anterior. Essencialmente, iremos juntar a noção de ações mediáveis com as ações parciais. Também provaremos alguns resultados com relação a essa definição. Esta nova definição irá generalizar as ações mediáveis. Ainda mais, veremos as relações entre as noções de mediabilidade.

Precisamos demonstrar um lema que será muito útil neste capítulo. Porém para esta demonstração ficar completa e não tão técnica, vamos construir as bases necessárias para enunciarmos o *Princípio de Absorção de Fell*. Este resultado será necessário no lema que segue.

Fixamos (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial e seja $\pi = \{\pi_g : D_g \to \mathbb{B}(H)\}_{g \in G}$ é um família covariante. Vamos agora considerar outra família covariante mas agora representada em $H \widehat{\otimes} l^2(G)$, sendo

$$\pi_g \otimes \lambda(a_g) = \pi_g(a_g) \otimes \lambda_g.$$

Pela construção, é possível ver que $\pi \otimes \lambda = \{\pi_g \otimes \lambda : D_g \to \mathbb{B}(H \widehat{\otimes} l^2(G))\}$ é uma família covariante. Pela Proposição 5.15, existe único $*-$homomorfismo $\varphi : A \rtimes_{\theta}^{p} G \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G))$, chamado de forma integrada de $\pi \otimes \lambda$, satisfazendo $\varphi \circ \zeta_g = \pi_g \otimes \lambda$, para todo $g \in G$.

Agora podemos enunciar o Princípio da Absorção de Fell:

Teorema 5.16 (Princípio da Absorção de Fell). *Seja $\pi = \{\pi_g : D_g \to \mathbb{B}(H)\}_{g\in G}$ uma família covariante e φ a forma integrada associada a família $\pi \otimes \lambda$ como descrita acima. Então φ se anula no núcleo de Λ. E assim, temos uma $*$representação ψ que faz seguinte diagrama comutar*

$$\begin{tikzcd} & A \rtimes_{\theta,r}^{p} G \arrow[dr, "\psi"] & \\ A \rtimes_{\theta}^{p} G \arrow[ur, "\Lambda"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & \mathbb{B}(H\widehat{\otimes}l^2(G)) \end{tikzcd} .$$

Além disso, se π_e é fiel, então ψ é fiel.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [12]. □

Alguns corolários importantes

Lema 5.17. *Sejam (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial e $T : G \to A$ uma função de suporte finito. Então*

$$\begin{aligned} V : A \rtimes_{\theta,r}^{p} G &\to A \rtimes_{\theta}^{p} G \\ z &\mapsto \sum_{g,h\in G} \zeta_g(T(gh)^* E_g^r(z) T(h)), \end{aligned}$$

define uma aplicação linear completamente positiva tal que

$$\|V\| \leq \left\| \sum_{g\in G} T(g)^* T(g) \right\|_A .$$

Além disso, $V(a_s\delta_s) = \sum\limits_{g,h\in G} (T(gh)^* a_s\delta_s T(h))$ para todo $s \in G$ e $a_s \in D_s$.

Demonstração. Seja $\rho : A \rtimes_\theta^p G \to \mathbb{B}(H)$ uma $*-$representação fiel. Defina uma família covariante $\pi_g := \rho \circ \zeta_g : D_g \to A \rtimes_\theta^p G \to \mathbb{B}(H)$. Como já vimos antes, temos $\{\pi_g\}_{g\in G}$ uma família covariante para $\{D_g\}_{g\in G}$. Fazendo a mesma construção acima, temos $\pi \otimes \lambda = \{\pi_g \otimes \lambda : D_g \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))\}_{g\in G}$ como uma família covariante. Seja $\varphi : A \rtimes_\theta^p G \to \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G))$ a forma integrada de associada à $\pi \otimes \lambda$. Pelo Teorema 5.16, existe uma $*-$representação ψ que faz seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} & A \rtimes_{\theta,r}^p G \arrow[dr, "\psi"] & \\ A \rtimes_\theta^p G \arrow[ur, "\Lambda"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & \mathbb{B}(H\widehat{\otimes} l^2(G)). \end{tikzcd}$$

Vamos deixar estas aplicações um pouco de lado e construiremos a aplicação V do enunciado. Considere $\pi_e := \rho \circ \zeta_e : D_e \cong A \to \mathbb{B}(H)$. Defina $F : H \to H \otimes l^2(G)$ tal que $F(\xi) = \sum\limits_{g\in G} \pi_e(T(g))\xi \otimes \delta_g$. Observe que F é linear e limitado. De fato,

$$\begin{aligned} F(\xi+\eta) &= \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))(\xi+\eta) \otimes \delta_g \\ &= \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))\xi + \pi_e(T(g))\eta \otimes \delta_g \\ &= \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))\xi \otimes \delta_g + \pi_e(T(g))\eta \otimes \delta_g \\ &= F(\xi) + F(\eta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|F(\xi)\|^2 &= \left|\left| \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))\xi \right|\right|_H^2 \\ &\le \sum_{g\in G} \left|\left| \pi_e(T(g))\xi \right|\right|_H^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g\in G} \langle \pi_e(T(g))\xi, \pi_e(T(g))\xi\rangle \\
&= \left\langle \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))^*\pi_e(T(g))\xi, \xi \right\rangle \\
&\leq \left\| \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))^*\pi_e(T(g)) \right\|_H \|\xi\|^2,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\|F\| \leq \left\| \sum_{g\in G} \pi_e(T(g))^*\pi_e(T(g)) \right\|_H^{1/2}$. Além disso, como π_e é um $*-$homomorfismo, temos $\|F\| \leq \left\| \sum_{g\in G} (T(g))^*(T(g)) \right\|_H^{1/2}$. Com isto provamos que $F \in \mathbb{B}(H, H\otimes l^2(G))$. Observe que $F^* \in \mathbb{B}(H\otimes l^2(G), H)$ é dado por $F^*(\xi\otimes\delta_g) = \pi_e(T(g))^*\xi$.

Seja

$$
\begin{aligned}
W : \mathbb{B}(H\otimes l^2(G)) &\to \mathbb{B}(H) \\
S &\mapsto F^*SF.
\end{aligned}
$$

Dados $\xi \in H$ e $a_g \in D_g$ quaisquer, vamos aplicar W em $\pi_g \otimes \lambda(a_g)$,

$$
\begin{aligned}
W(\pi_g\otimes\lambda(a_g))\xi &= F^*(\pi_g\otimes\lambda(a_g))F\xi \\
&= F^*(\pi_g(a_g)\otimes\lambda_g)\left(\sum_{s\in G}\pi_e(T(s))\xi\otimes\delta_s\right) \\
&= F^*\left(\sum_{s\in G}\pi_g(a_g)\pi_e(T(s))\xi\otimes\delta_{gs}\right) \\
&= \sum_{s\in G}\pi_e(T(gs))^*\pi_g(a_g)\pi_e(T(s))\xi.
\end{aligned}
$$

Logo $W(\pi_g\otimes\lambda(a_g)) = \sum_{s\in G}\pi_e(T(gs))^*\pi_g(a_g)\pi_e(T(s))$.

Agora vamos definir nosso V pela composição de W e ψ e verificar que ele satisfaz as hipóteses do lema. Defina

$$V : A \rtimes^p_{\theta,r} G \xrightarrow{\psi} \mathbb{B}(H \otimes l^2(G)) \xrightarrow{W} \mathbb{B}(H),$$

isto é, $V(a_g\delta_g) = W(\psi(a_g\delta_g))$. Observe que por definição $V(A \rtimes^p_{\theta,r} G) \subset \mathbb{B}(H)$, mas veremos que $V(A \rtimes^p_{\theta,r} G) \subseteq \rho(A \rtimes^p_\theta G)$. Ainda observe que $A \rtimes^p_{\theta,r} G$ é a imagem de elementos $a_g\delta_g = \Lambda(\zeta_g(a_g))$. Temos

$$\begin{aligned}
V(a_g\delta_g) &= W(\psi(a_g\delta_g)) \\
&= W(\psi(\Lambda(\zeta_g(a_g)))) \\
&= W(\varphi(\zeta_g(a_g))) \\
&= W(\pi_g \otimes \lambda(a_g)) \\
&= W(\pi_g(a_g) \otimes \lambda_g)) \\
&= \sum_{s\in G} \pi_e(T(gs))^*\pi_g(a_g)\pi_e(T(s)) \\
&= \sum_{s\in G} \rho(\zeta_e(T(gs))^*)[\rho(\zeta_g(a_g))]\rho(\zeta_e(T(s))) \\
&= \rho\left(\sum_{s\in G} \zeta_e(T(gs))^*\zeta_g(a_g)\zeta_e(T(s))\right) \\
&= \rho\left(\sum_{s\in G} \zeta_g((T(gs))^*a_g))\zeta_e(T(s))\right) \\
&= \rho\left(\sum_{s\in G} \zeta_g(T(gs)^*a_gT(s))\right).
\end{aligned}$$

Com isto, vemos que a imagem de V está contida na imagem de ρ. Como ρ é uma $*-$representação fiel de $A \rtimes^p_\theta G$, podemos ver $V : A \rtimes^p_{\theta,r} G \to A \rtimes^p_\theta G$.

Agora tomando $a \in A \rtimes^p_{\theta,r} G$ sendo $a = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$ com $a_g \in D_g$ temos

$$V(a) = V\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g\in G} V\Big(a_g\delta_g\Big)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{s\in G} \zeta_g(T(gs)^* a_g T(s))\\
&= \sum_{g,s\in G} \zeta_g(T(gs)^* E_g^r(a) T(s)).
\end{aligned}
$$

Com isto, por construção V é uma aplicação linear completamente positiva.

Por fim,

$$
\|V\| = \|W\circ\psi\| \leq \|W\| \leq \|F^*\|\|F\| = \|F\|^2 \leq \left|\left|\sum_{g\in G} T(g)^*T(g)\right|\right|_A.
$$

□

Observe que este lema acima foi muito parecido com uma Proposição 4.7 do capítulo passado. Analogamente como foi feito com ações mediáveis, podemos agora definir as ações parciais mediáveis, porém denotaremos por outro nome para não termos duas noções de ação mediáveis.

Definição 5.18. *Seja (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial. A ação parcial θ possui a* propriedade de aproximação *se existe uma net $\{T_i\}_{i\in I}$ de aplicações de suporte finito $T_i : G \to A$, sendo I um conjunto dirigido, satisfazendo:*

(1) $\sup\limits_{i\in I} \left|\left| \sum\limits_{g\in G} T_i(g)^*T_i(g)\right|\right|_A < \infty$;

(2) $\lim\limits_{i\to\infty} \left(\sum\limits_{s\in G} T_i(gs)^* b T_i(s)\right) = b$, *para todo* $b \in D_g\delta_g$.

Uma net como acima é chamada de uma *net de Cesaro.* Vamos em seguida demonstrar um resultado que facilita a verificação da condição

(2) da definição acima.

Lembre que um subconjunto A de um espaço vetorial normado X é total se o span linear de A é denso em X. Ou seja, $X = \overline{span(A)}$.

Proposição 5.19. *Sejam (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial e uma net $\{T_i\}_{i\in I}$ de aplicações de suporte finito $T_i : G \to A$ satisfazendo:*

(i) $\sup_{i\in I} \left|\left| \sum_{g\in G} T_i(g)^* T_i(g) \right|\right|_A < \infty$*;*

(ii) $\lim_{i\to\infty} \left(\sum_{s\in G} T_i(gs)^* b T_i(s) \right) = b$*, para todo b em um subconjunto total $C_g\delta_g$ de $D_g\delta_g$.*

Então θ é uma ação parcial com a propriedade de aproximação.

Demonstração. Basta mostrar que $\lim_{i\to\infty} \left(\sum_{s\in G} T_i(gs)^* b T_i(s) \right) = b$, para todo $b \in D_g\delta_g$. Para isto, para cada $i \in I$ defina,

$$\begin{aligned} L_i :& D_g\delta_g \to D_g\delta_g \\ & b \mapsto \sum_{s\in G} T_i(gs)^* b T_i(s). \end{aligned}$$

Tomando o limite sobre i, temos, por hipótese, que L_i converge pontualmente para $b \in C_g\delta_g$. Como no Lema 5.17, seja

$$\begin{aligned} V_i :& A \rtimes^p_{\theta,r} G \to A \rtimes^p_{\theta} G \\ & \sum_{g\in G} a_g\delta_g \mapsto \sum_{g,h\in G} \zeta_g \Big(T_i(gh)^* E^r_g(a_g\delta_g) T_i(h) \Big) \end{aligned}$$

com $a_g \in D_g$, cada V_i é uma aplicação completa positiva. Observe que L_i é uma restrição de V_i a $D_g\delta_g$. Logo, $\|L_i\| \leq \|V_i\|$. Portanto, L_i é uniformemente contínua. Assim, $\lim_{i\to\infty} \left(\sum_{s\in G} T_i(gs)^* b T_i(s) \right) = b$, para todo $b \in D_g\delta_g$. $\square$

Podemos nos perguntar se G for um grupo mediável, será que a ação parcial associada possui a propriedade de aproximação? A resposta desta afirmação é verdadeira. De fato, pelo Teorema 2.24, existe uma net $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ de funções definidas positivas de suporte finito tal que $\varphi_j \longrightarrow 1$ pontualmente. Considere agora $\{u_i\}_{i\in I}$ uma unidade aproximada de A. Defina $\{T_{j,i}\}_{(j,i)\in J\times I}$ sendo $T_{j,i}(g) = \varphi_j(g)u_i$. Facilmente temos que $\{T_{j,i}\}_{(j,i)\in J\times I}$ é uma net de Cesaro, ou seja, θ é uma ação parcial com a propriedade de aproximação.

A demonstração deste próximo resultado é muito parecido com a do Teorema 4.8 do capítulo passado.

Teorema 5.20. *Seja (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial. Se θ é uma ação parcial com a propriedade de aproximação então o produto cruzado parcial reduzido é isomorfo ao produto cruzado parcial cheio.*

Demonstração. Por hipótese, temos uma net de Cesaro $\{T_i\}_{i\in I}$. Como na proposição anterior, para cada $i \in I$, considere

$$\begin{aligned} V_i :&A \rtimes^p_{\theta,r} G \to A \rtimes^p_\theta G \\ &\sum_{g\in G} a_g\delta_g \mapsto \sum_{g,h\in G} \zeta_g\Big(T_i(gh)^* E^r_g(a_g\delta_g)T_i(h)\Big) \end{aligned}$$

com $a_g \in D_g$. Temos que cada V_i é uma aplicação completamente positiva. Defina

$$\Psi_i := V_i \circ \Lambda : A \rtimes^p_\theta G \to A \rtimes^p_\theta G.$$

Temos que $\lim\limits_{i\to\infty} \left(\sum\limits_{s\in G} T_i(gs)^* bT_i(s) \right) = b$, assim $\lim\limits_{i\to\infty} \Psi_i(b) = b$, para todo $b \in D_g\delta_g$.

Como o span de $D_g\delta_g$ é um subespaço denso de $A \rtimes^p_\theta G$, pela proposição anterior, $\lim\limits_{i\to\infty} \Psi_i(a) = a$, para todo $a \in A \rtimes^p_\theta G$.

Agora vamos ver que a aplicação Λ é injetora. Seja $a \in \ker(\Lambda)$, ou seja, $a \in A \rtimes_\theta^p G$ tal que $\Lambda(a) = 0$. Assim, $a = \lim_{i\to\infty} \Psi_i(a) = \lim_{i\to\infty} V_i \circ \Lambda(a) = \lim_{i\to\infty} V_i(0) = 0$, isto é, $a = 0$.

Portanto, o produto cruzado parcial reduzido é isomorfo ao produto cruzado parcial cheio. $\square$

Pelo visto antes do Teorema 5.20, se (A, G, θ) um C^*-sistema dinâmico parcial, onde G é um grupo mediável, então θ uma ação parcial com a propriedade de aproximação e com isto, o produto cruzado parcial reduzido é isomorfo ao produto cruzado parcial cheio pelo Teorema 5.20.

Agora vamos construir outro exemplo de ação com a propriedade de aproximação e em seguida podemos aplicar o Teorema 5.20.

Primeiro, fixamos u uma $*-$*representação parcial* do grupo G qualquer em uma C^*-álgebra unital B, isto é, $u : G \to B$ é uma aplicação satisfazendo, para todo $g, h \in G$:

(i) $u_e = 1$;

(ii) $u_g u_h u_{h^{-1}} = u_{gh} u_{h^{-1}}$;

(iii) $u_{h^{-1}} u_h u_g = u_{h^{-1}} u_{hg}$;

(iv) $u_g^* = u_g^{-1}$.

Para cada $g \in G$, defina $e_g = u_g u_{g^{-1}}$. Observe que $e_g e_h = u_g u_{g^{-1}} u_h u_{h^{-1}} = u_g u_{g^{-1}h} u_{h^{-1}g} u_{g^{-1}h} u_{h^{-1}} = u_{gg^{-1}h} u_{h^{-1}g} u_{g^{-1}hh^{-1}} = u_h u_{h^{-1}} u_g u_{g^{-1}} = e_h e_g$. Os conjuntos da potências de cada e_g é formam uma $*-$sub-álgebra comutativa de B pois $e_g e_h = e_h e_g$. Assim, a $*-$subálgebra A gerada por e_g é comutativa. Denote por $D_g = Ae_g$ o ideal de A gerado por e_g.

Como $e_g^* = (u_g u_{g^{-1}})^* = u_{g^{-1}}^* u_g^* = u_g u_{g^{-1}} = e_g$, temos que cada ideal D_g é unital, onde e_g é a unidade. Com isto, podemos definir

$$\begin{aligned}\theta_g : & D_{g^{-1}} \to D_g \\ & a \mapsto u_g a u_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Proposição 5.21. *Pelas condições acima, temos (A, G, θ) é um C^*-- sistema dinâmico parcial.*

Demonstração. Basta ver que θ definido acima é uma ação parcial. Dados $a, b \in D_{g^{-1}} = Ae_{g^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}\theta_g(a+b) &= u_g(a+b)u_{g^{-1}} \\ &= u_g a u_{g^{-1}} + u_g b u_{g^{-1}} \\ &= \theta_g(a) + \theta_g(b)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\theta_g(a)\theta_g(b) &= u_g a u_{g^{-1}} u_g b u_{g^{-1}} \\ &= u_g a e_g b u_{g^{-1}} \\ &= u_g a b u_{g^{-1}} \\ &= \theta_g(ab).\end{aligned}$$

Ou seja, θ é um homomorfismo. Ainda mais, $\theta_g(a)^* = (u_g a u_{g^{-1}})^* = u_g a^* u_{g^{-1}} = \theta_g(a^*)$ e para vermos o isomorfismo, note que $\theta_g(e_{g^{-1}}) = e_g$. Agora verifiquemos as condições $(i), (ii)$ e (iii) da Definição 5.1. Facilmente $D_e = Au_e u_e = A$ e $\theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, para todo $g, h \in G$ pois dado $a \in D_h \cap D_{g^{-1}}$, temos $\theta_{h^{-1}}(a) = u_{h^{-1}} a u_h = u_{h^{-1}} a e_{g^{-1}} u_h = u_{h^{-1}} a e_h u_{g^{-1}} u_g u_h = u_{h^{-1}} a u_h u_{h^{-1} g^{-1}} u_{gh} = u_{h^{-1}} a u_h e_{gh^{-1}} \in D_{gh^{-1}}$.

Por fim, dado $a \in \theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$. Observe que $a =$

$\theta_e(a) = \theta_{h^{-1}}(\theta_h(a)) = \theta_{h^{-1}}(u_h a u_{h^{-1}}) = u_{h^{-1}} u_h a u_{h^{-1}} u_h = e_{h^{-1}} a e_{h^{-1}} = e_{h^{-1}} a e_{(gh)^{-1}} e_{h^{-1}}$

Assim, segue o item (iii),

$$\begin{aligned}
\theta_g(\theta_h(a)) &= u_g u_h a u_{h^{-1}} u_{g^{-1}} \\
&= u_g u_h e_{h^{-1}} a e_{h^{-1}} u_{h^{-1}} u_{g^{-1}} \\
&= u_g u_h u_{h^{-1}} u_h a u_{h^{-1}} u_h u_{h^{-1}} u_{g^{-1}} \\
&= u_{gh} u_{h^{-1}} u_h a u_{h^{-1}} u_h u_{h^{-1}g^{-1}} \\
&= u_{gh} e_{h^{-1}} a e_{h^{-1}} u_{h^{-1}g^{-1}} \\
&= u_{gh} a u_{h^{-1}g^{-1}} \\
&= \theta_{gh}(a).
\end{aligned}$$

□

Agora vamos caminhar para mostrar que a álgebra conhecida como álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$. Existem várias maneiras de definir esta C^*-álgebra, no nosso contexto podemos definir como sendo o produto cruzado parcial de $C(X) \rtimes_\theta^p \mathbb{F}_n$ onde $X = \{1, 2, \cdots, n\}^{\mathbb{N}}$ e θ é uma ação parcial oriunda de uma representação S parcial de $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathbb{B}(H)$ como construímos acima e satisfazendo $\sum_{i=1}^{n} e_{g_i} = \sum_{i=1}^{n} S_{g_i} S_{g_i^{-1}} = 1$, sendo $\{g_i\}_1^n$ os geradores livres de $\mathbb{F}_n$.

Sendo $G = \{g_i\}_1^n = \{g_1, \cdots, g_n\}$ os geradores livres de $\mathbb{F}_n$, sabemos que cada $t \in \mathbb{F}_n$ existe uma única decomposição na forma reduzida, isto é, $t = a_1 a_2 \cdots a_k$ onde $a_i \in G \cup G^{-1}$ e $a_{i+1} \neq a_i^{-1} \neq e$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Chamaremos de $|\cdot|$ a aplicação que determina o tamanho da forma reduzida de um elemento em $\mathbb{F}_n$. Por definição, precisamos que $|e| = 0$. Note que $|t| = |a_1 a_2 \cdots a_k| = k$ e $|tr| \leq |t| + |r|$ sendo $t, r \in \mathbb{F}_n$.

Ainda mais, defina $S(t) = S(a_1)S(a_2) \cdots S(a_k)$. Dado $r = b_1 b_2 \cdot b_l$, temos $S(tr) = S(t)S(r)$ se e somente se $a_k \neq b_1^{-1}$. Isto é equivalente a pedir que $|tr| = |t| + |r|$. Esta propriedade é chamada de semi-saturada. Uma representação parcial de grupos u é dita *semi-saturada* se $u(tr) = u(t)u(r)$ sempre que $|tr| = |t| + |r|$ para todo $t, r \in G$. Agora vamos enunciar um teorema no qual sua demonstração pode ser vista em [10].

Teorema 5.22. *Seja u uma representação de grupos semi-saturada de $\mathbb{F}_n$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{n} e(g_i) = 1$ então a ação parcial associada possui a propriedade de aproximação.*

Com isto, temos que a ação parcial de $\mathbb{F}_n$ sobre $C(X)$ é uma ação parcial com a propriedade de aproximação. Assim, pelo teorema 5.20, $\mathcal{O}_A \cong C(X) \rtimes_\theta^p \mathbb{F}_n \cong C(X) \rtimes_{\theta,r}^p \mathbb{F}_n$.

Veremos que de uma certa forma a propriedade de aproximação de uma ação generaliza as ações mediáveis definidas no capítulo anterior.

Considere uma ação global α de G sobre uma $C*-$álgebra unital A. Então podemos ver α como uma ação parcial de G sobre A e neste caso temos duas condições sobre α, mediabilidade e a propriedade da aproximação. Veremos em seguida que a mediabilidade da ação implica a propriedade da aproximação.

Proposição 5.23. *Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico, sendo A unital e α uma ação mediável sobre A. Então a ação α possui a propriedade de aproximação.*

Demonstração. Por hipótese, existem aplicações de suporte finito $T_i : G \to A$ com $i \in I$ um conjunto dirigido, satisfazendo:

(1) $T_i(g) \geq 0$ e $T_i(g) \in \mathcal{Z}(A)$ para todo $i \in I$ e $g \in G$, onde $\mathcal{Z}(A)$ é o centro de A.

(2) $\langle T_i, T_i\rangle_2 = \sum\limits_{g\in G} T_i(g)^*T_i(g) = \sum\limits_{g\in G} T_i(g)^2 = 1_A$ para todo $i \in I$;

(3) $\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2 \longrightarrow 0$ para todo $s \in G$.

Lembrando que para a propriedade de aproximação é para ações parciais. Então vamos ver α sendo a ação parcial de forma trivial como $\alpha = (\{A\}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$.

Tomando $T_i\colon G \to A$ as aplicações de suporte finito acima. Temos facilmente que

$$\sup_{i\in I}\left|\left|\sum_{g\in G} T_i(g)^*T_i(g)\right|\right|_A = 1 < \infty.$$

Agora precisamos mostrar que $\lim\limits_{i\to\infty}\left(\sum\limits_{s\in G} T_i(gs)^*bT_i(s)\right) = b$, para todo $b \in D_g\delta_g$. Antes vejamos que $\lim\limits_i\langle T_i, 1_A\delta_g *_\alpha T_i\rangle \longrightarrow 1_A$.

Sabemos que $\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2 \longrightarrow 0$. Assim,

$$\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2^2 = \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\rangle \tag{5.3}$$

$$= \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle - \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, T_i\rangle - \langle T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle + \langle T_i, T_i\rangle. \tag{5.4}$$

Individualmente, observe que segue diretamente da Definição 4.1 e 4.3, o seguinte:

$$\begin{aligned}
\langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle &= \sum_{g\in G}[1_A\delta_s *_\alpha T_i(g)]^*1_A\delta_s *_\alpha T_i(g)\\
&= \sum_{g\in G}[\alpha_s(T(s^{-1}g))]^*\alpha_s(T(s^{-1}g))\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_s(T(s^{-1}g)^*T(s^{-1}g))\\
&= \alpha_s\left(\sum_{g\in G}(T(s^{-1}g)^*T(s^{-1}g)\right)
\end{aligned}$$

$$= \alpha_s(1_A) = 1_A$$

e

$$\begin{aligned}
\langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, T_i\rangle &= \sum_{g\in G}[1_A\delta_s *_\alpha T_i(g)]^* T_i(g) \\
&= \sum_{g\in G}[\alpha_g(T_i(s^{-1}g))]^* T_i(g)^* \\
&= \sum_{g\in G} T_i(g)^*\alpha_g(T_i(s^{-1}g)) \\
&= \langle T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle.
\end{aligned}$$

Voltando na Equação 5.4, temos

$$\begin{aligned}
\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2^2 &= 1_A - \langle 1_A\delta_s *_\alpha T_i, T_i\rangle - \langle T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle + 1_A \\
&= 2(1_A) - 2\langle T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\|1_A\delta_s *_\alpha T_i - T_i\|_2 \longrightarrow 0$, temos $\langle T_i, 1_A\delta_s *_\alpha T_i\rangle \longrightarrow 1_A$.

Voltando para mostrar que $\lim\limits_{i\to\infty}\left(\sum\limits_{s\in G} T_i(gs)^* b T_i(s)\right) = b$, vendo $T_i(g) = T_i(g)\delta_e$ e dado $b\delta_g \in D_g\delta_g$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_i\left(\sum_{s\in G} T_i(gs)^* b\delta_g T_i(s)\delta_e\right) &= \lim_i\left(\sum_{s\in G} T_i(gs)^*\alpha_g(\alpha_g^{-1}(b)T_i(s))\delta_g\right) \\
&= \lim_i\left(\sum_{s\in G} T_i(gs)^* b(\alpha_g(T_i(s))\delta_g\right) \\
&= \lim_i\left(\sum_{h\in G} T_i(h)^* b(\alpha_g(T_i(g^{-1}h))\delta_g\right) \\
&= \lim_i\left(\sum_{h\in G} T_i(h)^* b(1_A\delta_g *_\alpha T_i(h))\delta_g\right) \\
&= b\lim_i\left(\sum_{h\in G} T_i(h)^* b(1_A\delta_g *_\alpha T_i(h))\right)\delta_g \\
&= b\lim_i\left(\langle T_i, 1_A\delta_g *_\alpha T_i\rangle\right)\delta_g
\end{aligned}$$

$$= b1_A\delta_g = b\delta_g.$$

□

Com isto concluímos que ações mediáveis são um caso particular de ações com a propriedade de aproximação. Assim, todos os exemplos que fizemos para ações mediáveis são válidos, para isto basta fazermos as mesmas adaptações que foram feitas acima.

Não é claro se a recíproca do Teorema 5.20 vale em geral. Sabemos que a propriedade da aproximação nos dá um isomorfismo $A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_{\alpha,r} G$ através da representação regular. Poderíamos também nos perguntar se vale a recíproca, ou seja, se a representação regular é um isomorfismo, segue que a ação (parcial) possui a propriedade da aproximação ou ainda é mediável? Este é outro problema em aberto nesta área. Algum progresso já foi feito nesta direção. Em [16] Matsumura mostrou que, de fato, esta pergunta tem uma resposta afirmativa para ações globais e caso A seja comutativa e G é um grupo *exato*. Um grupo é *exato* se ele admite uma ação mediável sobre um espaço compacto, isto é, uma ação mediável sobre uma C^*-álgebra comutativa unital no nosso sentido. Matsumura ainda mostra, no mesmo artigo, uma versão deste resultado para C^*-álgebras não comutativas assumindo um certa condição técnica, mas o caso geral permanece aberto, mesmo no caso em que G é exato.

Conclusão

Neste trabalho vimos a importância dos grupos mediáveis associados a C^*-álgebras. Primeiramente vimos como se comportam os grupos mediáveis em relação a algumas operações. Depois vimos outros modos de classificar um grupo com esta propriedade, como por exemplo quando $C^*(G) \cong C_r^*(G)$. Tentando generalizar este resultado, temos formas mais simples de observar quando os produtos cruzados são isomorfos. Para isto, basta ver se o grupo G ou a ação α do C^*-sistema dinâmico (A, G, α) é mediável.

Por fim, ainda vimos que os produtos cruzados parciais cheio e reduzido são isomorfos se a ação associada possui a propriedade de aproximação. De certa forma, os produtos cruzados parciais generalizam os produtos cruzados e a ação com propriedade de aproximação generaliza as ações mediáveis.

APÊNDICE A – Funções Positivas Definidas

As funções positivas definidas são uma ferramenta muito útil para resolvermos problemas relacionados a aproximação de C^*-álgebras.

Definição A.1. *Sejam E um sub-espaço fechado e auto-adjunto de uma C^*-álgebra A tal que $1_A \in E$, e B uma C^*-álgebra. Uma aplicação $\varphi : E \to B$ é dita completamente positiva se $\varphi_n : \mathbb{M}_n(E) \to \mathbb{M}_n(B)$ dada por*

$$\varphi_n([a_{i,j}]_{i,j=1}^n) = [\varphi(a_{i,j})]_{i,j=1}^n$$

é uma matriz definida positiva. Ou seja, leva matrizes definidas positivas em matrizes definidas positivas, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para vermos que uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(A)$ é definida positiva, basta ver se $x^t M x \geq 0$ para todo $x \in A^n$. A partir da definição acima, chamaremos φ de completamente positiva unital se φ for unital.

Seja π um $*-$homomorfismo entre quaisquer C^*-álgebras A, B. Se cada π_n são $*-$homomorfismos, então π é uma aplicação completamente positiva. De fato, pois cada π_n são $*-$homomorfismos, temos que cada π_n preserva positividade. Ainda mais, se uma aplicação φ

é da forma $\varphi(a) = P^*\pi(a)P$, onde π é um $*-$homomorfismo e P um operador, então φ é completamente positiva.

Agora para G um grupo temos a seguinte definição.

Definição A.2. *A aplicação $\varphi : G \to \mathbb{C}$ é positiva definida se a matriz $[\varphi(s^{-1}t)]_{s,t\in F} \in \mathbb{M}_F(\mathbb{C})$ é definida positiva, para todo conjunto finito $F \subset G$. Em outras palavras, se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall s_1, s_2, \dots s_n \in G$, a matriz $[\varphi(s_1^{-1}s_j)]_{i,j=1}^n$ é definida positiva.*

Definição A.3. *Seja a aplicação $\varphi : G \to \mathbb{C}$. Definimos um linear funcional correspondente $\omega_\varphi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$ por*

$$\omega_\varphi\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) = \sum_{s\in G}\varphi(s)a_s.$$

E o multiplicador $m_\varphi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ por

$$m_\varphi\left(\sum_{s\in G} a_s\delta_s\right) = \sum_{s\in G}\varphi(s)a_s\delta_s.$$

Vejamos agora um teorema que é utilizado no decorrer deste trabalho. Sua demonstração será omitida pois não é esse o intuito deste trabalho.

Teorema A.4. *Seja $\varphi : G \to \mathbb{C}$ uma aplicação tal que $\varphi(e) = 1$, onde $e \in G$, é o elemento neutro de G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) A aplicação φ é positiva definida;

2) Existe um representação unitária $\lambda_\varphi : G \longrightarrow H_\varphi$, onde H_φ é um espaço de Hilbert, e um vetor unitário ξ_φ tal que $\varphi(s) = \langle\lambda_\varphi(s)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$;

3) O funcional ω_φ pode ser estendido a um estado de $C^*(G)$;

4) O multiplicador m_φ pode ser estendido a uma aplicação completamente positiva unital em $C^*(G)$ ou $C_r^*(G)$.

Demonstração. Pode ser vista em [5] no Theorem 2.5.11. $\square$

APÊNDICE B – Álgebras de Multiplicadores

Dada uma C^*-álgebra A vamos definir a álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(A)$ associada. Esta álgebra é de extrema importância para a C^*-álgebra. Pela construção veremos que $\mathcal{M}(A)$ é uma C^*-álgebra unital que contém A como ideal.

Definição B.1. *Seja A uma C^*-álgebra. O par (L, R) é dito ser o centralizador de A se L e R são operadores lineares limitados de A em A que, para todo $a, b \in A$, satisfazem*

(1) $L(ab) = L(a)b$;

(2) $R(ab) = aR(b)$;

(3) $R(a)b = aL(b)$.

Dizemos que L é o multiplicador à esquerda e R é o multiplicador a direita de A.

Agora podemos definir a álgebra de multiplicadores.

Definição B.2. *Seja A uma C^*-álgebra. A álgebra de multiplicadores de A é o conjunto de todos duplo centralizadores com as seguintes operações:*

- $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$;
- $c(L, R) = (cL, cR)$;
- $(L_1, R_1) \circ (L_2, R_2) = (L_1 \circ L_2, R_2 \circ R_1)$.

Denotaremos a álgebra de multiplicadores por $\mathcal{M}(A)$. É possível mostrar que $\mathcal{M}(A)$ é realmente uma álgebra.

Agora vamos definir a involução em $\mathcal{M}(A)$ e depois importar uma norma para que essa álgebra seja uma C^*-álgebra.

Considere (L, R) um duplo centralizador de uma C^*-álgebra A. Defina $(L, R)^* = (R^*, L^*)$, onde $L^*(a) = (L(a^*))^*$, para $a \in A$. Analogamente, $R^*(a) = (R(a^*))^*$. Observe que $(R^*, L^*) \in \mathcal{M}(A)$, ou seja, a tal involução está bm definida. Para vermos que esta operação acima é mesmo uma involução em $\mathbb{B}(A)$, vemos que, para $S, T \in \mathbb{B}(A)$ e $a \in A$,

$$(S + T)^*(a) = ([S + T](a^*))^* = (S(a^*))^* + (T(a^*))^* = S^*(a) + T^*(a)$$

$$(T^*)^*(a) = (T^*(a^*))^* = [(T([a^*]^*)^*]^* = T(a)$$

$$(S \circ T)^*(a) = (S(T(a^*)))^* = S^*(T(a^*)^*) = S^*(T^*(a)) = (S^* \circ T^*)(a)$$

Com isto, ainda temos que verificar que esta operação é involução em $\mathcal{M}(A)$. Vejamos, sejam $(L_1, R_1)(L_2, R_2) \in \mathcal{M}(A)$ e $c \in \mathbb{C}$, assim

$$[(L_1, R_1)^*]^* = (L_1^*, R_1^*)^* = ([L_1^*]^*, [R_1^*]^*) = (L_1, R_1),$$

$$\begin{aligned}[c(L_1, R_1) + (L_2, R_2)]^* &= (cL_1, cR_1)^* + (L_2, R_2)^* \\ &= ([cR_1]^*, [cL_1]^*) + (R_2^*, L_2^*)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\overline{c}R_1^*, \overline{c}L_1^*) + (R_2^*, L_2^*) \\
&= \overline{c}(L_1, R_1)^* + (L_2, R_2)^*
\end{aligned}
$$

e por fim

$$
\begin{aligned}
[(L_1, R_1) \circ (L_2, R_2)]^* &= [(L_1 \circ L_2, R_2 \circ R_1)]^* = (R_2^* \circ R_1^*, L_1^* \circ L_2^*) \\
&= (L_2^*, R_2^*) \circ (L_1^*, R_1^*) = (L_2, R_2)^* \circ (L_1, R_1)^*.
\end{aligned}
$$

Agora, podemos ver $\mathcal{M}(A)$ como uma $*-$álgebra. Para a norma, definimos

$$\|(L, R)\|_{\mathcal{M}(A)} = \|L\|_{\mathbb{B}(A)} = \|R\|_{\mathbb{B}(A)}.$$

Esta norma faz sentido e isto será comprovado pela seguinte proposição.

Proposição B.3. *Seja* $(L, R) \in \mathcal{M}(A)$, *então* $\|L\|_{\mathbb{B}(A)} = \|R\|_{\mathbb{B}(A)}$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\|L\|_{\mathbb{B}(A)} \geq \|R\|_{\mathbb{B}(A)}$. Seja $a, b \in A$. Então

$$\|R(ab)\| = \|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\|\|a\|\|b\|$$

Assim,

$$\|R(a)\| = \sup_{\|b\|=1} \|R(a)b\|| \leq \sup_{\|b\|=1} \|L\|\|a\|\|b\| = |L\|\|a\|.$$

Ou seja, $\|R\| \leq \|L\|$. Por outro lado,

$$\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\|\|a\|\|b\|$$

Logo,

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\|=1} \|aL(b)\| \leq \sup_{\|a\|=1} \|R\|\|a\|\|b\| = \|R\|\|b\|.$$

Portanto, $\|L\| \leq \|R\|$. Logo, $\|L\| = \|R\|$.

$\square$

Já foi provado que $\mathcal{M}(A)$ é uma C^*-álgebra com as operações e norma definidas acima. Além disso, $\mathcal{M}(A)$ é unital, sendo $(1_A, 1_A)$ sua unidade.

Dado $a \in A$, considere $L_a : A \to A$ tal que $L_a(b) = ab$ e $R_a : A \to A$ definido por $R_a(b) = ba$. Obviamente, $L_a, R_a \in \mathbb{B}(A)$.

Defina

$$M : A \to \mathcal{M}(A)$$

$$a \mapsto (L_a, R_a).$$

Observe que M é um homomorfismo isométrico. Além disso, se A for unital então $\mathcal{M}(A) \tilde{=} A$, pelo homomorfismo M.

Agora vamos introduzir alguns resultados específicos no qual utilizaremos na demonstração da Proposição 5.5.

Definição B.4. *Uma C^*-álgebra A é dita $(L, R)-$associativa, se dados (L_1, R_1) e $(L_2, R_2) \in \mathcal{M}(A)$, temos que $R_2 \circ L_1 = L_1 \circ R_2$, para todos (L_1, R_1) e $(L_2, R_2) \in \mathcal{M}(A)$.*

Esta definição pode ser feita para A álgebra qualquer, neste caso, A será $(L, R)-$associativa se A for idempotente ou não-degenerada. Como utilizaremos este resultado somente para C^*-álgebra, a definição acima já foi restringida. Ainda mais, se A for uma C^*-álgebra (como na definição) já temos que A é $(L, R)-$associativa pelo seguinte resultado:

Proposição B.5. *Toda C^*-álgebra é $(L, R)-$associativa.*

Para provar este resultado utilizaremos o Teorema de fatorização de Cohen-Hewitt que está enunciado abaixo.

Teorema B.6. *[Teorema de fatorização de Cohen-Hewitt] Seja A uma C^*-álgebra. Dado $a \in A$ então a pode ser escrito como $a = xy$, sendo $x, y \in A$.*

A demonstração pode ser vista em [15] na página 268.

Agora vamos mostrar a proposição anterior

Demonstração. Sejam A uma C^*-álgebra e (L_1, R_1), $(L_2, R_2) \in \mathcal{M}(A)$. Tome $a \in A$ qualquer. Pelo Teorema B.6, podemos escrever $a = xy \in A$. Assim,

$$\begin{aligned} R_2 \circ L_1(a) &= R_2 \circ L_1(ab) = R_2(L_1(a)b) \\ &= L_1(a)R_2(b) = L_1(aR_2(b)) \\ &= L_1(R_2(ab)) = L_1 \circ R_2(x). \end{aligned}$$

Ou seja A é $(L, R)-$associativa.

□

Por fim, o último resultado que precisamos para provar a Proposição 5.5.

Lema B.7. *Sejam A, B duas C^*-álgebras tal que $\mu : A \to B$ é um $*-$isomorfismo. Então $(\mu \circ L \circ \mu^{-1}, \mu \circ R \circ \mu^{-1}) \in \mathcal{M}(B)$ para todo $(L, R) \in \mathcal{M}(A)$.*

Demonstração. Basta ver que $(\mu \circ L \circ \mu^{-1}, \mu \circ R \circ \mu^{-1})$ satisfaz os 3 itens da definição de duplo centralizador. Sejam $a, b \in B$ e $(L, R) \in \mathcal{M}(A)$ quaisquer.

(1) $\mu \circ L \circ \mu^{-1}(ab) = \mu \circ L \circ \mu^{-1}(a)b$

$$\begin{aligned}
\mu \circ L \circ \mu^{-1}(ab) &= \mu \circ L(\mu^{-1}(a)\mu^{-1}(b)) \\
&= \mu[L(\mu^{-1}(a))\mu^{-1}(b)] \\
&= \mu[L(\mu^{-1}(a))]\mu(\mu^{-1}(b)) \\
&= \mu[L(\mu^{-1}(a))](b) \\
&= \mu \circ L \circ \mu^{-1}(a)b
\end{aligned}$$

(2) $\mu \circ R \circ \mu^{-1}(ab) = a\mu \circ R \circ \mu^{-1}(b)$

$$\begin{aligned}
\mu \circ R \circ \mu^{-1}(ab) &= \mu \circ R(\mu^{-1}(a)\mu^{-1}(b)) \\
&= \mu[\mu^{-1}(a)R(\mu^{-1}(b))] \\
&= \mu[\mu^{-1}(a)][\mu R(\mu^{-1}(b))] \\
&= a[\mu R(\mu^{-1}(b))] \\
&= a\mu \circ R \circ \mu^{-1}(b)
\end{aligned}$$

(3) $\mu \circ R \circ \mu^{-1}(a)b = a\mu \circ L \circ \mu^{-1}(b)$

$$\begin{aligned}
\mu \circ R \circ \mu^{-1}(a)b &= \mu \circ R \circ \mu^{-1}(a)[\mu(\mu^{-1}(b))] \\
&= \mu[R(\mu^{-1}(a))(\mu^{-1}(b))] \\
&= \mu[(\mu^{-1}(a))L(\mu^{-1}(b))] \\
&= \mu[(\mu^{-1}(a))]\mu[L(\mu^{-1}(b))] \\
&= a\mu[L(\mu^{-1}(b))].
\end{aligned}$$

Com os três itens satisfeitos temos $(\mu \circ L \circ \mu^{-1}, \mu \circ R \circ \mu^{-1}) \in \mathcal{M}(B)$.

$\square$

Referências

[1] ALUFFI, P. *Algebra: chapter 0*, vol. 104. American Mathematical Soc., 2009.

[2] ANANTHARAMAN-DELAROCHE, C. Amenability and exactness for dynamical systems and their c*-algebras. *Transactions of the American Mathematical Society* (2002), 4153–4178.

[3] ANANTHARAMAN-DELAROCHE, C., AND RENAULT, J. *Amenable groupoids*. No. 36. L'Enseignement mathématique, 2000.

[4] BOFF, P. R., ET AL. Coações de grupos e fibrados de fell.

[5] BROWN, N. P., AND OZAWA, N. *C*-algebras and finite-dimensional approximations*, vol. 88. American Mathematical Soc., 2008.

[6] CECCHERINI-SILBERSTEIN, T., AND COORNAERT, M. *Cellular automata and groups*. Springer, 2009.

[7] DAVIDSON, K. R. *C*-algebras by example*, vol. 6. American Mathematical Soc., 1996.

[8] DAY, M. M., ET AL. Amenable semigroups. *Illinois Journal of Mathematics 1*, 4 (1957), 509–544.

[9] ECHTERHOFF, S. Crossed products, the mackey-rieffel-green machine and applications. *arXiv preprint arXiv:1006.4975* (2010).

[10] EXEL, R. Amenability for fell bundles. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* (1997), 41–74.

[11] EXEL, R. Partial representations and amenable fell bundles over free groups. *Pacific Journal of Mathematics 192*, 1 (2000), 39–63.

[12] EXEL, R. *Partial System Dynamical, Fell bundles and Applications*, vol. 1. American Mathematical Soc., 2014.

[13] Fillmore, P. A. *A user's guide to operator algebras*, vol. 14. Wiley-Interscience, 1996.

[14] Greenleaf, F. Invariant means on topological groups and their applications. In *Van Nostrand Reinhold Company* (1969).

[15] Hewitt, E., and Ross, K. A. *Abstract Harmonic Analysis: Volume II: Structure and Analysis for Compact Groups Analysis on Locally Compact Abelian Groups*, vol. 152. Springer, 2013.

[16] Matsumura, M. A characterization of amenability of group actions on c*-algebras. *arXiv preprint arXiv:1204.3050* (2012).

[17] McClanahan, K. K-theory for partial crossed products by discrete groups. *Journal of Functional Analysis 130*, 1 (1995), 77–117.

[18] Murphy, G. J. *C*-algebras and operator theory.* Academic press, 2014.

[19] Ol'shanskii, A. Y. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Mathematical Surveys 35*, 4 (1980), 180–181.

[20] Ozawa, N. Amenable actions and exactness for discrete groups. *arXiv preprint math/0002185* (2000).

[21] Paterson, A. L. *Amenability.* No. 29. American Mathematical Soc., 2000.

[22] Quigg, J. C. Discrete c*-coactions and c*-algebraic bundles. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A) 60*, 02 (1996), 204–221.

[23] Runde, V. *Lectures on amenability.* No. 1774. Springer Science & Business Media, 2002.

[24] Williams, D. P. *Crossed products of C*-algebras.* No. 134. American Mathematical Soc., 2007.