

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Problemas fracionários de
Cauchy com operadores quase
setoriais

Marduck Montoya Henao
Orientador: Prof. Dr. Paulo M. de Carvalho Neto

Florianópolis
Fevereiro de 2018

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Problemas fracionários de Cauchy com
operadores quase setoriais

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Marduck Montoya Henao
Florianópolis
Fevereiro de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Henao, Marduck Montoya

Problemas fracionários de Cauchy com operadores
quase setoriais / Marduck Montoya Henao ;
orientador, Paulo M. de Carvalho Neto, 2018.
149 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

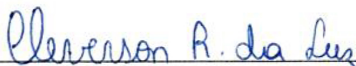
1. Matemática Pura e Aplicada. 2. cálculo
fracionário. 3. operador setorial. 4. operador
quase setorial. I. Carvalho Neto, Paulo M. de . II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III.
Título.

Problemas fracionários de Cauchy com operadores quase setoriais

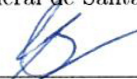
por

Marduck Montoya Henao¹

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.



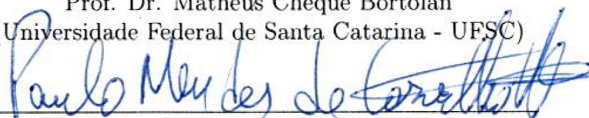
Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)



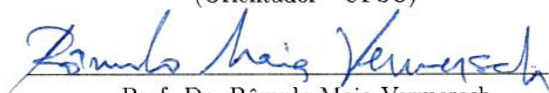
Profa. Dra. Gabriela del Valle Planas
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)



Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
(Orientador - UFSC)



Prof. Dr. Rômulo Maia Vermersch
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2018.

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Problemas fracionários de Cauchy com operadores quase setoriais

por

Marduck Montoya Henao¹

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
(Coordenador da Pós-Graduação)

Florianópolis, Fevereiro de 2018.

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus por suas infinitas misericórdias e me permitir chegar até aqui.

Meus pais e irmãs que sempre estiveram comigo ainda que distantes para me dar ânimo, alegrias e energia para continuar.

Ao meus colegas e amigos na matemática que lutaram comigo até o final do mestrado com quem compartilhei minhas alegrias e superei minhas lutas. Também agradecer aos meus amigos colombianos que sempre me fizeram sentir em família com os almoços e jantas para sair da rotina.

Ao professor Matheus Bortolan com quem fiz o curso de verão para ingressar ao mestrado, quem sempre se preocupa com a formação acadêmica, bem estar mental e psicológico de seus alunos. Sou grata por seus conselhos e sinceridade em momentos muito difíceis de minha vida.

A todos os professores que fizeram parte de minha formação durante o mestrado, sou muito grata a eles por compartilhar seu conhecimento e conselhos que foram uma base importante para a dissertação e também para minha vida. Em especial ao professor Rômulo Maia Vermersch e o professor Danilo Royer.

Ao meu orientador, professor Dr. Paulo M. de Carvalho Neto por sua enorme paciência e compreensão, por sua admirável vontade de ensinar e aprender e por me ajudar em tudo. Ele foi meu salvador em todas as disciplinas do mestrado, sempre me deu ânimo, não somente foi meu professor de matemática, mas também foi meu professor de português e inglês. Sou grata por todos seus conselhos, sua confiança e por me mostrar que tinha capacidade para enfrentar esta dissertação

ainda quando eu achava que não ia ter a capacidade. Estou infinitamente agradecida.

Ao departamento de matemática pura e aplicada da UFSC pela oportunidade de fazer o mestrado e ao CNPq pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

O estudo da teoria do cálculo fracionário é uma questão de interesse atual em muitas áreas da ciência e engenharia. Motivados por essa justificativa, dedicamos este trabalho ao estudo das equações diferenciais abstratas com derivadas fracionárias na variável do tempo.

Em um primeiro momento introduzimos todos os pré-requisitos para o estudo dos semigrupos analíticos e seus geradores; abordamos ainda a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais abstratas clássicas com operadores setoriais.

Depois introduzimos todos os conceitos básicos necessários para o entendimento das derivadas fracionárias de Caputo, das funções de Mittag-Leffler, das funções de tipo Wright e por fim estudamos a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais abstratas com derivadas fracionárias na variável do tempo e operadores setoriais.

Finalmente abordamos os operadores quase setoriais e as equações diferenciais abstratas com derivadas fracionárias na variável do tempo relacionadas a estes operadores; discutimos uma justificativa do motivo de se estudar este tipo de operador e analisamos a existência e unicidade de soluções mild e clássica para este problema, tanto no caso linear quanto no caso não linear.

Palavras chaves: cálculo fracionário, operador quase setorial, operador setorial, solução mild, solução clássica.

Abstract

The study of the fractional calculus theory is a matter of current interest in many areas of science and engineering. This is why we dedicate this work to the study of the abstract differential equations with time fractional derivatives.

At first we introduced the prerequisites for the study of the analytic semigroups and their generators; we also discuss the existence and uniqueness of solutions for classical abstract differential equations with sectorial operators.

Then we introduce the basic concepts concerning Caputo fractional derivative, the Mittag-Leffler functions, the Wright-type functions and finally we address the existence and uniqueness of solutions for abstract differential equations with time fractional derivatives and sectorial operators.

Finally we discuss the almost sectorial operators and the abstract differential equations with time fractional derivatives related to them; we discuss some reasons for the study of this kind of operator and analyze the existence and uniqueness of mild and classical solutions to this problem, both in the linear and nonlinear case.

Keywords: fractional calculus, almost sectorial operator, sectorial operator, mild solution, classical solution.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	11
1.1 Análise espectral de operadores lineares	11
1.2 Semigrupos	21
1.3 Operadores setoriais	48
1.4 Potências fracionárias para operadores setoriais	58
2 Cálculo fracionário	66
2.1 Pré-requisitos	67
2.1.1 Transformada de Laplace	67
2.1.2 A função Gamma e a função Beta	69
2.1.3 A convolução	70
2.1.4 Função geral de Mittag-Leffler	72
2.1.5 A função de tipo Wright	73
2.2 Derivada e integral de ordem fracionária	75
2.2.1 Uma introdução aos problemas fracionários de Cauchy	78
2.3 Operadores de Mittag-Leffler	81
3 Problemas fracionários com operadores quase setoriais	88
3.1 Uma introdução ao cálculo funcional H^∞	89
3.2 Estudo dos operadores $S_\alpha(t)$ e $P_\alpha(t)$	99
3.3 O problema linear	108
3.4 O problema não-linear	117
3.5 Um exemplo de aplicação da teoria	124
4 Conclusão	127

Introdução

Nesta dissertação temos como objetivo principal o estudo das equações diferenciais com operadores quase setoriais e derivadas fracionárias no tempo. Mais especificamente, estamos interessados em abordar o problema abstrato

$$\begin{cases} {}_cD_t^\alpha u(t) &= -Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad (1)$$

com $\alpha \in (0, 1)$, ${}_cD_t^\alpha$ denotando a derivada fracionária de Caputo de ordem α , A um operador quase setorial, f uma função adequada (hipóteses adicionais serão requisitadas mais adiante no texto) e u_0 uma condição inicial pertencendo a um espaço de Banach X .

É claro que para um estudo completo dos assuntos propostos neste texto, discutimos de forma bastante detalhada vários conceitos introdutórios, tais como: operadores fecháveis, operadores fechados, operadores setoriais, semigrupos fortemente contínuos e os semigrupos analíticos. Estes tópicos são de fundamental importância para o estudo de diversas equações diferenciais clássicas da literatura matemática. Utilizamos como alicerces para nossos estudos iniciais os livros de Henry e Taylor-Lay, os quais estão descritos nas referências bibliográficas respectivamente por [25, 69].

Os principais assuntos que este manuscrito aborda foram desenvolvidos a partir de uma pesquisa detalhada do artigo de Wang-Chen-Xiao [72] e de uma série de outros estudos paralelos baseados nos artigos [3–5, 59], e por isso, para que este texto fique mais interessante, optamos por motivar durante esta introdução dois dos principais tópicos matemáticos que desenvolvemos nesta dissertação.

O CÁLCULO FRACIONÁRIO

Os principais objetos pesquisados na teoria do cálculo fracionário, sem dúvida, são as derivadas e integrais de ordem não inteira. Muito

embora os estudos dedicados a esta teoria não sejam recentes (para mais detalhes veja [44, 45, 64]), podemos enfatizar que a pesquisa mais rigorosa e profunda, principalmente com relação as equações diferenciais, é relativamente nova.

É interessante destacar que a falta de aplicabilidade durante os primórdios desta teoria, foi um dos principais fatores que colaboraram para o lento desenvolvimento da área. Porém, a recente mudança de paradigma no contexto das aplicações do cálculo fracionário (veja alguns exemplos em [24, 37, 46, 51, 53, 60, 65, 66], e nas referências citadas por estes trabalhos), não só atraiu a atenção de diversos pesquisadores, mas também resultou em um grande aumento das publicações sobre este assunto em revistas de alto impacto na sociedade matemática; como alguns exemplos nos últimos anos, veja [1, 9, 12, 13, 21, 36, 40, 42, 62, 70].

Segundo B. Ross [63], historicamente o início do cálculo fracionário data de 1675, quando Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou suas pesquisas que introduziam o símbolo

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n},$$

o qual referia-se à derivada da ordem n da função $y(x)$, com relação a variável x . Foi então que em 1695, G. F. Antoine, também conhecido como Marquês de L'Hôpital (1661-1704), questionou a G. W. Leibniz sobre o que aconteceria se n fosse igual a $1/2$. Leibniz responde de forma intuitiva (ver mais detalhes em [44, 48]) que:

“Bernoulli seems to have told you of my having mentioned to him a marvelous analogy which makes it possible to say in a way that successive differentials are in geometric progression. One can ask what would be a differential having as its exponent a fraction. You see that the result can be expressed by an infinite series. Although this seems removed from Geometry, which does not yet know of such fractional exponents, it appears that one day these paradoxes will yield useful consequences, since there is hardly a paradox without utility. Thoughts that mattered little in themselves may give occasion to more beautiful ones.”

Nesta mesma carta Leibniz dá uma aproximação do que poderia ser uma derivada de ordem não inteira, tomando como exemplo a derivada $1/2$ da função $y(x) = x$,

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x = x \sqrt{dx : x}.$$

Aproximadamente trinta anos após essa comunicação entre L'Hôpital e Leibniz, Euler escreveu uma nota sobre a necessidade de uma teoria de interpolação entre séries que poderiam auxiliar nesta definição fracionária para uma derivada:

“Concerning transcendental progressions whose terms cannot be given algebraically: when n is a positive integer, the ratio $d^n f/dx^n$ can always be expressed algebraically. Now it is asked: what kind of ratio can be made if n be a fraction? ... the matter may be expedited with the help of the interpolation of series, as explained earlier in this dissertation.”

Em suas notas, B. Ross parece não saber ao certo de qual dissertação Euler estava se referindo, mas de qualquer forma ressalta, de maneira muito enfática, que foi Euler um dos primeiros a introduzir as funções

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx,$$

que são de fundamental importância para o estudo do cálculo fracionário (as funções acima são respectivamente a função Gamma e a função Beta; veja a Seção 2.1 para maiores detalhes).

Seguindo essa linha, em 1730, Euler aplicou sua fórmula de interpolação do fatorial de um número inteiro positivo para dar uma possível definição para a derivada de ordem fracionária; em 1812 Laplace define a derivada fracionária por meio de uma integral.

Foi apenas em 1819 que surgiu a primeira discussão sobre derivadas fracionárias em um texto de cálculo escrito por S. F. Lacroix. Em seu livro de 700 páginas intitulado “*Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*”, ele responde a pergunta de G. F. Antoine, Marquês de L'Hôpital, procedendo da seguinte forma: tomando a função $y(x) = x^n$, é fácil notar que

$$\frac{d^m}{dx^m} y(x) = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}, \quad (2)$$

sempre que $n \geq m$. Mas então, ao utilizar a representação do fatorial pela função Gamma de Euler, Lacroix reinterpretou a equação (2) como

$$\frac{d^m}{dx^m} y(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} x^{n-m}. \quad (3)$$

Da analiticidade da função Gamma, ao fixar $m = 1/2$ e $n = 1$, a equação (3) se reescreve como

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}x^{1/2} = \frac{2}{\Gamma(1/2)}x^{1/2},$$

que por fim, do fato que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, satisfaz

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Vale a pena observar que este é o mesmo resultado sustentado hoje em dia pela definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville, amplamente aceita na sociedade matemática.

Deixaremos a história de lado a partir deste ponto, porém é importante ressaltar que foram muitas as pessoas que continuaram contribuindo neste ramo da matemática; de fato mais adiante neste texto introduziremos e discutiremos rigorosamente estas derivadas, priorizando a derivada fracionária de Caputo (veja a Definição 2.24 para mais detalhes), que é uma das mais recentes versões de derivada fracionária estudada hoje em dia.

OPERADORES QUASE SETORIAIS

Em geral quando estudamos equações diferenciais do tipo (1) supomos que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é fechado, densamente definido e que gera um semigrupo fortemente contínuo, digamos $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, que satisfaz certas propriedades adequadas (veja o Teorema 1.26 para uma justificativa mais completa).

Porém, existe uma classe de operadores lineares fechados e densamente definidos, chamados de operadores setoriais, que garantem mais propriedades para o semigrupo que eles geram; por exemplo, para cada $x \in X$, a aplicação

$$[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X,$$

tem uma extensão analítica em um certo setor do plano complexo contendo o intervalo real $[0, \infty)$ (para mais detalhes veja o Teorema 1.44).

Uma outra justificativa que corrobora a importância dos operadores setoriais é que eles descrevem muitas das equações diferenciais que tem aplicações diretas, como a equação de reação difusão e as equações de Navier-Stokes. É por isso que a teoria de operadores setoriais é bastante vasta e possui uma enorme literatura a disposição; Alguns textos clássicos são [25, 27, 28, 35].

Por outro lado, existem algumas equações diferenciais que não estão relacionadas com operadores setoriais. Ainda assim, necessitam de estudo; é por isso que introduzimos o conceito de operadores quase setoriais.

Para exemplificar uma destas situações (este estudo foi feito por Arrieta-Carvalho-Lozada-Cruz em [3–5]), considere

$$\Omega_\epsilon := D_1 \cup R_\epsilon \cup D_2,$$

com D_1 e D_2 domínios com fronteira suave, disjuntos e limitados em \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), unidos por um canal R_ϵ , com $\epsilon \in (0, 1]$, que degenera para um segmento de linha R_0 , quando o parâmetro ϵ tende a zero, como nas Figuras 1 e 2. Tais domínios são chamados de tipo Dumbbell, ou apenas Dumbbell para facilitar.

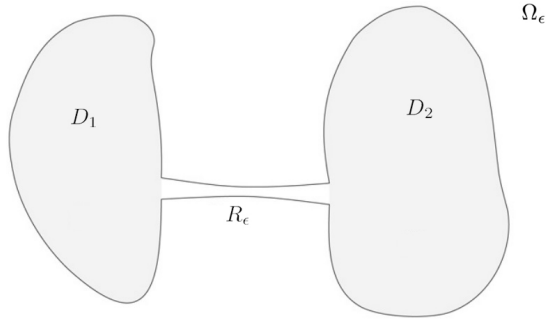


Figura 1: Domínio Dumbbell.

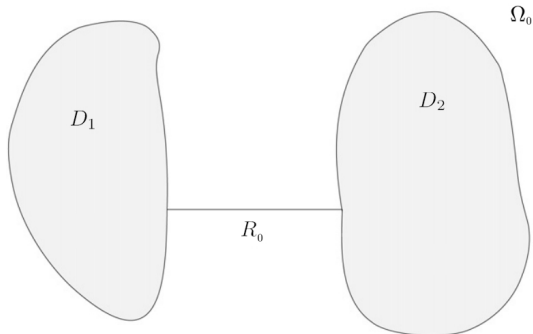


Figura 2: Limite do Domínio Dumbbell.

Considere então a equação diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = f(u), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\epsilon, \end{cases} \quad (4)$$

com Δ simbolizando o operador Laplaciano com respeito a variável $x \in \Omega_\epsilon$, $\partial\Omega_\epsilon$ a fronteira de Ω_ϵ , $\frac{\partial}{\partial n}$ denotando a derivada normal exterior em $\partial\Omega_\epsilon$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dissipativa não linear, isto é, que satisfaz

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} < 1.$$

Agora, ao considerarmos o limite formal $\epsilon \rightarrow 0$, temos que a equação diferencial (4) também se deformará em outras equações; tais equações limites estão definidas em $\Omega_0 = D_1 \cup R_0 \cup D_2$ e são dadas pelo sistema de equações

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + w = f(w), & x \in D_1 \cup D_2, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial(D_1 \cup D_2), \\ v_t - L(v) + v = f(v), & s \in R_0, \\ v(p_0) = w(p_0), & v(p_1) = w(p_1), \end{cases}$$

com w uma função definida em $D_1 \cup D_2$, v uma função definida no segmento de linha R_0 , L um operador diferencial que vai depender da geometria do canal R_0 e por fim, p_0 e p_1 os pontos de interseção entre R_0 e $D_1 \cup D_2$.

Para simplificar as ideias que discutiremos a frente, assumimos que $R_0 := \{(x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N : 0 < x < 1\}$ e, portanto, que o problema limite é dado por:

$$\begin{cases} w(t) - \Delta w + w = f(w), & x \in D_1 \cup D_2, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial(D_1 \cup D_2), \\ v_t - \frac{1}{g}(gv_x)_x + v = f(x, v), & x \in (0, 1), \\ v(0) = w(P_0), & v(1) = w(P_1), \end{cases} \quad (5)$$

com $P_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $P_1 = (1, 0, \dots, 0)$ sendo os pontos de junção entre o segmento de linha R_0 e o conjunto aberto $D_1 \cup D_2$. A função g está relacionada com a forma pela qual a geometria do canal R_ϵ colapsa no segmento de linha R_0 e, por estar fora do escopo desta dissertação, nos referimos a [3] para mais detalhes.

Para tratar o problema (5), assumamos que g é uma função positiva suficientemente regular e que $p \in [1, \infty)$. Então considere os espaços de Banach $V_\epsilon^p := L^p(\Omega_\epsilon)$, com $\epsilon \in (0, 1)$, munido da norma

$$\|u_\epsilon\|_{V_\epsilon^p}^p = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\epsilon^{N-1}} \int_{R_\epsilon} |u_\epsilon|^p dx,$$

e para $\epsilon = 0$, defina o espaço de Banach

$$V_0^p := \left\{ (w, v) \in L^p(\Omega) \times L^p(0, 1) : \int_0^1 g|v|^p dx < \infty \right\},$$

com norma dada por

$$\|(w, v)\|_{V_0^p}^p = \int_\Omega |w|^p dx + \int_0^1 g|v|^p dx.$$

Considerando então o operador linear $A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset V_\epsilon^p \rightarrow V_\epsilon^p$ dado por

$$A_\epsilon(u) = -\Delta u + u, \text{ para } 0 < \epsilon \leq 1,$$

com

$$D(A_\epsilon) = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega_\epsilon) : \Delta u \in V_\epsilon^p, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega_\epsilon \right\},$$

e o operador $A_0 : D(A_0) \subset V_0^p \rightarrow V_0^p$ dado por

$$A_0(w, v) = \left(-\Delta w + w, -\frac{1}{g}(gv_x)_x + v \right),$$

com

$$D(A_0) = \{(w, v) \in V_0^p : w \in D(\Delta_N), (gv_x)_x \in L_g^p(0, 1), \\ v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1)\},$$

podemos reinterpretar (4) e (5) como sendo os respectivos problemas de Cauchy abstratos

$$\begin{cases} u_t = -A_\epsilon u + F_\epsilon(u), & t > 0, \\ u(0) \in X_\epsilon, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_t = -A_0 u + F_0(u), & t > 0, \\ u(0) \in X_0. \end{cases} \quad (6)$$

Um dos pontos difíceis para o tratamento do problema (6) no espaço V_0^p , é que A_0 não é um operador setorial, já que seu espectro contém um setor S_θ , para algum $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, exatamente como no caso setorial, porém o seu operador resolvente satisfaz uma estimativa distinta;

$$\|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0^p, V_0^p)} \leq \frac{M}{|\lambda|^{\sigma+1}},$$

para cada $\lambda \in S_\theta$ e $0 < \sigma < 1 - \frac{N}{2p} < 1$ (para uma prova detalhada desta estimativa, busque pela Proposição 3.1 em [4]).

Dizemos que esta estimativa é deficiente, já que $0 < \sigma < 1$. Caso $\sigma = 1$, poderíamos aplicar a teoria padrão de operadores setoriais. Essa deficiência vem da condição de continuidade que precisamos impor em $D(A_0)$, principalmente pela geometria da junção de $D_1 \cup D_2$ e R_0 .

Exatamente como discutimos mais adiante nesta dissertação, neste caso particular A_0 de fato continuará sendo gerador de uma família de operadores $\{T_0(t) : t \geq 0\}$, porém só conseguiremos garantir a continuidade da aplicação

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow T_0(t)(w, v) \in V_0^p,$$

em $t = 0$ para dados $(w, v) \in D(A_0)$.

Uma justificativa mais direta para este comportamento é que conseguimos demonstrar apenas a estimativa

$$\|T_0(t)\|_{\mathcal{L}(V_0^p, V_0^p)} \leq Ct^{-1+\sigma},$$

para algum $0 < \sigma < 1$, dependendo de p e N , ou seja, que a existência de uma singularidade em $t = 0$, para algum $x \in V_0^p$, é bastante razoável.

Observe porém que um operador setorial não é necessariamente quase setorial, ou mesmo o contrário (veja o Exemplo 3.5 ou as literaturas [59, 71] como fontes de outras situações).

Muito embora os domínios de tipo Dumbbell possam parecer artificiais, servindo apenas de justificativa para o estudo de operadores quase setoriais, vale a pena observar que S. Jimbo realizou diversos estudos sobre estes domínios, os quais foram bastante anteriores as discussões que os relacionaram a este tipo de operador; veja alguns destes estudos em [32–34].

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o propósito de estudar a teoria dos operadores setoriais, quase setoriais e o cálculo fracionário, dividimos esta dissertação em 4 capítulos. No *Capítulo 1* apresentamos a parte teórica base para compreender as diferentes características dos operadores lineares, discutimos

um pouco a teoria dos semigrupos e por fim introduzimos os operadores setoriais, os semigrupos analíticos e as potências fracionárias de operadores setoriais. No *Capítulo 2* apresentamos a transformada de Laplace, as funções Gamma e Beta, a função de tipo Wright, ferramentas para entender a derivada e integral de ordem fracionária dada por Caputo e os operadores de Mittag-Leffler. O *Capítulo 3* é dedicado ao estudo dos operadores quase setoriais, suas potências fracionárias e os semigrupos gerados por estes operadores. Tomamos ainda um problema abstrato de Cauchy, com derivada temporal fracionária, e provamos a existência e unicidade de solução. Para encerrar temos o *Capítulo 4* que faz um fechamento de todo o texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo estabelecemos as definições e ferramentas básicas mais importantes que são utilizadas no decorrer deste trabalho. Abordamos alguns resultados da Análise Funcional em espaços de Banach, algumas propriedades espectrais de operadores lineares e a teoria dos semigrupos (veja mais detalhes nas literaturas clássicas [7, 25, 69, 78]).

A partir deste ponto, denotaremos por \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C} os números naturais, reais e complexos, respectivamente, e por X e Y espaços de Banach complexos.

1.1 Análise espectral de operadores lineares

Nesta seção introduzimos conceitos e resultados necessários para discutirmos as propriedades fundamentais de alguns operadores lineares definidos em espaços de Banach.

Considere a função $T : X \rightarrow Y$. Diremos que T é uma transformação linear, se para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ valem as igualdades

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{e} \quad T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Uma transformação linear $T : X \rightarrow Y$ é chamada de transformação linear limitada quando existe $M > 0$ tal que

$$\|Tv\|_Y \leq M\|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

O espaço de todas as transformações lineares limitadas de X em Y é o

espaço de Banach $\mathcal{L}(X, Y)$, com norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

Observação 1.1. Algumas considerações pertinentes são:

- i) Quando $X = Y$ denotaremos o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ apenas por $\mathcal{L}(X)$.
- ii) Se $X \subset Y$ e T for uma transformação linear, trocamos a notação X por $D(T)$ e passamos a escrever $T : D(T) \subset Y \rightarrow Y$ e a chamar T de operador linear ($D(T)$ é a notação para domínio do operador T).
- iii) Para qualquer transformação linear T tem-se:

$$T \text{ é contínua} \Leftrightarrow T \text{ é limitada.}$$

Agora fazemos uma pequena apresentação da teoria espectral, onde discutimos algumas definições e resultados importantes.

Definição 1.2. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, é composto por todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- i) $(\lambda - A)$ é injetor.
- ii) $\overline{Im(\lambda - A)} = X$.
- iii) $(\lambda - A)^{-1} : Im(\lambda - A) \subset X \rightarrow X$ é limitado.

Por fim, o espectro do operador A é definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Observação 1.3. i) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, chamamos o operador linear $(\lambda - A)^{-1}$ de operador resolvente.

- ii) Na notação $(\lambda - A)$, apresentada na definição acima, omitimos o operador identidade de X , mas na realidade estamos nos referindo ao operador $(\lambda I_X - A)$. Optamos por essa notação para facilitar a leitura do texto.

No que segue introduzimos um teorema e seu corolário, os quais desempenham um papel importante nas demonstrações dos teoremas que desenvolvemos nesta seção.

Teorema 1.4. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, então $(1 - A)^{-1}$ existe e define um operador limitado em X .*

Demonstração. Considere o operador $A_n \in \mathcal{L}(X)$, dado por

$$A_n := \sum_{k=0}^n A^k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Como $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, a sequência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, e portanto podemos definir o operador

$$A_{\infty} := \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathcal{L}(X).$$

Agora observe que

$$A_n(I_X - A) = 1 - A^{n+1} = (1 - A)A_n,$$

e como $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$A_{\infty}(1 - A) = I_X = (1 - A)A_{\infty}.$$

Os cálculos desenvolvidos acima nos permitem concluir que

$$(1 - A)^{-1} := \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Por fim, das propriedades das séries geométricas, obtemos a desigualdade

$$\|(1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n = \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}} < \infty,$$

como queríamos. □

Corolário 1.5. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n.$$

Quando trabalhamos com equações diferenciais parciais, muitas vezes somos forçados a considerar uma classe de operadores lineares que são ilimitados de X em X . Embora tais operadores não sejam contínuos, verifica-se que muitos deles, uma vez que o domínio seja adequadamente selecionado, pertencem a uma classe especial, a qual chamamos de operadores fechados.

Definição 1.6. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é um operador fechado, se para toda sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, com $x_n \rightarrow x \in X$ e $Ax_n \rightarrow y \in X$, quando $n \rightarrow \infty$, tem-se

$$x \in D(A) \quad \text{e} \quad Ax = y.$$

Definimos o **gráfico** de A em $X \times X$ por

$$G(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}.$$

Observação 1.7. A Definição 1.6 é equivalente a seguinte sentença: A é fechado se, e somente se, seu gráfico é um subconjunto fechado de $X \times X$. Podemos ainda enfatizar que:

- i) O fato do operador linear A ser fechado não é suficiente para garantir que A seja também limitado. Considere, por exemplo, o operador linear

$$A : C^1([0, 1], \mathbb{C}) \subset C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

com

$$A(\phi) = \phi',$$

e assuma que

$$\|\phi\|_{C([0,1],\mathbb{C})} = \sup_{t \in [0,1]} |\phi(t)|.$$

Então por teoremas clássicos da análise, concluímos que A é um operador fechado. Para concluir que A não é um operador limitado, basta observar que

$$n = \|ne^{-nt}\|_{C([0,1],\mathbb{C})} = \|A(e^{-nt})\|_{C([0,1],\mathbb{C})} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(C([0,1],\mathbb{C}))},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ii) Se o operador linear A é limitado, não necessariamente A é fechado. De fato, seja por exemplo

$$A : C^1([0, 1], \mathbb{C}) \subset C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

fixe $p \in C([0, 1], \mathbb{C})$ e defina

$$A(\phi) = p\phi.$$

Como $p \in C([0, 1], \mathbb{C})$, o operador A é claramente limitado. Porém, como podemos aproximar funções contínuas e não diferenciáveis por polinômios, então é fácil de verificar que A não pode ser fechado pois seu domínio nos “atrapalha”.

iii) No entanto, se $D(A) = X$, então A é limitado se, e somente se, é fechado. Esse resultado segue do clássico Teorema do Gráfico Fechado.

Definição 1.8. Dizemos que um operador linear $A_0 : D(A_0) \subset X \rightarrow X$ é fechável, se para toda sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, com $x_n \rightarrow 0 \in X$ e $Ax_n \rightarrow y \in X$, quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $y = 0$.

Observação 1.9. Uma interessante caracterização dos operadores fecháveis é a seguinte: um operador linear $A_0 : D(A_0) \subset X \rightarrow X$ é fechável, se o fecho do gráfico de A_0 em $X \times X$ é o gráfico de um operador fechado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. O operador A é chamado de fecho de A_0 . Em geral denotamos o fecho de A_0 por $\overline{A_0}$.

Três lemas importantes que vão nos ajudar a justificar o motivo de nos restringimos apenas a operadores fechados, são os seguintes.

Lema 1.10. *Suponha que um operador linear $A_0 : D(A_0) \subset X \rightarrow X$ tenha conjunto resolvente $\rho(A_0)$ não vazio. Se para algum $\lambda \in \rho(A_0)$, $(\lambda - A_0)^{-1}$ for injetor, então A_0 é fechável.*

Demonstração. Se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A_0)$ satisfaz

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad A_0 x_n \rightarrow y,$$

quando $n \rightarrow \infty$, precisamos apenas garantir que $y = 0$ para concluir que A_0 é fechável.

Inicialmente observe que se $\lambda \in \rho(A_0)$, então

$$(\lambda - A_0)^{-1} : \text{Im}(\lambda - A_0) \subset X \rightarrow X$$

é um operador limitado (e portanto fechável), e assim existe $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}}$.

Então, assumamos que $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ é tal que $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}$ é injetor e defina a sequência $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \text{Im}(\lambda_0 - A_0)$, por

$$y_n = (\lambda_0 - A_0)x_n.$$

Note que

$$y_n \rightarrow -y \quad \text{e} \quad x_n \rightarrow 0,$$

tal que $x_n = \overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}y_n$ e como $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}$ é fechado, temos

$$\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}y = 0.$$

É claro que da injetividade, suposta acima, concluímos por fim que $y = 0$, como queríamos. \square

Lema 1.11. *Assuma que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador fechado e que $\lambda \in \rho(A)$. Então $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. Considere $\lambda \in \rho(A)$. Se concluirmos que

$$Im(\lambda - A) = X,$$

segue da definição de conjunto resolvente que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Para isso tome $x \in X$ qualquer. Pela definição de conjunto resolvente, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Im(\lambda - A)$ tal que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ tal que $(\lambda - A)y_n = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que a sequência

$$\{(\lambda - A)^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

é de Cauchy e portanto, existe $y \in X$ tal que $y_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$.

Juntando o fato de que $(\lambda - A)$ é um operador fechado com

$$y_n \rightarrow y \quad \text{e} \quad (\lambda - A)y_n \rightarrow x,$$

deduzimos que $y \in D(A)$ e que $(\lambda - A)y = x$, isto é, $x \in Im(\lambda - A)$. □

Lema 1.12. *Se $A_0 : D(A_0) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechável, com $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seu fecho, então $\rho(A_0) = \rho(A)$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$. Pelo Lema 1.11 $(\lambda - A)^{-1}$ é um operador limitado de X em X .

Como A é uma extensão do operador A_0 , concluímos que existe $(\lambda - A_0)^{-1} : Im(\lambda - A_0) \rightarrow X$ e que este operador é limitado. Falta apenas concluirmos que

$$\overline{Im(\lambda - A_0)} = X,$$

para que $\lambda \in \rho(A_0)$. Escolha então

$$y \in X \quad \text{e defina} \quad x = (\lambda - A)^{-1}y.$$

Da Observação 1.9, como $(x, y) \in G(\lambda - A)$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A_0)$, tal que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{e} \quad (\lambda - A_0)x_n \rightarrow y,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo $y \in \overline{Im(\lambda - A_0)}$, ou seja, $X \subset \overline{Im(\lambda - A_0)}$.

Como trivialmente temos

$$\overline{Im(\lambda - A_0)} \subset X,$$

vale a igualdade $\overline{Im(\lambda - A_0)} = X$, como queríamos.

Por outro lado, se $\lambda \in \rho(A_0)$, então

$$(\lambda - A_0)^{-1} : Im(\lambda - A_0) \rightarrow X$$

é um operador limitado e $\overline{Im(\lambda - A_0)} = X$.

Mostremos que $(\lambda - A)$ é injetor. Seja $x \in D(A)$ satisfazendo a igualdade $(\lambda - A)x = 0$. Da Observação 1.9 existe uma seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A_0)$, tal que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{e} \quad (\lambda - A_0)x_n \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como $(\lambda - A_0)^{-1}$ é limitada segue que $x = 0$.

Com uma justificativa similar, mostramos ainda que

$$(\lambda - A)^{-1} : Im(\lambda - A) \rightarrow X$$

é um operador limitado. De fato, seja $y \in Im(\lambda - A)$ e assumamos que $x \in D(A)$ seja tal que $(\lambda - A)x = y$. Novamente a Observação 1.9 garante que existem seqüências

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset G(\lambda - A_0),$$

tais que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{e} \quad y_n \rightarrow y,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Porém a sentença acima pode ser reinterpretada como

$$(\lambda - A_0)^{-1}y_n \rightarrow (\lambda - A)^{-1}y \quad \text{e} \quad y_n \rightarrow y,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, através da continuidade de $(\lambda - A_0)^{-1}$ e de um argumento de limite, deduzimos que

$$\|(\lambda - A_0)^{-1}y_n\|_X \leq c\|y_n\|_X \implies \|(\lambda - A)^{-1}y\|_X \leq c\|y\|_X.$$

Por fim, como $Im(\lambda - A_0) \subset Im(\lambda - A)$, temos que $\overline{Im(\lambda - A)} = X$, ou seja, $\lambda \in \rho(A)$. \square

Basicamente o primeiro lema diz que um operador que tem conjunto resolvente não vazio e

$$\overline{(\lambda - A_0)^{-1}} \quad \text{é injetor para algum} \quad \lambda \in \rho(A_0)$$

é fechável, enquanto que o terceiro lema diz que, se um operador é fechável, então o seu conjunto resolvente e de seu fecho, coincidem. Como gostaríamos de estudar operadores que não tem resolvente vazio, fica claro que o estudo dos operadores fechados é suficiente para uma boa completude desta teoria.

Com isso conseguimos reformular o conjunto resolvente, para o caso de operadores fechados, da seguinte maneira.

Proposição 1.13. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. O conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, é composto por todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda - A) : X \rightarrow X$ é bijetor e $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Por outro lado, $\sigma(A)$ é composto pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda - A) : X \rightarrow X$ não é bijetor ou $(\lambda - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)$.*

Vamos, por hora, retomar o estudo do conjunto resolvente no caso dos operadores fechados. Nosso intuito é entender um pouco melhor esta teoria.

Teorema 1.14. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. Então $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de \mathbb{C} e, conseqüentemente, $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado. Se $\lambda \in \rho(A)$ é tal que*

$$|\lambda - \mu| \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

para algum $\mu \in \mathbb{C}$, então $\mu \in \rho(A)$ e ainda

$$(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (\lambda - A)^{-n-1}.$$

Demonstração. Como na hipótese do teorema, considere $\lambda \in \rho(A)$ e $\mu \in \mathbb{C}$, tais que

$$|\lambda - \mu| \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Observe que a identidade

$$(\mu - A) = (\lambda - A) [I_X - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}]$$

e o Teorema 1.4 garantem que $(\mu - A)$ é inversível, e que

$$\begin{aligned} (\mu - A)^{-1} &= [I_X - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}]^{-1} (\lambda - A)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (\lambda - A)^{-n} (\lambda - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (\lambda - A)^{-n-1}.$$

Por fim, para qualquer $\lambda \in \rho(A)$, se escolhermos

$$r_\lambda \in \left(0, \frac{1}{\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}\right),$$

então a construção feita acima garante

$$B_{r_\lambda}(\lambda) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < r_\lambda\} \subset \rho(A),$$

ou seja, que $\rho(A)$ é aberto. □

O resultado abaixo é conhecido como igualdade do resolvente e é de muita importância para a teoria espectral de operadores lineares.

Teorema 1.15. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \quad (1.1)$$

e

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \quad (1.2)$$

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned} (\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\mu - A) + (\lambda - \mu)](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Logo $(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}$, o que prova (1.1). A prova de (1.2) é análoga. □

Neste ponto apresentamos o último resultado desta seção que garante a analiticidade do operador resolvente, um operador muito importante em nossos estudos.

Corolário 1.16. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. Então a função*

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

é analítica em $\rho(A)$ e

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n! (\lambda - A)^{-n-1}.$$

Demonstração. Vamos verificar que o operador resolvente é contínuo em todo $\lambda \in \rho(A)$. Para isso, escolha μ pertencente a bola aberta centrada em λ e com raio

$$\frac{1}{2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

O Teorema 1.14 garante que $\mu \in \rho(A)$ e que

$$(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (\lambda - A)^{-n-1}.$$

Com isso, deduzimos a desigualdade

$$\begin{aligned} \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \mu|^n \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= 2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}. \end{aligned}$$

Então o Teorema 1.15 nos permite verificar a desigualdade

$$\|(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2|\mu - \lambda| \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^2,$$

e portanto que

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \|(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0,$$

provando assim que $\rho(A) \ni \lambda \rightarrow (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é contínua. Por fim, novamente pelo Teorema 1.15, concluímos que

$$\frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda} = -(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1},$$

e pela continuidade de $(\lambda - A)^{-1}$,

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \left(\frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda} \right) = -(\lambda - A)^{-2},$$

ou seja, $(\lambda - A)^{-1}$ é analítica. Temos ainda que

$$(\lambda - A)^{-n} - (\mu - A)^{-n} = [(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] \circ [(\lambda - A)^{-n+1} +$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda - A)^{-n+2}(\mu - A)^{-1} + \dots \\
& \dots + (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-n+2} + (\mu - A)^{-n+1}],
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-n} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \left(\frac{(\lambda - A)^{-n} - (\mu - A)^{-n}}{\lambda - \mu} \right) = -n(\lambda - A)^{-n-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} &= -(\lambda - A)^{-2}, \\
\frac{d^2}{d\lambda^2}(\lambda - A)^{-1} &= \frac{d}{d\lambda}(-(\lambda - A)^{-2}) = 2(\lambda - A)^{-3},
\end{aligned}$$

e fazendo este processo n -vezes, por indução, verificamos que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n! \frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-n-1}.$$

□

1.2 Semigrupos

Nesta seção apresentamos o básico da teoria de semigrupos de operadores lineares, assunto fundamental para o estudo da existência e unicidade de soluções para uma equação diferencial. Para uma abordagem mais detalhada, veja [2, 17, 18, 20, 25, 43, 57].

Definição 1.17. Um semigrupo de operadores lineares em X , é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ que satisfaz:

- i) $T(0) = I_X$.
- ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 1.18. Se a família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ define um semigrupo de operadores lineares em X , temos as seguintes possibilidades:

- i) $\|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \mapsto 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, e nesse caso chamamos este semigrupo de uniformemente contínuo.
- ii) $\|T(t)x - x\|_{\mathcal{L}(X)} \mapsto 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, para cada $x \in X$, e nesse caso chamamos este semigrupo de fortemente contínuo ou de C_0 -semigrupo.

Observação 1.19. É interessante enfatizar que todo semigrupo uniformemente contínuo é fortemente contínuo, porém a recíproca não é verdadeira. Um exemplo desse fato pode ser ilustrado pelo semigrupo de translações; considere a família de operadores lineares

$$\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(BC([0, \infty), \mathbb{C})),$$

com $BC([0, \infty), \mathbb{C})$ denotando o espaço de Banach das funções de $[0, \infty)$ em \mathbb{C} que são contínuas e limitadas, de modo que

$$(T(t)f)(\tau) := f(t + \tau), \quad \forall t \geq 0.$$

i) Para verificar que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, veja que:

a) $(T(0)f)(\tau) = f(\tau)$.

b) $(T(t+s)f)(\tau) = f(t+s+\tau) = (T(t)(T(s)f))(\tau)$.

c) Finalmente, observe que pela continuidade da norma

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)f - f\|_{BC([0, \infty), \mathbb{C})} \\ = \left\| \lim_{t \rightarrow 0^+} [T(t)f - f] \right\|_{BC([0, \infty), \mathbb{C})} \end{aligned}$$

e portanto da continuidade e limitação da função f ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)f - f\|_{BC([0, \infty), \mathbb{C})} \\ = \sup_{s \in [0, \infty)} \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} [f(t+s) - f(s)] \right| = 0. \end{aligned}$$

ii) Por outro lado, podemos concluir que $\{T(t) : t \geq 0\}$ não é uniformemente contínuo. De fato, fixado $t > 0$, escolha $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$n > \frac{\ln \pi / t}{\ln 2}.$$

Com isso, se definirmos $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f_n(\tau) = \text{sen}(2^n \tau),$$

então

$$\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(BC([0, \infty), \mathbb{C}))} \geq \|T(t)f_n - f_n\|_{BC([0, \infty), \mathbb{C})}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{s \in [0, \infty)} |\operatorname{sen}(2^n(t+s)) - \operatorname{sen}(2^n s)| \\
&= 2,
\end{aligned}$$

já que $2^n(t+s) - 2^n s = 2^n t > \pi$.

O estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado ao estudo de problemas de Cauchy da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \\ u(0) = x \in X, \end{cases} \quad (1.3)$$

com $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear limitado (ou ilimitado).

Para uma explicação mais clara da afirmação feita acima, em primeiro lugar introduzimos o princípio de contração de Banach, que está enunciado a seguir.

Lema 1.20. *Seja X um espaço métrico completo, com a métrica*

$$d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

e uma função $F : X \rightarrow X$ tal que

$$d_X(F^n(x), F^n(y)) \leq k d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

para algum inteiro positivo n e $k \in (0, 1)$ (nesta situação, F^n é chamada de contração). Então, existe um único $\bar{x} \in X$, tal que $F(\bar{x}) = \bar{x}$. O ponto \bar{x} é chamado ponto fixo de F (Veja [38] para maiores detalhes).

Agora vamos mostrar que, no caso de A ser um operador limitado, existe uma única solução de (1.3) e que podemos definir um semigrupo a partir desta solução.

Para cada $x \in X$ e $\tau > 0$, considere o espaço métrico completo

$$K = \left\{ u \in C([0, \tau], X) : u(0) = x \right\},$$

e defina a aplicação $F : K \rightarrow K$ por

$$F(u)(t) := x + \int_0^t Au(s) ds.$$

Note que, dados $u, v \in K$, vale

$$\|F(u)(t) - F(v)(t)\|_X \leq \int_0^t \|Au(s) - Av(s)\|_X ds$$

$$\leq t \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s \in [0, \tau]} \|u(s) - v(s)\|_X.$$

Baseados na desigualdade acima, deduzimos indutivamente que

$$\begin{aligned} \|F^n(u)(t) - F^n(v)(t)\|_X &\leq \frac{t^n \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \sup_{s \in [0, \tau]} \|u(s) - v(s)\|_X \\ &\leq \frac{\tau^n \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \sup_{s \in [0, \tau]} \|u(s) - v(s)\|_X, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Como

$$\frac{|\tau|^n \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

pois sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\tau|^n \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} = e^{|\tau| \|A\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que F^{n_0} é contração. Sendo assim, pelo Lema 1.20, a aplicação F tem um único ponto fixo. Em outras palavras, existe uma única função contínua $u : [0, \tau] \rightarrow X$ que satisfaz

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s) ds, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Como $\tau > 0$ foi escolhido arbitrariamente, da unicidade do ponto fixo de F , temos que existe uma única função contínua $u : [0, \infty) \rightarrow X$, que satisfaz

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s) ds, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Observando que se $u(t)$ é suficientemente regular, não é difícil verificar que esta função satisfaz as equações do problema (1.3).

Defina agora a família de operadores lineares $\{T(t) : t \geq 0\}$, de X em X , por

$$T(t)x := u_x(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{1.4}$$

com $u_x : [0, \infty) \rightarrow X$ sendo a única solução do problema (1.3), com dado inicial $x \in X$.

Mostremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo.

i) É bastante claro que $T(0)x = u_x(0) = x$.

ii) Para cada $s \geq 0$ fixado, as funções

$$v(t) = T(t+s)x \quad \text{e} \quad w(t) = T(t)T(s)x$$

são soluções de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = T(s)x \in X, \end{cases}$$

e portanto, da unicidade de solução, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t \geq 0$. Como $s \geq 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos o desejado.

Observação 1.21. Para $A \in \mathcal{L}(X)$ considere a família de operadores lineares

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ e

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n t^n}{n!} = e^{\|A\|_{\mathcal{L}(X)} t},$$

concluímos que a série converge absolutamente e uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$.

Desta convergência uniforme e das propriedades da série, não é difícil verificar que a família $\{e^{At} : t \geq 0\}$ define um semigrupo; mais ainda, define um semigrupo uniformemente contínuo, pois

$$\begin{aligned} \|e^{At} - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= t \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n t^n}{(n+1)!} \right] \\ &\leq t \left[\|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{\|A\|_{\mathcal{L}(X)} t} \right] \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

Por fim, podemos deduzir que a função $u(t) := e^{At}x$ também é uma solução de (1.3), e portanto, identificamos $e^{At} = T(t)$, para todo $t \geq 0$

(o semigrupo $T(t)$ mencionado aqui é aquele construído em (1.4)). Isto nos leva a concluir que, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, o problema (1.3) da origem a um semigrupo uniformemente contínuo.

Para ampliar um pouco mais nossas discussões, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 1.22. Se $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, seu gerador infinitesimal é o operador definido por $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, com

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Um teorema que é utilizado nesta seção é o famoso Teorema da Limitação Uniforme, o qual enunciamos a seguir.

Teorema 1.23. *Seja $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de operadores lineares limitados, $T_n : X \rightarrow Y$. Se para cada $x \in X$ existe $K(x) > 0$, tal que*

$$\|T_n x\|_Y \leq K(x), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então a sequência das normas $\{\|T_n\|\}_{n=1}^\infty$ também é limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O teorema a seguir é bastante interessante pois relaciona os semigrupos uniformemente contínuos de maneira biunívoca com os operadores limitados.

Teorema 1.24. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, são equivalentes:*

- i) $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo.
- ii) O gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$ está definido em todo X .
- iii) Para algum $A \in \mathcal{L}(X)$, temos que $T(t) = e^{At}$.

Demonstração. (i \rightarrow iii) Como o semigrupo é uniformemente contínuo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(s) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{2}, \quad \forall s \in [0, \delta].$$

Mostraremos agora que a aplicação $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua. De fato, fixado um $t > 0$ e dado $h \in [0, \infty)$, com $0 < t-h < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(T(h) - I_X)T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(h) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0^+$, e

$$\begin{aligned} \|T(t) - T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(T(h) - I_X)T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|(T(h) - I_X)(T(t-h) - I_X + I_X)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{3}{2} \|T(h) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Em outras palavras, se $t > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Com isto temos que $T(s)$ é integrável e que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s) ds - I_X \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (T(s) - I_X) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|T(s) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} ds \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1.4, $\int_0^\delta T(s) ds$ tem inversa limitada. Agora definindo o operador linear

$$A = (T(\delta) - I_X) \left(\int_0^\delta T(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

provemos que A é gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. De fato, se escolhermos um $h > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} (T(h) - I_X) \int_0^\delta T(s) ds &= \int_0^\delta (T(h+s) - T(s)) ds \\ &= \int_h^{h+\delta} T(s) ds - \int_0^\delta T(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \\
&= T(\delta) \int_0^h T(s)ds - \int_0^h T(s)ds.
\end{aligned}$$

Com isso, deduzimos que

$$\left(\frac{T(h) - I_X}{h} \right) \int_0^{\delta} T(s)ds = \left(\frac{T(\delta) - I_X}{h} \right) \int_0^h T(s)ds,$$

e portanto, quando $h \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(T(h) - I_X)}{h} \int_0^{\delta} T(s)ds &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (T(\delta) - I_X) \int_0^h \frac{T(s)}{h} ds \\
&= (T(\delta) - I_X) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^h T(s)ds}{h} \\
&= (T(\delta) - I_X) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)}{1} \\
&= T(\delta) - I_X.
\end{aligned}$$

Das verificações acima, concluímos que

$$\left\| \frac{T(h) - I_X}{h} - (T(\delta) - I_X) \left(\int_0^{\delta} T(s)ds \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0^+$, e portanto A é o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Isto nos permite concluir que

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = T(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I_X}{h} = T(t)A,$$

e analogamente, que $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A,$$

ou seja, $T(t) = e^{At}$.

(ii \rightarrow i) Pela hipótese temos que

$$\left\{ \frac{T(t)x - x}{t} \right\}_{t \in [0,1]} \text{ é limitado } \forall x \in X.$$

Portanto, pelo Teorema 1.23 obtemos

$$\left\{ \frac{\|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} : t \in [0, 1] \right\} \text{ é limitado.}$$

Assim concluímos

$$\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ct, \quad \forall t \in [0, 1],$$

o que garante

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} = 0,$$

ou seja, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo.

(iii \rightarrow ii) Como demonstramos anteriormente que

$$A = (T(\delta) - I_X) \left(\int_0^\delta T(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

então o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$ está definido em todo X . \square

Muito embora as discussões anteriores sobre semigrupos uniformemente contínuos sejam importantes, estamos interessados em situações mais gerais, pois na maioria das aplicações o operador A não é limitado.

Nosso intuito portanto, é que a partir deste ponto, passemos a discutir apenas os semigrupos fortemente contínuos. Para esse fim, começamos caracterizando os seus geradores infinitesimais e provando algumas propriedades intrínsecas desses semigrupos.

Proposição 1.25. *Suponha que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Então existem constantes $M > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

com $\beta \geq \frac{1}{\delta} \ln \|T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $\delta > 0$.

Demonstração. Assuma que existe $\delta > 0$ tal que

$$M_0 = \sup_{t \in [0, \delta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Se $t \in [0, \infty)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta + \sigma$ com $\sigma \in [0, \delta)$. Logo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(n\delta + \sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|T(\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_0 e^{\frac{n \ln(\|T(\delta)\|)\delta}{\delta}} = M_0 e^{n\beta\delta} = M_0 e^{(n\delta+\sigma)\beta} e^{-\sigma\beta} \\
&= M_0 e^{-\sigma\beta} e^{t\beta}, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Agora demonstremos que o tal $\delta > 0$ de fato existe. Se assumirmos por um instante que esse valor não existe, então existiria uma sequência $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ e ainda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} = \infty. \quad (1.5)$$

Mas $\{T(t_n)x\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado para cada $x \in X$, pois $T(t_n)x \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, pelo Teorema 1.23, segue que $\{\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado, o que contradiz (1.5). \square

Teorema 1.26. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, então:*

- i) *Para qualquer $x \in X$, a aplicação $[0, \infty) \ni t \rightarrow T(t)x \in X$ é contínua.*
- ii) *Se A é gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$, A é fechado, densamente definido e para cada $x \in D(A)$, a aplicação*

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow T(t)x \in X$$

é diferenciável, e vale

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

$$iii) \overline{\bigcap_{m=1}^{\infty} D(A^m)} = X$$

- iv) *Seja β dado como no Proposição 1.25. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}\lambda > \beta$, temos que $\lambda \in \rho(A)$ e ainda*

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

Demonstração. i) Sejam $x \in X$ e $t > h > 0$. Observe que

$$T(t+h)x - T(t)x = T(t)(T(h)x - x) \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Por outro lado, pela Proposição 1.25 temos

$$\|T(t)x - T(t-h)x\|_X \leq \|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(h)x - x\|_X$$

$$\leq Me^{\beta(t-h)}\|T(h)x - x\|_X,$$

e portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)x - T(t-h)x\|_X \leq Me^{\beta t} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h)x - x\|_X = 0.$$

As sentenças acima significam que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T(t+h)x - T(t)x\|_X = 0,$$

ou seja, que T é contínuo para todo $t > 0$.

A continuidade em $t = 0$ segue da definição de semigrupo fortemente contínuo.

ii) Mostremos inicialmente que $\overline{D(A)} = X$. Como $\overline{D(A)} \subset X$ trivialmente, precisamos apenas verificar que $X \subset \overline{D(A)}$. Considere então $x \in X$ e defina, para $\epsilon > 0$,

$$x_\epsilon := \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(t)x dt \in X.$$

Afirmamos que $x_\epsilon \in D(A)$. De fato, fixe $\epsilon > 0$ e tome $0 < h < \epsilon$. Então

$$\begin{aligned} \frac{T(h)x_\epsilon - x_\epsilon}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(h)T(t)x dt - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(t)x dt \right) \\ &= \frac{1}{h\epsilon} \int_0^\epsilon T(h+t)x dt - \frac{1}{h\epsilon} \int_0^\epsilon T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h\epsilon} \int_h^{\epsilon+h} T(t)x dt - \frac{1}{h\epsilon} \int_0^\epsilon T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h\epsilon} \int_\epsilon^{\epsilon+h} T(t)x dt - \frac{1}{h\epsilon} \int_0^h T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h\epsilon} \int_0^h T(t)T(\epsilon)x dt - \frac{1}{h\epsilon} \int_0^h T(t)x dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)x_\epsilon - x_\epsilon}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(\epsilon) - I_X}{\epsilon} \right) \frac{1}{h} \int_0^h T(t)x dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(\epsilon) - I_X}{\epsilon} \right) T(h)x \\ &= \frac{T(\epsilon)x - x}{\epsilon}, \end{aligned}$$

assim $x_\epsilon \in D(A)$ e ainda

$$Ax_\epsilon = \frac{T(\epsilon)x - x}{\epsilon}.$$

Agora note que $x_\epsilon \rightarrow x$, quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, pois

$$\begin{aligned} \|x - x_\epsilon\|_X &= \left\| \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon x dt - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(t)x dt \right\|_X \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left\| \int_0^\epsilon [x - T(t)x] dt \right\|_X, \end{aligned}$$

o que garante que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|x - x_\epsilon\|_X &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \|x - T(t)x\|_X dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|x - T(\epsilon)x\|_X = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $x \in \overline{D(A)}$ como queríamos.

Para verificarmos que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado, assumamos que $\rho(A) \neq \emptyset$ e que existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ (tal fato é garantido pelo item *iv*) deste teorema).

Escolha uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D(A)$ satisfazendo

$$x_n \rightarrow x \quad \text{e} \quad Ax_n \rightarrow y,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Queremos verificar que $x \in D(A)$ e que $Ax = y$. Para isso, considere a sequência $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ dada por

$$y_n = (\lambda - A)x_n,$$

e observe que $y_n \rightarrow \lambda x - y$, quando $n \rightarrow \infty$, e portanto da continuidade do operador resolvente $(\lambda - A)^{-1}$, sabemos que

$$(\lambda - A)^{-1}y_n \rightarrow (\lambda - A)^{-1}(\lambda x - y).$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado, $(\lambda - A)^{-1}y_n = x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, da unicidade do limite, deduzimos a igualdade

$$(\lambda - A)^{-1}(\lambda x - y) = x,$$

ou seja, que $x \in D(A)$ e que $Ax = y$, como queríamos.

Por fim, mostremos que se $x \in D(A)$ então

$$(0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in X$$

é diferenciável. De fato, para $x \in D(A)$, note que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{T(t+h) - T(t)}{h} \right] x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[T(t) \left(\frac{T(h) - I_X}{h} \right) x \right] \\ &= T(t) \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I_X}{h} \right) x \right] \\ &= T(t)Ax, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t > 0.$$

Porém, de um resultado clássico da análise, como a derivada a direita de $T(t)x$ é contínua então $T(t)x$ é continuamente diferenciável, o que nos permite concluir que

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t > 0.$$

Para encerrar a demonstração deste item, basta observar que para $x \in D(A)$ temos a igualdade

$$T(t) \left(\frac{T(h) - I_X}{h} \right) x = \left(\frac{T(h) - I_X}{h} \right) T(t)x$$

o que garante que $T(t)x \in D(A)$ e que

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t > 0.$$

iii) De modo a completar de forma precisa esta etapa da demonstração, introduzimos brevemente dois conceitos:

- ✓ Seja $I \subset \mathbb{R}$. Denotamos por $C^\infty(I, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de I em \mathbb{R} que sejam infinitamente diferenciáveis em I .
- ✓ Para uma função $\varphi \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, definimos o seu suporte como sendo o conjunto

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in I : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Sejam $x \in X$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, com o $\text{supp } \varphi$ um subconjunto compacto de \mathbb{R} e contido em $(0, \infty)$. Considere a notação

$$x\varphi := \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x dt,$$

para a integral acima.

Primeiro provaremos que $x\varphi \in D(A^m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Para isso, tome h satisfazendo

$$0 < h < \inf\{s : s \in \text{supp } \varphi\},$$

e observe que

$$\begin{aligned} T(h)x\varphi - x\varphi &= \int_0^\infty \varphi(t)(T(t+h)x - T(t)x) dt \\ &= \int_h^\infty \varphi(t-h)T(t)x dt - \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x dt. \end{aligned}$$

Mas então, como $\varphi(t) = 0$, para todo $t < 0$, temos a igualdade

$$T(h)x\varphi - x\varphi = \int_0^\infty (\varphi(t-h) - \varphi(t))T(t)x dt.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{T(h)x\varphi - x\varphi}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^\infty (\varphi(t-h) - \varphi(t))T(t)x dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h} + \varphi'(t) \right) T(t)x dt \\ &\quad - \int_0^\infty \varphi'(t)T(t)x dt. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada conclui-se

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x\varphi - x\varphi}{h} = - \int_0^\infty \varphi'(t)T(t)x dt.$$

Portanto, $xy \in D(A)$ e

$$Ax\varphi = -x\varphi'.$$

Analogamente,

$$Ax\varphi' = -x\varphi''.$$

Como $x\varphi'$ tem as mesmas propriedades de $x\varphi$, então $Ax\varphi \in D(A)$. Logo

$$x\varphi \in D(A^m), \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para concluirmos esta demonstração, tomemos uma função φ como acima, porém satisfazendo $\varphi(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e ainda

$$\int_0^\infty \varphi(t)dt = 1.$$

Agora defina para cada $x \in X$ o elemento

$$x_n = \int_0^\infty n\varphi(nt)T(t)xdt \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} D(A^m).$$

Mostremos que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_X &= \left\| \int_0^\infty n\varphi(nt)T(t)xdt - \int_0^\infty n\varphi(nt)xdt \right\|_X \\ &\leq \int_0^\infty \|n\varphi(nt)(T(t)x - x)\|_X dt \\ &= \int_0^\infty \|\varphi(\tau)(T(\tau/n)x - x)\|_X d\tau. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema da Convergência Dominada nos assegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty \|\varphi(\tau)(T(\tau/n)x - x)\|_X d\tau \right] = 0.$$

As justificativas acima provam que $X = \overline{\bigcap_{m \in \mathbb{N}} D(A^m)}$.

iv) Pela Proposição 1.25, existem constantes $M > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}.$$

Logo deduzimos que o operador

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt \in \mathcal{L}(X),$$

para $Re\lambda > \beta$, já que

$$\|R(\lambda)x\|_X \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|T(t)x\|_X dt$$

$$\leq M \int_0^{\infty} |e^{-\lambda t}| |e^{\beta t}| \|x\|_X dt,$$

e portanto

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \int_0^{\infty} e^{(\beta - \operatorname{Re}\lambda)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \beta}.$$

Mostremos agora que $R(\lambda)$ é o operador inverso de $(\lambda - A)$. Note que se $x \in X$, então

$$\begin{aligned} AR(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I_X}{h} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt & (1.6) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (T(h+t)x - T(t)x) dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $h+t=s$, obtemos

$$\frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(h+t)x dt = \frac{1}{h} \int_h^{\infty} e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds,$$

e portanto de (1.6) deduzimos

$$AR(\lambda)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} \int_h^{\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right]. \quad (1.7)$$

Por fim, realizando algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{h} \int_h^{\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \left(\frac{1}{h} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t} \right] T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \right) \\ &= \left(\int_0^{\infty} \left[\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right] e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \right) \\ &= \left(\lambda \left[\frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} \right] \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \left[\frac{e^{\lambda h}}{h} \right] \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \right), \end{aligned}$$

e de (1.7), encontramos a igualdade

$$AR(\lambda)x = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - x$$

$$= \lambda R(\lambda)x - x.$$

Com isso $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$, provando dessa forma que $(\lambda - A)$ é a inversa a esquerda de $R(\lambda)$.

Agora escolha $x \in D(A)$ e note que

$$\begin{aligned} AR(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I_X}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\frac{T(t+h) - T(t)}{h} \right] x dt. \end{aligned}$$

Como $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo,

$$AR(\lambda)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \left[\frac{T(h) - I_X}{h} \right] x dt,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$AR(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = R(\lambda)Ax.$$

Como já sabíamos que $x = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x$, deduzimos que

$$x = R(\lambda)(\lambda - A)x,$$

ou seja, que $(\lambda - A)$ é a inversa a direita de $R(\lambda)$.

Portanto $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t} M e^{\beta t} dt = \frac{M}{Re\lambda - \beta}.$$

□

Agora estudamos alguns teoremas importantes como o Teorema de Hille-Yosida e Lumer Phillips que descrevem certas condições para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo. Para demonstrar o Teorema de Hille-Yosida, discutiremos previamente alguns lemas importantes.

Lema 1.27. *Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador linear fechado e densamente definido, cujo conjunto resolvente contém $(0, \infty)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Seja $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$. Como vale a igualdade

$$(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x = x,$$

deduzimos que

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x = (\lambda - A)^{-1}Ax.$$

Então pela hipótese temos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|_X \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$, para qualquer $x \in D(A)$.

Agora estenderemos este resultado para todo o espaço X . Para qualquer $x \in X$, por hipótese, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ satisfazendo $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$.

Com isso, para $\lambda > 0$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X &\leq \|\lambda(\lambda - A)^{-1}(x - x_n)\|_X \\ &\quad + \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x_n - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X \\ &\leq \|x - x_n\|_X (\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|I_X\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\quad + \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x_n - x_n\|_X \\ &\leq 2\|x - x_n\|_X + \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x_n - x_n\|_X. \end{aligned}$$

Logo,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X \leq 2\|x - x_n\|_X,$$

e aplicando limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados, obtemos

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X = 0.$$

Portanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in X,$$

como queríamos. □

Lema 1.28. *Assuma que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador linear como no Lema 1.27. Então $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e ainda*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A). \quad (1.8)$$

Demonstração. Que $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ segue do fato que A é fechado e que $\lambda \in \rho(A)$. Agora provemos (1.8). Para isso, considere $x \in D(A)$ e note que pelo Lema 1.27 temos

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \rightarrow Ax,$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$. Logo deduzimos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda A(\lambda - A)^{-1}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax = Ax.$$

□

Lema 1.29. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear como no Lema 1.27. Então $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$ tal que*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0,$$

e ainda para todo $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ e $t \geq 0$, temos que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X. \quad (1.9)$$

Demonstração. Para cada $\lambda > 0$, note que

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda.$$

Como $A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda$ é um operador linear limitado, então pelo Teorema 1.24 A_λ gera um semigrupo uniformemente contínuo

$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}, \quad \forall t \geq 0,$$

e podemos estimar sua norma por

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|e^{t(\lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda)}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= e^{-\lambda t} \|e^{t\lambda^2(\lambda - A)^{-1}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \\ &\leq e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil ver que $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}$, para $\lambda, \mu > 0$ e $t \geq 0$, comutam entre si. Logo

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left[e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} \right] x ds \right\|_X$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^1 t e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} [A_\lambda x - A_\mu x] ds \right\|_X \\
&\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.
\end{aligned}$$

Assim a desigualdade (1.9) fica verificada e conclui-se a demonstração deste lema. □

Lema 1.30. *Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador linear. Então os seguintes fatos são equivalentes:*

i) *A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém $(0, \infty)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Demonstração. (i \rightarrow ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, então pelo Teorema 1.26, A é fechado, densamente definido e se $\lambda \in (0, \infty)$, temos que

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt,$$

para todo $x \in X$, com a estimativa

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda},$$

como queríamos.

(ii \rightarrow i) Pelo Lema 1.29, para cada $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \\
&\leq t \|A_\lambda x - Ax\|_X + t \|Ax - A_\mu x\|_X.
\end{aligned}$$

Então do lema 1.28 podemos concluir que $\{e^{tA_\lambda}x\}_{\lambda \geq 0}$ é de Cauchy, quando $\lambda \rightarrow \infty$, e portanto converge. Mais ainda, converge uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$.

Como $D(A)$ é denso em X e $\|e^{tA_\lambda}x\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, usando um raciocínio análogo a outros já utilizados nos lemas acima, temos que $\{e^{tA_\lambda}x\}_{\lambda \geq 0}$

é convergente para todo $x \in X$, uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$.

Agora definamos para cada $x \in X$

$$T(t)x := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA\lambda}x.$$

Da definição concluímos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo que satisfaz $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. Além disso, a função

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow T(t)x \in X$$

é contínua pois estamos tratando com limite uniforme de funções contínuas, ou seja, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Resta demonstrar que A é seu gerador infinitesimal. Inicialmente assumamos que B seja o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Queremos concluir que $D(A) = D(B)$ e que $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A)$.

Para isso, note que se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{ds} [e^{sA\lambda}x] ds \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned}$$

A última igualdade é consequência da convergência uniforme de $e^{sA\lambda} A_\lambda x$ para $T(s)Ax$ em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$.

Portanto

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds = Ax,$$

ou seja, $D(A) \subset D(B)$ e $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A)$. Em outras palavras, $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ deve ser uma extensão do operador A .

Agora observe que do fato de $1 \in \rho(A)$, podemos deduzir

$$(I_X - B)D(A) = (I_X - A)D(A) = X. \quad (1.10)$$

Por outro lado, como $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, a primeira parte da prova deste lema garante que $1 \in \rho(B)$. Então,

$$(I_X - B)D(B) = X. \quad (1.11)$$

Por fim, usando (1.10) e (1.11), concluímos que

$$X = (I_X - B)D(B) \supset (I_X - B)D(A) = (I_X - A)D(A) = X,$$

isto é, $D(A) = D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$. Com isto conclui-se o teorema. \square

Teorema 1.31 (Hille-Yosida). *Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador linear. Então os seguintes fatos são equivalentes:*

i) *A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) , para algum $\omega \in \mathbb{R}$, e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Demonstração. (i \rightarrow ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ que satisfaz

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

então $A - \omega$ é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $\{e^{-\omega t}T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ que satisfaz

$$\|e^{-\omega t}T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Então pelo Lema 1.30, o operador linear $A - \omega$ é fechado, densamente definido, seu conjunto resolvente contém $(0, \infty)$ e

$$\left\| (\sigma - (A - \omega))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\sigma}, \quad \forall \sigma > 0.$$

Fazendo a mudança de variável $\lambda = \sigma + \omega$, concluímos que A é um operador linear fechado, densamente definido, com conjunto resolvente contendo (ω, ∞) e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega,$$

como queríamos.

(ii \rightarrow i) Assuma agora que A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Então $A - \omega$ é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém $(0, \infty)$ e

$$\|(\lambda - (A - \omega))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Aplicando o Lema 1.30, concluímos que $A - \omega$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T_\omega(t) : t \geq 0\}$ que satisfaz

$$\|T_\omega(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Defina $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $T(t) := e^{\omega t} T_\omega(t)$, para todo $t \geq 0$. É fácil ver que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, que A é seu gerador e que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

como queríamos. □

Um corolário que se apoia nos resultados do teorema de Hille-Yosida e que descreve uma forma mais geral das conclusões obtidas até aqui, é o seguinte.

Corolário 1.32 (Forma geral do Teorema de Hille-Yosida). *Considere o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$, e existem $M > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

ii) *A é operador linear fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) , para algum $\omega \in \mathbb{R}$, e*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $M > 0$.

Para o próximo teorema precisamos da definição de operador dissipativo, e por isso fazemos algumas construções necessárias. Assuma então que para o espaço de Banach complexo X , o símbolo X^* signifique seu espaço dual, isto é,

$$X^* := \left\{ x^* : X \rightarrow \mathbb{C} : x^* \text{ é um funcional linear contínuo} \right\}.$$

Para cada $x^* \in X^*$, usaremos o símbolo $\langle x, x^* \rangle$ para identificar a avaliação do operador linear limitado x^* no elemento x .

Então considere o conjunto (também conhecido como aplicação dualidade) $F(x)$, o qual é dado por

$$F(x) := \left\{ x^* \in X^* : \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2, \|x^*\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{C})} = \|x\|_X \right\}.$$

Lema 1.33. $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Se $x = 0$ é trivial verificar que $F(x) \neq \emptyset$. Assuma então que $x \in X \setminus \{0\}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (veja [7, 38]), existe $f \in X^*$ tal que $\operatorname{Re} \langle x, f \rangle = \|x\|_X$ e $\|f\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{C})} = 1$. Logo $x^* = \|x\|_X f$ satisfaz

$$\operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X \operatorname{Re} \langle x, f \rangle = \|x\|_X^2 \quad \text{e} \quad \|x^*\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{C})} = \|x\|_X,$$

e portanto $F(x) \neq \emptyset$. □

Finalmente podemos definir os operadores dissipativos.

Definição 1.34. Um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo, se para todo $x \in D(A)$ existe $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

A definição de dissipatividade como apresentada acima é bastante interessante, entretanto não muito simples de ser empregada. Sua aplicabilidade pode ser entendida no seguinte resultado.

Teorema 1.35. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e considere um operador linear $A : D(A) \subset H \rightarrow H$. Se existe $\lambda \in \rho(A) \cap (0, \infty)$, tal que*

$$\|(\lambda + A)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \tag{1.12}$$

então A é dissipativo.

Demonstração. Seja $x \in D(A)$. Se assumirmos que $\lambda \in \rho(A)$ e que vale (1.12), então existe $y \in H$ tal que $(\lambda - A)^{-1}y = x$ e

$$\|(\lambda + A)(\lambda - A)^{-1}y\|_H \leq \|y\|_H.$$

Porém, a desigualdade acima é equivalente a

$$\|(\lambda + A)x\|_H \leq \|(\lambda - A)x\|_H, \quad (1.13)$$

e lembrando que H é um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_H$, a desigualdade (1.13) se reescreve como

$$|\lambda|^2 \|x\|_H^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(x, Ax)_H + \|Ax\|_H^2 \leq |\lambda|^2 \|x\|_H^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(x, Ax)_H + \|Ax\|_H^2$$

que é equivalente a $\operatorname{Re}(x, Ax)_H \leq 0$.

Defina $x^* : H \rightarrow \mathbb{C}$ por $\langle z, x^* \rangle = (x, z)_H$, para qualquer $z \in H$. Então $x^* \in F(x)$ e

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle_H = \operatorname{Re}(x, Ax)_H \leq 0,$$

ou seja, A é dissipativo. \square

Uma vez que nossos objetivos são um pouco distintos dos objetivos para os quais aplica-se o resultado acima, faremos uma proposição que nos permitirá considerar uma definição mais maleável para operadores dissipativos.

Proposição 1.36. *O operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X$$

para todo $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$.

Para demonstrar o Teorema de Lumer-Phillips, demonstramos em um primeiro momento a seguinte proposição.

Proposição 1.37. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador dissipativo. Se $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$, então:*

i) *A é um operador fechado.*

ii) *$\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.*

Demonstração. i) Observe que $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = X$ e a Proposição 1.36 garantem a desigualdade

$$\frac{1}{\lambda_0} \|x\| \geq \|(\lambda_0 - A)^{-1}x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

e portanto $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Para concluir que A é fechado, seja $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ com $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observe que

$$(\lambda_0 - A)x_n \rightarrow \lambda_0 x - y$$

e portanto da continuidade de $(\lambda_0 - A)^{-1}$, temos que

$$x_n \rightarrow (\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda_0 x - y).$$

Finalmente, da unicidade do limite, obtemos que

$$(\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) = x \iff y = Ax,$$

como queríamos.

ii) Seja $\Lambda := \{\lambda > 0 : \text{Im}(\lambda - A) = X\}$. Então

✓ $\Lambda \neq \emptyset$, pois $\lambda_0 \in \Lambda$;

✓ Λ é aberto em $(0, \infty)$. De fato, se $\lambda \in \Lambda$, como $\text{Im}(\lambda - A) = X$ e

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \quad \forall x \in D(A),$$

então

$$\frac{1}{\lambda} \|x\| \geq \|(\lambda - A)^{-1}x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

e portanto $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e $(\lambda - A)$ é bijetivo. Em outras palavras, $\lambda \in \rho(A)$. Porém, como $\rho(A)$ é um conjunto aberto, existe $\delta > 0$ tal que se $\mu \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, então $(\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e $(\mu - A)$ é bijetivo, o que garante que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset \Lambda$.

✓ Λ é fechado em $(0, \infty)$. Tome $\lambda \in \bar{\Lambda}$ e seja $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$, quando $n \rightarrow \infty$. Como A é um operador fechado, para cada $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in D(A)$ tal que $(\lambda_n - A)x_n = y$. Logo, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.36

$$\frac{\|x_n\|_X}{\lambda_m} \leq \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \|(\lambda_n - A)x_n\|_X = \frac{\|y\|_X}{\lambda_n \lambda_m} \leq C,$$

para algum $C > 0$. Com isso,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_X &\leq \frac{1}{\lambda_m} \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\|_X \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \| -(\lambda_m x_m - Ax_m) + (\lambda_n x_n - Ax_n) + (\lambda_m - \lambda_n)x_n \|_X \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \| -y + y + (\lambda_n - \lambda_m)x_n \|_X \end{aligned}$$

$$= \frac{\|x_n\|_X}{\lambda_m} |\lambda_n - \lambda_m| \leq C |\lambda_n - \lambda_m|.$$

Como $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, então $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ também é de Cauchy, portanto converge para algum $x \in X$. Assim,

$$Ax_n \rightarrow \lambda x - y, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Levando em conta que A é fechado obtemos que $x \in D(A)$ e $(\lambda - A)x = y$, ou seja, $\lambda \in \Lambda$.

Por fim, da conexidade de $(0, \infty)$ concluímos que $\Lambda = (0, \infty)$. \square

Teorema 1.38 (Teorema de Lumer-Phillips). *Suponha que A é um operador linear densamente definido.*

i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1,$$

então A é dissipativo e $Im(\lambda - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

ii) *Se A é dissipativo e $Im(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$.*

Demonstração. i) Como A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ com

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1,$$

então pelo Teorema de Hille-Yosida temos que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e como A é fechado

$$Im(\lambda - A) = X, \quad \forall \lambda > 0.$$

Agora, para todo $x \in D(A)$ e $x^* \in F(x)$, temos

$$Re \langle Ax, x^* \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} Re \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle.$$

Como

$$Re \langle T(t)x - x, x^* \rangle = Re \langle T(t)x, x^* \rangle - Re \langle x, x^* \rangle$$

e

$$|Re \langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x^*\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{C})} \|x\|_X \leq \|x\|_X^2,$$

conclui-se que

$$\operatorname{Re} \langle T(t)x - x, x^* \rangle \leq 0.$$

Dividindo por $t > 0$ e fazendo o limite quando $t \rightarrow 0^+$, temos que

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \left\langle \left[\frac{T(t)x - x}{t} \right], x^* \right\rangle \leq 0.$$

Então $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, ou seja, A é dissipativo.

ii) Pela Proposição 1.37 temos que A é fechado e que $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. Por outro lado, da Proposição 1.36 temos que $\lambda - A$ é injetor e que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ para todo $\lambda > 0$, ou seja, $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Mais ainda, a Proposição 1.36 garante que

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x\|_X = \frac{\|x\|_X}{\lambda},$$

para todo $\lambda > 0$. Logo aplicando o Teorema de Hille-Yosida, o operador A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, para todo $t \geq 0$. \square

1.3 Operadores setoriais

Nesta seção faremos uma breve introdução à teoria dos semigrupos analíticos que fazem parte do estudo que descrevemos neste texto. Começamos falando sobre operadores setoriais, dando uma detalhada definição e construção, já que isto facilitará o entendimento dos operadores quase setoriais que serão introduzidos adiante.

Assuma por um momento que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$, e que ainda satisfaça

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\} \subset \rho(A)$$

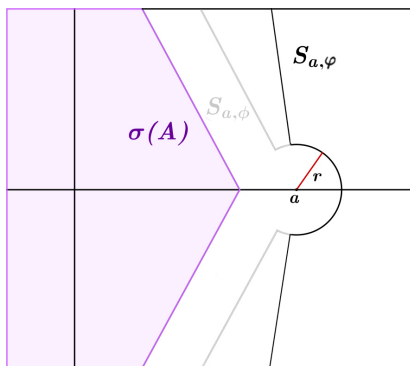
e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi} \setminus \{a\},$$

para algum $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e algum $a \in \mathbb{R}$.

Gostaríamos de verificar quais propriedades intrínsecas este operador possui. Para isso, escolha $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \phi)$ e observe que do fato de $a \in S_{a,\phi}$, existe um raio $r > 0$ tal que $B_r(a) \cup S_{a,\phi} \subset \rho(A)$, e portanto $B_r(a) \cup S_{a,\varphi} \subset \rho(A)$ (veja Figura 1.1 para um esboço desta situação).

Figura 1.1: Setor de A

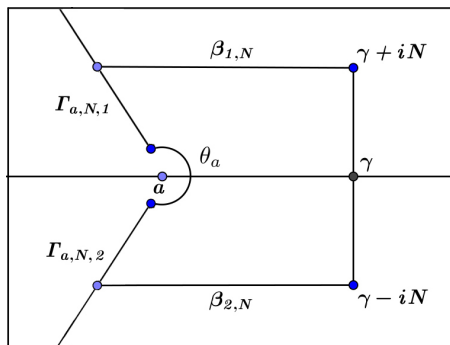


Agora, para um N suficientemente grande e um $\gamma > a + r$, consideremos as curvas

$$\begin{aligned} S_{a,N,1} &:= \left\{ a + te^{i\varphi} : t \in \left[r, \frac{N}{\text{sen}\varphi} \right] \right\}, \\ S_{a,N,2} &:= \left\{ a + te^{-i\varphi} : t \in \left[r, \frac{N}{\text{sen}\varphi} \right] \right\}, \\ \theta_a &:= \{ a + re^{it} : t \in [-\varphi, \varphi] \}, \\ \beta_{1,N} &:= \{ t + iN : t \in [a + \frac{N}{\tan\varphi}, \gamma] \}, \\ \beta_{2,N} &:= \{ t - iN : t \in [a + \frac{N}{\tan\varphi}, \gamma] \}, \\ \gamma_N &:= \{ \gamma + it : t \in [-N, N] \}, \end{aligned}$$

representadas na Figura 1.2 abaixo

Figura 1.2: Curvas Retificáveis do Setor



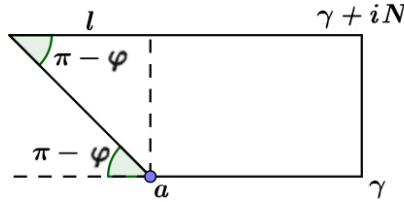
Como pelo Corolário 1.16 sabemos que $\rho(A) \ni \lambda \mapsto e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}$ é uma função analítica na região que é limitada pela curva

$$-S_{a,N,1} - \theta_a + S_{a,N,2} + \beta_{2,N} + \gamma_N - \beta_{1,N},$$

então pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{-S_{a,N,1} - \theta_a + S_{a,N,2} + \beta_{2,N} + \gamma_N - \beta_{1,N}} [e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x] d\lambda = 0, \quad \forall x \in X.$$

Para justificar a descrição das curvas $\beta_{1,N}$ e $\beta_{2,N}$, observe o esquema descrito pela figura logo abaixo.



Veja que $\tan(\pi - \varphi) = N/l$. Logo, $-\tan \varphi = N/l$ e assim

$$l = \frac{N}{-\tan(\varphi)} > 0$$

pois $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Se $\sigma^{-1} = -\tan(\varphi) > 0$ então $l = N\sigma$. Com isso dividimos $[a - N\sigma, \gamma]$ em intervalos

$$[a - N\sigma, a - \sqrt{N}\sigma] \cup [a - \sqrt{N}\sigma, \gamma],$$

já que $\sqrt{N} < N$ e $N \in \mathbb{N}$.

Agora sobre $\beta_{1,N}$, se $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\beta_{1,N}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \right\|_X \\ &= \left\| \int_{a-N\sigma}^{a-\sqrt{N}\sigma} e^{(s+iN)t} \left((s+iN) - A \right)^{-1} x ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{a-\sqrt{N}\sigma}^{\gamma} e^{(s+iN)t} \left((s+iN) - A \right)^{-1} x ds \right\|_X \\ &\leq \int_{a-N\sigma}^{a-\sqrt{N}\sigma} \frac{C e^{st} \|x\|_X}{\sqrt{(s-a)^2 + N^2}} ds + \int_{a-\sqrt{N}\sigma}^{\gamma} \frac{C e^{st} \|x\|_X}{\sqrt{(s-a)^2 + N^2}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{a-\sqrt{N}\sigma}^{a-\sqrt{N}\sigma} \frac{Ce^{st}\|x\|_X}{N} ds + \int_{a-\sqrt{N}\sigma}^{\gamma} \frac{Ce^{\gamma t}\|x\|_X}{N} ds \\
&= \int_{\sqrt{N}\sigma}^{N\sigma} \frac{Ce^{(a-s)t}\|x\|_X}{N} ds + \frac{Ce^{\gamma t}(\gamma - a + \sqrt{N}\sigma)\|x\|_X}{N} \\
&= \frac{Ce^{at}(e^{-\sqrt{N}\sigma t} - e^{-N\sigma t})\|x\|_X}{tN} + \frac{Ce^{\gamma t}(\gamma - a + \sqrt{N}\sigma)\|x\|_X}{N}
\end{aligned}$$

que tende a zero, quando $N \rightarrow \infty$, ou seja, converge uniformemente em intervalos compactos de $(0, \infty)$.

Agora observe que, para $t > 0$, vale a desigualdade

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{S_{a,N,1}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\|_X \\
&= \left\| \int_r^{N/\text{sen}\varphi} e^{(a+se^{i\varphi})t} (a + se^{i\varphi} - A)^{-1} e^{i\varphi} x ds \right\|_X \\
&\leq \int_r^{N/\text{sen}\varphi} \frac{Ce^{at+st \cos \varphi} \|x\|_X}{s} ds \\
&\leq \frac{e^{at} C \|x\|_X}{r} \int_r^{N/\text{sen}\varphi} e^{st \cos \varphi} ds \\
&= \left[\frac{e^{at} C \|x\|_X}{r} \right] \left[\frac{e^{rt \cos \varphi} - e^{tN/\tan \varphi}}{-t \cos \varphi} \right] \\
&\leq \frac{e^{at} \tilde{C} \|x\|_X}{r},
\end{aligned}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, já que $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e portanto $\cos \varphi < 0$ e $\tan \varphi < 0$.

Assim, como o cálculo da integral sobre $S_{a,N,2}$ é análogo ao de $S_{a,N,1}$, como o cálculo da integral sobre $\beta_{2,N}$ é análogo ao de $\beta_{1,N}$ e como o caminho θ_a é compacto e independente de N , concluímos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-S_{a,N,1} - \theta_a + S_{a,N,2} + \beta_{2,N} + \gamma_N - \beta_{1,N}} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda$$

existe e que vale a identidade

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-S_{a,N,2} + \theta_a + S_{a,N,1}} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda, \quad \forall x \in X. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Em outras palavras, se S_a for a fronteira do setor $S_{a,\varphi}$, orientada com parte imaginária crescente, então de (1.14) obtemos a identidade

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda, \quad (1.15)$$

para todo $x \in X$, uniformemente em subconjuntos compactos de $(0, \infty)$.

Observação 1.39. Vale a pena enfatizar que (1.15) garante que a transformada inversa de Laplace da função

$$\rho(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \gamma\} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} x \in X,$$

para cada $x \in X$, pode ser expressada como a integral sobre um contorno de um setor $S_{a,\varphi}$ contido no resolvente de um operador com as propriedades pedidas no início desta seção (discutimos um pouco mais a transformada de Laplace na Seção 2.1.1).

Nesse ponto já estamos preparados para introduzir as definições e os resultados formais desta teoria.

Definição 1.40. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador densamente definido e fechado. A é chamado de operador setorial se existirem constantes $a \in \mathbb{R}$, $C > 1$ e $\phi \in (0, \pi/2)$ tal que

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi\} \subset \rho(A)$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi} \setminus \{a\}.$$

Se $a = 0$ chamaremos A de operador setorial positivo e para facilitar a notação, denotaremos $S_{0,\phi}$ apenas por S_ϕ .

Observação 1.41. Agora fazemos algumas considerações pertinentes ao nosso estudo:

- i) A definição acima não está de acordo com os cálculos realizados no início desta seção. Isto deve-se ao fato de que pretendemos tratar de potências fracionárias de operadores setoriais mais adiante, e portanto seguimos as notações utilizadas por Henry em [25]. Mais especificamente, se A é setorial, como apresentado na Definição 1.40, então o operador $-A$ tem exatamente as propriedades mencionadas no início desta seção (veja que $S_{a,\pi-\phi} = -\Gamma_{a,\phi}$).

ii) Existem várias caracterizações equivalentes a formulação de operadores setoriais que foi apresentada e desenvolvida aqui; para alguns exemplos, veja o apêndice de Hoppenstadt em [29] ou o livro de Haase em [27]; no caso de operadores definidos em espaços de Hilbert, temos os operadores m -setoriais, no sentido de Kato, que também são setoriais em nosso sentido (ver [35] para detalhes).

Embora uma série de operadores elípticos provenientes de problemas de valores de contorno definam operadores setoriais, como pode ser verificado no livro de Friedman em [20], para que a apresentação desta teoria fique mais completa, mostramos abaixo que todo operador limitado é setorial.

Exemplo 1.42. Considere $A \in \mathcal{L}(X)$. Assuma sem perda de generalidade que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$. Então A é fechado, $\overline{D(A)} = X$ e

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Afirmamos que $\Gamma_{-2, \frac{\pi}{6}} \subset \rho(A)$. De fato, se existisse $\tilde{t} \geq 0$ tal que

$$-2 + \tilde{t}e^{i\frac{\pi}{6}} \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

então

$$\| -2 + \tilde{t}e^{i\frac{\pi}{6}} \|^2 < 1 \iff \tilde{t}^2 - (2\sqrt{3})\tilde{t} + 3 < 0 \iff (\tilde{t} - \sqrt{3})^2 < 0,$$

o que é um absurdo. Logo a fronteira de $\Gamma_{-2, \frac{\pi}{6}}$ está contida em $\rho(A)$, o que nos leva a concluir que $\Gamma_{-2, \frac{\pi}{6}} \subset \rho(A)$.

Por fim, se λ é um elemento de $\Gamma_{-2, \varphi}$, para algum $\pi/6 < \varphi < \pi$, então o Corolário 1.5 garante que

$$(\lambda + 2)(\lambda - A)^{-1} = (\lambda + 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

e portanto

$$\|(\lambda + 2)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{|\lambda + 2|}{|\lambda| - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq C < \infty,$$

ou seja,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - (-2)|}.$$

Abaixo introduzimos os semigrupos analíticos (veja [22] como uma fonte para esta definição).

Definição 1.43. Diremos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é analítico se satisfizer as propriedades:

- i) $T(0) = I_X$, $T(t)T(s) = T(t + s)$, para todo $t \geq 0$ e $s \geq 0$.
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$.
- iii) Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$, a aplicação

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow T(t)x \in X$$

pode ser continuada analiticamente até $\{\lambda \neq 0 : |\arg \lambda| < \epsilon\}$.

O principal teorema desta seção está vinculado aos cálculos que realizamos anteriormente e que agora são resumidos abaixo.

Teorema 1.44. *Se $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial, então $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ dado por*

$$T(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{a,\theta}} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda, & \forall t > 0, \\ I_X, & t = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

com $S_{a,\theta}$ o contorno em $\rho(-A)$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$.

Além disso, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é analítico no setor $\{t \neq 0 : |\arg t| < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$; Para todo $t > 0$ temos as estimativas

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t} e^{-at},$$

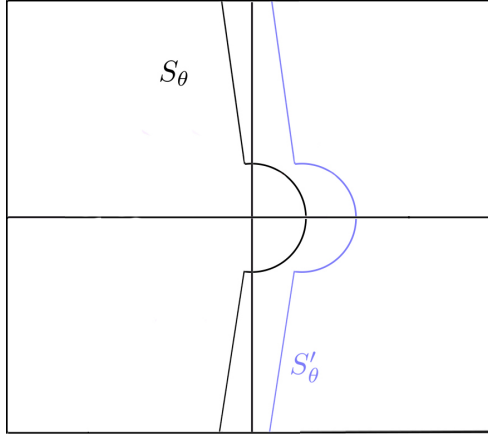
para alguma constante $M > 0$. Finalmente, para cada $x \in X$ vale

$$\frac{d}{dt} T(t)x = -AT(t)x, \quad \forall t > 0. \quad (1.17)$$

Demonstração. Assuma que $a = 0$. Observe que a existência da família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ dada por (1.16), é garantida pelos cálculos realizados no início desta seção.

Pelo teorema de Cauchy, a integral fica inalterada quando o contorno S_θ é deslocado para a direita a uma pequena distância; chamamos este novo contorno de S'_θ (esta situação pode ser representada pela Figura 1.3).

Figura 1.3: Contorno original e deslocado



Então para $t > 0$ e $s > 0$, usando o Teorema 1.15 e a analiticidade das funções que integramos, obtemos

$$\begin{aligned}
 T(t)T(s) &= (2\pi i)^{-2} \int_{S_\theta} \int_{S'_\theta} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} e^{\mu s} (\mu + A)^{-1} d\mu d\lambda \\
 &= (2\pi i)^{-2} \int_{S_\theta} \int_{S'_\theta} \frac{e^{\lambda t + \mu s}}{\mu - \lambda} \left\{ (\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1} \right\} d\mu d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \right] d\lambda \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} e^{\mu s} (\mu + A)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda \right] d\mu.
 \end{aligned}$$

Mas como $\lambda \in S_\theta$ e $\mu \in S'_\theta$, pelo Teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda = e^{\mu t},$$

o que garante que

$$T(t)T(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} e^{\mu(t+s)} (\mu + A)^{-1} d\mu = T(t+s),$$

isto é, que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo.

É fácil notar que, para valores pequenos de $\epsilon > 0$, as estimativas e convergências feitas no início desta seção continuam válidas no setor $\{t \neq 0 : |\arg t| < \epsilon\}$, portanto o semigrupo é analítico.

Além disso, fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, para $t > 0$, obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{S''_\theta} e^\mu \left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)},$$

com S''_θ sendo um caminho deslocado a uma pequena distância do caminho original S_θ . Mas então, da analiticidade do integrando

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^\mu \left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \tilde{C}_1 \int_{S_\theta} \left| \frac{e^\mu}{\mu} \right| |d\mu| \leq M. \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo processo acima, apenas com o adendo de que

$$\|A(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|I_X - \lambda(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + C,$$

obtemos

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\tilde{C}_2}{t} \int_{S_\theta} \left| \frac{e^\mu}{\mu} \right| |d\mu| \leq \frac{M}{t}.$$

Provemos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$. Considere inicialmente $x \in D(A)$ e $t > 0$. Então

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} [(\lambda + A)^{-1} - \lambda^{-1}] x d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \lambda^{-1} e^{\lambda t} A(\lambda + A)^{-1} x d\lambda \end{aligned}$$

e portanto fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\|_X &= \left\| \frac{t}{2\pi i} \int_{S_\theta} \mu^{-1} e^\mu A \left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1} x \frac{d\mu}{t} \right\|_X \\ &\leq t \left(C_3 \int_{S_\theta} \left| \frac{e^\mu}{\mu} \right| |d\mu| \right) \|Ax\|_X. \end{aligned}$$

Em outras palavras, concluímos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$.

Para $x \in X$, da densidade do operador $D(A)$, sabemos que existe $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D(A)$ com $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Mas então

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\|_X &\leq \|T(t)x - T(t)x_n\|_X + \|T(t)x_n - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X \\ &\leq \|T(t)x_n - x_n\|_X + [M + 1]\|x_n - x\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X \leq [M + 1]\|x_n - x\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente fazendo $n \rightarrow \infty$, deduzimos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0,$$

como queríamos.

Neste ponto provamos a igualdade (1.17). Considere $x \in X$, $t > 0$ e da analiticidade do integrando, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} \lambda (\lambda + A)^{-1} x d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} A (\lambda + A)^{-1} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} x d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} A (\lambda + A)^{-1} x d\lambda \\ &= -AT(t)x. \end{aligned}$$

Para verificar que $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$, procedemos como em outras demonstrações já feitas neste capítulo.

Para encerrar esta demonstração, apenas observamos que se $a \neq 0$, então basta escolhermos $A_a := A - a$ e observar agora que A_a é um operador setorial positivo. Neste caso, como demonstrado acima, $-A_a$ gera um semigrupo analítico $\{T_a(t) : t \geq 0\}$.

Defina então a família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ por

$$T(t) = e^{-at}T_a(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Claramente $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico que tem $-A$ como gerador infinitesimal, já que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-at}T_a(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{-at} - 1}{t} \right] T_a(t)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_a(t)x - x}{t} \\
& = -Ax.
\end{aligned}$$

e satisfaz, para todo $t > 0$, as estimativas

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{-at}T_a(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-at},$$

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|Ae^{-at}T_a(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t}e^{-at},$$

para alguma constante $M > 0$. Mais ainda, para cada $x \in X$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T(t)x &= \frac{d}{dt} \left[e^{-at}T_a(t) \right] \\
&= -ae^{-at}T_a(t)x - A_a e^{-at}T_a(t)x \\
&= -Ae^{-at}T_a(t)x \\
&= -AT(t)x, \quad \forall t > 0.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.45. Antes de finalizarmos esta seção, introduzimos duas sentenças simples que serão úteis mais a frente.

- i) Se $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial positivo, então existem $\delta > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que $S_{\delta, \theta} \subset \rho(-A)$ e ainda

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\delta e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

para alguma constante $M_\delta > 0$.

- ii) Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico e o operador linear $-A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é seu gerador infinitesimal, então A é setorial; veja [61] para mais detalhes.

1.4 Potências fracionárias para operadores setoriais

O problema de encontrar uma representação adequada para uma potência fracionária de um operador ilimitado é muito interessante e complexo, e nesta seção estudamos a versão desta teoria para operadores setoriais.

A potência fracionária de operadores setoriais é muito útil na teoria que trata da existência de soluções para equações diferenciais parciais não lineares de tipo parabólico e na análise do comportamento assintótico da solução. Para mais informação veja [8, 25, 49, 78].

Definição 1.46. Seja A um operador setorial positivo em X e $\beta > 0$. Então

$$A^{-\beta} := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} s^{\beta-1} T(s) ds,$$

com $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ representando a função Gamma (veja Definição 2.6 para detalhes) e $\{T(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo analítico gerado por $-A$.

Observação 1.47. Agora levantamos alguns pontos interessantes relativos a última definição.

- i) Para a completude da teoria, iremos consideramos $A^0 = I_X$.
- ii) Quando $\beta = 1$, então A^{-1} é de fato o operador inverso de A . Para verificar isso, tome $x \in X$ e note que da Observação 1.45

$$\begin{aligned} AA^{-1}x &= A \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} T(s)x ds \right] \\ &= \int_0^{\infty} AT(s)x ds \\ &= - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{ds} T(s)x \right] ds \\ &= - \left[\lim_{r \rightarrow \infty} T(r)x - x \right] \\ &= x. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in D(A)$ então novamente pela Observação 1.45

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} T(s)Ax ds \right] \\ &= \int_0^{\infty} T(s)Ax ds \\ &= - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{ds} T(s)x \right] ds \\ &= - \left[\lim_{r \rightarrow \infty} T(r)x - x \right] \\ &= x. \end{aligned}$$

Proposição 1.48. *Seja A um operador setorial positivo em X . Então para todo $\beta \geq 0$ o operador $A^{-\beta} \in \mathcal{L}(X)$ e é injetor. Além disso, se β e γ são números não negativos, então*

$$A^{-\beta}A^{-\gamma} = A^{-(\beta+\gamma)}.$$

Demonstração. Pela Observação 1.45, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

com $\{T(t) : t \geq 0\}$ sendo o semigrupo analítico gerado por $-A$. Assim,

$$\begin{aligned} \|A^{-\beta}x\|_X &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} Ce^{-\delta s} ds \|x\|_X \\ &= \frac{\delta^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} Ce^{-s} ds \|x\|_X \\ &= C\delta^{-\beta} \|x\|_X, \end{aligned}$$

ou seja, $A^{-\beta}$ é limitada. Para $\beta, \gamma > 0$, o Teorema de Fubini garante a igualdade

$$\begin{aligned} A^{-\beta}A^{-\gamma} &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\beta-1} s^{\gamma-1} T(t+s) ds dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \int_t^\infty t^{\beta-1} (u-t)^{\gamma-1} T(u) du dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \int_0^u t^{\beta-1} (u-t)^{\gamma-1} dt T(u) du \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = \omega u$, deduzimos que

$$\begin{aligned} A^{-\beta}A^{-\gamma} &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \int_0^1 (\omega u)^{\beta-1} (u-\omega u)^{\gamma-1} u d\omega T(u) du \\ &= \left(\frac{\int_0^1 \omega^{\beta-1} (1-\omega)^{\gamma-1} d\omega}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \right) \left(\int_0^\infty u^{\beta+\gamma-1} T(u) du \right) \\ &= A^{-(\beta+\gamma)}, \end{aligned}$$

já que (para mais detalhes veja a Proposição 2.8)

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} = \int_0^1 \omega^{\beta-1} (1-\omega)^{\gamma-1} d\omega.$$

Além disso, se $A^{-\beta}x = 0$, para algum $x \in X$, então para qualquer inteiro $n > \beta$,

$$A^{-n}x = A^{-(n-\beta)}A^{-\beta}x = 0.$$

Porém A^{-1} é injetor, já que $0 \in \rho(A)$. Sendo assim, A^{-n} também é injetor e portanto $x = 0$. Em outras palavras, $A^{-\beta}$ é injetor. □

A construção acima garante que $A^{-\beta}$ é um operador bijetor sobre sua imagem, para qualquer A operador setorial.

Agora queremos definir um operador que desempenhe o mesmo papel que as potência fracionárias de operadores limitados. Para isso, consideramos $\beta > 0$ e definimos $A^\beta : D(A^\beta) \subset X \rightarrow X$, por

$$A^\beta = (A^{-\beta})^{-1},$$

e $D(A^\beta) = \text{Im}(A^{-\beta})$.

Na continuação daremos algumas propriedades muito importantes das potências fracionárias dos operadores setoriais.

Teorema 1.49. *Seja A um operador setorial positivo em X . Então para todos $\gamma, \beta \geq 0$, temos:*

- i) Se $\beta > 0$, então A^β é um operador densamente definido e fechado.*
- ii) Se $\gamma \geq \beta$, então $D(A^\gamma) \subset D(A^\beta)$.*
- iii) $A^\gamma A^\beta = A^\beta A^\gamma = A^{\gamma+\beta}$ em $D(A^{\gamma+\beta})$.*
- iv) $A^\gamma T(t) = T(t)A^\gamma$ em $D(A^\gamma)$, para $t > 0$, com $\{T(t) : t \geq 0\}$ sendo o semigrupo analítico gerado por $-A$.*

Demonstração. i) Pelo item ii), se n é um número inteiro maior que β , então $D(A^n) \subset D(A^\beta)$. Mas então, pelo Teorema 1.26 concluímos que

$$X = \overline{\bigcap_{m=1}^{\infty} D(A^m)} \subset \overline{D(A^n)} \subset \overline{D(A^\beta)} \subset X \implies \overline{D(A^\beta)} = X.$$

Para verificar que A^β é fechado, considere $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A^\beta)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $A^\beta x_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Como a Proposição 1.48 garante que $A^{-\beta} \in \mathcal{L}(X)$, deduzimos que $x = A^{-\beta}y$, ou seja, que $x \in D(A^\beta)$ e que $A^\beta x = y$, como queríamos.

ii) Vamos demonstrar que $D(A^\gamma) \subset D(A^\beta)$ com $\gamma \geq \beta \geq 0$. Seja $x \in D(A^\gamma) = \text{Im}(A^{-\gamma})$ e suponha que $\gamma = \beta + \epsilon$. Então, por definição, existe $y \in X$ tal que $x = A^{-\gamma}y$. Porém, pela Proposição 1.48 concluímos que

$$x = A^{-\gamma}y = A^{-(\beta+\epsilon)}y = A^{-\beta} \left[A^{-\epsilon}y \right],$$

isto é, $x \in D(A^\beta)$.

iii) Se $x \in D(A^{\gamma+\beta})$, existe $y \in X$ tal que

$$x = A^{-(\gamma+\beta)}y \implies x = \begin{cases} A^{-\gamma}A^{-\beta}y, \\ A^{-\beta}A^{-\gamma}y, \end{cases}$$

sendo que a última implicação é assegurada pela Proposição 1.48.

Mas então deduzimos que

$$A^\gamma x = A^\gamma A^{-(\gamma+\beta)}y = A^{-\beta}y,$$

ou seja, que $A^\gamma x \in D(A^\beta)$, e que

$$A^\beta x = A^\beta A^{-(\gamma+\beta)}y = A^{-\gamma}y,$$

ou seja, que $A^\beta x \in D(A^\gamma)$. Finalmente concluímos que

$$A^\gamma A^\beta x = A^\beta A^\gamma x = A^{\gamma+\beta}x.$$

iv) Se $\gamma = 0$ é trivial. Assuma então que $\gamma > 0$. Neste caso, para todo $x \in D(A^\gamma)$ vale que

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma)(T(t)A^\gamma x) &= T(t) \left[\int_0^\infty s^{\gamma-1} T(s)x ds \right] \\ &= \int_0^\infty s^{\gamma-1} T(t+s)x ds \\ &= \left[\int_0^\infty s^{\gamma-1} T(s)ds \right] T(t)x \\ &= \Gamma(\gamma)(A^\gamma T(t)x). \end{aligned}$$

□

Lema 1.50. *Se é A um operador setorial positivo e $\beta \in (0, 1)$, então*

$$A^{-\beta}Ax = A^{1-\beta}x$$

para todo $x \in D(A)$.

Demonstração. Se $x \in D(A)$, como $Im(A^{1-\beta}) = X$ e $A^{-\beta}Ax \in X$, existe $y \in D(A^{1-\beta})$ tal que

$$A^{-\beta}Ax = A^{1-\beta}y.$$

Mas então, ao aplicarmos $A^{-(1-\beta)}$ em ambos os lados da igualdade acima, pela Proposição 1.48 obtemos

$$x = A^{-1}Ax = A^{-(1-\beta)}A^{-\beta}Ax = A^{-(1-\beta)}A^{1-\beta}y = y,$$

como queríamos. □

Teorema 1.51. *Sejam A um operador setorial positivo e $\beta \in (0, 1)$. Então existe $M > 0$ tal que*

$$\|A^\beta x\|_X \leq M \|Ax\|_X^\beta \|x\|_X^{1-\beta}, \quad \forall x \in D(A).$$

Demonstração. Se $\gamma \in (0, 1)$ e $\epsilon > 0$, então da Observação 1.45

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\gamma)A^{-\gamma}x\|_X &\leq \left\| \int_0^\epsilon s^{\gamma-1}T(s)x ds \right\|_X + \left\| \int_\epsilon^\infty s^{\gamma-1}T(s)x ds \right\|_X \\ &= \left\| \int_0^\epsilon s^{\gamma-1}T(s)x ds \right\|_X + \left\| \int_\epsilon^\infty s^{\gamma-1} \left[\frac{d}{ds}T(s) \right] A^{-1}x ds \right\|_X \\ &= \left\| \int_0^\epsilon s^{\gamma-1}T(s)x ds \right\|_X + \|\epsilon^{\gamma-1}T(\epsilon)A^{-1}x \\ &\quad + \int_\epsilon^\infty (\gamma-1)s^{\gamma-2}T(s)A^{-1}x ds\|_X, \end{aligned}$$

e portanto, pelo Teorema 1.44 temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\gamma)A^{-\gamma}x\|_X &\leq C\|x\|_X \int_0^\epsilon s^{\gamma-1} ds + C\|A^{-1}x\|_X \epsilon^{\gamma-1} \\ &\quad + C\|A^{-1}x\|_X \int_\epsilon^\infty (1-\gamma)s^{\gamma-2} ds \\ &\leq C\|x\|_X \frac{\epsilon^\gamma}{\gamma} + 2C\|A^{-1}x\|_X \epsilon^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\epsilon > 0$ e como o mínimo em ϵ do lado direito da desigualdade ocorre quando

$$\epsilon = 2(1-\gamma) \frac{\|A^{-1}x\|_X}{\|x\|_X},$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\gamma)A^{-\gamma}x\|_X &\leq \|x\|_X \frac{C}{\gamma} \left(2(1-\gamma) \frac{\|A^{-1}x\|_X}{\|x\|_X} \right)^\gamma \\ &\quad + 2C\|A^{-1}x\|_X \left(2(1-\gamma) \frac{\|A^{-1}x\|_X}{\|x\|_X} \right)^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|A^{-\gamma}x\|_X \leq M\|x\|_X^{1-\gamma}\|A^{-1}x\|_X^\gamma.$$

Assim, ao tomar $\gamma = 1 - \beta$ e trocar x por Ax , obtemos a desigualdade

$$\|A^{-(1-\beta)}Ax\|_X \leq M\|Ax\|_X^\beta\|x\|_X^{1-\beta},$$

que pelo Lema 1.50 nos leva a deduzir a desigualdade desejada. \square

Corolário 1.52. *Seja A um operador setorial positivo em X e considere $\beta \in (0, 1)$. Então para todo $x \in X$ e todo λ no setor do operador $-A$, temos:*

$$\|A^\beta(\lambda + A)^{-1}x\|_X \leq C|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_X.$$

Demonstração. É uma consequência imediata do Teorema 1.51. \square

Uma última aplicação que apresentamos nesta seção é a seguinte.

Definição 1.53. *Seja A um operador setorial positivo em X . Para $\beta \geq 0$ definimos o espaço vetorial*

$$X^\beta = D(A^\beta),$$

imbuído da norma do gráfico

$$\|x\|_{X^\beta} = \|A^\beta x\|_X.$$

Teorema 1.54. *Sejam A um operador setorial positivo em X e $\beta \geq 0$. Então o espaço X^β é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X^\beta$ de Cauchy na topologia de X^β . Como sabemos que

$$\|A^\beta x_n - A^\beta x_m\|_X = \|x_n - x_m\|_{X^\beta},$$

a sequência $\{A^\beta x_n\}_{n=1}^\infty$ é de Cauchy na topologia de X . Da completude de X , existe $y \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^\beta x_n - y\|_X = 0.$$

Mas então, observe que

$$\|x_n - A^{-\beta} y\|_{X^\beta} = \|A^\beta x_n - y\|_X \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. As sentenças acima garantem que toda sequência de Cauchy em X^β é convergente, ou seja, que X^β é um espaço de Banach. \square

Capítulo 2

Cálculo fracionário

Neste capítulo estudamos alguns conceitos do cálculo fracionário, que são: transformada de Laplace, funções Gamma e Beta, funções de tipo Wright, função de Mainardi, convolução, derivação e integração fracionária, e por último discutiremos um pouco sobre os operadores de Mittag-Leffer. Mais detalhes podem ser encontrados nas referências [6, 8, 9, 19, 24, 37, 46, 53, 60, 65].

Começamos definindo algumas funções integráveis em espaços L^p no sentido de Dunford-Schwartz (veja [16]).

- ✓ $(L^p(S, X), \|\cdot\|_{L^p(S, X)})$, para $(1 \leq p < \infty)$, denota o conjunto de todas as funções mensuráveis de $S \subset \mathbb{R}$ em X tal que $\|u(t)\|_X^p$ é integrável em S e sua norma é dada por

$$\|u(t)\|_{L^p(S, X)} = \left(\int_S \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- ✓ $L^p_{loc}(S, X)$, para $(1 \leq p < \infty)$, denota o espaço de funções que pertencem a $L^p(\tilde{S}, X)$ para todo compacto \tilde{S} contido em $S \subset \mathbb{R}$. Estas funções são chamadas funções localmente integrável.
- ✓ $(W^{p,k}(S, X), \|\cdot\|_{W^{p,k}(S, X)})$, está denotando o espaço de funções $u \in L^p(S, X)$ que possuem as derivadas fracas de ordem menor ou igual que k em $L^p(S, X)$, com norma

$$\|u(t)\|_{W^{p,k}(S, X)} = \left(\sum_{n=0}^k \int_S \|D^n u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty.$$

✓ $C(S, X)$ denota o espaço das funções contínuas de $S \subset \mathbb{R}$ em X .
Quando S é compacto definimos a norma

$$\|u(t)\|_{C(S, X)} = \sup_{t \in S} \|u(t)\|_X.$$

2.1 Pré-requisitos

Neste ponto recordamos alguns princípios e algumas funções especiais. Também estudamos as definições de derivada e integral fracionária junto com suas propriedades básicas mais importantes.

2.1.1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um operador linear muito útil para estudar soluções de equações diferenciais, pois através desta ferramenta podemos converter equações diferenciais lineares em equações algébricas que, em geral, são mais fáceis de resolver.

Para estudar tal operador, primeiro introduzimos alguns conceitos e resultados.

Definição 2.1. Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é dita ser de tipo exponencial, se existem $t_0, M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\gamma t},$$

para todo $t \geq t_0$.

Proposição 2.2. Se $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma função localmente integrável e de tipo exponencial, então existe $\gamma > 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt < \infty,$$

para $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$.

Demonstração. Como f é de tipo exponencial, existem $t_0, M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\gamma t},$$

para todo $t \geq t_0$.

Então

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \right\|_X \leq \left\| \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} f(t) dt \right\|_X + \left\| \int_{t_0}^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \right\|_X$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{t_0} e^{-Re\lambda t} \|f(t)\|_X dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-(Re\lambda - \gamma)t} dt \\ &\leq e^{|Re\lambda|t_0} \int_0^{t_0} \|f(t)\|_X dt + \frac{e^{-(Re\lambda - \gamma)t_0}}{Re\lambda - \gamma} < \infty. \end{aligned}$$

□

Neste ponto podemos definir o objeto central deste estudo inicial.

Definição 2.3. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente integrável e de tipo exponencial. A transformada de Laplace de f com $\lambda \in \mathbb{R}$ é dada por

$$L\{f(t)\}(\lambda) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = \hat{f}(\lambda), \quad (2.1)$$

sempre que a integral acima existir.

Finalmente apresentamos um resultado famoso que nos auxiliará em garantir a invertibilidade da transformada de Laplace.

Teorema 2.4 (Teorema de Lerch). *Se $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial, então existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que a transformada de Laplace existe para todo $Re\lambda > \lambda_0$. Ainda mais, se uma função $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínua em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial satisfaz*

$$L\{f(t)\}(\lambda) = L\{g(t)\}(\lambda),$$

para todo $\lambda > Re\lambda_0$, então $f = g$ quase sempre em $[0, \infty)$.

Demonstração. Ver [60, 74] para os detalhes. □

Nas condições acima, o operador da transformada de Laplace L é bijetor e contínuo, e portanto podemos definir a transformada inversa de Laplace sobre a imagem do operador L .

Teorema 2.5. *Seja $\hat{f} : D(\hat{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável. Então*

$$f(t) = L^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda, \text{ com } c > c_0,$$

com c_0 no semi-plano direito da convergência absoluta da integral da transformada de Laplace (2.1).

2.1.2 A função Gamma e a função Beta

A função Gamma denotada por Γ , e a função Beta denotado por B , são aplicações que estendem o conceito de fatorial aos números complexos.

Definição 2.6. A função Gamma definida em $D(\Gamma) = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ por

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(1+z)(2+z)\dots(n+z)}$$

(ver [54]), tem as seguintes propriedades:

1. Se $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds.$$

2. Se $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

3. Se $z \in D(\Gamma)$,

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$

Definição 2.7. A função Beta está definida no domínio $D(B)$, com $D(B) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} z_1 > 0, \operatorname{Re} z_2 > 0\}$ por:

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 s^{z_1-1} (1-s)^{z_2-1} ds.$$

Agora enunciamos a seguinte proposição, para analisar a conexão entre a função Gamma e a função Beta.

Proposição 2.8. *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Re} z_1 > 0$ e $\operatorname{Re} z_2 > 0$. Então*

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \Gamma(z_1+z_2)B(z_1, z_2).$$

Demonstração. Pelas propriedades enunciadas na definição da função Gamma, temos

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{z_1-1} s^{z_2-1} dt ds.$$

Fazendo a mudança de variável $t = x^2$ e $s = y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(z_1)\Gamma(z_2) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2(z_1-1)} y^{2(z_2-1)} xy dx dy \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2z_1-1} y^{2z_2-1} dx dy. \end{aligned}$$

Por mudança de coordenadas polares, seja $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Então

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(z_1+z_2)-1} dr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2z_2-1} (\sin \theta)^{2z_1-1} d\theta.$$

Por a mudança de variáveis: $r^2 = w_1$ e $(\cos \theta)^2 = w_2$, finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(z_1)\Gamma(z_2) &= \int_0^\infty e^{-w_1} (w_1)^{z_1+z_2-1} dw_1 \int_0^1 w_2^{z_2-1} (1-w_2)^{z_1-1} dw_2 \\ &= \Gamma(z_1 + z_2) B(z_1, z_2). \end{aligned}$$

□

2.1.3 A convolução

A convolução é um operador matemático que transforma duas funções f e g numa terceira função, que mede a área subentendida pela superposição de f numa versão deslocada de g .

Definição 2.9. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis. A convolução entre f e g é dada por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t-s)g(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

sempre que a integral acima existir.

É importante salientar que, muito embora a convolução esteja definida apenas para funções sobre \mathbb{R} , podemos realizar uma manipulação algébrica que nos permitirá fazer novas extensões desta definição.

Para isso, assumamos que $T \in (0, \infty)$ e que as funções $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sejam mensuráveis. Considere então $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, T], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0, T], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

A igualdade acima nos induz a seguinte formalização da noção de convolução para funções definidas em intervalos do tipo $[0, T]$.

Definição 2.10. Sejam $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis onde $T \in (0, \infty)$. A convolução em $[0, T]$ entre f e g é dada por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

sempre que a integral acima existir.

O tipo de convolução definida acima é comum na teoria de equações integrais de Volterra, e conseqüentemente, na teoria do cálculo fracionário. Os seguintes resultados são bastante clássicos e podem ser encontrados com maiores detalhes em [7, 8].

Proposição 2.11. *Seja $T \in (0, \infty)$ e considere as funções mensuráveis $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Sempre que as integrais existirem, valem as identidades*

1. $f * g = g * f$;
2. $(f * g) * h = g * (f * h)$.

Teorema 2.12. *Sejam $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente integráveis de tipo exponencial e seja L a transformada de Laplace (definição 2.3). Então a função $f * g : [0, \infty) \rightarrow X$ é localmente integrável de tipo exponencial e*

$$L\{(f * g)(t)\}(\lambda) = L\{f(t)\}(\lambda)L\{g(t)\}(\lambda),$$

com λ na região de convergência adequada para as duas funções.

Observação 2.13. Usando a mesma notação do teorema anterior, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte maneira; suponha que

$$L\{f(t)\}(\lambda) = F(\lambda) \quad \text{e que} \quad L\{g(t)\}(\lambda) = G(\lambda).$$

Então

$$\int_0^t L^{-1}\{F(\lambda)\}(t-s)L^{-1}\{G(\lambda)\}(s)ds = L^{-1}\{F(\lambda)G(\lambda)\}(t).$$

2.1.4 Função geral de Mittag-Leffler

Na continuação daremos a definição da função de Mittag-Leffler e algumas de suas propriedades, dada a sua grande importância nos problemas de cálculo fracionário.

Definição 2.14. Sejam $\alpha, \beta > 0$. A função geral de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função analítica definida por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda^{\alpha-\beta} e^{\lambda}}{\lambda^{\alpha} - z} d\lambda,$$

com γ uma curva que começa e termina em $-\infty$ e envolve o disco $|\lambda| \leq |z|^{1/\alpha}$ no sentido anti-horário.

Note que:

- ✓ Se $\beta = 1$ obtemos a função de Mittag-Leffler, a qual é denotada por:

$$E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z).$$

- ✓ Se $\alpha = \beta = 1$, obtemos:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = E_{1,1}(z) = e^z.$$

- ✓ Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, temos:

$$E_{\alpha,\beta}(-z^2) = E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k!} = \cos z.$$

- ✓ Para $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta > 0$, a expansão assintótica de $E_{\alpha,\beta}$ quando $|z| \rightarrow \infty$, é dada por:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \epsilon_{\alpha,\beta}(z), & \text{para } |\arg(z)| \leq \frac{1}{2}\pi\alpha, \\ \epsilon_{\alpha,\beta}(z), & \text{para } |\arg(-z)| < (1 - \frac{1}{2}\alpha)\pi, \end{cases} \quad (2.2)$$

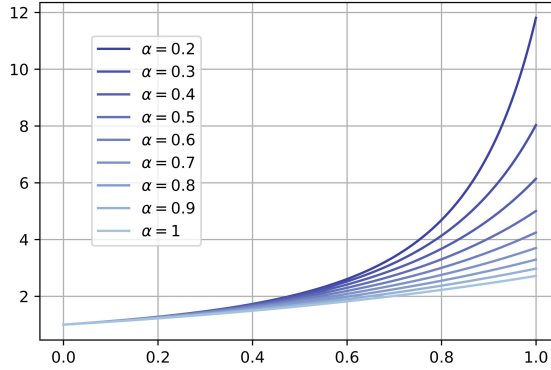
com

$$\epsilon_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O(|z|^{-N}), \text{ quando } z \rightarrow \infty.$$

(veja [6, 24, 30, 55] para detalhes no comportamento assintótico destas funções).

✓ Finalmente, para $\alpha \in (0, 1]$, quando consideramos a função de Mittag-Leffler restrita a reta real, temos a Figura 2.1 que esboça razoavelmente a diferença de comportamento desta família de funções.

Figura 2.1: Função de Mittag-Leffler - $E_\alpha(t)$



Por último, enunciamos a versão fracionária do Teorema de Gronwall que é muito importante em nossa teoria.

Teorema 2.15 (Versão fracionária da desigualdade de Gronwall). *Seja $b \geq 0$, $\alpha > 0$ e $l : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa e localmente integrável em $[0, T]$. Assuma que $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa e localmente integrável em $[0, T]$ que satisfaz*

$$u(t) \leq l(t) + b \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

Então vale que

$$u(t) \leq l(t) + b\Gamma(\alpha) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(b\Gamma(\alpha)(t-s)^\alpha) l(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Veja [8, 25] para os detalhes desta demonstração. \square

2.1.5 A função de tipo Wright

Para o estudo do cálculo fracionário, uma função muito importante é a função de tipo Wright, cuja transformada de Laplace é a função

geral de Mittag-Leffer. Ela aparece de forma natural quando trabalhamos com a EDP fracionária homogênea e será usada frequentemente. Daremos algumas propriedades importantes destas funções, mas para um estudo mais profundo veja [46, 56, 75–77].

Definição 2.16. Sejam $\lambda > -1$ e $\mu \in \mathbb{C}$. A função de tipo Wright, denotada por $W_{\lambda,\mu}(z)$, é dada pela representação em série complexa e convergente em todo o plano complexo

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}.$$

Na literatura podemos encontrar um caso particular das funções de tipo Wright, o qual desempenha um papel muito importante no cálculo fracionário; esta função é chamada de função M–Wright, ou como também é conhecida, função de Mainardi. Esse conceito foi sugerido por F. Mainardi em [47] e introduzido formalmente pelo livro texto de I. Podlubny [60].

Abaixo fazemos uma definição formal desta função e apresentamos algumas de suas propriedades importantes.

Definição 2.17. Se $\alpha \in (0, 1)$, a função de Mainardi $M_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$M_\alpha(z) = W_{-\alpha, 1-\alpha}(-z),$$

ou mais especificamente,

$$M_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha - \alpha n)}.$$

Proposição 2.18. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $-1 < r < \infty$, $\lambda > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. A função de Mainardi $M_\alpha(z)$ tem as seguintes propriedades:

- i) $M_\alpha(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$.
- ii) $\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}$.
- iii) $L\{\alpha t M_\alpha(t)\}(z) = E_{\alpha,\alpha}(-z)$.
- iv) $L\{M_\alpha(t)\}(z) = E_\alpha(-z)$.
- v) $L\{\alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha})\}(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}$.

Demonstração. Como a demonstração deste resultado é bastante técnica e foge do escopo deste estudo, sugerimos as literaturas [23, 46] como textos suplementares. □

2.2 Derivada e integral de ordem fracionária

Nesta seção estudamos os operadores de integração e derivação do cálculo fracionário dados por Caputo, Liouville e Riemann.

Seja X um espaço de Banach, $b \in (0, \infty)$ e considere o operador de integração $I : L^1(0, b; X) \rightarrow C([0, b], X)$ dado por

$$I(f)(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad \forall t \in [0, b].$$

Note que na n -ésima iteração, a integral da função f é dada por

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-r)^{n-1} f(r)dr, \quad \forall t \in [0, b].$$

De forma mais geral, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte maneira

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-r)^{n-1} f(r)dr, \quad \forall t \in [0, b].$$

Assim, a integração fracionária de f , com ordem $\alpha > 0$, pode ser dada pela seguinte extrapolação do conceito acima

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} f(r)dr, \quad \forall t \in [0, b]. \quad (2.3)$$

Introduzimos então uma função bastante útil para descrever a integral fracionária como uma convolução.

Definição 2.19. Sejam $\alpha > 0$ e $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

A definição acima nos permite representar a fórmula integral (2.3) como uma convolução, sempre que $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in L^1(0, b; X)$. Basta assumir que $f \equiv 0$, para $t < 0$, e notar que

$$f * g_\alpha(t) = \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s)ds,$$

quase sempre em $[0, b]$. Agora estamos prontos para definir derivação e integração fracionária.

Definição 2.20. Se $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1(0, b; X)$, a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α , denotada por $J_t^\alpha f(t)$, é dada por

$$J_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t), \text{ quase sempre em } [0, b].$$

Definimos $J_t^0 f(t) = f(t)$, quase sempre em $[0, b]$.

Abaixo demonstramos uma propriedade interessante do operador linear dado pela integral de Riemann-Liouville.

Teorema 2.21. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $b > 0$. O operador integral fracionário de Riemann-Liouville de ordem α dado por*

$$J_t^\alpha : L^1(0, b; X) \rightarrow L^1(0, b; X)$$

$$f(t) \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

é um operador linear limitado.

Demonstração. Vamos provar que $\|J_t^\alpha f(t)\|_{L^1(0, b; X)} \leq C \|f\|_{L^1(0, b; X)}$, para todo $f \in L^1(0, b; X)$.

Para isso, note que

$$\begin{aligned} \|J_t^\alpha f(t)\|_{L^1(0, b; X)} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right\|_{L^1(0, b; X)} \\ &= \int_0^b \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right\|_X dt \\ &\leq \int_0^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s)\|_X ds \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^b (b-s)^\alpha \|f(s)\|_X ds, \end{aligned}$$

onde para a última igualdade utilizamos o Teorema de Fubini. Logo usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \|J_t^\alpha f(t)\|_{L^1(0, b; X)} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|(b-s)^\alpha\|_{L^\infty(0, b; \mathbb{R})} \|f\|_{L^1(0, b; X)} \\ &\leq C \|f\|_{L^1(0, b; X)}, \end{aligned}$$

e portanto a integral fracionária de Riemann-Liouville define um operador linear limitado em $\mathcal{L}(L^1(0, b; X))$. □

Definição 2.22. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1(0, b; X)$ satisfazendo $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}(0, b; X)$. A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α , denotada por $D_t^\alpha f(t)$, é dada por

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 J_t^{1-\alpha} f(t) = D_t^1 (g_{1-\alpha} * f)(t),$$

quase sempre em $[0, b]$, com $D_t^1 = \left(\frac{d}{dt}\right)$ a derivada fraca. Explicitamente, temos:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right\},$$

quase sempre em $[0, b]$.

Observação 2.23. A derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante é dada por

$$D_t^\alpha c = c \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Note que temos um comportamento singular em zero, além de que a derivada de uma constante não é necessariamente nula. Michele Caputo, em 1969, propôs a derivada fracionária de Caputo que trata deste problema.

Definição 2.24. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e a função $f \in C([0, b]; X)$ com $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}(I; X)$. Então a derivada fracionária de Caputo de ordem α é denotada por ${}_c D_t^\alpha$, e definida por

$${}_c D_t^\alpha f(t) := D_t^\alpha (f(t) - f(0)).$$

Abaixo descrevemos alguns resultados relevantes sobre os operadores integrais e diferenciais apresentados até o momento.

Proposição 2.25. Se $f \in C^1([0, b], X)$, temos

$${}_c D_t^\alpha f(t) := J_t^{1-\alpha} f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds.$$

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned} {}_c D_t^\alpha f(t) &= D_t^\alpha (f(t) - f(0)) \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (f(s) - f(0)) ds \right\} \end{aligned}$$

Como f é diferenciável e C^1 , obtemos que

$$\begin{aligned} {}_c D_t^\alpha f(t) &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left[\frac{1}{1-\alpha} D_s^1 (t-s)^{1-\alpha} \right] (f(s) - f(0)) ds \right\} \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{1-\alpha} (t-s)^{1-\alpha} f'(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Por fim, aplicando a regra de Leibniz para integrais, obtemos

$${}_c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds := J_t^{1-\alpha} f'(t).$$

□

Proposição 2.26. *Sejam $\alpha, \beta > 0$. Podemos concluir que:*

- i) $J_t^\alpha J_t^\beta f(t) = J_t^{\alpha+\beta} f(t)$, para todo $f \in L^1(0, b; X)$.
- ii) $D_t^\alpha J_t^\alpha f(t) = f(t)$, para todo $f \in L^1(0, b; X)$.
- iii) Se $f \in L^1(0, b; X)$ e $g_{1-\alpha} * f \in W^{1,1}(0, b; X)$, então

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} (J_s^{1-\alpha} f(s))|_{s=0}.$$

Além disso, se existe uma função $\phi \in L^1(0, b; X)$ tal que $f = J_t^\alpha \phi(t)$, então

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t).$$

- iv) Se $f \in L^1(0, b; X)$ então ${}_c D_t^\alpha J_t^\alpha f(t) = f(t)$.
- v) Para $f \in C([0, b]; X)$ satisfazendo $g_{1-\alpha} * f \in W^{1,1}([0, b]; X)$, temos que

$$J_t^\alpha {}_c D_t^\alpha f(t) = f(t) - f(0).$$

Demonstração. Para a demonstração deste resultado veja [8].

□

2.2.1 Uma introdução aos problemas fracionários de Cauchy

Considere o problema fracionário de Cauchy

$$\begin{cases} {}_c D_t^\alpha u(t) = -Au(t), & t > 0, \\ u(0) = x \in X, \end{cases} \quad (2.4)$$

com $\alpha \in (0, 1)$, ${}_c D_t^\alpha$ a derivada fracionária de Caputo e A um operador linear limitado em X .

Para cada $x \in X$, considere $\tau > 0$ e o espaço métrico completo

$$K = \{u \in C([0, \tau], X) : u(0) = x\},$$

e defina a aplicação $F : K \rightarrow K$ por

$$F(u)(t) := x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad t \in [0, \tau].$$

Para quaisquer $u, v \in K$, verificamos que

$$\begin{aligned} \|F(u)(t) - F(v)(t)\|_X &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|Au(s) - Av(s)\|_X ds \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s \in [0, \tau]} \|u(s) - v(s)\|_X. \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos auxilia em concluir que

$$\begin{aligned} \|F^2(u)(t) - F^2(v)(t)\|_X &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|AFu(s) - AFv(s)\|_X ds \\ &\leq \frac{\|u(s) - v(s)\|_{C([0, \tau]; X)} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\alpha ds \end{aligned}$$

e portanto

$$\|F^2(u)(t) - F^2(v)(t)\|_X \leq \frac{t^{2\alpha} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^2}{\Gamma(2\alpha+1)} \|u(s) - v(s)\|_{C([0, \tau]; X)}.$$

Baseados na desigualdade acima, deduzimos indutivamente que

$$\begin{aligned} \|F^n(u)(t) - F^n(v)(t)\|_X &\leq \frac{t^{\alpha n} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \|u(s) - v(s)\|_{C([0, \tau]; X)} \\ &\leq \frac{\tau^{\alpha n} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \|u(s) - v(s)\|_{C([0, \tau]; X)}, \end{aligned}$$

para $t \in [0, \tau]$.

Como

$$\frac{|\tau|^{\alpha n} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

pois sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\tau|^{\alpha n} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} = E_{\alpha}(|\tau|^{\alpha} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}),$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que F^{n_0} é contração. Sendo assim, pelo Lema 1.20, a aplicação F tem um único ponto fixo. Em outras palavras, existe uma única função contínua $u : [0, \tau] \rightarrow X$, que satisfaz

$$u(t) = x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Como $\tau > 0$ foi escolhido arbitrariamente, da unicidade do ponto fixo de F , podemos deduzir que existe uma única função contínua $u : [0, \infty) \rightarrow X$, que satisfaz

$$u(t) = x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

e $u(0) = x$ pois $u \in K$. Observando que $u(t) \in C^1([0, \infty), X)$, não é difícil verificar que esta função é a única solução do problema (2.4) (veja a Proposição 2.26 para verificar as ferramentas que garantem essa afirmação).

Relembrando a Observação 1.21, como $A \in \mathcal{L}(X)$, pelo Teorema de Picard–Lindelöf concluímos que esta única solução de (2.4) é dada por

$$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} x, \quad \forall t \geq 0,$$

tal que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_X &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} x \right\|_X \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \|x\|_X \\ &= E_{\alpha}(\|A\|_{\mathcal{L}(X)} t^{\alpha}) \|x\|_X, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

É por isso que passamos a representar a solução $u(t)$ de (2.4) por

$$u(t) = E_{\alpha}(-At^{\alpha})x, \quad \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, se generalizamos (2.4) e consideramos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} {}_cD_t^\alpha u(t) = -Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

com $\alpha \in (0, 1)$, ${}_cD_t^\alpha$ a derivada fracionária de Caputo, A um operador linear limitado em X e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua e localmente Lipschitz na segunda variável, isto é, para cada $x_0 \in X$ existe uma bola aberta B_0 em X e uma constante $L_0 = L_0(B_0) \geq 0$ tal que

$$\|f(t, z) - f(t, y)\|_X \leq L_0 \|z - y\|_X,$$

para todo $z, y \in B_0$ e $t \in [0, \infty)$, somos capazes de verificar ao menos existência e unicidade de solução local, seguindo passos muito similares aos utilizados acima.

Através de computos mais complexos, os quais serão discutidos no Capítulo ??, podemos ainda mostrar que essa solução local $u(t)$ satisfaz localmente a equação integral

$$u(t) = E_\alpha(-t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds,$$

com

$$E_{\alpha,\alpha}(-At^\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \alpha)}, \quad \forall t \geq 0.$$

2.3 Operadores de Mittag-Leffler

Nesta seção introduzimos e estudamos a família de operadores de Mittag-Leffler gerados por operadores setoriais (para detalhes sugerimos os trabalhos [8, 9, 26, 31, 41, 51, 72, 73]).

Nosso objetivo é adaptar a representação dos semigrupos associados a operadores setoriais a um caso mais geral, isto é, para derivadas fracionárias de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$, e verificar que estes operadores são soluções do problema fracionário de Cauchy.

Para isto, lembremos que dado $\epsilon > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$, o caminho de Hankel $H_a = H_a(\epsilon, \theta)$ é dado por $H_a = H_{a_1} + H_{a_2} - H_{a_3}$, com H_{a_i} definidos por

$$\begin{aligned} H_{a_1} &:= \{te^{i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\}, \\ H_{a_2} &:= \{\epsilon e^{it} : t \in [-\theta, \theta]\}, \\ H_{a_3} &:= \{te^{-i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

(veja [8, 72] como referência).

Teorema 2.27. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo. Então, os operadores*

$$E_\alpha(-t^\alpha A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\alpha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) := \frac{t^{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{H_\alpha} e^{\lambda t} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

com $H_\alpha \subset \rho(-A)$ dado por (2.5) são as funções de Mittag-Leffler, estão bem definidos e $E_\alpha(-t^\alpha A)$ é fortemente contínuo, isto é, para $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|E_\alpha(-t^\alpha A)x - x\| = 0.$$

Além disso, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \|E_\alpha(-t^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

e

$$\sup_{t \geq 0} \|E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$$

Demonstração. Os passos desta demonstração são similares aos realizados na demonstração do Teorema 1.44 e podem ser encontrados, com todos os seus detalhes, em [8, 12]. \square

Agora usando a função Mainardi definida na Seção 2.1.4, construiremos outra fórmula integral para este operador.

Teorema 2.28. *Consideremos as hipóteses do Teorema 2.27. Então, podemos reescrever os operadores*

$$\{E_\alpha(-t^\alpha A) : t \geq 0\} \quad e \quad \{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) : t \geq 0\}$$

da seguinte forma:

$$E_\alpha(-t^\alpha A) = \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad t \geq 0,$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad t \geq 0,$$

com $\{T(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo analítico gerado por $-A$. (Veja [67])

Outro resultado muito importante é a seguinte proposição.

Proposição 2.29. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo. Então para $x \in X$, temos*

$$L\{E_\alpha(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x$$

e

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = (\lambda^\alpha + A)^{-1}x.$$

Demonstração. A prova das igualdades acima tem um raciocínio similar, por isso nos focaremos apenas na segunda. Seja $x \in X$, e note que pelo Teorema 2.28

$$\begin{aligned} L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha)x ds \right) dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $s = \omega t^{-\alpha}$ e utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty \alpha \omega t^{-\alpha} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) T(\omega)x t^{-\alpha} d\omega \right) dt \\ &= \int_0^\infty \omega \left(\int_0^\infty \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) e^{-\lambda t} dt \right) T(\omega)x d\omega. \end{aligned}$$

Agora, seja $t = \tau \omega^{1/\alpha}$ em H , com

$$H = \left(\int_0^\infty \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) e^{-\lambda t} dt \right).$$

Pelo item *v*) da Proposição 2.18

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\infty \alpha (\tau \omega^{1/\alpha})^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega (\tau \omega^{1/\alpha})^{-\alpha}) e^{-\lambda (\tau \omega^{1/\alpha})} \omega^{1/\alpha} d\tau \\ &= \omega^{-1} \int_0^\infty \alpha \tau^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\tau^{-\alpha}) e^{-(\lambda \omega^{1/\alpha})\tau} d\tau \\ &= \omega^{-1} e^{-\lambda^\alpha \omega}. \end{aligned}$$

Portanto pelo item *iv*) do Teorema 1.26, temos

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha \omega} T(\omega)x d\omega = (\lambda^\alpha + A)^{-1}x.$$

□

Teorema 2.30. *Consideremos as hipóteses do Teorema 2.27. Então, para $x \in X$ a função $E_\alpha(t^\alpha A)x$ é analítica para $t \geq 0$ e é a única solução de*

$${}_c D_t^\alpha E_\alpha(-t^\alpha A)x = -AE_\alpha(-t^\alpha A)x, \quad t > 0.$$

Demonstração. Seja $x \in X$ e definamos

$$\nu(t) = E_\alpha(-t^\alpha A)x.$$

Da Definição 2.24 e da analiticidade desta função, temos

$${}_c D_t^\alpha \nu(t) = J_t^{1-\alpha} \nu'(t) = g_{1-\alpha} * \nu'(t).$$

Note que o Teorema 2.27 garante condições para que $\nu'(t)$ esteja definido como:

$$\nu'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda,$$

convergente tal que $\|\nu'(t)\| \leq C$.

Consequentemente, deduzimos a igualdade

$$\begin{aligned} L\{{}_c D_t^\alpha \nu(t)\}(\lambda) &= L\{g_{1-\alpha} * \nu'(t)\}(\lambda) \\ &= L\{g_{1-\alpha}(t)\}(\lambda)L\{\nu'(t)\}(\lambda) \end{aligned}$$

para $Re\lambda > 0$. Usando as propriedades da transformada de Laplace temos

$$L\{g_{1-\alpha}(t)\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_{1-\alpha}(t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-\alpha} dt,$$

fazendo $s = \lambda t$, obtemos

$$\begin{aligned} L\{g_{1-\alpha}(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\alpha} \lambda^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\alpha} ds \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{(1-\alpha)-1} ds \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(1-\alpha) \\ &= \lambda^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$L\{ {}_c D_t^\alpha \nu(t) \}(\lambda) = [\lambda^{\alpha-1}] [\lambda L\{\nu(t)\}(\lambda) - \nu(0)].$$

Pela Proposição 2.29 conhecemos $L\{\nu(t)\}(\lambda)$, logo para $Re\lambda > 0$

$$L\{ {}_c D_t^\alpha \nu(t) \}(\lambda) = \lambda^{2\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x - \lambda^{\alpha-1}x.$$

Por outro lado, A é um operador fechado e portanto a Proposição 2.29 garante, para $Re\lambda > 0$, que

$$L\{-A\nu(t)\}(\lambda) = -AL\{\nu(t)\}(\lambda) = A[\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x].$$

Agora usando

$$A(\lambda^\alpha + A)^{-1}x = x - \lambda^\alpha(\lambda^\alpha + A)^{-1}x,$$

concluimos que

$$L\{-A\nu(t)\}(\lambda) = \lambda^{2\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x - \lambda^{\alpha-1}x,$$

para $Re\lambda > 0$, e pelo Teorema 2.4 a prova fica completa. \square

Corolário 2.31. *Sejam $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua e localmente Lipschitz na segunda variável, isto é, para cada $x_0 \in X$, existe uma bola aberta B_0 em X e uma constante $L_0 = L_0(B_0) \geq 0$ tal que*

$$\|f(t, z) - f(t, y)\| \leq L_0 \|z - y\|,$$

para todo $z, y \in B_0$ e $t \in [0, \infty)$. Então, existe $t_0 > 0$ e uma única função contínua $u : [0, t_0] \rightarrow X$ que satisfaz

$$u(t) = E_\alpha(-t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-(t-s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds, \quad (2.6)$$

para todo $t \in [0, t_0]$, ou seja, $u(t)$ é a única solução local do problema fracionário de Cauchy

$$\begin{cases} {}_c D_t^\alpha u(t) = -Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \quad (2.7)$$

Demonstração. Para detalhes desta prova veja [8, 12]. \square

Observação 2.32. i) Embora esta seção tenha discutido de maneira breve as soluções locais para os problemas fracionários de Cauchy do tipo (2.7), no Capítulo 3 abordaremos um pouco mais este assunto, porém devotados ao caso de operadores quase setoriais.

ii) Vale a pena enfatizar que as funções que satisfazem a fórmula integral (2.6) são chamadas de soluções mild do problema (2.7).

Para complementar e finalizar a discussão introduzida nesta seção, apresentamos um resultado que faz estimativas das famílias de operadores de Mittag-Leffler no espaço das potências fracionárias X^β , com $\beta \geq 0$, que foram definidos anteriormente.

Teorema 2.33. *Considere $\alpha \in (0, 1)$, $0 \leq \beta \leq 1$, e suponha que o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja setorial. Então, existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|E_\alpha(-t^\alpha A)x\|_{X^\beta} \leq Mt^{-\alpha\beta}\|x\|_X,$$

e

$$\|E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\|_{X^\beta} \leq Mt^{-\alpha\beta}\|x\|_X,$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Temos que

$$\|E_\alpha(-t^\alpha A)x\|_{X^\beta} = \left\| \frac{A^\beta}{2\pi i} \int_{H_\alpha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha + A)^{-1} x d\lambda \right\|_X.$$

Então, como A é um operador fechado, concluímos que

$$\begin{aligned} & \|E_\alpha(-t^\alpha A)x\|_{X^\beta} \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\alpha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} A^\beta (\lambda^\alpha + A)^{-1} x d\lambda \right\|_X \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi} \left\| \int_{H_\alpha} e^{\mu} \mu^{\alpha-1} A^\beta ((\mu/t)^\alpha + A)^{-1} x d\mu \right\|_X. \end{aligned}$$

A última igualdade segue da mudança de variável $\mu = \lambda t$.

Portanto,

$$\|E_\alpha(-t^\alpha A)x\|_{X^\beta} \leq \frac{t^{-\alpha}}{2\pi} \int_{H_\alpha} e^{Re\mu} |\mu|^{\alpha-1} \|A^\beta ((\mu/t)^\alpha + A)^{-1} x\|_X d\mu$$

e pelo Corolário 1.52

$$\|E_\alpha(-t^\alpha A)x\|_{X^\beta} \leq t^{-\alpha\beta} \left(C \int_{H_\alpha} e^{\operatorname{Re}\mu} |\mu|^{\alpha(\beta-1)} d|\mu| \right) \|x\|_X.$$

Note que escolhendo $M > 0$ tal que

$$\frac{C}{2\pi} \int_{H_\alpha} e^{\operatorname{Re}\lambda} |\lambda|^{\alpha(\beta-1)} d|\lambda| \leq M,$$

concluimos a demonstração deste resultado. De forma análoga pode-se demonstrar a segunda estimativa. \square

Capítulo 3

Problemas fracionários com operadores quase setoriais

Faz aproximadamente 50 anos que os operadores setoriais começaram a ser estudados extensivamente. Muitos operadores diferenciais elípticos importantes pertencem à classe de operadores setoriais (veja [20] para mais detalhes), especialmente quando são considerados nos espaços de Lebesgue (por exemplo em L^p). No entanto, se considerarmos espaços de funções mais regulares, como o espaço das funções Hölder contínuas, então esses operadores elípticos, em geral, contêm um setor em seu resolvente, mas não a estimativa requisitada e portanto não são operadores setoriais (para uma descrição mais completa destes fatos, veja [39, 59]).

Também temos problemas como o exposto na introdução desta dissertação, em que temos um domínio em que os operadores são setoriais mas quando estudamos o problema limite, perdemos esta caracterização. Neste caso conseguimos construir uma nova classe de operadores que ainda assim geram semigrupos.

É por isso que dedicamos este capítulo a estudar esses operadores e os respectivos problemas fracionários de Cauchy associados a eles (a principal referência para este assunto é o artigo de Wang-Chen-Xiao em [72]).

3.1 Uma introdução ao cálculo funcional H^∞

Começamos fazendo uma rápida descrição de algumas classes de funções que são abordadas por Cowling-Doust-McIntosh-Yagi, Markus, McIntosh e Periago-Straub nos respectivos [10, 49, 52, 59].

Para $\phi \in (0, \pi/2)$, considere o setor aberto

$$S_\phi^0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \phi\},$$

e defina $S_\phi = \overline{S_\phi^0}$. Denote ainda

$$H(S_\phi^0) := \{f : S_\phi^0 \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é holomorfo}\}$$

e $H^\infty(S_\phi^0) := \{f \in H(S_\phi^0) : f \text{ é limitada}\}.$

Em $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ consideramos as funções φ_0 e ψ_n , para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dadas por

$$\varphi_0(z) := \frac{1}{1+z} \quad \text{e} \quad \psi_n(z) := \frac{z}{(1+z)^n},$$

e definimos o conjunto

$$\Psi_0(S_\phi^0) := \left\{ f \in H(S_\phi^0) : \sup_{z \in S_\phi^0} \left| \frac{f(z)}{\varphi_0(z)} \right| < \infty \right\},$$

e, para $-1 < \gamma < 0$ e $s < 0$, o conjunto

$$\Psi_s^\gamma(S_\phi^0) := \left\{ f \in H(S_\phi^0) : \sup_{z \in S_\phi^0} |\psi_n^s(z) f(z)| < \infty \right\},$$

com n o menor dos inteiros tal que $n \geq 2$ e $\gamma + 1 < -(n-1)s$.

Observação 3.1. Para auxiliar na caracterização dos espaços $\Psi_0(S_\phi^0)$ e $\Psi_s^\gamma(S_\phi^0)$, ressaltamos que:

i) Como $\phi \in (0, \pi/2)$, para todo $z \in S_\phi^0$ temos a estimativa

$$\begin{aligned} |1+z| &= |e^{-i \frac{\arg z}{2}}| |1+z| \\ &= |e^{-i \frac{\arg z}{2}} (1+z)| \\ &= |e^{-i \frac{\arg z}{2}} + |z| e^{i \frac{\arg z}{2}}| \\ &\geq \left| \cos \frac{\arg z}{2} + |z| \cos \frac{\arg z}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \cos \frac{\arg z}{2} \right| (1 + |z|) \\
&\geq \cos \frac{\phi}{2} (1 + |z|).
\end{aligned}$$

Portanto se $f \in \Psi_0(S_\phi^0)$, então existe $M_\phi > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M_\phi (1 + |z|)^{-1}, \quad \forall z \in S_\phi^0. \quad (3.1)$$

Por outro lado, se $f \in H(S_\phi^0)$ e vale (3.1), então

$$\left| \frac{f(z)}{\varphi_0(z)} \right| \leq M_\phi \left(\frac{|1+z|}{1+|z|} \right) < \infty, \quad \forall z \in S_\phi^0.$$

Em outras palavras, $\Psi_0(S_\phi^0)$ contém todas as funções de $H(S_\phi^0)$ para as quais existe $M_\phi > 0$ tal que (3.1) é válida.

- ii) Através de uma justificativa análoga a feita acima, uma função $f \in H(S_\phi^0)$ pertence ao conjunto $\Psi_s^\gamma(S_\phi^0)$ se, e somente se, existe uma constante $M_\phi > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M_\phi |z|^{-s} (1 + |z|)^{ns},$$

para todo $z \in S_\phi^0$.

Defina então os conjuntos

$$F_0^\gamma(S_\phi^0) = \bigcup_{s < 0} \Psi_s^\gamma(S_\phi^0) \cup \Psi_0(S_\phi^0) \quad \text{e}$$

$$F(S_\phi^0) = \{f \in H(S_\phi^0) : \text{existem } k, n \in \mathbb{N}, \text{ tais que } f\psi_n^k \in F_0^\gamma(S_\phi^0)\}.$$

As definições acima nos permitem enunciar o seguinte resultado.

Proposição 3.2. *Se $\phi \in (0, \pi/2)$ e $f \in F(S_\phi^0)$, então existem constantes $r, K_\phi > 0$ tais que*

$$|f(z)| \leq K_\phi (|z|^{-r} + |z|^r), \quad \forall z \in S_\phi^0. \quad (3.2)$$

Por outro lado, se $f \in H(S_\phi^0)$ e satisfaz (3.2), então tomando $k \in \mathbb{N}$ com $k > r$, obtemos que $f\psi_n^k \in \Psi_s^\gamma(S_\phi^0)$, para todo $r - k \leq s < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ e $\gamma + 1 < -(n - 1)s$.

Demonstração. A demonstração deste resultado, embora similar as justificativas feitas na Observação 3.1, podem ser encontradas com detalhes em [59]. \square

Da proposição acima concluímos que $H^\infty(S_\phi^0) \subset F(S_\phi^0)$. Pela definição de $F(S_\phi^0)$ temos que $F(S_\phi^0) \subset H(S_\phi^0)$ e pela definição de $F_0^\gamma(S_\phi^0)$ temos que $F_0^\gamma(S_\phi^0) \subset H^\infty(S_\phi^0)$. Assim as classes de funções apresentadas satisfazem a cadeia de inclusões

$$F_0^\gamma(S_\phi^0) \subset H^\infty(S_\phi^0) \subset F(S_\phi^0) \subset H(S_\phi^0).$$

Neste ponto estamos preparados para introduzir os operadores quase setoriais, os quais temos citado durante toda esta dissertação.

Definição 3.3. Sejam $-1 < \gamma < 0$ e $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Denotamos por $\Theta_\phi^\gamma(X)$ a família de todos os operadores fechados $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ que satisfazem

i) $\sigma(A) \subset S_\phi \setminus \{0\}$, e

ii) para todo $\phi < \mu < \pi$ com $\mu \in (\phi, \pi)$ existe uma constante $C_\mu > 0$ tal que

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq C_\mu |z|^\gamma, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S_\mu.$$

O operador linear A é chamado de operador quase setorial em X se $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$.

Fica claro que a definição de operador quase setorial difere razoavelmente da definição de operador setorial positivo apresentada na Seção 1.3, e por isso julgamos necessário fazer duas considerações.

Observação 3.4. i) O domínio do operador A não precisa ser denso em X , como acontece no caso de operadores de tipo setorial. Esta é uma diferença bastante relevante, porém para termos uma teoria satisfatória de potências fracionárias complexas para os operadores quase setoriais, necessitamos supor a densidade do domínio do operador. No nosso caso, como estamos apenas preocupados com potências fracionárias reais, não existe esta limitação (veja [59] para mais detalhes).

Existem alguns estudos mais completos sobre potências fracionárias complexas para operadores que não possuem domínio denso como exemplos [14, 15, 50, 68].

ii) A estimativa do operador resolvente é “pior” no caso de operadores quase setoriais do que no caso de operadores setoriais, e este fato levará a implicações interessantes sobre o semigrupo gerado pelo operador quase setorial.

Para a completude deste estudo, incluímos um exemplo de um operador quase setorial que não é setorial.

Exemplo 3.5. Considere $X = C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ o espaço das funções contínuas de \mathbb{R} em \mathbb{C}^2 que se anulam no infinito. Para cada $f \in X$, existem $f_1, f_2 \in C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tais que

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O espaço X munido da norma

$$\|f\|_X := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_1(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_2(t)|$$

é um espaço de Banach.

Fixe $\gamma \in (-1, 0)$, considere a matriz

$$q(t) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 + i(1 + t^2) & t^{4+2\gamma} \\ 0 & 1 + t^2 - i(1 + t^2) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e defina $D(A) := \{f \in X : qf \in X\}$ e o operador linear

$$A: \begin{array}{ccc} D(A) \subset X & \longrightarrow & X \\ f & \longmapsto & qf. \end{array}$$

- ✓ Como $q(t)$ é bastante regular, não é difícil de verificar que A é um operador fechado. De fato, dada a sequência $x_n \in D(A)$ vamos provar que se $x_n \rightarrow x$ com $x \in X$ e $Ax_n \rightarrow y$ com $y \in X$ então $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Porém, note que A é inversível, com

$$A^{-1}: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & D(A) \\ f & \longmapsto & q^{-1}f. \end{array}$$

com

$$q^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2(1+t^2)} & \frac{-t^{4+2\gamma}}{2(1+t^2)^2} \\ 0 & \frac{1+i}{2(1+t^2)} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Mas então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|A^{-1}y - x\|_X = \|A^{-1}y - x_n + x_n - x\|_X \leq \|A^{-1}y - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X,$$

e como

$$\|A^{-1}y - x_n\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|y - Ax_n\|_X,$$

obtemos que

$$\|A^{-1}y - x\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|y - Ax_n\|_X + \|x_n - x\|_X.$$

Aplicando limite em ambos os lados, obtemos

$$\|A^{-1}y - x\|_X = 0,$$

assim

$$A^{-1}y = x,$$

ou seja

$$y(t) = q(t)x(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

- ✓ Vale que $\sigma(A) = \{x \pm ix : x \geq 1\}$. Como A é fechado, para verificar que $z \in \sigma(A)$ basta verificar que $z - A$ não é bijetivo. Neste caso porém, isto é equivalente a provar que

$$\det \begin{bmatrix} z - a & -t^{4+2\gamma} \\ 0 & z - \bar{a} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.3)$$

com $a = 1 + t^2 + i(1 + t^2)$.

Agora (3.3) é equivalente a igualdade

$$z^2 - 2\operatorname{Re}(a)z + |a|^2 = 0,$$

ou seja,

$$z = \frac{2\operatorname{Re}(a) \pm \sqrt{4[\operatorname{Re}(a)]^2 - 4|a|^2}}{2},$$

que por sua vez é equivalente a

$$z = 1 + t^2 \pm i(1 + t^2).$$

- ✓ Se escolhermos $\mu \in (\pi/4, \pi/2)$, então para todo $z \in \mathbb{C} \setminus S_\mu$

$$(z - A)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z - [1 + t^2 + i(1 + t^2)]}{z^2 - 2z(1 + t^2) + 2(1 + t^2)^2} & \frac{-t^{4+2\gamma}}{z^2 - 2z(1 + t^2) + 2(1 + t^2)^2} \\ 0 & \frac{z - [1 + t^2 - i(1 + t^2)]}{z^2 - 2z(1 + t^2) + 2(1 + t^2)^2} \end{bmatrix},$$

e através de cálculos complicados e precisos, deduzimos a existência de $C > 0$ tal que (veja [59, 71] para os detalhes)

$$\|(z - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C|z|^\gamma,$$

e como o expoente γ dessa desigualdade não pode ser melhorado, conclui-se que $A \in \Theta_{\pi/4}^\gamma$ e não é um operador setorial.

Para evitar redundâncias futuras nos enunciados dos resultados, a partir deste ponto fixamos $\gamma \in (-1, 0)$ e $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Seguindo Periago-Straub, mostramos de maneira breve, que o operador quase setorial $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$ faz com que a aplicação

$$F_0^\gamma(S_\mu^0) \ni f \rightarrow f(A) \in \mathcal{L}(X)$$

com

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} f(z)(z - A)^{-1} dz, \quad (3.4)$$

esteja bem definida, para todo θ, μ satisfazendo $\omega < \theta < \mu < \pi$. Na integral acima o contorno $\Gamma_\theta = \{\mathbb{R}_+ e^{i\theta}\} \cup \{\mathbb{R}_+ e^{-i\theta}\}$ está orientado de modo que o conjunto S_μ^0 fique à esquerda da curva Γ_θ .

Teorema 3.6. *Seja $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$ e $\omega < \theta < \mu < \pi$. Então para todo $f \in F_0^\gamma(S_\mu^0)$, a integral (3.4) é absolutamente convergente e define um operador linear limitado em X . Mais ainda, sua definição é independente da escolha de $\theta \in (\omega, \mu)$.*

Demonstração. Assuma que $\eta \in (\theta, \pi)$ esteja fixado.

i) Se $f \in \Psi_s^\gamma(S_\eta^0)$, então para $\lambda \in \Gamma_\theta$ o item *ii)* da Observação 3.1 garante que

$$\|f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_{\bar{\theta}} K_\theta \frac{(1 + |\lambda|)^{ns}}{|\lambda|^{s-\gamma}},$$

com $s - \gamma - 1 > ns$.

- ii) Por outro lado, se $f \in \Psi_0(S_\eta^0)$ e $\lambda \in \Gamma_\theta$, o item i) da Observação 3.1 assegura a desigualdade

$$\|f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_{\tilde{\theta}} K_\theta |\lambda|^\gamma (1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Em ambos os casos a integração sobre a curva Γ_θ , seguindo cálculos já realizados anteriormente nesta dissertação, garantem que (3.4) é absolutamente convergente e define um operador limitado em X .

A independência da escolha de θ e μ segue da analiticidade do integrando, que possibilita a troca do caminho que estamos integrando sem a alteração do valor da integral (Teorema de Cauchy). \square

Um resultado típico desta teoria diz respeito as propriedades de soma e composição de operadores do tipo $f(A)$, porém para não nos alongarmos mais nesse assunto lateral, apenas o enunciaremos a proposição 3.7.

Proposição 3.7. *Sejam $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$ e $\omega < \mu < \pi$. Então para todo $f, g \in F_0^\gamma(S_\mu^0)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

- i) $\alpha f(A) + \beta g(A) = (\alpha f + \beta g)(A)$, $(f \circ g)(A) = f(A) \circ g(A)$.
- ii) $f(A)g(A) \subset (fg)(A)$.
- iii) $f(A)g(A) = (fg)(A)$, sempre que $g(A)$ é limitado no domínio $D((fg)(A)) \subset D(g(A))$.

Agora enunciamos um resultado que, de certa forma, melhora a aplicabilidade do Teorema 3.6 e nos ajuda a alcançar os objetivos iniciais desta seção.

Teorema 3.8. *Seja $A \in \Theta_\omega^\gamma$ e tome $\omega < \theta < \mu < \pi/2$. Assuma que $f \in H^\infty(S_\mu^0)$ satisfaz as seguintes condições:*

- i) A função $z \mapsto f(z)(z - A)^{-1}$ é absolutamente integrável em Γ_θ .
- ii) $\sup_{-\mu < \phi < \mu} |f(re^{i\phi})| \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$.

Então $f(A)$, como dado em (3.4), é um operador linear limitado. (Veja [59])

Observe que para cada $t > 0$, a função $\lambda \mapsto e^{-\lambda t}$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema 3.8, e portanto podemos definir o operador linear limitado

$$e^{-\lambda t}(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} e^{-\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Através de uma mudança de variável simples, obtemos a formulação análoga

$$e^{\lambda t}(-A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega-\frac{\pi}{2}}} e^{\lambda t}(\lambda + A)^{-1} d\lambda,$$

com $\Gamma_{\omega-\frac{\pi}{2}} \subset \rho(-A)$, que possui um formato muito similar a equação integral de um semigrupo gerado por um operador setorial (para maiores detalhes veja o Teorema 1.44).

Para formalizar a discussão anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Se $A \in \Theta_w^\gamma(X)$ e $\theta \in (\omega, \pi/2)$, defina a família de operadores limitados $\{T(t) : t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0\}$, dado por*

$$T(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_\theta} e^{\lambda t}(\lambda + A)^{-1} d\lambda \left(= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} e^{-\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \right).$$

com $-\Gamma_\theta \subset \rho(-A)$ como definido anteriormente.

Então as seguintes afirmações são verdadeiras

- i) $T(t)$ é analítica no setor $S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0$ e $\frac{d^n}{dt^n} T(t) = (-A)^n T(t)$, com $t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0$.
- ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ para todo $s, t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0$.
- iii) Existe $C_0 = C_0(\gamma) > 0$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 t^{-\gamma-1}$, $\forall t > 0$.
- iv) Assuma que $\Omega \subset X$ denota o conjunto em que

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x.$$

Então $D(A) \subset \Omega \subsetneq X$.

- v) Se $\operatorname{Re} \lambda > 0$, então $(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$.

Demonstração. Para a demonstração deste resultado veja [59]. □

Observação 3.10. i) Operadores que possuem as características asseguradas pelo Teorema 3.9 serão chamados de semigrupos analíticos com crescimento de ordem $1 + \gamma$. Originalmente estes semigrupos foram introduzidos por Da Prato em [11], entretanto a definição utilizada aqui, feita por Periago-Straub em [59], é ligeiramente diferente uma vez que:

- ✓ O conjunto $\bigcup_{t>0} T(t)X$ não é necessariamente denso em X .

✓ Para cada $x \in X$, a aplicação

$$\{t \in \mathbb{R} : t > 0\} \ni t \mapsto T(t)x \in X$$

é analítica e não apenas contínua.

- ii) Uma diferença bastante interessante garantida pelo item *iv*), é que semigrupos como esse não estão definidos em todo o espaço vetorial X quando $t \rightarrow 0$. Essencialmente, nesta situação, vamos considerá-los definidos apenas em $D(A)$.
- iii) Se $T(\cdot)$ é um semigrupo analítico com crescimento de ordem $1+\gamma$, o operador $G : D(G) \subset X \rightarrow X$, com

$$D(G) := \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

e definido por

$$Gx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t},$$

será chamado de gerador infinitesimal, como feito anteriormente. Porém, como demonstrado em [11], podemos verificar apenas que G é um operador fechável.

Para encerrar esta discussão, faz-se necessário ainda introduzir as potências fracionárias de operadores quase setoriais. A vantagem que temos neste ponto é que podemos utilizar toda a teoria construída anteriormente.

Para cada $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere a função

$$\phi_\beta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^\beta. \end{array}$$

Dado $\mu \in (0, \pi/2)$, como ϕ_β satisfaz a desigualdade

$$|\phi_\beta(z)| \leq |z|^\beta + |z|^{-\beta}, \quad \forall z \in S_\mu^0,$$

então pela Proposição 3.2 concluímos que $\phi_\beta \in F(S_\mu^0)$.

Os resultados que temos até o momento não nos permitem aplicar a função ϕ_β em um operador $A \in \Theta_\omega^\gamma$. Por isso, necessitamos de um resultado auxiliar o qual, devido a technicalidade, não demonstraremos aqui.

Teorema 3.11. *Sejam $A \in \Theta_\omega^\gamma$, $\mu \in (\omega, \pi/2)$ e $f \in F(S_\mu^0)$. Então se $k, n \in \mathbb{N}$ são tais que $f\psi_n^k \in F_0^\gamma(S_\mu^0)$ temos que o operador linear $f(A)$ dado por (3.4) está bem definido, é fechado e*

$$D(f(A)) := \{x \in X : (f\psi_n^k)(A)x \in D(A^{(n-1)k})\}.$$

Acima $(f\psi_n^k)(A)$ também é dado por (3.4). Mais ainda, a construção do operador $f(A)$ é independente da escolha de k, n . (Veja [59])

O teorema acima nos permite introduzir a seguinte noção.

Definição 3.12. Se $\beta \in \mathbb{R}$, a potência fracionária de ordem β de um operador $A \in \Theta_\omega^\gamma$ é dada por

$$A^\beta = \begin{cases} I_X, & \text{se } \beta = 0, \\ \phi_\beta(A), & \text{se } \beta \neq 0. \end{cases}$$

No caso de operadores quase setoriais não conseguimos demonstrar que a potência fracionária $A^{-\beta}$, com $\beta > 0$, define sempre operadores limitados. O seguinte resultado resume este fato.

Proposição 3.13. *Assuma que $A \in \Theta_\omega^\gamma$ e que $\beta > \gamma + 1$. Então $A^{-\beta} \in \mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. Este resultado segue do fato de que se $\beta > \gamma + 1$, podemos verificar que a função ϕ_β satisfaz as hipóteses do Teorema 3.8. \square

Agora enunciamos um resultado que versa sobre algumas propriedades das potências fracionárias de operadores quase setoriais. A demonstração desse resultado é padrão e será omitida.

Teorema 3.14. *Para $A \in \Theta_\omega^\gamma$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ as seguintes afirmações são verdadeiras.*

- i) O operador A^α é fechado.*
- ii) $A^\alpha A^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta}$.*
- iii) Se $D(A^{\alpha+\beta}) \subseteq D(A^\beta)$, então $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$.*
- iv) A^α é injetiva e $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$.*
- v) $A^n = A \dots A$ (n -vezes) para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A^0 = I$.*

Para encerrar esta seção, introduzimos dois últimos resultados importantes para a discussão que promovemos nas próximas seções.

Proposição 3.15. $X^\beta = D(A^\beta)$, com a norma

$$\|x\|_{X^\beta} := \|A^\beta x\|_X,$$

define um espaço de Banach.

Proposição 3.16. Sejam $A \in \Theta_w^\gamma(X)$, $\theta \in (\omega, \pi/2)$ e considere

$$\{T(t) : t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0\} \subset \mathcal{L}(X),$$

o semigrupo analítico com crescimento de ordem $1 + \gamma$ associado ao operador A . Então as seguintes afirmações são verdadeiras

i) Se $t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0$ e $\beta > 0$, então $\text{Im}(T(t)) \subset D(A^\beta)$,

$$A^\beta T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{-\theta}} \lambda^\beta e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} x d\lambda, \quad \forall x \in X,$$

e existe uma constante $C' = C'(\gamma, \beta) > 0$ tal que

$$\|A^\beta T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C' t^{-\gamma-\beta-1}, \quad \forall t > 0.$$

ii) Se $\beta > 1 + \gamma$, então $D(A^\beta) \subset \Omega = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x\}$.

3.2 Estudo dos operadores $S_\alpha(t)$ e $P_\alpha(t)$

Exatamente como feito na Seção 2.3, porém desta vez com operadores quase setoriais, nosso objetivo nesta seção é estudar duas famílias de operadores de Mittag-Leffler.

Os resultados obtidos nesta seção não só nos auxiliam a entender um pouco melhor essas famílias de operadores, como também são utilizados durante o restante deste capítulo.

Definição 3.17. Para $A \in \Theta_w^\gamma(X)$, consideramos as famílias de operadores

$$\{S_\alpha(t) : t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0\} \quad \text{e} \quad \{P_\alpha(t) : t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0\},$$

relacionados com as funções gerais do tipo Mittag-Leffler, definidas por

$$S_\alpha(t) := E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

e

$$P_\alpha(t) := E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

O contorno da integral $\Gamma_\theta := \{\mathbb{R}_+ e^{i\theta}\} \cup \{\mathbb{R}_+ e^{-i\theta}\}$ orientado de forma a manter o conjunto S_θ^0 ao lado esquerdo e $\omega < \theta < \mu < \frac{\pi}{2} - |\arg t|$.

Observação 3.18. A notação que utilizamos para a família de operadores de Mittag-Leffler geradas por operadores quase setoriais são distintas das utilizadas para descrever estas mesmas famílias no caso de operadores setoriais, como pode ser visto ao compararmos a Seção 2.3 com nossa última definição. O principal motivo desta escolha foi apenas para preservar as notações geralmente utilizadas pelos autores Wang-Chen-Xiao [72].

O próximo teorema estabelece propriedades básicas da família de operadores de Mittag-Leffler.

Teorema 3.19. *Para cada $t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0$, os operadores $S_\alpha(t)$ e $P_\alpha(t)$ são lineares e limitados em X . Além disso, existem constantes*

$$C_s = C(\alpha, \gamma) > 0 \quad e \quad C_p = C(\alpha, \gamma) > 0$$

tais que

$$\|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_s t^{-\alpha(1+\gamma)}, \quad \forall t > 0, \quad (3.5)$$

e

$$\|P_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_p t^{-\alpha(1+\gamma)}, \quad \forall t > 0. \quad (3.6)$$

Demonstração. Como para cada $t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0$, as funções

$$\lambda \rightarrow E_\alpha(-\lambda t) \quad e \quad \lambda \rightarrow E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t)$$

satisfazem todas as hipóteses do Teorema 3.8 (verifique o decaimento assintótico das funções de Mittag-leffler na Seção 2.1), concluímos que $S_\alpha(t), P_\alpha(t)$ são operadores lineares limitados em X . Assim só precisamos demonstrar as estimativas (3.5) e (3.6).

Assuma que $\{T(t) : t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0\}$ seja o semigrupo analítico com crescimento $1 + \gamma$ garantido pelo Teorema 3.9. Então o item *iv)* da Proposição 2.18 e o Teorema de Fubini nos garantem que

$$\begin{aligned} S_\alpha(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \int_0^\infty M_\alpha(s) e^{-\lambda t^\alpha s} ds (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty M_\alpha(s) \int_{\Gamma_\theta} e^{-\lambda t^\alpha s} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) x ds, \quad \forall t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0. \end{aligned}$$

Logo, se $x \in X$, o item *ii*) da Proposição 2.18 e o item *iii*) do Teorema 3.9 garantem a estimativa

$$\begin{aligned}
\|S_\alpha(t)x\|_X &= \left\| \int_0^\infty M_\alpha(s)T(st^\alpha)x ds \right\|_X \\
&\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)C_0(st^\alpha)^{-\gamma-1}\|x\|_X ds \\
&= C_0 t^{-\alpha(1+\gamma)} \int_0^\infty M_\alpha(s)s^{-\gamma-1}\|x\|_X ds \\
&= C_0 \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha(1+\gamma))} t^{-\alpha(1+\gamma)}\|x\|_X, \quad \forall t > 0.
\end{aligned}$$

Com um processo análogo obtemos:

$$P_\alpha(t)x = \int_0^\infty \alpha M_\alpha(s)sT(st^\alpha)ds, \quad \forall t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0,$$

e

$$\|P_\alpha(t)x\|_X \leq \alpha C_0 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha\gamma)} t^{-\alpha(\gamma+1)}\|x\|_X, \quad \forall t > 0.$$

Desta forma ficam demonstradas as estimativas (3.5) e (3.6). \square

Durante a demonstração do último resultado provamos uma identidade que é muito interessante. Para enfatizar tal identidade, enunciaremos o seguinte corolário.

Corolário 3.20. *Assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 3.19 concluímos que*

$$S_\alpha(t)x = \int_0^\infty M_\alpha(s)T(st^\alpha)x ds, \quad \forall t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0,$$

e que

$$P_\alpha(t)x = \int_0^\infty \alpha M_\alpha(s)sT(st^\alpha)x ds, \quad \forall t \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}^0.$$

No que segue provamos um série de resultados interessantes sobre as famílias de operadores de Mittag-Leffler para operadores quase sectoriais.

Teorema 3.21. *Os operadores $S_\alpha(t)$ e $P_\alpha(t)$ são contínuos em $(0, \infty)$ na topologia de $\mathcal{L}(X)$. Além disso, para todo $r > 0$, a continuidade é uniforme em $[r, \infty)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Para todo $r > 0$, usando o item *ii*) da Proposição 2.18 podemos escolher $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que

$$\frac{2C_0}{r^{\alpha(1+\gamma)}} \int_0^{\delta_1} M_\alpha(s) s^{-(1+\gamma)} ds \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad (3.7)$$

e

$$\frac{2C_0}{r^{\alpha(1+\gamma)}} \int_{\delta_2}^{\infty} M_\alpha(s) s^{-(1+\gamma)} ds \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad (3.8)$$

com C_0 a constante dada pelo item *iii*) da Proposição 3.9.

Pela item *i*) da Proposição 3.9, para cada $x \in X$ existe uma constante positiva δ_x tal que para $t_1, t_2 \geq r$ satisfazendo $|t_1 - t_2| < \delta_x$, temos

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} M_\alpha(s) \|T(t_1^\alpha s)x - T(t_2^\alpha s)x\|_X ds \leq \frac{\epsilon}{6}. \quad (3.9)$$

Mas então

$$\begin{aligned} & \|S_\alpha(t_1)x - S_\alpha(t_2)x\|_X \\ &= \left\| \int_0^{\infty} M_\alpha(s) T(st_1^\alpha)x - \int_0^{\infty} M_\alpha(s) T(st_2^\alpha)x ds \right\|_X \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} & \|S_\alpha(t_1)x - S_\alpha(t_2)x\|_X \\ & \leq \int_0^{\delta_1} M_\alpha(s) (\|T(st_1^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)} + \|T(st_2^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)}) \|x\|_X ds \\ & \quad + \int_{\delta_1}^{\delta_2} M_\alpha(s) \|T(st_1^\alpha)x - T(st_2^\alpha)x\|_X ds \\ & \quad + \int_{\delta_2}^{\infty} M_\alpha(s) (\|T(st_1^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)} + \|T(st_2^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)}) \|x\|_X ds. \end{aligned}$$

Porém, o item *iii*) da Proposição 2.18 garante que

$$\begin{aligned} & \|S_\alpha(t_1)x - S_\alpha(t_2)x\|_X \\ & \leq C_0 \left(t_1^{-\alpha(1+\gamma)} + t_2^{-\alpha(1+\gamma)} \right) \int_0^{\delta_1} M_\alpha(s) s^{-(1+\gamma)} \|x\|_X ds \\ & \quad + \int_{\delta_1}^{\delta_2} M_\alpha(s) \|T(st_1^\alpha)x - T(st_2^\alpha)x\|_X ds \\ & \quad + C_0 \left(t_1^{-\alpha(1+\gamma)} + t_2^{-\alpha(1+\gamma)} \right) \int_{\delta_2}^{\infty} M_\alpha(s) s^{-(1+\gamma)} \|x\|_X ds, \end{aligned}$$

o que, através das desigualdades (3.7), (3.8) e (3.9), nos ajuda a concluir que

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t_1)x - S_\alpha(t_2)x\|_X &\leq \frac{2C_0}{r^\alpha(1+\gamma)} \int_0^{\delta_1} M_\alpha(s)s^{-(1+\gamma)}\|x\|_X ds \\ &\quad + \int_{\delta_1}^{\delta_2} M_\alpha(s)\|T(st_1^\alpha)x - T(st_2^\alpha)x\|_X ds \\ &\quad + \frac{2C_0}{r^\alpha(1+\gamma)} \int_{\delta_2}^\infty M_\alpha(s)s^{-(1+\gamma)}\|x\|_X ds \\ &\leq (\epsilon/2)\|x\|_X, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|S_\alpha(t_1) - S_\alpha(t_2)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Em outras palavras, $S_\alpha(t)$ é uniformemente contínua em $[r, \infty)$ na topologia de $\mathcal{L}(X)$. O argumento é o mesmo para $P_\alpha(t)$. Assim a prova está completa. \square

Teorema 3.22. *Se $0 < \beta < 1 - \gamma$, então vale*

- i) As imagens de $S_\alpha(t)$ e $P_\alpha(t)$, para $t > 0$, estão contidas em X^β .*
- ii) Para cada $x \in X$ vale a igualdade*

$$\frac{d}{dt}S_\alpha(t)x = -t^{\alpha-1}AP_\alpha(t)x, \quad \forall t > 0.$$

Mais ainda, se $x \in D(A)$, então a aplicação

$$(0, \infty) \ni t \rightarrow \frac{d}{dt}S_\alpha(t)x \in X$$

é localmente integráveis.

- iii) Para todo $x \in D(A)$ e $t > 0$ temos*

$$\|AS_\alpha(t)x\| \leq Ct^{-\alpha(1+\gamma)}\|Ax\|,$$

com C uma constante que depende apenas de γ, α .

Demonstração. Vamos fazer esta demonstração item a item.

- i) Pelo item i) da Proposição 3.16, se $\beta > 0$ temos que*

$$T(t)x \in D(A^\beta), \quad \forall x \in X \text{ e } \forall t > 0,$$

e unindo este fato ao item *ii*) da Proposição 2.18 e ao Corolário 3.20 concluímos

$$\begin{aligned}
\|A^\beta P_\alpha(t)x\|_X &\leq \int_0^\infty \alpha M_\alpha(s)s \|A^\beta T(st^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X ds \\
&\leq \alpha \int_0^\infty M_\alpha(s)s C'(st^\alpha)^{-\gamma-\beta-1} \|x\|_X ds \\
&= C' \alpha t^{-\alpha(\gamma+\beta+1)} \int_0^\infty M_\alpha(s)s^{-(\gamma+\beta)} \|x\|_X ds \\
&= C' \alpha t^{-\alpha(\gamma+\beta+1)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha(\gamma+\beta))} \|x\|_X.
\end{aligned}$$

A estimativa acima está boa justamente porque $0 < \beta < 1 - \gamma$.

ii) Se $x \in X$ e $t > 0$, o Corolário 3.20 e o Teorema da Convergência Dominada garantem que

$$\begin{aligned}
S'_\alpha(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_\alpha(t+h)x - S_\alpha(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{M_\alpha(s)(T(s(t+h)^\alpha)x - T(st^\alpha)x)}{h} ds \\
&= \int_0^\infty M_\alpha(s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(s(t+h)^\alpha)x - T(st^\alpha)x}{h} ds \\
&= \int_0^\infty M_\alpha(s) \frac{d}{dt} [T(st^\alpha)x] ds \\
&= \int_0^\infty -M_\alpha(s)AT(st^\alpha)\alpha t^{\alpha-1} s ds \\
&= -t^{\alpha-1}A \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)T(st^\alpha) ds \\
&= -t^{\alpha-1}AP_\alpha(t)x.
\end{aligned}$$

Além disso, para todo $x \in D(A)$, o item *ii*) da Proposição 2.18 e a Proposição 3.16 nos asseguram que

$$\begin{aligned}
\|t^{\alpha-1}AP_\alpha(t)x\|_X &\leq t^{\alpha-1} \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|T(st^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ax\|_X ds \\
&\leq \alpha C_0 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha\gamma)} t^{-\alpha\gamma-1} \|Ax\|_X,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

já que $-\alpha\gamma - 1 > -1$, ou seja, $S'_\alpha(t)x$ é localmente integrável em $(0, \infty)$.

iii) Para finalizar, pelo item *ii*) da Proposição 2.18 e pela Proposição 3.16

$$\begin{aligned} \|AS_\alpha(t)x\|_X &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)\|AT(st^\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X ds \\ &\leq C_0 t^{-\alpha(1+\gamma)} \int_0^\infty M_\alpha(s)s^{-1-\gamma} ds \|Ax\|_X \\ &\leq C_0 \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha(1+\gamma))} t^{-\alpha(1+\gamma)} \|Ax\|_X, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

□

A demonstração do item *i*) do resultado anterior também nos garante a estimativa

$$\|A^\beta P_\alpha(t)\|_X \leq C' \alpha t^{-\alpha(\gamma+\beta+1)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha(\gamma+\beta))}.$$

Entretanto, para facilitar a citação em resultados mais a frente, enunciaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.23. *Seja $0 < \beta < 1 - \gamma$ e $t > 0$. Para todo $x \in D(A)$ temos que*

$$\|AP_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C t^{-\alpha(2+\gamma)}, \quad \forall t > 0, \quad (3.11)$$

com C uma constante que depende de γ e α .

Demonstração. É uma aplicação direta do resultado anterior. □

O próximo teorema também discute o fato da função $u(t) = S_\alpha(t)u_0$ ser a única solução do problema de Cauchy fracionário

$$\begin{cases} {}_c D_t^\alpha u(t) = -Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Este tipo de resultado é clássico e muito importante.

Teorema 3.24. *As seguintes propriedades são verdadeiras:*

i) Se $\beta > 1 + \gamma$, então para todo $x \in D(A^\beta)$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} S_\alpha(t)x = x.$$

ii) Para todo $x \in D(A)$ temos

$$(S_\alpha(t) - I)x = \int_0^t -s^{\alpha-1} AP_\alpha(s)x ds, \quad \forall t > 0.$$

iii) Sejam $x \in D(A)$ e $t > 0$. Então ${}_c D_t^\alpha S_\alpha(t)x = -AS_\alpha(t)x$.

iv) Para todo $t > 0$ vale que $S_\alpha(t) = J_t^{1-\alpha}(t^{\alpha-1}P_\alpha(t))$.

Demonstração. i) Para $x \in X$, pelo item ii) da Proposição 2.18 e pelo Corolário 3.20 temos

$$S_\alpha(t)x - x = \int_0^\infty M_\alpha(s)(T(st^\alpha)x - x)ds.$$

Agora, o Teorema 3.9, o item ii) da Proposição 3.16 e o Corolário 3.20 garantem que

$$M_\alpha(s)(T(st^\alpha)x - x)$$

é integrável e que $M_\alpha(s)(T(st^\alpha)x - x) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Com isso, pelo Teorema de Convergência Dominada,

$$S_\alpha(t)x - x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

o que conclui a demonstração.

ii) Pelo item iv) do Teorema 3.9 e pela equação (3.10), para todo $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} (S_\alpha(t) - I)x &= \lim_{s \rightarrow 0^+} (S_\alpha(t)x - S_\alpha(s)x) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^t \frac{d}{d\omega} S_\alpha(\omega)x d\omega \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^t -\omega^{\alpha-1} AP_\alpha(\omega)x d\omega \\ &= \int_0^t -\omega^{\alpha-1} AP_\alpha(\omega)x d\omega \\ &= \frac{-t^{-\alpha\gamma}}{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

iii) Note que $\frac{1}{\varphi_0} \in F(S_\mu^0)$ e que o operador $\frac{1}{\varphi_0}(A)$ é injetivo e integrável em $(0, t)$. Seja $x \in D(A)$. Pela Proposição 3.7,

$$S_\alpha(t)x = E_\alpha(-zt^\alpha)(A)x = (E_\alpha(-zt^\alpha)\varphi_0)(A) \left(\frac{1}{\varphi_0} \right) (A)x.$$

De (2.2) temos

$$\sup |zt^\alpha E_\alpha(-zt^\alpha)| < \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|zE_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1}| &= \left| \frac{z}{1+z} E_\alpha(-zt^\alpha) \right| \\
&= \left| \frac{zE_\alpha(-zt^\alpha)}{(1+z)} \frac{t^\alpha}{t^\alpha} \right| \\
&\leq \frac{|zt^\alpha E_\alpha(-zt^\alpha)|}{|(1+z)t^\alpha|} \\
&\leq \frac{C}{|(1+z)t^\alpha|} \\
&\leq C|z|^{-1}t^{-\alpha},
\end{aligned}$$

com C uma constante que não depende de t . Logo

$$-zE_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1} \in F_0^\gamma(S_\mu^0),$$

com $F_0^\gamma(S_\mu^0)$ definido como na Observação 3.1. Note também que pelo Teorema 2.30,

$$\begin{aligned}
{}_cD_t^\alpha E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1}(z-A)^{-1} \\
= (-z)E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1}(z-A)^{-1}.
\end{aligned}$$

Agora, combinando este resultado e a Proposição 3.7, pela Definição 3.17, obtemos

$$\begin{aligned}
&{}_cD_t^\alpha ((E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z^\beta)^{-1})(A)) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} (-z)E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1}(z-A)^{-1} dz \\
&= (-z)(A)(E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1})(A) \\
&= -A(E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1})(A)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha S_\alpha(t)x &= -A(E_\alpha(-zt^\alpha)(1+z)^{-1})(A)(1+z)(A)x \\
&= -A(E_\alpha(-zt^\alpha))(A)x \\
&= -AS_\alpha(t)x.
\end{aligned}$$

iv) Nesta prova usamos um argumento análogo ao utilizado na demonstração do item *iii*). Note que

$$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-zt^\alpha) \in F_0^\gamma(S_\mu^0),$$

para $t > 0$, e assim

$$\begin{aligned} J_t^\alpha(t^{\alpha-1}P_\alpha(t)) &= J_t^\alpha(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-zt^\alpha)(A)) \\ &= (E_\alpha(-zt^\alpha))(A) = S_\alpha(t), \end{aligned}$$

com isto

$$J_t^\alpha(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-zt^\alpha)) = E_\alpha(-zt^\alpha),$$

logo o item *iv*) fica verificado e assim terminamos a demonstração deste resultado. □

Com as ferramentas expostas anteriormente começaremos a introduzir a teoria que garante a existência e unicidade de solução mild e de solução clássica para EDP's abstratas lineares e não lineares.

3.3 O problema linear

Esta seção é dedicada ao estudo do problema de Cauchy abstrato linear não-homogêneo

$$\begin{cases} {}_cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

com $\alpha \in (0, 1)$, ${}_cD_t^\alpha$ a derivada fracionária de Caputo de ordem α , $A \in \Theta_\omega^\gamma$, $f : [0, T] \rightarrow X$ e u_0 pertencente a um subconjunto de X .

Assuma por um instante que $f \in L^1(0, T; X)$ e que $u : [0, T] \rightarrow X$ satisfaz (3.12) e as seguintes condições:

- i) $u \in C([0, T]; X)$.
- ii) $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T]$.
- iii) $g_{1-\alpha} * u \in C^1((0, T]; X)$.
- iv) $Au \in L^1(0, T; X)$.

Aplicando J_t^α em ambos os lados de primeira igualdade de (3.12), a Proposição 2.26 garante que

$$u(t) - u(0) + J_t^\alpha Au(t) = J_t^\alpha f(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

e portanto, da definição de integral de Riemann-Liouville de ordem α , reescrevemos a igualdade acima como

$$u(t) = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (3.13)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Para continuar a ideia que começamos a introduzir acima, provamos o seguinte resultado.

Lema 3.25. *Assuma que $f \in L^1(0, T; X)$ e que $u : [0, T] \rightarrow X$ é uma função que satisfaz as equações (3.12) e as hipóteses i) – iv) acima. Então $u(t)$ satisfaz a equação*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Como discutido na Seção 2.1, reescrevamos a equação (3.13) na forma

$$\tilde{u}(t) = u_0 - g_{\alpha-1} * A\tilde{u}(t) + g_{\alpha-1} * \tilde{f}(t) ds, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (3.14)$$

com as funções $\tilde{f} \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ e $\tilde{u} \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ dadas por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \in (T, \infty), \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \in (T, \infty). \end{cases}$$

Mas então, ao aplicar a transformada de Laplace em (3.14), obtemos

$$L\{\tilde{u}(t)\}(\lambda) = \frac{u_0}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^\alpha} AL\{\tilde{u}(t)\}(\lambda) + \frac{L\{\tilde{f}(t)\}(\lambda)}{\lambda^\alpha}, \quad Re\lambda > 0.$$

Como $\lambda^\alpha \in \rho(-A)$, deduzimos a igualdade

$$L\{\tilde{u}(t)\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1} u_0 + (\lambda^\alpha + A)^{-1} L\{\tilde{f}(t)\}(\lambda), \quad Re\lambda > 0. \quad (3.15)$$

Pelo item *v)* do Teorema 3.9 sabemos que

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1} u_0 = \lambda^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha t} T(t) u_0 dt$$

e portanto realizando a mudança de variável $t = w^\alpha$ deduzimos

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1} u_0 = \int_0^\infty \alpha(\lambda w)^{\alpha-1} e^{-(\lambda w)^\alpha} T(w^\alpha) u_0 dw$$

$$= - \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{-(\lambda w)^\alpha} \right) T(w^\alpha) u_0 dw$$

e pelo item *v*) da Proposição 2.18 e pela regra de Leibniz para integrais

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}u_0 &= - \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \left(\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\omega\lambda t} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}) dt \right) T(w^\alpha) u_0 dw \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\omega\lambda t} \alpha t^{-\alpha} M_\alpha(t^{-\alpha}) T(w^\alpha) u_0 dt dw. \end{aligned}$$

Realizando outra mudança de variável, desta vez $\omega = s/t$, concluímos que

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}u_0 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}) T\left(\frac{s^\alpha}{t^\alpha}\right) u_0 dt ds, \end{aligned}$$

e mudando de variável novamente, $t^{-\alpha} = \eta$, finalmente encontramos a igualdade

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}u_0 &= - \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(\int_\infty^0 M_\alpha(\eta) T(\eta s^\alpha) u_0 d\eta \right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(\int_0^\infty M_\alpha(\eta) T(\eta s^\alpha) u_0 d\eta \right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} S_\alpha(s) u_0 ds. \end{aligned}$$

Da mesma forma que feito anteriormente, deduzimos que

$$\begin{aligned} (\lambda^\alpha + A)^{-1}L\{\tilde{f}(t)\}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \int_0^t (s-\tau)^{\alpha-1} P_\alpha(t-\tau) \tilde{f}(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

Lembrando de (3.15) concluímos então que

$$L\{\tilde{u}(t)\}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(S_\alpha(t) u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds \right) dt,$$

e pelo Teorema 2.4, que garante a unicidade da transformada de Laplace, completamos esta demonstração. \square

Munidos do Lema 3.25 somos finalmente capazes de formalizar a noção de solução mild para (3.12).

Definição 3.26. Uma função $u \in C((0, T]; X)$ que satisfaz

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds, \quad \forall t \in (0, T], \quad (3.16)$$

será chamada de solução mild do problema (3.12).

Observação 3.27. i) Observe que a noção dada por (3.16) já foi introduzida anteriormente no Capítulo 2 em (2.6), porém agora esta Fórmula da Variação das Constantes fracionária está apenas definida para $t > 0$. Lembre-se que isto deve-se ao fato de que $A \in \Theta_\omega^\gamma$.

ii) É importante observar que o Lema 3.25 serve apenas de inspiração para a definição de solução mild, já que uma solução mild não necessariamente precisa satisfazer os itens $i) - iv)$.

iii) Eventualmente seremos capazes de provar que uma solução mild de (3.12) de fato satisfaz os itens $i) - iv)$, e nesse caso, que cumpre as equações (3.12). Para diferenciar estas soluções, criamos uma outra denominação.

Definição 3.28. Seja $u \in C((0, T]; X)$ uma solução mild de (3.12). Se u satisfizer

- i) $u \in C([0, T]; X)$,
- ii) ${}_c D_t^\alpha u(t) \in C((0, T]; X)$,
- iii) $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, T]$,

diremos que u é uma solução clássica de (3.12).

No restante desta seção nos devotamos a apresentar um último resultado que discute a existência e unicidade de solução clássica para (3.12). O caso de solução mild para o problema (3.12) pode ser visto como um caso particular do Teorema 3.31 e por isso não o demonstraremos aqui.

Teorema 3.29. *Seja $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$ e suponha que $f(t) \in D(A)$, para todo $0 < t \leq T$, $Af \in L^\infty(0, T; X)$ e que $f(t)$ seja Hölder contínua com expoente $\theta' > \alpha(1 + \gamma)$, isto é,*

$$\|f(t) - f(s)\|_X \leq K|t - s|^{\theta'}, \quad \forall t, s \in (0, T].$$

Então, para todo $u_0 \in D(A)$, existe uma única solução clássica para o problema (3.12).

Demonstração. Note que $v(t) := S_\alpha(t)u_0$ é solução clássica do problema linear homogêneo

$$\begin{cases} {}_cD_t^\alpha v(t) + Av(t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ v(0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \quad (3.17)$$

pelo item *ii*) de Teorema 3.16 e pelo item *iii*) do Teorema 3.24. Agora o Lema 3.25 garante que $u(t)$ é a única solução clássica do problema (3.17).

Seja

$$w(t) := \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds, \quad 0 < t \leq T.$$

Vamos demonstrar que $u(t) := v(t) + w(t)$ é a única solução clássica do problema linear não homogêneo (3.12).

Pelo fato de A ser um operador fechado, pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema 3.19, temos

$$\begin{aligned} \|Aw(t)\|_X &= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) Af(s) ds \right\|_X \\ &\leq \|Af(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\ &\leq \|Af(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} C_p \int_0^t (t-s)^{-(\alpha\gamma+1)} ds \\ &= C_p \|Af(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} \frac{t^{-\gamma\alpha}}{-\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

o que implica que $w(t) \in D(A)$, para todo $0 < t \leq T$.

Agora mostraremos que ${}_cD_t^\alpha w(t) \in C((0,T]; X)$. Primeiramente, pelo Teorema 3.19 e pelo Teorema da Convergência Dominada verificamos que $w(0) = 0$.

Se definirmos $H(t) := t^{\alpha-1} P_\alpha(t)$, então $w(t) = H * f(t)$, e portanto das propriedades de convolução, da Proposição 2.26 e do item *iv*) do Teorema 3.24, obtemos

$${}_cD_t^\alpha w(t) = D_t^1 J_t^{1-\alpha} w(t) = D_t^1 J_t^{1-\alpha} (H * f(t))$$

$$= D_t^1 \left[\left((J_t^{1-\alpha} H) * f \right) (t) \right] = D_t^1 (S_\alpha * f)(t).$$

Só nos resta verificar que

$$m(t) := (S_\alpha * f)(t) \in C^1((0, T]; X).$$

Seja $h \in (0, T)$ e tome $t \in (0, T - h)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} &= \int_0^t \frac{S_\alpha(t+h-s) - S_\alpha(t-s)}{h} f(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S_\alpha(t+h-s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considerando as estimativas do Teorema 3.19 e as hipóteses sobre f , podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada e o item *ii*) do Teorema 3.22 e concluir que

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^t \frac{S_\alpha(t+h-s) - S_\alpha(t-s)}{h} f(s) ds \\ &= \int_0^t \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S_\alpha(t+h-s) - S_\alpha(t-s)}{h} f(s) ds \\ &= \int_0^t S'_\alpha(t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (-A) P_\alpha(t-s) f(s) ds \\ &= -Aw(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para tratar do termo restante em (3.18), consideramos a mudança de variável $t+h-s = \tau$, que nos leva a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S_\alpha(t+h-s) f(s) ds = \frac{1}{h} \int_0^h S_\alpha(\tau) f(t+h-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h S_\alpha(\tau) (f(t+h-\tau) - f(t-\tau) + f(t-\tau) + f(t) - f(t)) d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h S_\alpha(\tau) (f(t+h-\tau) - f(t-\tau)) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_0^h S_\alpha(\tau) (f(t-\tau) - f(t)) d\tau + \frac{1}{h} \int_0^h S_\alpha(\tau) f(t) d\tau. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.19 e pela Hölder continuidade de f , temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left\| \int_0^h S_\alpha(\tau)(f(t+h-\tau) - f(t-\tau))d\tau \right\|_X \\ & \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S_\alpha(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(t+h-\tau) - f(t-\tau)\|_X d\tau \\ & \leq \frac{C_s K h^{\theta' - \alpha(1+\gamma)}}{1 - \alpha(1+\gamma)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left\| \int_0^h S_\alpha(s)(f(t-s) - f(t))ds \right\|_X \\ & \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S_\alpha(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(t-s) - f(t)\|_X ds \\ & \leq \frac{C_s K h^{\theta' - \alpha(1+\gamma)}}{1 + \theta - \alpha(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

Como $f(t) \in D(A)$, para $0 < t \leq T$, pelo item i) do Teorema 3.24 temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S_\alpha(s)f(t)ds = f(t).$$

Portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S_\alpha(t+h-s)f(s)ds = f(t). \quad (3.20)$$

Combinando (3.19) e (3.20) deduzimos que m é diferenciável à direita de t e

$$m'_+(t) = f(t) - Aw(t), \quad \forall t \in (0, T].$$

Com um argumento similar obtemos que v é diferenciável à esquerda de t , e concluimos que

$$m'(t) = f(t) - Aw(t), \quad \forall t \in (0, T].$$

Para encerrar provamos agora que $Aw(t) \in C((0, T]; X)$. Considere $Aw(t) = I_1(t) + I_2(t)$, com

$$I_1(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t-s)(f(s) - f(t))ds,$$

e

$$I_2(t) = \int_0^t A(t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(t) ds.$$

Pelo item *ii*) do Teorema 3.24 temos

$$I_2(t) = -(S_\alpha(t) - I)f(t)$$

e pelo Teorema 3.21, $S_\alpha(t)$ é uniformemente contínua. Assim $I_2(t)$ é contínua para $0 < t \leq T$.

Agora, vamos provar que $I_1(t)$ também é contínua para $0 < t \leq T$. Se $h \in (0, T)$ e $t \in (0, T - h)$, então

$$\begin{aligned} I_1(t+h) - I_1(t) &= \int_0^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(s) - f(t+h)) ds \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t-s)(f(s) - f(t)) ds \end{aligned}$$

que podemos rearranjar para obter

$$\begin{aligned} I_1(t+h) - I_1(t) &= \int_0^t ((t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s) \\ &\quad - (t-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t-s))(f(s) - f(t)) ds \\ &\quad + \int_0^t (t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(t) - f(t+h)) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(s) - f(t+h)) ds \\ &:= h_1(t) + h_2(t) + h_3(t). \end{aligned}$$

Usando o Teorema 3.21 em $h_1(t)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} (t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(s) - f(t)) \\ = (t-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t-s)(f(s) - f(t)). \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t \in (0, T]$ fixo, usando a estimativa (3.11) e a Hölder continuidade de f , temos

$$\begin{aligned} \|(t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(s) - f(t))\|_X \\ \leq |t+h-s|^{\alpha-1} \|AP_\alpha(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(s) - f(t)\|_X \end{aligned}$$

$$\leq C'_p K(t+h-s)^{-\alpha(1+\gamma)-1} (t-s)^{\theta'}$$

e aplicando limite, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|(t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(s) - f(t))\|_X \\ \leq C'_p K(t-s)^{-\alpha(1+\gamma)-1} (t-s)^{\theta'} \\ \leq C'_p K(t-s)^{(\theta' - \alpha - \alpha\gamma) - 1} \in L^1(0, t; X), \end{aligned}$$

já que $\theta' > \alpha(1 + \gamma)$. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^t (t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(s) - f(t)) ds \\ = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t-s)(f(s) - f(t)) ds, \end{aligned}$$

isto implica que, $h_1(t) \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0^+$.

Para $h_2(t)$, vamos usar o Teorema 3.22 e a estimativa (3.11), então

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t (t+h-s)^{\alpha-1} AP_\alpha(t+h-s)(f(t) - f(t+h)) ds \right\|_X \\ \leq \int_0^t (t+h-s)^{\alpha-1} \|AP_\alpha(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(t) - f(t+h)\|_X ds \\ \leq \int_0^t C'_p K(t+h-s)^{-\alpha(1+\gamma)-1} h^{\theta'} ds \\ \leq \frac{C'_p K h^{\theta'}}{\alpha(1+\gamma)} \left(h^{-\alpha(1+\gamma)} - (h+t)^{-\alpha(1+\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Assim $h_2(t) \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0^+$.

Por fim $h_3(t) \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0^+$. De fato, como sabemos por hipótese que $Af \in L^\infty(0, T; X)$, usando os Teoremas 3.19 e 3.21 concluimos

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t+h-s)(Af(s) - Af(t+h)) ds \right\|_X \\ \leq \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \| (Af(s) - Af(t+h)) \|_{L^\infty(0, T; X)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} C_p (t+h-s)^{-\alpha(1+\gamma)} \\
&(\|Af(s)\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|Af(t+h)\|_{L^\infty(0,T;X)}) ds \\
&\leq \frac{2C_p}{-\alpha\gamma} \|Af(s)\|_{L^\infty(0,T;X)} h^{-\alpha\gamma}.
\end{aligned}$$

Com este mesmo raciocínio temos

$$I_1(t-h) - I_1(h) \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0^-.$$

Consequentemente, $Aw \in C((0, T]; X)$ o que implica que

$$m' \in C((0, T]; X).$$

Portanto, demonstramos que $u(t) = v(t) + w(t)$ é a solução clássica do problema (3.12) e pelo Lema 3.25 a solução é única. \square

3.4 O problema não-linear

Nesta seção aplicamos a teoria estudada para o problema fracionário de Cauchy não-linear

$$\begin{cases} {}_c D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

com $f : [0, T] \times X \mapsto X$, ${}_c D_t^\alpha$ denotando a derivada fracionária de Caputo de ordem α tal que $\alpha \in (0, 1)$, $A \in \Theta_\omega^\gamma$ e u_0 que pertence a um subconjunto de X (eventualmente podendo ser o próprio conjunto X).

Nosso objetivo, como na seção anterior, é provar a existência e unicidade de solução mild e de solução clássica para (3.21). Nos aproveitando do conceito de solução mild introduzido na última seção, fazemos a seguinte definição.

Definição 3.30. Uma função $u \in C((0, T]; X)$ será chamada de solução mild para o problema (3.21) se satisfizer

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \forall t \in (0, T].$$

No teorema a seguir impomos uma certa característica Lipschitz na função f e provamos a existência e unicidade apenas local de solução mild para (3.21).

Teorema 3.31. *Sejam $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$, $-1 < \gamma < -1/2$ e suponhamos que a função $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ seja contínua com respeito a variável t e que existam constantes $M, N > 0$ tais que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq M(1 + \|x\|_X^{\nu-1} + \|y\|_X^{\nu-1})\|x - y\|_X,$$

e ainda

$$\|f(t, x)\|_X \leq N(1 + \|x\|_X^\nu),$$

para todo $t \in (0, T]$ e para todo $x, y \in X$, com ν uma constante em $\left[1, \frac{-\gamma}{1+\gamma}\right)$. Então, para todo $u_0 \in X$, existe $T_0 \in (0, T]$ tal que o problema (3.21) tem uma única solução mild definida em $(0, T_0]$.

Demonstração. Fixemos $r > 0$ e definamos o espaço métrico

$$F_r(T, u_0) = \{u \in C((0, T]; X); \sup_{t \in (0, T]} \|u(t) - S_\alpha(t)u_0\|_X \leq r\},$$

com a métrica

$$d_T(u_1, u_2) = \sup_{t \in (0, T]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_X.$$

Note que $(F_r(T, u_0), d_T)$ é um espaço métrico completo e que para qualquer $u \in F_r(T, u_0)$, se $s \in (0, T]$, vale a desigualdade

$$\begin{aligned} \|s^{\alpha(1+\gamma)}u(s)\|_X & \\ & \leq \|s^{\alpha(1+\gamma)}u(s) + s^{\alpha(1+\gamma)}S_\alpha(s)u_0 - s^{\alpha(1+\gamma)}S_\alpha(s)u_0\|_X \\ & \leq s^{\alpha(1+\gamma)}\|u(s) - S_\alpha(s)u_0\|_X + s^{\alpha(1+\gamma)}\|S_\alpha(s)u_0\|_X \end{aligned}$$

que pelo Teorema 3.19 pode ser aprimorada para

$$\|s^{\alpha(1+\gamma)}u(s)\|_X \leq T^{\alpha(1+\gamma)}r + C_s\|u_0\|_X. \quad (3.22)$$

Defina então $L := T^{\alpha(1+\gamma)}r + C_s\|u_0\|_X$. Escolhendo $0 < T_0 < T$ tal que

$$C_p N \frac{T_0^{-\alpha\gamma}}{-\alpha\gamma} + C_p N L^\nu T_0^{-\alpha(\nu(1+\gamma)+\gamma)} B(-\gamma\alpha, 1 - \nu\alpha(1+\gamma)) \leq r, \quad (3.23)$$

e

$$M C_p \frac{T_0^{-\alpha\gamma}}{-\alpha\gamma} + 2L^{\rho-1} T_0^{-\alpha(\gamma+(1+\gamma)(\nu-1))} B(-\alpha\gamma, 1 - \alpha(1+\gamma)(\nu-1)) \leq \frac{1}{2}, \quad (3.24)$$

com C_p a constante dada pelo Teorema 3.19 e $B(\cdot, \cdot)$ denotando a função beta. Considere a função Γ^α definida em $F_r(T, u_0)$ e dada por

$$(\Gamma^\alpha u)(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s, u(s)) ds.$$

Dado f como nas hipóteses deste teorema, os Teoremas 3.19 e 3.21, juntamente com a desigualdade (3.24), garantem que

$$(\Gamma^\alpha u)(t) \in C((0, T]; X),$$

e com (3.22) e (3.23) temos

$$\begin{aligned} \|(\Gamma^\alpha u)(t) - S_\alpha(t)u_0\|_X &= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) (f(s, u(s))) ds \right\|_X \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(s, u(s))\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\ &\leq \int_0^t C_p (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\alpha(1+\gamma)} N (1 + \|u(s)\|_X^\nu) ds \\ &= \int_0^t C_p N (t-s)^{-\alpha\gamma-1} (1 + \|u(s)\|_X^\nu) ds \\ &= C_p N \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} ds + C_p N \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} \|u(s)\|_X^\nu ds \\ &\leq C_p N \frac{T_0^{-\alpha\gamma}}{-\alpha\gamma} + C_p N \int_0^t L^\nu (t-s)^{-\alpha\gamma-1} s^{-\nu\alpha(1+\gamma)} ds \\ &\leq C_p N \frac{T_0^{-\alpha\gamma}}{-\alpha\gamma} + C_p N L^\nu T_0^{-\alpha(\nu(1+\gamma)+\gamma)} \beta(-\gamma\alpha, 1 - \nu\alpha(1+\gamma)) \\ &\leq r. \end{aligned}$$

Em outras palavras, Γ^α leva $F_r(T_0, u_0)$ em si mesmo.

Agora vamos demonstrar que Γ^α é uma contração. Considere as funções $u, v \in F_r(T_0, u_0)$ e usando (3.24) observe que

$$\begin{aligned} &\|(\Gamma^\alpha u)(t) - (\Gamma^\alpha v)(t)\|_X \\ &\leq C_p M \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} (1 + \|u(s)\|_X^{\nu-1} + \|v(s)\|_X^{\nu-1}) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq C_p M d_T(u, v) \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} (1 + 2L^{\nu-1} s^{-\alpha(\nu-1)(1+\gamma)}) ds \end{aligned}$$

$$\leq 2L\rho^{-1}T_0^{-\alpha(\gamma+(1+\gamma)(\nu-1))}B(-\alpha\gamma, 1 - \alpha(1 + \gamma)(\nu - 1))d_T(u, v) \\ + MC_p \frac{T_0^{-\alpha\gamma}}{-\alpha\gamma} d_T(u, v) \leq \frac{1}{2} d_T(u, v).$$

A desigualdade acima prova que Γ^α é uma contração em $F_r(T_0, u_0)$. Assim pelo Lema 1.20, Γ^α tem um único ponto fixo $u \in F_r(T_0, u_0)$ que é a solução mild para o problema (3.21) em $(0, T_0]$. \square

A seguir enunciamos um resultado que trata de soluções mild nos espaços X^β , que são bastante úteis em aplicações.

Corolário 3.32. *Sejam $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$ e $-1 < \gamma < -\frac{2}{3}$. Considere $\beta \in (1 + \gamma, -1 - 2\gamma)$. Suponha que $f : (0, T] \times X^\beta \rightarrow X$ é contínua com respeito a t e existem constantes M e $N > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M(1 + \|x\|^{\nu-1} + \|y\|^{\nu-1})\|x - y\|_\beta,$$

com

$$\|f(t, x)\| \leq N(1 + \|x\|_\beta^\nu),$$

para todo $t \in (0, T]$ e para todo $x, y \in X^\beta$, com ν constante em $\left[1, -\frac{\gamma+\beta}{1+\gamma}\right)$. Então, para todo $u_0 \in X^\beta$, existe $T_0 > 0$ tal que o problema (3.21) tem única solução mild $u \in C((0, T_0]; X^\beta)$.

Demonstração. A prova do corolário é feita com um processo análogo que o Teorema 3.31 e por isso ela será omitida. \square

Observação 3.33. Se $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$ então os resultados anteriores nos ajudam a deduzir que a existência e unicidade de solução mild do problema (3.21) está ligada ao cumprimento das seguintes condições:

- ✓ $u_0 \in X^\beta$ com $\beta > 1 + \gamma$;
- ✓ A função não linear $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é contínua com respeito a t e existe a função contínua $L_f(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f(r)\|x - y\|_X,$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $x, y \in X$ satisfaz que $\|x\|_X, \|y\|_X \leq r$.

Seja $1 > 1 + \gamma$ tal que $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$, e seja $X^1 = D(A)$ o espaço de Banach dotado da norma $\|x\|_{X^1} = \|Ax\|$ com $x \in X^1$.

Teorema 3.34. *Sejam $A \in \Theta_\omega^\gamma(X)$, $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$ e $u_0 \in X^1 = D(A)$. Se existe uma função contínua $M_f(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e uma constante $N_f > 0$ tal que a função $f : (0, T] \times X^1 \rightarrow X^1$ satisfaz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{X^1} \leq M_f(r)\|x - y\|_{X^1}$$

com

$$\|f(t, S_\alpha(t)u_0)\|_{X^1} \leq N_f(1 + t^{-\alpha(1+\gamma)})\|u_0\|_{X^1},$$

para todo $0 < t \leq T$ e $x, y \in X^1$ satisfazendo

$$\sup_{t \in (0, T]} \|x(t) - S_\alpha(t)u_0\|_{X^1} \leq r,$$

$$\sup_{t \in (0, T]} \|y(t) - S_\alpha(t)u_0\|_{X^1} \leq r.$$

Então existe $T_0 > 0$ tal que o problema (3.21) tem uma única solução mild definida em $(0, T_0]$.

Demonstração. A prova é análoga que a prova do Teorema 3.31. A principal mudança é que $u_0 \in X^1$, $r > 0$ e o conjunto considerado é

$$F_r''(T, u_0) = \{u \in C((0, T]; X^1); \sup_{t \in (0, T]} \|u - S_\alpha(t)u_0\|_{X^1} \leq r\}.$$

□

Finalmente procuraremos a solução clássica com o nosso último teorema.

Teorema 3.35. *Sejam $A \in \Theta_\omega^\gamma$ e $-1 < \gamma < -1/2$. Suponha que existe uma função $M'_f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e uma constante $k > \alpha(1 + \gamma)$ tal que a função $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ satisfaça*

$$\|f(t, x) - f(s, y)\|_X \leq M'_f(r)(|t - s|^k + \|x - y\|_X),$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e $x, y \in X$ com $\|x\|_X, \|y\|_X \leq r$. Suponha ainda que as hipóteses do Teorema 3.34 são válidas e que u é a solução mild correspondente a u_0 , definido em $[0, T_0]$, então u é a única solução clássica do problema não linear (3.21) em $[0, T_0]$, tal que $u_0 \in D(A)$ com $Au_0 \in D(A^\beta)$ e $\beta > (1 + \gamma)$.

Demonstração. Como $u(t)$ já é uma solução mild do problema em um certo intervalo $(0, T_0]$, como é garantido pelo Teorema 3.34, e como sabemos que

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} P_\alpha(t - s) f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in (0, T_0],$$

se definirmos $F(t) := f(t, u(t))$ então reescrevemos a equação acima como

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)F(s)ds, \quad \forall t \in (0, T_0].$$

Mas então pelo Teorema 3.29 precisamos verificar que $F(t)$ é Hölder contínua com expoente $\zeta > \alpha(1 + \gamma)$ em $(0, T_0]$, o que é equivalente a verificar que $u(t)$ é Hölder contínua com expoente $\zeta > \alpha(1 + \gamma)$ em $(0, T_0]$.

Para isso, fixe $t \in (0, T_0]$ e tomando $0 < h < 1$ tal que $h + t \leq T_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\|_X &= \left\| S_\alpha(t+h)u_0 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \int_0^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} P(t+h-s)f(s, u(s))ds \right. \\ &\quad \left. - S_\alpha(t)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_X \\ &= \|S_\alpha(t+h)u_0 - S_\alpha(t)u_0\|_X \\ &\quad + \left\| \int_0^h (t+h-s)^{\alpha-1} P(t+h-s)f(s, u(s))ds \right\|_X \\ &\quad + \left\| \int_h^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} P(t+h-s)f(s, u(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_X \\ &= \|S_\alpha(t+h)u_0 - S_\alpha(t)u_0\|_X \\ &\quad + \left\| \int_0^h (t+h-s)^{\alpha-1} P(t+h-s)f(s, u(s))ds \right\|_X \\ &\quad + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P(t-s) [f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))] \right\|_X \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Agora pelo Teorema 3.19, pelo item *ii*) do Teorema 3.22 e pelas hipóteses sobre f , temos

$$I_1 = \left\| \int_0^t \frac{d}{ds} S_\alpha(s)u_0 ds \right\|_X$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^t -s^{\alpha-1} AP_\alpha(s) u_0 ds \right\|_X \\
&\leq \frac{C_p}{-\alpha\gamma} ((t+h)^{-\alpha\gamma} - t^{-\alpha\gamma}).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.19, tomando $N_2 = \sup_{t \in (0, T_0)} \|f(t, u(t))\|$, temos

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_p \int_0^h (t+h-s)^{-\alpha\gamma-1} \|f(s, u(s))\|_X ds \\
&\leq \frac{C_p N_2}{-\alpha\gamma} ((t+h)^{-\alpha\gamma} - t^{-\alpha\gamma}).
\end{aligned}$$

Na última integral verificamos que

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq M' C_p \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} (|h|^k + \|u(s+t-s) - u(s)\|_X) ds \\
&\leq \frac{M' C_p}{-\alpha\gamma} T_0^{-\alpha\gamma} h^k + M' C_p \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} \|u(s+h) - u(s)\|_X ds.
\end{aligned}$$

Com estas estimativas e a desigualdade

$$(t+h)^{-\alpha\gamma} - t^{-\alpha\gamma} \leq h^{-\alpha\gamma},$$

que é válida já que $0 < -\alpha\gamma < 1$,

$$\begin{aligned}
\|u(t+h) - u(t)\|_X &\leq \frac{C_p N_2 + C_p}{-\alpha\gamma} ((t+h)^{-\alpha\gamma} - t^{-\alpha\gamma}) \\
&\quad + \frac{M'_p}{-\alpha\gamma} T_0^{-\alpha\gamma} h^k \\
&\quad + M' C_p \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} \|u(s+h) - u(s)\|_X ds \\
&\leq \frac{C_p N_2 + C_p + M' C_p}{-\alpha\gamma} h^\zeta \\
&\quad + M' C_p \int_0^t (t-s)^{-\alpha\gamma-1} \|u(s+h) - u(s)\|_X ds,
\end{aligned}$$

com $\zeta = \min\{k, -\alpha\gamma\} > \alpha(\gamma + 1)$. Finalmente usando o Teorema 2.15 temos u Hölder contínua com expoente $\zeta > \alpha(\gamma + 1)$ em $(0, T_0]$. \square

Com isto terminamos a parte teórica do trabalho e a continuação daremos uma aplicações físicas muito interessantes. Para quem tenha interesse em olhar outras aplicações veja [59, 71, 72].

3.5 Um exemplo de aplicação da teoria

Nesta seção apresentamos um exemplo motivado por problemas físicos em que mostramos como a teoria estudada nesta dissertação pode ser aplicada em problemas concretos. O exemplo é um problema de comportamento dinâmico anômalo de processos de transporte. Para mais exemplos veja [59, 66, 71, 72].

Antes de começarmos a discussão, enunciaremos um interessante resultado sobre alguns operadores quase setoriais que foram descritos no Exemplo 2.3 do artigo [59].

Proposição 3.36. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, seja um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $4m$ e que X denote o espaço de Banach $C^\nu(\overline{\Omega})$, para $\nu \in (0, 1)$, munido de sua norma clássica $\|\cdot\|_\nu$ (o espaço das funções Holder contínuas).*

Considere o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ dado por

$$Au = \sum_{|\beta| \leq 2m} a_\beta(x) D^\beta u(x),$$

com seu domínio

$$D(A) := \{u \in C^{2m+\nu}(\overline{\Omega}) : D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ para todo } |\beta| \leq m-1\},$$

de modo que $|\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j$ e $D^\beta = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\beta_j}$. Assuma ainda que os coeficientes $a_\beta : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ de A satisfazem:

- i) $a_\beta \in C^l(\overline{\Omega})$ para todo $|\beta| \leq 2m$;*
- ii) $a_\beta(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $|\beta| = 2m$;*
- iii) existe a contante $M > 0$ tal que*

$$M^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(x) \xi^\beta \leq M|\beta|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$.

Então existem $\lambda, \varepsilon > 0$ tal que o operador $\lambda + A \in \Theta_\omega^\gamma$, de modo que $\omega = (\pi/2) - \varepsilon$ e $\gamma = (\nu/2m) - 1$. Mais ainda, o expoente γ é justo.

Demonstração. Como a demonstração deste resultado foge do objetivo principal teórico desta dissertação, vamos apenas indicar aonde a demonstração pode ser encontrada.

A parte da prova que corresponde a existência do setor e que ele está contido no espectro de A , pode ser encontrada na “Satz” 2 do artigo [71]. A parte das estimativas do operador resolvente são feitas na “Satz” 1 e na “Bemerkung 1” do artigo [71].

Por fim, a justificativa da estimativa do resolvente ser justa com relação a γ , pode ser encontrada na “Bemerkung 2” do artigo [71]. \square

Agora abordaremos um exemplo de equação diferencial parcial em que podemos aplicar nossa teoria.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^4 . Consideremos o problema linear limitado de derivada fracionária:

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t, x) = \Delta u(t, x) + f(u(t, x)), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

no espaço $C^l(\bar{\Omega})$ ($0 < l < 1$), com Δ simbolizando o Laplaciano com respeito a variável espacial x e cD_t^α a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (veja Definição 2.24 para os detalhes).

Assuma então que $A := -\Delta$ com

$$D(A) = \{u \in C^{2+l}(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Nessas condições, se escolhermos $m = 1$ e definirmos a família

$$a_\beta(x) =: \begin{cases} 1, & |\beta| = 2 \text{ e algum } \beta_j = 2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

então a Proposição 3.36 garante que para certos $\nu, \epsilon > 0$, o operador $A + \nu$ é quase setorial, ou seja

$$A + \nu \in \Theta_{(l/2)-1}^{(\pi/2)-\epsilon} \left(C^l(\bar{\Omega}) \right).$$

Reescrevendo o problema (3.25) na forma abstrata, obtemos a equação:

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Assuma agora que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e que satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{k(r)}{r} |x - y|, \quad |x|, |y| \leq r, \quad (3.26)$$

para algum $r > 0$. Então f define um operador de Nemytskii de $C^l(\bar{\Omega})$ em $C^l(\bar{\Omega})$ que é dado por

$$F(u)(x) = f(u(x)),$$

com

$$\|F(u) - F(v)\|_{C^l(\bar{\Omega})} \leq k(r)\|u - v\|_{C^l(\bar{\Omega})},$$

sempre que

$$\|v\|_{C^l(\bar{\Omega})}, \|u\|_{C^l(\bar{\Omega})} \leq r.$$

Note que $\gamma = \frac{l}{2} - 1 \in (-1, -1/2)$, então do Teorema 3.31 e da Observação (3.33) temos que (3.25) tem uma única mild solution para $u_0 \in D(A^\beta)$ com $\beta > l/2$ e que se f' e f'' são funções continuamente diferenciáveis que satisfazem (3.26), então temos que o operador Nemytskii satisfaz o Teorema 3.34 e o Teorema 3.35, logo para $u_0 \in D(A)$ com $Au_0 \in D(A^\beta)$ e $\beta > l/2$ a solução mild de (3.25) correspondente é a única solução clássica.

Capítulo 4

Conclusão

Neste capítulo final fazemos uma breve apresentação dos assuntos abordados por esta dissertação.

- ✓ O estudo do espectro dos operadores é muito importante na resolução das equações diferenciais. Particularmente, os operadores setoriais são essenciais na solução de problemas de Cauchy com derivada fracionária.
- ✓ O problema de Cauchy unidimensional

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t), & a \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \infty), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

foi generalizado pela equação abstrata

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t \in [0, \infty), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

com A um operador que pode ser ilimitado. Isto nos levou ao estudo dos semigrupo e respectivos geradores infinitesimais; sejam eles geradores infinitesimais setoriais ou quase setoriais.

- ✓ O cálculo fracionário é uma generalização natural do cálculo de Newton e Leibniz. Esta teoria tem se mostrado extremamente relevante na interpretação de vários problemas matemáticos que modelam a realidade.
- ✓ Os operadores de Mittag-Leffler são famílias de operadores que generalizam as noções clássicas de semigrupos. Porém Vale observar que estes operadores nunca satisfazem a propriedade de

concatenação dos semigrupos, e portanto nunca definem semigrupos. Veja [58] como fonte deste resultado.

- ✓ Os operadores $S_\alpha(t)$ e $P_\alpha(t)$ são duas famílias de operadores de Mittag-Leffler muito importantes na solução de problemas de Cauchy com derivada de Caputo que estão associados aos operadores quase setoriais ($A \in \Theta_\omega^\gamma$). Estas famílias são muito diferentes das do caso de operadores setoriais e necessitam de um estudo bastante complexo do cálculo funcional em H^∞ .

Referências Bibliográficas

- [1] M. Allen, L. Caffarelli, A. Vasseur, A parabolic problem with a fractional time derivative, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 221 (2016) 603–630.
- [2] H. Amann, *Liner and Quasilinear Parabolic Problem*, Birkhauser-Verlag-Basel, 1995.
- [3] J. M. Arrieta, A. Carvalho, G. Lozada-Cruz, Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria, *J. Differential Equations* 231 (2006) 551-597.
- [4] J. M. Arrieta, A. Carvalho, G. Lozada-Cruz, Dynamics in dumbbell domains II. The limiting problem, *J. Differential Equations* 247 (2009) 174-202.
- [5] J. M. Arrieta, A. Carvalho, G. Lozada-Cruz, Dynamics in dumbbell domains III. Continuity of attractors, *J. Differential Equations* 247 (2009) 225-259.
- [6] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, 3, 1955.
- [7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle: Theorie et Applications*, Collection Mathématiques Appliquées Pour la Maîtrise, Dunod, 1987.
- [8] P. M. Carvalho-Neto, *Fractional Differential Equations a Novel Study of Local and Global Solutions in Banach Spaces*, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2013.
- [9] P. M. Carvalho-Neto, G. Planas, Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in R^N , *J. Differential Equations* 259 (2015) 2948-2980.

- [10] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi, Banach space operators with a bounded H^∞ calculus, *J. Aust. Math. Soc. Sect. A* 60 (1996) 51–89.
- [11] G. Da Prato, Semigrupperi di crescita n , *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 20 (1966) 753–782.
- [12] B. De Andrade, A. N. Carvalho, P. M. Carvalho-Neto, P. Marín-Rubio, Semilinear fractional differential equations: global solutions, critical nonlinearities and comparison results, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 45 (2015) 439-469.
- [13] B. De Andrade, A. Viana, On a fractional reaction-diffusion equation, *Z. Angew. Math. Phys.* 68 (2017) 68-59.
- [14] R. DeLaubenfels, F. Yao, S. Wang, Fractional powers of operators of regularized type, *J. Math. Anal. Appl.* 199 (1996) 910–933.
- [15] G. Dore, Fractional Powers of Closed Operators, Unpublished notes, 2003.
- [16] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I, General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1948.
- [17] K-J. Engel, R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [18] K-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [19] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw Hill, Elsevier, London, 3, 1955.
- [20] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [21] Y. Giga, T. Namba, Well-posedness of Hamilton-Jacobi equations with Caputo's time fractional derivative, *Comm. Partial Differential Equations* 42 (2017) 1088–1120.
- [22] J. A. Goldstein, Some remarks on infinitesimal generators of analytic semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 22 (1969) 91–93.
- [23] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Parametric subordination in fractional diffusion processes*, *Fractional Dynamics. Recent Advances*, World Sci. Publ. Hackensack, NJ, (2013) 229-263.

- [24] H. J. Haubold, A. M. Mathai, R. K. Saxena, Mittag-Leffler function and their applications, *J. Appl. Math.* (2011) 1-51.
- [25] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 840, 1981.
- [26] E. Hernandez, D. O'Regan, K. Balachandran, On recent development in the theory of abstract differential equation with fractional derivatives, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods e Applications*, 73 (2010) 3462–3471.
- [27] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 169, 2006.
- [28] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, 31, 1957.
- [29] F. Hoppenstadt, Asymptotic series solutions of some nonlinear parabolic equations with a small parameter, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 5 (1969) 284-298.
- [30] M. Ikehata, Mittag-Leffler's function ans extracting from Cauchy data, *Contemp. Math.* 348 (2004) 41-51.
- [31] O. K. Jaradat, A. Al-Omari e S. Momani, Existence of the mild solution for fractional semilinear initial value problems, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 69 (2008) 3153-3159.
- [32] S. Jimbo, Singular perturbation of domains and semilinear elliptic equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 35 (1988) 27–76.
- [33] S. Jimbo, Singular perturbation of domains and the semilinear elliptic equation II, *J. Differential Equations* 75 (1988) 264–289.
- [34] S. Jimbo, The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition, *J. Differential Equations* 77 (1989) 322–350.
- [35] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [36] V. Keyantuo, C. Lizama, M. Warma, Existence, regularity and representation of solutions of time fractional diffusion equations, *Adv. in Differential Equations* 21 (2016) 837–886

- [37] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equation, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [38] E. Kreyszing. Introductory Funcional Analysis with Applications, John Wiley and Sons. Inc. 1978.
- [39] G. Lancien, Counterexamples concerning sectorial operators, Arch. Math. 71 (1998) 388–398.
- [40] K. Li, J. Peng, J. Jia, Cauchy problems for fractional differential equations with Riemann–Liouville fractional derivatives, J. Funct. Anal. 263 (2012) 476–510.
- [41] M. Li, Q. Zheng, On spectral inclusions and approximations of α -times resolvent families, Semigroup Forum 69 (2004) 356–368.
- [42] C. Lizama, M. Murillo-Arcila, Maximal regularity in l_p spaces for discrete time fractional shifted equations, J. Differential Equations 263 (2017) 3175–3196.
- [43] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Basel, Birkhäuser, 1995.
- [44] F. T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi, Recent history of fractional calculus, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16 (2010) 1140–1153.
- [45] F. Mainardi, An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity, Fract. Calc. Appl. Anal. 15 (2012) 712–717.
- [46] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity, London, Imperial College press, 2010.
- [47] F. Mainardi, Fractional diffusive waves in viscoelastic solids, Appl. Mech. Rev. 46 (1993) 549.
- [48] B. B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance, and Dimension, Translation of Les Objets Fractals, W. H. Freeman, San Francisco, 1977.
- [49] H. Markus, The Funtional Calculus for Sectorial Operators, Birkhauser-Verlag, Basel, 69, 2006.
- [50] C. Martínez, M. Sanz, The Theory of Fractional Powers of Operators, North-Holland Mathematics Studies 187, Elsevier-Science, Amsterdam - New York, 2001.

- [51] M. M. Matar, Existence and uniqueness of solutions to fractional semilinear mixed Volterra-Fredholm integrodifferential equation with nonlocal conditions, *Electron. J. Differential Equation* 155 (2009) 1-7.
- [52] A. McIntosh, Operators which have an H^∞ functional calculus, *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.* 14 (1986) 210–231.
- [53] K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional Cauchy problem with nonlocal initial conditions, *Appl. Math. Lett.* 24 (2011) 1435-1442.
- [54] F. W. J. Olver, *Introduction to Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 1974.
- [55] R. B. Olver, Exponential asymptotics of the Mittag-Leffler function, *Proc. Royal Soc. Lond. London* 458 (2002) 3041-3052.
- [56] G. Pagninia, E. Scalas, Historical notes on the M-Wright/Mainardi function, *Commun. Appl. Ind. Math.* 6 (2015) e-496.
- [57] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-verlag, New York, 1983.
- [58] J-G. Peng, K-X Li, A note on property of the Mittag-Leffler function, *J. Math. Anal. Appl.* 370 (2010) 635-638.
- [59] F. Periago, B. Straub, A functional calculus for almost sectorial operators and applications to abstract evolution equations, *J. Evol. Equ.* 2 (2002) 41-68.
- [60] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [61] M. Renardy, R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics, New York, Springer-Verlag, 2004.
- [62] R. Ponce, On the well-posedness of degenerate fractional differential equations in vector valued function spaces, *Israel J. Math.* 219 (2017) 727-755.
- [63] B. Ross, Fractional calculus, *Math. Mag.* 50 (1977) 115-122.

- [64] B. Ross, Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, Proceedings of the international conference held at the University of New Haven, 1975.
- [65] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon e Breach Sci. Publishers, Yverdon, 1993.
- [66] H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen, T. F. Nonnenmacher, Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions, *J. Phys. A. Math. Gen.* 28 (1995) 6567-6584.
- [67] X-B Shu, F. Xu, The existence of solutions for impulsive fractional partial neutral differential equation, *J. Math.* 2013 (2013) 9 pages.
- [68] B. Straub, Fractional powers of operators with polynomially bounded resolvent and the semigroups generated by them, *Hiroshima Math. J.* 24 (1994) 529-548.
- [69] A. E. Taylor, D. C. Lay, Introduction to Funtional Analysis, John Wiley and Sons, New York, Berlin, 1980.
- [70] E. Topp and M. Yangari, Existence and uniqueness for parabolic problems with Caputo time derivative, *J. Differential Equations* 262 (2017) 6018-6046.
- [71] W. Von Wahl, , Gebrochene potenzen eines elliptischen operators and parabolische differentialgleichungen in Räumen Hölders-tetiger funktionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 2 (1983) 231-258.
- [72] R-N. Wang, D-H Chen, T-J. Xiao, Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators, *J. Differential Equations* 252 (2012) 202-235.
- [73] R. N. Wang, T.J. Xiao, J. Liang, A Note on the Fractional Calculus and Differential Equation, John Wiley, New York, 1993.
- [74] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, London, 1946.
- [75] E. M. Wright, On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. Lond. Math. Soc.* 8 (1933) 71-79.

- [76] E. M. Wright, The asymptotic expansion of the generalized Bessel function, Proc. Lond. Math. Soc. 38 (1935) 257–270.
- [77] E. M. Wright, The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function, J. Lond. Math. Soc. 10 (1935) 287–293.
- [78] K. Yosida, Funtional Analysis, Springer Verlag, New York, Berlin, 1978.