

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Existência de soluções fortes T -periódicas para um sistema magneto-elástico e para um sistema de ferrofluidos.

Maria Nilde Fernandes Barreto Frederico

Orientador: Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Florianópolis
Julho de 2018

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Existência de soluções fortes T -periódicas para um sistema magneto-elástico e para um sistema de ferrofluidos.

Tese submetido(a) ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática Pura e Aplicada, com área de concentração em Análise.

Orientador: Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Maria Nilde Fernandes Barreto Frederico
Florianópolis
Julho de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fernandes Barreto Frederico, Maria Nilde
Existência de soluções fortes T-periódicas para um
sistema magneto-elástico e para um sistema de
ferrofluidos : Existência de soluções fortes T
periódicas / Maria Nilde Fernandes Barreto
Frederico ; orientador, Jaúber Cavalcante De
Oliveira, 2018.
147 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e
Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

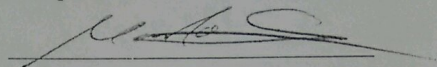
1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Existência de
soluções fortes T-periódicas para um sistema magneto
elástico e para um sistema de ferrofluidos. I.
Cavalcante De Oliveira, Jaúber . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Existência de soluções fortes T -periódicas para um sistema
magneto-elástico e para um sistema de ferrofluidos.

por

Maria Nilde Fernandes Barreto Frederico

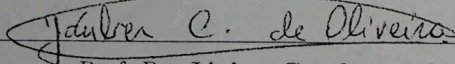
Esta Tese foi julgada para a obtenção do Título de “Doutor em
Matemática Pura e Aplicada”, área de Concentração em Análise, e
aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada



Prof. Dr. Marcelo Sobottka

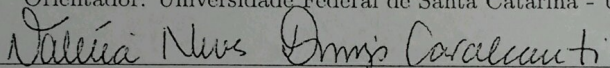
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Comissão Examinadora:



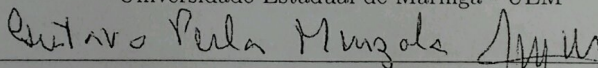
Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Orientador: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



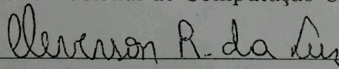
Prof. Dr. Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Universidade Estadual de Maringá - UEM



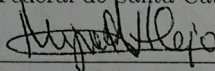
Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC



Prof. Dr. Cleverton Roberto da Luz

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



Prof. Dr. Miguel Ángel Alejo Plana

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, Julho de 2018.

Agradecimentos

Agradeço à minha família que de perto ou longe sempre estão presente, ajudando e incentivando em todos os momentos. Os sacrifícios que fizeram, vosso carinho, conselhos, paciência e confiança me deram força para continuar. Adail, apesar de tenra idade, quando percebia que tive um dia difícil, lá estava ele se esforçando para me fazer sorrir. Quanto amor!

Agradeço ao meu orientador professor Jáuber, pela oportunidade de entrar no mundo da investigação. Tenho muita gratidão por toda paciência, dedicação e conselhos.

Agradeço ao professor Ruy pela amizade e todo apoio á minha família.

Agradeço aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica e me ajudaram a esclarecer as dúvidas nas horas de "angústias".

Agradeço aos meus colegas que sempre estiveram disponível na hora de discutir os conteúdos, trocando ideias e também na hora de descontração.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte estabelecemos a existência de soluções fortes T -periódicas no tempo (período T) para um sistema magneto-elástico. O nosso principal resultado é para o caso em que o sistema tem dissipação mecânica linear e acoplamentos não lineares, que inclui uma força externa T -periódica. Provamos também a estabilidade condicional assintótica das soluções periódicas obtidas com a energia total das perturbações decaindo para zero no tempo de forma exponencial. Consideramos também o sistema no caso em que a dissipação mecânica é não-linear, com a não-linearidade do tipo $\rho(u_t) = |u_t|^p u_t$ e acoplamentos lineares. Com hipóteses adequadas sobre ρ , provamos a existência e a unicidade de soluções fortes T -periódicas no tempo para $p \in [3, 4]$. Na segunda parte deste trabalho, provamos a existência de soluções T -periódicas fracas (em dimensão 3) e fortes (dimensão 2) para as equações diferenciais parciais do modelo para ferrofluidos de Rosensweig, sob ação de uma função T -periódica nas equações para o campo magnético.

Palavras-Chave: soluções fortes, soluções periódicas, sistema magneto-elástico, magneto-elasticidade, ferrofluidos, fluidos magnéticos, modelo de Rosensweig.

Abstract

This work is divided in two parts. In the first part, we establish the existence of strong time-periodic (period T) solutions of a magnetoelastic system. Our main result is obtained in the case where the equations are nonlinearly coupled and the mechanical dissipation is linear, and a T -periodic external force is applied to the body. We also proved asymptotic conditional stability of the solutions obtained, with the total energy of the perturbations decaying exponentially to zero in time. We considered also the system in the case where the mechanical dissipation is nonlinear, of the type $\rho(u_t) = |u_t|^p u_t$, but the coupling terms are linear. Under suitable hypotheses on ρ , we proved the existence and uniqueness of strong time-periodic solutions (period T) when $p \in [3, 4]$. In the second part of the work, we proved the existence of T -periodic solutions weak (in dimension 3) e strong (in dimension 2) for the partial differential equations that describe the model for magnetic fluids of Rosensweig. In this model, the T -periodic forcing appears in the magneto-static equations.

Keywords: strong solutions, time-periodic solutions magnetoelastic system, magnetoelasticity, ferrofluids, magnetic fluids, Rosensweig's model.

Sumário

Introdução	1
1 Definições e Preliminares	7
1.1 Espaços Funcionais	7
1.2 Resultados Preliminares	9
2 Sistema Magneto-Elastico com Dissipação linear e Acoplamentos Não Lineares	15
2.1 Introdução	15
2.2 Domínio bidimensional	21
2.2.1 Existência	21
2.2.2 Estabilidade	38
2.3 Domínio tridimensional	46
2.3.1 Existência	46
2.3.2 Estabilidade	66
3 Sistema Magneto-Elastico com Dissipação Não Linear e Acoplamentos Lineares	73
3.1 Existência e Unicidade	73
4 Existência de Soluções T-Periódicas para o Sistema Ferrofluidos	95
4.1 Introdução	95
4.2 Existência	99
4.2.1 Soluções fracas T -periódicas	103

4.2.2	Soluções fortes T -periódicas ($d=2$)	113
5	Problemas em Aberto	121

Notações

Neste trabalho usamos as seguintes notações:

$x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ são pontos no espaço \mathbb{R}^3 ;

$|\cdot|$ é a norma Euclidiana em \mathbb{R}^3 ;

O produto interno de x e y é dado por $x \cdot y = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$;

O produto vetorial de x e y é o dado pelo vetor

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1);$$

Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^3 ;

$L^2(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis em Ω e tais que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty;$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

Se $u, v \in L^2(\Omega)$ então, $(u, v)_2 = \int_{\Omega} u \cdot v$, é o produto interno em $L^2(\Omega)$;

Se $u \in X$ espaço de Banach e $L \in X'$ dual do espaço X então, $\langle L, u \rangle$ indica o valor de L em u ;

$$(L^2(\Omega))^3 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ e } \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} = \left(\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$H^m(\Omega)$ é o espaço de Sobolev das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

u e $D^\alpha u$ estão em $L^2(\Omega)$ no sentido distribucional para todo $|\alpha| \leq m$, em

$$\text{que } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N} \text{ e } |\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i;$$

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \partial^{\alpha_3} x_3} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$(H^m(\Omega))^3 = H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \text{ e } \|u\|_{(H^m(\Omega))^3} = \left(\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$\mathcal{C}([0, T]; X)$ é o espaço das funções contínuas de $[0, T]$ em X ;

$\mathbb{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω ;

$\mathbb{D}'(\Omega)$ é o espaço das distribuições sobre Ω ;

$H_0^m(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $H^m(\Omega)$;

$H^{-m}(\Omega)$ é o espaço dual de $H_0^m(\Omega)$;

$C_T^m(X)$ é o espaço das funções $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ m -vezes continuamente diferenciáveis tal que $u(t) = u(t + T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

$L^2(0, T; X)$ é o espaço das funções $f : (0, T) \rightarrow X$ tal que

$$\left(\int_0^T \|f\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

$u' = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ é a derivada de u em relação a t ;

Se $u = (u^1, u^2, u^3)$ então, $u_t = (u_t^1, u_t^2, u_t^3)$;

$\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$ é o gradiente da função u ;

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ então, $\text{div } u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ é o divergente da função u ;

$\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o laplaciano da função u e $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$;

Se $h = (h_1, h_2, h_3) \in (\mathbb{D}'(\Omega))^3$ então,

$$\text{rot } h = \left(\frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_3}, \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1}, \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right)$$

é o operador diferencial linear rotacional do vetor h ;

C é a constante positiva, que poderá assumir valores diferentes em lugares diferentes;

c_p , c_{it} , c_{im} são constantes de Poincaré, interpolação e imersão respectivamente.

Introdução

Neste trabalho estudamos questões de existência de soluções periódicas no tempo para o sistema magneto-elástico e sistema de ferrofluidos. Na primeira parte centramos a nossa atenção na investigação da existência e estabilidade de soluções fortes periódicas no tempo para o sistema magneto-elástico e na segunda parte do trabalho, investigamos a existência de soluções T -periódicas para o sistema ferrofluidos.

O sistema magneto-elástico é um sistema de equações diferenciais parciais acoplado entre uma equação hiperbólica e uma equação parabólica, que modela a interação entre um corpo elástico e um campo magnético externo, H_e . Se um corpo colocado num campo magnético inicial forte for movido por uma força externa, além de campo de tensão induz também um campo magnético dentro do corpo dado por $H_e + h(x, t)$ que tem influência sobre o corpo por meio de forças de Lorentz que aparecem nas equações do meio. Consideramos um corpo elástico não ferromagnético, condutor, homogêneo e isotrópico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado, simplesmente conexo e com fronteira de classe C^2 . O campo magnético, H_e , é constante e a força externa $f(x, t)$ é periódica no tempo, de período T (número positivo fixo). Os campos de deslocamento e magnético são representados por $u(x, t)$ e $h(x, t)$ respectivamente. O modelo descrito acima ([29], [7], [6]) é representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais (sistema magneto-elástico):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\beta + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \mu_0 (\operatorname{rot} h) \wedge (h + H_e) + f, \quad (0.0.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nu_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} h = \operatorname{rot} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \wedge (h + H_e) \right], \quad (0.0.2)$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad (0.0.3)$$

em $Q_T = (0, T) \times \Omega$, em que $\frac{\partial u}{\partial t}$ é a derivada parcial de $u(t, x)$ em relação a t (tempo), e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$. As constantes positivas de Lamé da teoria de elasticidade são β e μ , $\nu_1 = \frac{1}{\sigma \mu_0}$ em que $\sigma > 0$ representa a condutividade do material, μ_0 é um número positivo representando a permeabilidade magnética e $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ representa a dissipação mecânica que atua no corpo elástico.

As condições de periodicidade e de fronteira associadas a esse sistema, são respectivamente,

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u(T, x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(T, x), \\ h(0, x) &= h(T, x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (0.0.4)$$

$$u = 0, \quad h \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} h \wedge n = 0 \text{ em } \Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (0.0.5)$$

em que $n = n(x)$ indica o vetor normal unitário exterior em $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$.

Revisaremos aqui, os trabalhos da literatura que tratam questões de existência de soluções T -periódicas no tempo para EDP's hiperbólicas. Os estudos sobre a existência de soluções T -periódicas no tempo para EDP's hiperbólicas, remontam a 1956, quando G. Prodi, estudou a existência de soluções generalizadas 2π -periódicas de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + g(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}) &= f(x, t, u), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

em que

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado;

$f \in L^2(\Omega \times [0, 2\pi])$ é uma função 2π -periódica;

$g(x, t, p)$ é uma função mensurável de $(x, t) \in \Omega \times [0, 2\pi]$ para cada p e

$$m \leq \frac{g(x, t, p_2) - g(x, t, p_1)}{p_2 - p_1} \leq M, \quad p_2 \neq p_1,$$

$g(x, t, 0) = 0$ e g tem efeito dissipativo.

Prodi investigou também o caso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + g(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}) = f(x, t, u, u_x),$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

com hipóteses adicionais sobre f . Mais tarde, em 1959, J. Serrin [65] estudou a existência de soluções periódicas das equações de Navier-Stokes. Seguiram-se muitos outros trabalhos tais como [73], [60], [59], [37] e [43]. Além dos trabalhos sobre a existência de soluções T -periódicas no tempo, mencionamos as seguintes contribuições sobre a teoria matemática da magnoelastocidade: [16], [57], [58], [18], [36] e [11].

No que segue, faremos um pequeno resumo da importância e da aplicação de problemas periódicos ([56] e [72]):

Soluções periódicas é um aspecto importante das equações diferenciais, visto que movimentos periódicos acontecem com frequência na natureza e podem ser modelados por sistema de equações diferenciais. O movimento dos corpos celestes, a vibração das ondas e mudanças climáticas nas quatro estações são exemplos de movimentos periódicos. Fenômenos físicos e naturais ocorrem nos problemas mecânicos e de engenharias onde há oscilações (pêndulo, molas, ...) ou movimentos nas trajetórias fechadas (planetas, elétrons, ...) e as soluções de interesse para as equações que descrevem esses movimentos são exatamente as periódicas. Portanto, é de grande importância garantir se existem soluções periódicas para tais sistemas. Pesquisas acerca de soluções periódicas vêm se desenvolvendo e têm ampla aplicação em muitos campos como ciências sociais, medicina, sistemas biológicos, modelos epidêmicos, entre outros. De modo a exemplificar, para explorar o impacto de fatores ambientais na biologia, a suposição de periodicidade de parâmetros descreve mais fielmente o mundo real devido à existência de muitos fatores periódicos tais como efeitos sazonais do tempo, suprimentos de comida, hábitos de acasalamento e colheita. Um outro exemplo das soluções periódicas, é a sua aplicação no estudo do número de habitantes de uma cidade que contraem uma doença contagiosa e essa doença possui a característica de não imunizar quem a contraiu (por exemplo, um resfriado).

Provar a existência de soluções fortes T -periódicas para o sistema magneto-elástico com acoplamentos não lineares usando a formulação puramente periódica apresenta dificuldades consideráveis devido à falta de estimativas a priori. Quando os acoplamentos são lineares temos uma certa analogia entre o sistema magneto-elástico e o sistema termo-elástico [19]. Perdemos essa analogia quando os termos de acoplamentos são não lineares. Na primeira equação o termo de acoplamento é $\text{rot } h \wedge (h + H_e)$ que é como o termo $(u \cdot \nabla u)$ das equações de Navier-Stokes. No entanto, como comentado em detalhes em [51] (ver também [50]), técnicas usadas para o problema periódico no tempo para as equações de Navier-Stokes falham para o sistema magneto-elástico devido ao acoplamento entre as equações. Nosso Teorema sobre a existência de solução forte periódica no tempo aborda a formulação puramente periódica no tempo e melhora o Teorema de existência correspondente em [54].

Quando consideramos o sistema magneto-elástico com acoplamentos lineares, como foi observado em trabalhos anteriores como Menzala-Zuazua ([49]), a equação do campo magnético comporta como a equação do calor e neste caso temos a estimativa a priori. Esse sistema foi bastante estudado no passado porém, não do ponto de vista de obtenção de soluções periódicas.

Também neste trabalho, estudamos questões de existência de soluções fracas e fortes periódicas no tempo do modelo ferrofluidos de Rosensweig. Os fluidos magnéticos, ou ferrofluidos, são fluidos contendo nano-partículas em grande quantidade (10^{23} partículas por metro cúbico, cada partícula com 3 a 15 nanômetros de diâmetro). Ferrofluidos tem sido empregados em várias aplicações como em selos de eixos rotativos nos discos rígidos de computadores, na manufatura de semi-condutores, em selos de pressão para compressores, etc. Eles são também usados no resfriamento de bobinas de speakers, para administrar drogas em certas partes do corpo, como marcador de fluxo sanguíneo em medidas circulatórias não-invasivas, etc. O resultado novo, para o modelo ferrofluidos de Rosensweig, é o fato de obtermos a existência de soluções fortes T -periódicas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para obter a existência de soluções T -periódicas no tempo, usamos o método de Faedo-Galerkin e o Teorema de ponto fixo de Brouwer.

Descrevemos em seguida a estrutura do nosso trabalho. A primeira

parte constituída pelos capítulos 1,2 e 3 é dedicada ao sistema magneto-elástico e a segunda parte constituída pelo capítulo 4 é dedicada ao sistema ferrofluidos. No capítulo 1, introduzimos alguns espaços funcionais básicos, a formulação fraca do problema e apresentamos alguns resultados preliminares importantes usados neste trabalho. No capítulo 2, consideramos o sistema magneto-elástico com dissipação linear e acoplamentos não lineares. Impondo que a força f seja pequena, obtivemos a existência de solução T -periódica forte no domínio bidimensional, via Teorema do ponto fixo de Banach. Neste mesmo capítulo, assumindo certas hipóteses sobre a dissipação, obtivemos o nosso principal resultado: a existência de solução T -periódica forte no domínio tridimensional. A estabilidade de soluções foi obtida neste capítulo. Estabelecemos a existência de soluções T -Periódicas fortes para o sistema magneto-elástico com dissipação não linear e acoplamentos lineares no capítulo 3. Para alcançar o nosso objetivo, utilizamos o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Também neste capítulo obtivemos a unicidade de soluções T -periódicas no tempo. Por último, no capítulo 4, estabelecemos a existência de soluções T -periódicas fracas e fortes para o sistema de ferrofluidos.

Capítulo 1

Definições e Preliminares

1.1 Espaços Funcionais

Consideramos um domínio Ω de \mathbb{R}^3 com $\partial\Omega$ de classe C^2 . $\mathbb{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$ e $\mathbb{D}(\bar{\Omega}) := C_0^\infty(\bar{\Omega})$ são espaços de funções testes com suporte compacto em Ω e espaços de funções testes com suporte compacto em \mathbb{R}^3 restrito a Ω , respectivamente. $L^2(\Omega)$ é o espaço de Lebesgue de funções quadrados integráveis com produto interno (\cdot, \cdot) e a norma $\| \cdot \| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$. Usamos a notação usual dos espaços de Sobolev: $W^{s,p}(\Omega)$, $W_0^{s,p}(\Omega)$, $s \geq 0$, $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$, $H_0^s(\Omega) := W_0^{s,2}(\Omega)$. A norma em $W^{s,p}(\Omega)$ será denotado por $\| \cdot \|_{s,p}$. $H^{-s}(\Omega)$ representa o espaço dual de $H_0^s(\Omega)$.

A seguir, consideramos alguns espaços básicos para o estudo do sistema magneto-elástico e enunciaremos as principais propriedades ([23]).

$$L_\sigma^2(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} h = 0, h \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$H_\sigma^1(\Omega)^3 = \{h \in H^1(\Omega)^3 : \operatorname{div} h = 0, h \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \{v \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\},$$

$$\begin{aligned}
H(\text{rot}, \Omega) &:= \{v \in L^2(\Omega)^3 : \text{rot } v \in L^2(\Omega)^3\}, \\
H_0(\text{div}, \Omega) &:= \overline{\mathbb{D}(\overline{\Omega})}^{H(\text{div}, \Omega)}, \\
H_0(\text{rot}, \Omega) &:= \overline{\mathbb{D}(\overline{\Omega})}^{H(\text{rot}, \Omega)}.
\end{aligned}$$

O conjunto $H(\text{div}, \Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|v\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2 := \|v\|_{L^2}^2 + \|\text{div } v\|^2$ e $\mathbb{D}(\overline{\Omega})$ é denso nesse espaço. O conjunto $H(\text{rot}, \Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|v\|_{H(\text{rot}, \Omega)}^2 := \|v\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } v\|^2$ e $\mathbb{D}(\overline{\Omega})$ é denso nesse espaço. $L_\sigma^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma usual e o produto interno em L^2 . Enquanto que $H_\sigma^s(\Omega)$, $s \geq 0$, é um espaço de Hilbert com o produto interno de $H^s(\Omega)$, denotado por $(\cdot, \cdot)_{s,2}$ e $H_\sigma^{-s}(\Omega)$ indica o dual de $H_\sigma^s(\Omega)$. Em particular, $H_\sigma^1(\Omega)$, é também um espaço de Hilbert com o produto interno

$$((h, h)) := (\text{rot } h, \text{rot } h)$$

e a norma induzida desse produto interno (que é equivalente à norma usual em H^1). Além desses espaços, para os resultados preliminares da fórmula de Green (com rot), precisamos do seguinte espaço:

$$U_1(\Omega) = \{w \in (L_\sigma^2(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3) : \text{rot } w \in H_0(\text{rot}, \Omega)\}$$

munido com a norma $\|w\|_{U_1} = \{\|w\|_{H(\text{rot}, \Omega)}^2 + \|\text{rot } w\|^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Sabemos, do conhecido Teorema para as funções traços γ_n e γ_τ nos espaços $H(\text{div}, \Omega)$ e $H(\text{rot}, \Omega)$ respectivamente, que a aplicação

$$\begin{aligned}
\gamma_n &: \mathbb{D}(\overline{\Omega})^3 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\
v &\mapsto v \cdot \eta|_{\partial\Omega}
\end{aligned}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $\mathbb{D}(\overline{\Omega})^3$ em $H(\text{div}, \Omega)$, a uma única aplicação linear e contínua, denotada novamente por γ_n , de $H(\text{div}, \Omega)$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. De forma análoga, temos que a aplicação

$$\begin{aligned}
\gamma_\tau &: \mathbb{D}(\overline{\Omega})^3 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3 \\
v &\mapsto v \wedge \eta|_{\partial\Omega}
\end{aligned}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $\mathbb{D}(\overline{\Omega})^3$ em $H(\text{rot}, \Omega)$, a uma

única aplicação linear e contínua, denotada novamente por γ_τ , de $H(\text{rot}, \Omega)$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$. Mais propriedades dessas funções traços podem ser encontrados em [23], p.204.

1.2 Resultados Preliminares

Nesta secção apresentamos alguns resultados que serão úteis para os nossos objetivos. Começamos com o seguinte Lema:

Lema 1.1. (*[69], p.465*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e simplesmente conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então, existe uma constante real positiva \tilde{c}_p tal que $\forall u \in H_\sigma^1(\Omega)$,*

$$\|u\| \leq \tilde{c}_p \|\text{rot } u\|.$$

Os dois Lemas seguintes podem ser encontrados em [23], p.206-207.

Lema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e simplesmente conexo com a fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então, para todo $v \in H(\text{div}, \Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} v \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot \text{div } v \, dx + \langle \gamma_n v, u \rangle_{\partial\Omega}.$$

Lema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e simplesmente conexo com a fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então, para todo $v \in H(\text{rot}, \Omega)$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} v \cdot \text{rot } \varphi \, dx - \int_{\Omega} \text{rot } v \cdot \varphi \, dx = \langle \gamma_\tau v, \varphi \rangle_{\partial\Omega}.$$

Corolário 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, limitado e simplesmente conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Para todo $w \in U_1$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} \text{rot } w \cdot \text{rot } \varphi \, dx = \int_{\Omega} (\text{rot } \text{rot } w) \cdot \varphi \, dx.$$

Teorema 1.1. (*[28], p.358*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira*

de classe C^2 . Então, o conjunto

$$X = \{u \in L^2(\Omega)^3; \operatorname{div} u \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega)^3 \text{ e } u|_{\partial\Omega \cdot \eta} = 0\}$$

é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_X = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle \operatorname{div} u, \operatorname{div} v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v \rangle_{L^2(\Omega)^3}.$$

Além disso, X é algebricamente e topologicamente igual a $H^1(\Omega)^3$.

Lema 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e μ e λ são constantes reais tais que $\lambda + 2\mu > 0$ e $\mu > 0$. Então,*

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (\operatorname{div} v)(\operatorname{div} u) \, dx$$

é um produto interno equivalente ao usual em $H_0^1(\Omega)^3$.

Teorema 1.2. *(Teorema de regularidade elíptica, [33], p.69)*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo, com fronteira de classe C^2 e $f \in L^2_{\sigma}(\Omega)$. Se $u \in H^1_{\sigma}(\Omega)$ é solução fraca do seguinte sistema magnético:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} u &= f \text{ em } \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega \cdot \eta} &= 0 \text{ em } \partial\Omega \\ \operatorname{rot} u|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

então

$$u \in H^2(\Omega)^3$$

e existe uma constante real e positiva c , independente de f e u tal que

$$\|u\|_{2,2} \leq c \|f\|.$$

Teorema 1.3. *(Teorema de regularidade elíptica, [46], p.128) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo, com fronteira de classe C^2 , $f \in L^2(\Omega)^3$, μ e λ são constantes reais tais que $\lambda + 2\mu > 0$ e $\mu > 0$. Se $u \in H_0^1(\Omega)^3$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:*

$$u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u = f \text{ em } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

isto é,

$$(u, v) + (u, v)_{H_0^1(\Omega)^3} = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3,$$

então

$$u \in H^2(\Omega)^3$$

e existe uma constante real e positiva c , independente de f e u tal que

$$\|u\|_{2,2} \leq c \|f\|.$$

Corolário 1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo, com fronteira de classe C^2 , $f \in L^2(\Omega)^3$, μ e λ são constantes reais tais que $\lambda + 2\mu > 0$ e $\mu > 0$. Se $u \in H_0^1(\Omega)^3$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:*

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u &= f \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

isto é,

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)^3} = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3,$$

então

$$u \in H^2(\Omega)^3$$

e existe uma constante real e positiva c , independente de f e u tal que

$$\|u\|_{2,2} \leq c \|f\|.$$

Teorema 1.4. *(Teorema de imersão, [24], p.219) Seja Ω um conjunto aberto e Lipschitz. Então temos:*

- Se $sp < N$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $q \leq \frac{Np}{N-sp}$.
- Se $sp = N$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $q \leq \infty$.
- Se $sp > N$, então temos:

$$\text{Se } s - \frac{N}{p} \notin \mathbb{N}, \text{ então } W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{N}{p}], s-\frac{N}{p-[s-\frac{N}{p}]}}(\Omega).$$

$$\text{Se } s - \frac{N}{p} \in \mathbb{N}, \text{ então } W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{N}{p-1}, \lambda}(\Omega) \text{ para qualquer } \lambda < 1.$$

Desigualdades de interpolação:

1. ([1], p.139) Seja Ω um domínio de \mathbb{R}^n satisfazendo a condição do cone. Então, as seguintes afirmações são válidas:

i) $n = 2$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{3}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{3}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

ii) $n = 3$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}, \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^5(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{9}{10}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{10}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. Em geral, temos o seguinte Teorema ([14], p.173): Seja Ω um domínio Lipschitz de \mathbb{R}^n com fronteira compacta. Seja $p \in [1, +\infty)$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ e $q \in [p, p^*]$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^p}^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \|u\|_{W^{1,p}}^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

O seguinte Lema ([51]), que é devido a Prouse [60], será útil para o nosso problema.

Lema 1.5. *Sejam $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e T -periódicas e $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função T -periódica tal que $G \in C^1(\mathbb{R})$ e verifica as seguintes desigualdades:*

$$\int_0^T G(s) ds \leq c_2,$$

e

$$\frac{dG}{dt}(t) \leq g_1(t) + g_2(t)G(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde c_2 é uma constante positiva.

Então,

$$\sup_{t \in [0, T]} G(t) \leq \frac{c_2}{T} + 2T \sup_{t \in [0, T]} g_1(t) + 2c_2 \sup_{t \in [0, T]} g_2(t).$$

Consideremos também o seguinte resultado de EDO ([15], p.68):

Definição 1.1. Um sistema $x' = A(t)x$ com $A(t+T) = A(t)$ para qualquer t e algum $T > 0$ é denominado **não-crítico** relativo a T se $x' = A(t)x$ não tem solução periódica de período T não trivial.

Proposição 1.1. Sejam $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com A e p contínuos em \mathbb{R} e periódicos de período T . Seja $x' = A(t)x$ não-crítico relativo a T . Então, $x' = A(t)x + p(t)$ tem uma única solução periódica de período T .

No capítulo 3 iremos precisar do Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder:

Teorema 1.5. ([74], p.245) Suponha que:

- i) o operador $T : X \rightarrow X$ é compacto, em que X é um espaço de Banach;
- ii) (estimativa a priori) existe um $r > 0$ tal que

$$\text{se } x = tT(x), \quad 0 < t < 1 \text{ então } \|x\| \leq r.$$

Então, a equação $x = T(x)$ tem solução.

Usaremos também o seguinte Lema ([50], p.18) na passagem ao limite da prova do teorema 2.3

Lema 1.6. Seja Ω um domínio aberto e limitado em \mathbb{R}^3 de classe C^2 . Seja $0 \leq s_1 \leq 2$, $0 \leq s_2 \leq 2$, e $0 \leq s_3 \leq 1$, tal que

a) $s_1 + s_2 + s_3 \geq \frac{3}{2}$, se $s_i \neq \frac{3}{2}$, $i = 1, 2, 3$, ou

b) $s_1 + s_2 + s_3 > \frac{3}{2}$, se $s_i = \frac{3}{2}$, para algum $i=1,2,3$.

Então, existe uma constante $c_1 = c_1(s_1, s_2, s_3, \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \wedge h \cdot \text{rot } b \, dx \leq c_1 \|u\|_{H^{s_1}} \|h\|_{H^{s_2}} \|\text{rot } b\|_{H^{s_3}}, \quad u, h, b \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

No capítulo 2 aplicaremos a seguinte versão do Teorema do ponto fixo de Banach:

Teorema 1.6. (*[30], p.59*) *Sejam X um espaço de Banach e X_0 um conjunto fechado de X . Assume que T é uma contração em X_0 e T aplica X_0 nele mesmo. Então, existe um único y em X_0 tal que $Ty = y$.*

Capítulo 2

Sistema

Magneto-Elástico com Dissipação linear e Acoplamentos Não Lineares

2.1 Introdução

Nesta seção vamos derivar as equações do sistema magneto-elástico

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\beta + \mu) \nabla \operatorname{div} u &= \mu_0 (\operatorname{rot} h) \wedge (h + H_e) + f, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nu_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} h &= \operatorname{rot} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \wedge (h + H_e) \right], \\ \operatorname{div} h &= 0,\end{aligned}$$

em Q_T , com as seguintes condições de periodicidade e de fronteira respectivamente,

$$u(0, x) = u(T, x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(T, x),$$

$$h(0, x) = h(T, x), \quad x \in \Omega,$$

$$u = 0, \quad h.n = 0, \quad \text{rot } h \wedge n = 0 \text{ em } \Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega .$$

Lembramos que essas equações diferenciais parciais modelam o movimento de um corpo sólido colocado num campo magnético e influenciado por forças externas. É importante salientar que a relação entre os campos elétricos e magnéticos e suas variações em função do tempo e da posição do espaço são dadas pelas equações de Maxwell e pelas leis constitutivas. As equações de Maxwell são dadas em unidade de sistema internacional: Lei de Ampère que expressa como corrente elétrica produz campo magnético; Lei de Faraday que expressa como variações de campo magnético produzem campos elétricos; Lei de Gauss que expressa como cargas elétricas produzem campos elétricos e Conservação de fluxo magnético, isto é, todo o fluxo magnético que entra em um volume é igual ao que sai do volume.

Lei de Ampère: $\text{rot } H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + J_f;$

Lei de Faraday: $\text{rot } E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t};$

Lei de Gauss: $\epsilon_0 \text{ div } E = \rho_f;$

Conservação de fluxo magnético: $\mu_0 \text{ div } H = 0,$

em que E é o campo elétrico, H campo magnético, J_f corrente livre, ρ_f densidade de carga livre, μ_0 a constante de permeabilidade do meio e ϵ_0 a constante de permissividade do material. Na presença de matéria (corpo) no espaço, temos mais dois campos básicos no eletromagnetismo: a indução magnética ou densidade do fluxo magnético, B , e a indução elétrica, D . A indução magnética se relaciona com o campo magnético através da permeabilidade do meio, μ_0 , e reflete a capacidade de induzir fluxo magnético em um determinado meio. A indução elétrica se relaciona com o campo elétrico e está associada à permissividade, ϵ_0 , do material. Essas relações

chamadas constitutivas são dadas por

$$\mu_0 H = B; \quad (2.1.1)$$

$$\epsilon_0 E = D. \quad (2.1.2)$$

No caso do ar, a permeabilidade relativa é $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6}$ Henry/metro e a permissividade é $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Farad/metro. Como às vezes é necessário conhecer a densidade da corrente, J , temos uma outra relação constitutiva conhecida como modelo de Ohm:

$$J_f = \sigma(E + u' \wedge B), \quad (2.1.3)$$

em que u é o vetor deslocamento no sólido deformado. Essa lei define a capacidade de um meio de conduzir mais ou menos a corrente e está associada à sua condutividade elétrica, σ .

Assumimos que a densidade de cargas elétricas livres e a indução elétrica são nulas, isto é, $\rho_f = 0$ e $D = 0$. Então, as equações de Maxwell são reduzidas às seguintes equações

$$\text{rot } H = J_f \text{ (Lei de Ampère);} \quad (2.1.4)$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ (Lei de Faraday);} \quad (2.1.5)$$

$$\text{div } B = 0 \text{ (Lei de Gauss).} \quad (2.1.6)$$

Assumindo também as hipóteses da teoria da elasticidade linear e incluindo a força de corpo eletro-magnética $J_f \wedge B$ temos a seguinte equação do movimento

$$\rho_M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{L}u - J_f \wedge B = 0, \quad (2.1.7)$$

onde ρ_M é a densidade do material e $\mathcal{L} = -\mu\Delta() - (\lambda + \mu)\nabla \text{div}()$ é o operador de Lamé.

As equações do sistema magneto-elástico são obtidas de (2.1.1)-(2.1.7) como se seguem:

A equação para o deslocamento u é obtido de (2.1.1), (2.1.4) e (2.1.7):

$$\rho_M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{L}u - \mu_0 \text{rot } H \wedge H = 0.$$

A equação para H é obtido tomando o rot de (2.1.4) e usando (2.1.3):

$$\text{rot rot } H = \text{rot } J_f = \sigma(\text{rot } E + \text{rot}(u' \wedge B)) .$$

Usando (2.1.5) e (2.1.1) nessa equação obtemos

$$\text{rot rot } H = \sigma\left(-\frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot}(u' \wedge (\mu_0 H))\right) .$$

Usando de novo (2.1.1) obtemos a equação para o campo magnético

$$\mu_0 \sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot rot } H = \mu_0 \sigma \text{rot}(u' \wedge H) .$$

Finalmente, $\text{div } H = 0$ segue de (2.1.6) e (2.1.1). Assim, temos as equações do sistema magneto-elástico:

$$\begin{aligned} \rho_M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \text{div } u - \mu_0 (\text{rot } H) \wedge H &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{rot rot } H &= \text{rot}(u' \wedge H) \\ \text{div } H &= 0 . \end{aligned}$$

Revisão bibliográfica

Revisamos vários trabalhos na literatura relacionados a questões de boa-colocação e do comportamento assintótico de soluções para este sistema de equações diferenciais parciais com acoplamentos não lineares. Botsenyuk [12] provou a existência de soluções fracas para o problema de valor inicial para esse sistema (sem dissipação mecânica), em domínio limitado. Neste trabalho ele não provou a unicidade. Em [13], Botsenyuk também provou a existência e unicidade de solução global forte para o problema de valor inicial, assumindo dados iniciais (e forçante) suficientemente pequenos. Quando consideramos o sistema linearizado sem dissipação mecânica, Andreou-Dassios [5], investigaram o problema de Cauchy correspondente em \mathbb{R}^3 . Assumindo algumas hipóteses de regularidade sobre os dados iniciais, eles transformaram as equações governantes usando Fourier e usaram a teoria da perturbação para provar que a solução do sistema decai para zero a uma taxa polinomial quando $t \rightarrow \infty$. Mais tarde, Menzala-Zuazua [49],

provaram que a energia do sistema com acoplamento linear decai a zero sob a hipótese de que a única dissipação que atua no sistema é a dissipação natural representada pelo termo $\nu_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} h$. A demonstração não produziu uma taxa de decaimento para a energia deste sistema. Rivera e Racke [61] usaram o método de energia para obter a taxa de decaimento polinomial da energia total para o problema de Cauchy para o sistema magneto-termo-elástico com acoplamento linear, assumindo a hipótese de que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{(1 + |\eta|^2)A^2}{|\eta|^2} \right]^m \mathcal{E}_1(0, \eta) d\eta < +\infty,$$

em que \mathcal{E}_1 é a energia no espaço da transformada de Fourier e

$$A = A(\eta) = |\eta|^2 \left(\frac{1}{\eta_1^2} + \frac{1}{\eta_2^2} \right).$$

Em [62], Rivera e Santos provaram, para domínios especiais, que a energia total desse sistema decai a zero com uma taxa polinomial quando $t \rightarrow +\infty$, assumindo dados iniciais suficientemente regulares. Charão, Oliveira e Menzala [19] provaram que a energia total desse sistema tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$ quando a dissipação não-linear $\rho(x, u_t(t, x))$ é efetiva sobre uma pequena sub-região do domínio. Eles obtiveram uma taxa de decaimento polinomial para a energia total do sistema: $\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)(1+t)^{-\gamma_1}$, em que γ_1 depende da hipótese assumido sobre o comportamento da dissipação não linear. Em [47], Luz e Oliveira consideraram o comportamento assintótico de soluções para o problema de Cauchy em \mathbb{R}^3 para o sistema magneto-termo-elástico com dissipação mecânica linear e termos de acoplamento linear. Usando métodos de energia para as equações da transformada de Fourier, dividindo a energia no espaço transformado em partes de baixa frequência e alta frequência, sob algumas hipóteses sobre os dados iniciais e de certas estimativas chaves, a seguinte estimativa para a energia de ordem α , definido por

$$\begin{aligned} E_\alpha(t) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^\alpha \left\{ |\hat{u}_t(t)|^2 + \mu |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 \right. \\ & \left. + (\lambda + \mu) |\xi \cdot \hat{u}(t)|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2 \right\} d\xi \end{aligned}$$

foi obtido na forma:

$$\mathcal{E}_\alpha(t) \leq C_\beta \{M(u_0, u_1, h_0, \theta_0) + \mathcal{E}_\alpha(0)\} t^{-1/\beta}.$$

Este resultado, por sua vez, implica que a energia total do sistema decai a uma taxa polinomial e também implica taxas de decaimento para a norma L^2 de $u(t, x)$. Investigações sobre soluções periódicas no tempo para o sistema magneto-elástico descrito anteriormente teve início recente. Mohebbi e Oliveira [51] e Mohebbi [50] estabeleceram a existência de soluções fracas periódicas no tempo (com o mesmo período T que a força T -periódica dada) para o sistema magneto-elástico com acoplamentos não lineares e dissipação mecânica não linear $\rho(u_t(t, x))$. Oliveira [54] provou a existência de soluções T -periódicas fortes para esse sistema magneto-elástico com acoplamentos não lineares e uma força externa T -periódica dada e dissipação mecânica linear. A prova é baseada no problema de valor inicial e no mapa de Poincaré, assumindo que a energia no tempo $t = 0$ e certas normas da força externa são suficientemente suaves. A estabilidade assintótica condicional de soluções periódicas no tempo também é provada nesse artigo. Estes dois últimos trabalhos destacados na literatura constituíram uma das principais motivações para a nossa pesquisa.

Provar a existência de soluções fortes T -periódicas para o sistema magneto-elástico com acoplamentos não lineares usando a formulação puramente periódica apresenta dificuldades consideráveis devido à falta de estimativas a priori. Quando os acoplamentos são lineares temos uma certa analogia entre o sistema magneto-elástico e o sistema termo-elástico [19]. Perdemos essa analogia quando os termos de acoplamentos são não lineares. Na primeira equação o termo de acoplamento é $\text{rot } h \wedge (h + H_e)$ que é como o termo $(u \cdot \nabla u)$ das equações de Navier-Stokes. No entanto, como comentado em detalhes em [51] (ver também [50]), técnicas usadas para o problema periódico no tempo para as equações de Navier-Stokes falham para o sistema magneto-elástico devido ao acoplamento entre as equações. Nosso Teorema sobre a existência de solução forte periódica no tempo aborda a formulação puramente periódica no tempo e melhora o Teorema de existência correspondente em [54].

2.2 Domínio bidimensional

2.2.1 Existência

A prova da existência de soluções das equações é feita através do método de aproximação de Faedo-Galerkin, que consiste em aproximar o problema inicial por sistemas aproximados equivalentes, porém em dimensão finita. O fato do nosso problema ser puramente periódico, dificultou a obtenção de estimativas a priori, e isso nos fez com que procurássemos soluções em espaços pequenos. Usaremos argumentos de compacidade e monotonicidade para extrair subsequências convergentes. Passando o limite nessas subsequências obtemos a solução do problema original.

Agora, introduziremos a formulação fraca para o problema (0.0.1)-(0.0.5), com dissipação linear $\rho(u') = \alpha u'$. Começamos considerando as seguintes hipóteses:

(H_0) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado simplesmente conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 .

(H_1) $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ com $f(0) = f(T)$.

A seguir definiremos dois operadores úteis. Para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ fixo, definimos o operador linear limitado (conhecido como operador de Lamé) $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ e a sua forma bilinear associada

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = a_I(u, v) := \mu(\nabla u, \nabla v)_2 + \beta + \mu(\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Para qualquer $h \in H_\sigma^1(\Omega)$ definimos o operador linear limitado $\tilde{\mathcal{L}} : H_\sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\sigma^{-1}(\Omega)$ e a sua forma bilinear associada

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}h, b \rangle = a_{II}(h, b) := \nu_1(\operatorname{rot} h, \operatorname{rot} b)_2, \quad \forall b \in H_\sigma^1(\Omega).$$

O operador $\tilde{\mathcal{L}}$ admite uma sequência infinita de autofunções denotadas por $\tilde{\phi}_j$, associadas a autovalores $\tilde{\lambda}_j^{-1}$ ([33]). Eles formam a base do espaço $H_\sigma^1(\Omega)$ e são soluções do seguinte problema:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\phi}_j = \tilde{\lambda}_j^{-1} \tilde{\phi}_j,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \tilde{\phi}_j &= 0, \\ \tilde{\phi}_j \cdot \eta|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \operatorname{rot} \tilde{\phi}_j \cdot \eta|_{\partial\Omega} &= 0.\end{aligned}$$

Note que $a_I(u, v)$ e $a_{II}(h, b)$ definem produto interno em $H_0^1(\Omega)$ e $H_\sigma^1(\Omega)$ respectivamente, com as suas normas associadas equivalentes às normas em $H_0^1(\Omega)$ e $H_\sigma^1(\Omega)$.

Definimos mais dois operadores lineares limitados como se seguem:

Dado $(h, b) \in (H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ definimos
 $B_I : H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^{\frac{1}{2}}(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ por

$$B_I(h, b)(v) = \int_{\Omega} \operatorname{rot} h \wedge (b + H_e) \cdot v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

e dado $(u, h) \in (L^2(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega))$ definimos

$B_{II} : L^2(\Omega) \wedge H_\sigma^1(\Omega) \longrightarrow H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega)$ por

$$B_{II}(u, h)(b) = \int_{\Omega} u \wedge (b + H_e) \cdot \operatorname{rot} h \, dx, \quad \forall b \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

Usamos ' para denotar derivada (ordinária ou parcial) em relação ao tempo

t , isto é, $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Definição 2.1. Como em [50], é natural definir a solução T -periódica fraca da seguinte forma:

Dizemos que (u, h) é uma solução T -periódica fraca de (0.0.1)-(0.0.5) se

1. $u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$ com $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
2. $h \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$,
3. u e h satisfazem:

$$\begin{aligned}i) \int_0^T (u, \varphi)_2 \eta'' \, ds + \int_0^T a_I(u, \varphi)_2 \eta \, ds + \int_0^T (\alpha \cdot u', \varphi)_2 \eta \, ds \\ = \int_0^T B_I(h, h)_2(\varphi) \eta \, ds + \int_0^T (f, \varphi)_2 \eta \, ds, \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \mathbb{D}_T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \int_0^T (h, \psi)_2 \eta' ds + \int_0^T a_{II}(h, \psi)_2 \eta ds \\
= \int_0^T B_{II}(u', h)_2(\psi) \eta ds, \quad \forall \psi \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega) \text{ e } \forall \eta \in \mathbb{D}_T,
\end{aligned}$$

em que $\mathbb{D}_T := \{\omega \in C^\infty(\mathbb{R}) : \omega(s) = \omega(s + T), \forall s \in \mathbb{R}\}$.

Com esta definição atendemos a condição de periodicidade $u'(0) = u'(T)$ (no sentido variacional). Conforme explica Botsenyuk ([12]), a condição de fronteira $\text{rot } h \wedge n$ não é satisfeita pelas soluções fracas. O argumento mais detalhado pode ser encontrado em [50].

Sejam os operadores $\mathcal{L} = -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\nabla \text{div}$ e $\tilde{\mathcal{L}} = \text{rot rot}$, com os domínios $D(\mathcal{L}) = H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2$ e $D(\tilde{\mathcal{L}}) = \{b \in H^2(\Omega)^2 \cap H_\sigma^1(\Omega)^2 : \text{rot } b \wedge n|_{\partial\Omega} = 0\}$ respectivamente. Sejam $c_E := \|H_e\|_{L^4}$ e \mathbb{D}_T da definição 2.1. Então, o seguinte teorema é válido:

Teorema 2.1. *Seja $T > 0$ o período da função $f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, domínio limitado, simplesmente conexo com fronteira de classe C^2 . Existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que se $\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \lambda^2$, então, existe uma solução fraca T -periódica (u, h) do problema (0.0.1)-(0.0.5) que admite a seguinte regularidade adicional:*

$$\begin{aligned}
u \in L^\infty(0, T; D(\mathcal{L})), \quad u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e} \\
h \in L^2(0, T; D(\tilde{\mathcal{L}})) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

Demonstração. Usaremos o Teorema 1.6 (Banach) para provar a existência de solução T -periódica em espaço de dimensão finita.

Consideramos as equações usando as aproximações do Faedo-Galerkin para qualquer m inteiro positivo fixo:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_m, \phi_j)_2 \eta'' ds + \int_0^T a_I(u_m, \phi_j)_2 \eta ds + \int_0^T (\alpha u'_m, \phi_j)_2 \eta ds \\
= \int_0^T B_I(h_m, h_m)_2(\phi_j) \eta ds + \int_0^T (f, \phi_j)_2 \eta ds, \\
\forall \phi_j \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \eta \in \mathbb{D}_T, \quad 1 \leq j \leq m. \\
\int_0^T (h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \tilde{\eta}' ds + \int_0^T a_{II}(h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \tilde{\eta} ds
\end{aligned}$$

$$= \int_0^T B_{II}(u'_m, h_m)_2(\tilde{\phi}_j)\tilde{\eta}ds,$$

$$\forall \tilde{\phi}_j \in H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\Omega), \forall \tilde{\eta} \in \mathbb{D}_T, 1 \leq j \leq m.$$

Também consideramos as equações na forma do operador:

$$u''_m + \mathcal{L}u_m + \alpha(u'_m) = \mu_0 \operatorname{rot} h_m \wedge (h_m + H_e) + f, \quad (2.2.1)$$

$$h'_m + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h_m = \operatorname{rot}[u'_m \wedge (h_m + H_e)], \quad (2.2.2)$$

$$u_m(0) = u_m(T), \quad u'_m(0) = u'_m(T), \quad h_m(0) = h_m(T), \quad (2.2.3)$$

em que

$$u_m = \sum_{i=1}^m c_j(t)\phi_j, \quad h_m = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_j(t)\tilde{\phi}_j,$$

$\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é a base de autofunções de

$$a_I(\phi_k, \omega) = \lambda_k(\phi_k, \omega)_2, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega),$$

e $\{\tilde{\phi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base de autofunções de

$$a_{II}(\tilde{\phi}_j, \tau) = \tilde{\lambda}_j(\tilde{\phi}_j, \tau)_2, \quad \forall \tau \in H_{\sigma}^1(\Omega).$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, definimos os espaços de dimensão finita

$$S_m = \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\} \text{ e } \tilde{S}_m = \operatorname{span}\{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_m\}.$$

Para simplificar a notação, de agora em diante, ocultamos o índice m nas funções u e h .

No que se segue, definimos a energia de segunda ordem do sistema

$$\mathcal{E}_{II}(t) := \frac{1}{2} \{ \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \| \mathcal{L}u \|^2 + \| \tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h \|^2 \}$$

e para $\epsilon \in (0, 1)$ definimos também uma nova função

$$\mathcal{G}(t) := \left\{ \mathcal{E}_{II}(t) + \frac{\alpha\epsilon}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u \|^2 + \epsilon(u', \mathcal{L}u) \right\}.$$

Note que

$$|(u', \mathcal{L}u)| \leq \frac{1}{2\alpha} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u \|^2.$$

O que implica que

$$\epsilon |(u', \mathcal{L}u)| \geq -\frac{\epsilon}{2\alpha} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 - \frac{\epsilon\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2.$$

Para $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &\geq \mathcal{E}_{II}(t) + \frac{\alpha^2}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 - \frac{\alpha^2}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \mathcal{E}_{II}(t) \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, (note que $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq c_p^2 \|\mathcal{L}u\|^2$, c_p é a constante de Poincaré),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &\leq \mathcal{E}_{II}(t) + \frac{\alpha^2}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \frac{\alpha^2}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 \\ &\leq \mathcal{E}_{II}(t) + c_p^2 \frac{\alpha^2}{2} \|\mathcal{L}u\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 \\ &\leq C_1 \mathcal{E}_{II}(t), \end{aligned}$$

em que $C_1 := 1 + \max\{\frac{1}{2}, c_p^2 \alpha^2\}$.

Assim, estabelecemos o seguinte Lema:

Lema 2.1. $\forall t \geq 0$, $\frac{1}{2} \mathcal{E}_{II}(t) \leq \mathcal{G}(t) \leq C_1 \mathcal{E}_{II}(t)$.

Para aplicar o Teorema 1.6 (ponto fixo de Banach), definimos o espaço Z^λ como se segue: Seja $0 < \lambda < 1$ fixo, então

$$\begin{aligned} Z^\lambda &= \left\{ (v, b) \in [C_{per}(0, T; D(\mathcal{L})) \cap C_{per}^1(0, T; H_0^1(\Omega))] \right. \\ &\quad \times \left. [C_{per}(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(\tilde{\mathcal{L}}))] \right\} \\ &\quad \left\{ \|v\|_{L^\infty(D(\mathcal{L}))} \leq \lambda, \|v'\|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} \leq \lambda, \|b\|_{L^2(H_\sigma^1(\Omega))} \leq \lambda, \|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda \right\}, \end{aligned}$$

com a respectiva norma

$$\|(v, b)\|_{Z^\lambda} := \|v\|_{L^\infty(D(\mathcal{L}))} + \|v'\|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} + \|b\|_{L^2(H_\sigma^1(\Omega))} + \|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))},$$

$$\begin{aligned} \| v \|_{D(\mathcal{L})} &:= \| \mathcal{L}v \|, \\ \| b \|_{D(\tilde{\mathcal{L}})} &:= \| \tilde{\mathcal{L}}b \| . \end{aligned}$$

Também definimos uma aplicação Φ com objetivo de provar que ela tem um ponto fixo, isto é, $\Phi(u, h) = (u, h)$, $(u, h) \in Z^\lambda$. Seja Φ a aplicação definida da seguinte forma:

$$\Phi : Z^\lambda \longrightarrow Z^\lambda,$$

$$(v, b) \mapsto (u, h),$$

em que (u, h) é (u_n, h_n) , que é a única solução do sistema linear acoplado (2.2.4)-(2.2.8), dada pela Proposição 1.1 tal que $u_n \in C^2(0, T; S_n)$ e $h_n \in C^1(0, T; \tilde{S}_n)$.

No espaço bidimensional temos que $H_e \cdot n = 0$ ([11]), e portanto, o sistema simplifica-se na seguinte forma:

$$u'' + \mathcal{L}u + \alpha(u') = \mu_0 \operatorname{rot} b \wedge b + f, \quad (2.2.4)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h = \operatorname{rot}[v' \wedge h], \quad (2.2.5)$$

$$\operatorname{div} h = 0, \text{ em } Q_T = \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.2.6)$$

$$u = 0, \quad h \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} h \wedge n = 0, \text{ em } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(x, T), \quad u'(x, 0) = u'(x, T), \\ h(x, 0) = h(x, T), \quad x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Sejam c_{it} , c_{im} , c_p e c_{el} constantes de interpolações, imersões, Poincaré e regularidade elíptica respectivamente. Então, C é uma constante positiva que depende no máximo das constantes c_{it} , c_{im} , c_p , c_{el} e μ_0 .

a) Provaremos que Φ está bem definida. Isto é, Φ leva Z^λ em Z^λ .

Fazemos o produto interno da equação dada em (2.2.4) por $\mathcal{L}u'$ e $\frac{\alpha}{2}\mathcal{L}u$ e da equação dada em (2.2.5) por $\tilde{\mathcal{L}}h$, somamos os resultados, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \nu_1 \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}u \|^2 \\ = \mu_0 (\operatorname{rot} b \wedge b, \mathcal{L}u') + (\operatorname{rot}[v' \wedge h], \tilde{\mathcal{L}}h) \\ + \mu_0 \alpha (\operatorname{rot} b \wedge b, \mathcal{L}u) + (f, \mathcal{L}u') + \frac{\alpha}{2} (f, \mathcal{L}u) . \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Agora, estimaremos cada um dos termos aplicando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^4(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ (ver por exemplo [24]), Teorema 1.2 (regularidade elíptica), e a desigualdade de Poincaré:

$$\begin{aligned} \mu_0 |(\operatorname{rot} b \wedge b, \mathcal{L}u')| &\leq \mu_0 \| \operatorname{rot} b \|_{L^\infty} \| b \|_{L^\infty} \| \mathcal{L}u' \|_{L^1} \\ &\leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| \\ &\leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \|, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \| \mathcal{L}u' \|_{L^1(\Omega)} &\leq C \| \mathcal{L}u' \|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} |(\mathcal{L}u', \varphi)| \\ &\leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} |(\nabla u', \nabla \varphi) + (\operatorname{div} u', \operatorname{div} \varphi)| \\ &\leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} |(\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u', \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\varphi)| \\ &\leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\varphi \| \\ &\leq C \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\operatorname{rot}[v' \wedge h], \tilde{\mathcal{L}}h)| &\leq \| v' \|_{1,2} \| h \|_{L^\infty} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| + \| v' \|_{L^4} \| \operatorname{rot} h \|_{L^4} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| \\ &\leq C \| v' \|_{1,2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 |(\operatorname{rot} b \wedge b, \alpha \mathcal{L}u)| &\leq \alpha C \| \operatorname{rot} b \|_{L^4} \| b \|_{L^4} \| \mathcal{L}u \| \\ &\leq \alpha C \| \operatorname{rot} b \|_{1,2} \| b \|_{1,2} \| \mathcal{L}u \| \\ &\leq \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \operatorname{rot} b \| \| \mathcal{L}u \| \\ &\leq \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}u \| . \end{aligned}$$

$$|(f, \mathcal{L}u')| \leq \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}f \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| .$$

$$\alpha|(f, \mathcal{L}u)| \leq \alpha \| f \| \| \mathcal{L}u \| .$$

Sabemos da definição do espaço Z^λ que $\| v' \|_{1,2} \leq \lambda$. Então, substituímos as estimativas acima em (2.2.9) e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + \nu_1 \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}u \|^2 \\ \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + C\lambda \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 \\ + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}u \| + \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f \| + \alpha \| f \| \| \mathcal{L}u \| . \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + (\nu_1 - C\lambda) \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}u \|^2 \\ \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}u \| \\ + (\| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + C\alpha \| \mathcal{L}u \|) \| f \|_{1,2} , \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

em que $\nu_1 - C\lambda$ é positivo pelo fato de $0 < \lambda < 1$. Usamos a regularidade elíptica para minorar o termo $\frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + (\nu_1 - C\lambda) \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \frac{\alpha}{2} \| \mathcal{L}u \|^2$ pela energia $c_{II} \mathcal{E}_{II}(t)$, ($c_{II} := \min\{\alpha, 2(\nu_1 - C\lambda)\}$), que por sua vez é minorada pela função $\frac{1}{C_1} \mathcal{G}(t)$, devido à relação de equivalência dada pelo Lema 2.1. Assim, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + \frac{c_{II}}{C_1} \mathcal{G}(t) \\ \leq 2C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \sqrt{\mathcal{G}(t)} + \alpha 2C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \sqrt{\mathcal{G}(t)} \\ + 2(1 + C\alpha) \| f \|_{1,2} \sqrt{\mathcal{G}(t)} . \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Assumimos que $\mathcal{G}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Pois, se existe um t_0 tal que $\mathcal{G}(t_0) = \mathcal{E}(t_0) = 0$, então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\sqrt{\mathcal{G}(t)})^2 + \frac{c_{II}}{C_1} (\sqrt{\mathcal{G}(t)})^2 \\ \leq 2C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \sqrt{\mathcal{G}(t)} + 2C\alpha \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \sqrt{\mathcal{G}(t)} \\ + 2(1 + C\alpha) \| f \|_{1,2} \sqrt{\mathcal{G}(t)} . \end{aligned}$$

Agora, integramos de t_0 a $t < t_0 + T$ e obtemos

$$\begin{aligned} (\sqrt{\mathcal{G}(t)})^2 &\leq \int_{t_0}^t \left(2C \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 + 2C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 \right) \sqrt{\mathcal{G}(s)} \, ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (2(1 + C\alpha) \|f(s)\|_{1,2}) \sqrt{\mathcal{G}(s)} \, ds . \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Brezis, obtemos uma estimativa para $\mathcal{G}(t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\mathcal{G}(t)})^2 &\leq \int_{t_0}^t \left(2C \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 + 2C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 \right) \, ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (2(1 + C\alpha) \|f(s)\|_{1,2}) \, ds . \end{aligned}$$

Voltamos à (2.2.11) e dividimos todos os termos por $2\sqrt{\mathcal{G}(t)}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{G}(t)} + \frac{c_{II}}{2C_1} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b\|^2 \\ &\quad + C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b\|^2 + (1 + C\alpha) \|f\|_{1,2} . \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Usando a T -**periodicidade** de $\mathcal{G}(t)$ e integrando (2.2.12) de 0 a T , obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{c_{II}}{2C_1} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(s)} \, ds &\leq C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 \, ds \\ &\quad + C\alpha \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 \, ds + (1 + C\alpha) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} \, ds \\ &\leq C\lambda^2 + C\alpha\lambda^2 + (1 + C\alpha) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} \, ds, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

em que foi usado que $\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 \, ds \leq \lambda$, da definição do espaço Z^λ .

Na seqüência, provaremos a seguinte

Afirmação:

$$\sqrt{\mathcal{G}(t)} \leq \left(2(C + 2C\alpha + 1) + \frac{2C_1}{c_{IIT}} (C + 2C\alpha + 1) \right) \lambda^2, \quad 0 \leq t \leq T .$$

Demonstração. Segue do Teorema de valor médio que existe um

$t^* \in (0, T)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{c_{II}}{2C_1} T \sqrt{\mathcal{G}(t^*)} &= \frac{c_{II}}{2C_1} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(s)} ds \\ &\leq (C + C\alpha)\lambda^2 + (1 + C\alpha) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds . \end{aligned}$$

Então,

$$\sqrt{\mathcal{G}(t^*)} \leq \frac{2C_1}{c_{II}T} (C + C\alpha)\lambda^2 + \frac{2C_1}{c_{II}T} (1 + C\alpha) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds .$$

Integramos (2.2.12) de t^* a t , $t^* \leq t \leq T$ obtendo

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} - \sqrt{\mathcal{G}(t^*)} &\leq (C + C\alpha) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \\ &\quad + (1 + C\alpha) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds . \end{aligned}$$

Sabemos por hipóteses que $\int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds \leq \lambda^2$ e que

$\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \leq \lambda^2$, da definição do espaço Z^λ . Então,

$$\sqrt{\mathcal{G}(t)} \leq \left(C + 2C\alpha + 1 + \frac{2C_1}{c_{II}T} (C + 2C\alpha + 1) \right) \lambda^2, \quad \forall t \in [t^*, T] .$$

Em particular,

$$\sqrt{\mathcal{G}(T)} \leq \left(C + 2C\alpha + 1 + \frac{2C_1}{c_{II}T} (C + 2C\alpha + 1) \right) \lambda^2, \quad \forall t \in [t^*, T] . \quad (2.2.14)$$

Voltamos a integrar (2.2.12) desta vez, de 0 a t , $0 \leq t \leq t^*$ obtendo

$$\sqrt{\mathcal{G}(t^*)} - \sqrt{\mathcal{G}(0)} \leq (C + 2C\alpha + 1) \lambda^2 .$$

Devido a T -**periodicidade** de $\mathcal{G}(t)$ e à equação (2.2.14) temos que

$$\sqrt{\mathcal{G}(t)} \leq \sqrt{\mathcal{G}(t^*)} \leq \left(2C + 4C\alpha + 2 + \frac{2C_1}{c_{II}T} (C + 2C\alpha + 1) \right) \lambda^2 .$$

Usando a relação de equivalência entre a função $\mathcal{G}(t)$ e a energia $\mathcal{E}_{II}(t)$ (Lema 2.1) temos que

$$\sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)} \leq \left(2(C + 2C\alpha + 1) + \frac{2C_1}{c_{II}T}(C + 2C\alpha + 1) \right) \lambda^2. \quad (2.2.15)$$

Para completar a nossa estimativa, voltamos à equação (2.2.10), usamos o fato de que $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \leq \lambda$ e $\|\mathcal{L}u\| \leq \lambda$ (obtida de (2.2.15)), integramos de 0 a T e usando a **periodicidade** obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'(s)\|^2 ds + (\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\ & + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\mathcal{L}u(s)\|^2 ds \\ & \leq C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds + C\alpha\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \\ & + \lambda \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds + C\alpha\lambda \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds. \end{aligned}$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned} & (\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'(s)\|^2 ds + (\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\ & + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\mathcal{L}u(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds & \leq C\lambda^2 \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \\ & + C\alpha\lambda^2 \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \\ & + (1 + C\alpha)\lambda^2 \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Usando a hipótese $\int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds \leq \lambda^2$ e o fato de que

$\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \leq \lambda^2$, da definição do espaço Z^λ , temos a seguinte

estimativa

$$\begin{aligned} (\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds &\leq (C + 2C\alpha + 1)\lambda^4 \\ &\leq (C + 2C\alpha + 1)\lambda^2 . \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

De (2.2.15) e (2.2.17) concluímos que

$$\begin{aligned} &\sqrt{\|(u, h)\|_{Z^\lambda}} \\ &\leq \left(2(C + 2C\alpha + 1) + \frac{2C_1}{cIT}(C + 2C\alpha + 1) + C + 2C\alpha + 1 \right) \lambda^2 . \end{aligned}$$

Portanto, Φ está bem definida. \square

b) Provaremos que Φ é uma contração, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &< c < 1, \quad v := v_1 - v_2, \quad b := b_1 - b_2, \\ \|\Phi(v_1, b_1) - \Phi(v_2, b_2)\|_{Z^\lambda} &\leq c \|(v_1 - v_2, b_1 - b_2)\|_{Z^\lambda} . \end{aligned}$$

Definimos $u = u_1 - u_2$ e $h = h_1 - h_2$, em que (u_1, h_1) e (u_2, h_2) são duas soluções do sistema (2.2.4)-(2.2.8). Substituímos as soluções nas respectivas equações e subtraímos os resultados, obtendo o seguinte sistema

$$u'' + \mathcal{L}u + \alpha(u') = \mu_0 \operatorname{rot} b_2 \wedge b + \mu_0 \operatorname{rot} b \wedge b_1, \quad (2.2.18)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h = \operatorname{rot}[v' \wedge h_1] + \operatorname{rot}[v_2' \wedge h] . \quad (2.2.19)$$

dado que

$$\begin{aligned} \mu_0 \operatorname{rot} b_1 \wedge b_1 &= \mu_0 \operatorname{rot}(b_2 + b) \wedge b_1 , \\ \operatorname{rot}[v_1' \wedge h_1] &= \operatorname{rot}[(v' + v_2') \wedge h_1] \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \|\Phi(v_1, b_1) - \Phi(v_2, b_2)\|_{Z^\lambda} &= \|(u_1, h_1) - (u_2, h_2)\|_{Z^\lambda} \\ &= \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(D(\mathcal{L}))} + \|u_1' - u_2'\|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} \\ &\quad + \|h_1 - h_2\|_{L^2(H_\sigma^1(\Omega))} + \|h_1 - h_2\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} . \end{aligned}$$

A estratégia que seguiremos nessa parte é obter uma estimativa para as duas partes da energia separadamente. Inicialmente estimaremos a parte de energia relacionada ao campo de deslocamento. Formalmente, fazemos o produto interno da equação (2.2.19) por $\tilde{\mathcal{L}}h$ e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 &= (\text{rot}[v' \wedge h_1], \tilde{\mathcal{L}}h) + (\text{rot}[v_2' \wedge h], \tilde{\mathcal{L}}h) \\ &\leq C \|v'\|_{1,2} \|\tilde{\mathcal{L}}h_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}h\| + C \|v_2'\|_{1,2} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 . \end{aligned}$$

Lembramos que $\|v'\|_{1,2} \leq \lambda$. Como o termo dissipativo absorve o segundo termo do segundo membro, obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 + (\nu_1 - C\lambda) \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \leq C \|v'\|_{1,2} \|\tilde{\mathcal{L}}h_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}h\| . \quad (2.2.20)$$

Integramos o resultado acima de 0 a T , usando o fato de que h é ***T*-periódico** e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito da equação, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} (\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds &\leq C \|v'\|_{1,2} \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h_1(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Da definição do espaço Z^λ , temos que $\|v'\|_{1,2} \leq \|(v, b)\|_{Z^\lambda}$. Também temos que $\left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h_1(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda$ pelo fato de h_1 ser solução de (2.2.5).

Então, dividimos ambos os lados de (2.2.21) por $\left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$ e obtemos

$$(\nu_1 - C\lambda) \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\lambda \|(v, b)\|_{Z^\lambda} .$$

Portanto,

$$\left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C\lambda}{\nu_1 - C\lambda} \|(v, b)\|_{Z^\lambda} . \quad (2.2.22)$$

A seguir, obteremos uma estimativa para a parte de energia relacionada ao campo de deslocamento. Para isso, utilizamos novamente os multiplicadores $\mathcal{L}u'$ e $\frac{\alpha}{2}\mathcal{L}u$ e repetimos os cálculos similares ao da página 30.

Fazemos o produto interno da equação (2.2.18) por $\mathcal{L}u'$ e $\frac{\alpha}{2}\mathcal{L}u$, adicionamos os resultados e obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \|\mathcal{L}u\|^2 \} + \frac{\alpha^2}{4} \frac{d}{dt} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} (u', \mathcal{L}u) \\ & + \alpha \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}u\|^2 - \frac{\alpha}{2} (u', \mathcal{L}u') \\ & = \mu_0 (\text{rot } b_2 \wedge b, \mathcal{L}u') + \mu_0 (\text{rot } b \wedge b_1, \mathcal{L}u') \\ & + \mu_0 \frac{\alpha}{2} (\text{rot } b_2 \wedge b, \mathcal{L}u) + \mu_0 \frac{\alpha}{2} (\text{rot } b \wedge b_1, \mathcal{L}u). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Seja

$$\mathcal{E}_{II}^*(t) := \frac{1}{2} \{ \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \|\mathcal{L}u\|^2 \}$$

a parte da energia de segunda ordem do sistema e

$$\mathcal{G}^*(t) := \left\{ \mathcal{E}_{II}^*(t) + \frac{\alpha^2}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \frac{\alpha}{2} (u', \mathcal{L}u) \right\}$$

um funcional.

O seguinte Lema é obtido do Lema 2.1:

Lema 2.2. $\forall t \geq 0$, $\frac{1}{2}\mathcal{E}_{II}^*(t) \leq \mathcal{G}^*(t) \leq C^*\mathcal{E}_{II}^*(t)$,

em que $C^* := 1 + \max\{1, c_p^2\alpha^2\}$ do Lema 2.1.

Voltando à equação (2.2.23), temos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{G}^*(t) + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}u\|^2 \\ & = \mu_0 (\text{rot } b_2 \wedge b, \mathcal{L}u') + \mu_0 (\text{rot } b \wedge b_1, \mathcal{L}u') \\ & + \mu_0 \frac{\alpha}{2} (\text{rot } b_2 \wedge b, \mathcal{L}u) + \mu_0 \frac{\alpha}{2} (\text{rot } b \wedge b_1, \mathcal{L}u). \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Usando as mesmas propriedades usadas nas estimativas anteriores, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \mu_0 |(\text{rot } b_2 \wedge b, \mathcal{L}u')| & \leq \mu_0 \|b_2\|_{2,2} \|b\|_{L^\infty} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\ & + \mu_0 \|\text{rot } b_2\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}b\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&+ C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_0 |(\operatorname{rot} b \wedge b_1, \mathcal{L}u')| &\leq \mu_0 \|b\|_{2,2} \|b_1\|_{L^\infty} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&+ \mu_0 \|\operatorname{rot} b\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}b_1\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&+ C \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_0 \frac{\alpha}{2} |(\operatorname{rot} b_2 \wedge b, \mathcal{L}u)| &\leq \mu_0 \frac{\alpha}{2} \|b_2\|_{2,2} \|b\|_{H^1} \|\mathcal{L}u\| \\
&\leq \frac{C\alpha}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}u\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_0 \frac{\alpha}{2} |(\operatorname{rot} b \wedge b_1, \mathcal{L}u)| &\leq \mu_0 \frac{\alpha}{2} \|b\|_{2,2} \|b_1\|_{1,2} \|\mathcal{L}u\| \\
&\leq \frac{C\alpha}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}u\|.
\end{aligned}$$

Observe que $c^* \mathcal{E}_{II}^*(t) \leq \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}u\|^2$, $c^* = \min\{1, \alpha\}$. Essas estimativas juntamente com o Lema 2.2 implicam que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \mathcal{G}^*(t) + \frac{c^*}{C^*} \mathcal{G}^*(t) \\
&\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| + C \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \\
&+ \frac{C\alpha}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}u\| + \frac{C\alpha}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}u\| \\
&\leq 2C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + 2C \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} \\
&+ C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \sqrt{\mathcal{G}^*(t)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + \frac{c^*}{2C^*} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| + 2C \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \\
&+ C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| + C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| . \quad (2.2.25)
\end{aligned}$$

Na seqüência, integramos (2.2.25) de 0 a T usando a **periodicidade** e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{c^*}{2C^*} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}^*(s)} ds &\leq 2C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_2(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\
&+ 2C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_1(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\
&+ C\alpha \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_2(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\
&+ C\alpha \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_1(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds . \quad (2.2.26)
\end{aligned}$$

Agora, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz em cada um dos termos do lado direito da equação (2.2.26) e usamos que $\|b_1\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda$, $\|b_1\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda$ por serem soluções e $\|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \|(v, b)\|_{Z^\lambda}$ da definição do espaço Z^λ , obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&\frac{c^*}{2C^*} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}^*(s)} ds \\
&\leq C\lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C\lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C\alpha\lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C\alpha\lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda(C + C\alpha) \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda(C + C\alpha) \|(v, b)\|_{Z^\lambda} .
\end{aligned}$$

Do Teorema de valor médio, existe um $t^* \in (0, T)$ tal que

$$\frac{c^*}{2C^*} T \sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} = \frac{c^*}{2C^*} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}^*(s)} ds \leq \lambda(C + C\alpha) \|(v, b)\|_{Z^\lambda} .$$

Então,

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} \leq \frac{2C^*}{c^* T} \lambda(C + C\alpha) \|(v, b)\|_{Z^\lambda} .$$

Usando a mesma estratégia utilizada na prova de que Φ está bem definida, integramos (2.2.25) de t^* a t , $t^* \leq t \leq T$ obtendo

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} - \sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} \leq \lambda(C + C\alpha) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

Portanto,

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} \leq \lambda \left(C + C\alpha + \frac{2C^*}{c^*T}(C + C\alpha) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

Em particular,

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(T)} \leq \lambda \left(C + C\alpha + \frac{2C^*}{c^*T}(C + C\alpha) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} . \quad (2.2.27)$$

Agora, voltamos à equação diferencial (2.2.25), integramos de 0 a t , $0 \leq t \leq t^*$ obtendo

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} - \sqrt{\mathcal{G}^*(0)} \leq \lambda(C + C\alpha) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

A seguinte estimativa segue da **periodicidade** de $\mathcal{G}^*(t)$ e (2.2.27)

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} \leq \lambda \left(2C + 2C\alpha + \frac{2C^*}{c^*T}(C + C\alpha) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

Aplicamos o Lema 2.2 e obtemos uma estimativa para a $\sqrt{\mathcal{E}_{II}^*(t)}$ em termos de $\| (v, b) \|_{Z^\lambda}$:

$$\sqrt{\mathcal{E}_{II}^*(t)} \leq \lambda \left(2C + 2C\alpha + \frac{2C^*}{c^*T}(C + C\alpha) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} . \quad (2.2.28)$$

De (2.2.22) e (2.2.28) obtemos uma limitação uniforme para $\| (u, h) \|_{Z^\lambda}$ em termos de $\| (v, b) \|_{Z^\lambda}$. Portanto,

$$\| \Phi(v, b) \|_{Z^\lambda} = \| (u, h) \|_{Z^\lambda} \leq c \| (v, b) \|_{Z^\lambda} ,$$

e Φ é uma contração, $0 < c < 1$. Aplicamos o Teorema 1.6 e obtemos que, $\Phi(u, h) = (u, h)$ em que (u, h) é a única solução do sistema (2.2.1)-(2.2.3) com as condições de fronteiras (0.0.5). A passagem ao limite quando $m \rightarrow \infty$ é análogo ao caso tridimensional, que será feito na seção 2.4. \square

2.2.2 Estabilidade

Nesta seção, estudamos a estabilidade (no sentido Lyapunov, [32]) de soluções T -periódicas fortes para o sistema magneto-elástico, cuja regularidade foi provada na seção anterior. Isto é, estudamos a estabilidade das soluções fracas do seguinte problema:

Seja (v, b) a perturbação da solução forte (u, h) . Então, (v, b) satisfaz o seguinte sistema

$$v'' + \mathcal{L}v + \alpha v' = \text{rot } h \wedge b + \text{rot } b \wedge (h + b + H_e), \quad (2.2.29)$$

$$b' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}b = \text{rot}[u' \wedge b] + \text{rot}[v' \wedge (h + b + H_e)], \quad (2.2.30)$$

$$\text{div } b = 0 \quad (2.2.31)$$

e as seguintes condições iniciais

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad b(0) = b_0. \quad (2.2.32)$$

Agora, definimos uma solução fraca do problema (2.2.29)-(2.2.32);

Definição 2.2. Dizemos que (v, b) é uma solução fraca de (2.2.29)-(2.2.32) se

1. $v \in L^\infty(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$ com $v' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
2. $b \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$,
3. v e b satisfazem:

$$\begin{aligned} i) \quad & \int_0^T (v, \varphi)_2 \eta'' ds + \int_0^T a_I(v, \varphi)_2 \eta ds + \int_0^T (\alpha v', \varphi)_2 \eta ds \\ & = \int_0^T (\text{rot } h \wedge b, \varphi)_2 \eta ds + \int_0^T (\text{rot } b \wedge (h + b + H_e), \varphi)_2 \eta ds, \\ & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in C^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad & \int_0^T (b, \psi)_2 \eta' ds + \int_0^T a_{II}(b, \psi)_2 \eta ds \\ & = \int_0^T (\text{rot}[u' \wedge b], \psi)_2 \eta ds + \int_0^T (\text{rot}[v' \wedge (h + b + H_e)], \psi)_2 \eta ds \\ & \forall \psi \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega), \forall \eta \in C^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Também, definimos a estabilidade e a estabilidade assintótica como se segue:

Definição 2.3. *Seja $X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_\sigma^2(\Omega)$. Dizemos que uma solução periódica (u, h) é estável se dado um $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer solução fraca (v, b) com dado inicial em uma bola $B_X((u(0), u'(0), h(0)), \delta)$, a solução $(u(t), h(t))$ pertence a bola $B_X((u(t), u'(t), h(t)), \epsilon)$, para cada $t \geq 0$.*

Definição 2.4. *Sejam (u, h) uma solução periódica. Dizemos que (u, h) é assintoticamente estável se (u, h) é estável e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|v'(t) - u'(t)\|^2 + \|v(t) - u(t)\|^2 + \|b(t) - h(t)\|^2 \} = 0,$$

onde (v, b) é uma solução fraca qualquer.

Antes de enunciar o teorema da estabilidade condicional, vamos provar o seguinte lema que iremos usar durante a prova do teorema.

Lema 2.3. *Sejam u e h soluções fortes T -periódicas no tempo do problema produzido pelo Teorema 2.1. Então,*

$$\int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \leq c_{\tilde{h}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Reescrevemos (2.2.2) em termos de $\hat{h} = h + H_e$, sem o índice m nas funções u e h . Em seguida, formalmente, fazemos o produto interno em $L^2(0, t; L^2(\Omega))$ por $\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}\hat{h}(t)\|^2 + \nu_1 \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)\|^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}\hat{h}(0)\|^2 + \int_0^t (\text{rot}[u'(s) \wedge \hat{h}(s)], \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Usando a identidade vetorial

$$\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \vec{B} + \vec{A} \cdot \text{div} \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div} \vec{A},$$

temos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}[u' \wedge \hat{h}], \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}) &= (\hat{h} \cdot \nabla u', \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}) - (u' \cdot \nabla \hat{h}, \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}) \\ &\quad + (u' \cdot \operatorname{div} \hat{h}, \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}) - (\hat{h} \cdot \operatorname{div} u', \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}) . \end{aligned}$$

Então, usando a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^4(\Omega)$ e a definição do espaço Z^λ (da demonstração do Teorema 2.1), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |(\operatorname{rot}[u' \wedge \hat{h}], \tilde{\mathcal{L}}\hat{h})| &\leq \|\hat{h}\|_{L^\infty} \|\nabla u'\| \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}\| \\ &\quad + \|u'\|_{L^4} \|\nabla \hat{h}\|_{L^4} \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}\| \\ &\quad + \|u'\|_{L^4} \|\operatorname{div} \hat{h}\|_{L^4} \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}\| \\ &\quad + \|\hat{h}\|_{L^\infty} \|\operatorname{div} u'\| \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}\| . \\ \Rightarrow \int_0^t (\operatorname{rot}[u'(s) \wedge \hat{h}(s)], \tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)) ds &\leq \lambda \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)\|^2 ds, \quad \forall t \geq 0 . \end{aligned}$$

Usando essa estimativa em (2.2.33) e absorvendo o termo $\lambda \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)\|^2 ds$, obtemos o seguinte resultado

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(t)\|^2 + (\nu_1 - \lambda) \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}\|^2(s) ds \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(0)\|^2 .$$

Portanto, temos que

$$\int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)\|^2 ds \leq c_{\hat{h}}, \quad \forall t \geq 0 ,$$

em que $c_{\hat{h}} = \frac{1}{2(\nu_1 - \lambda)} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(0)\|^2$.

Dado que $\|\tilde{\mathcal{L}}\hat{h}(s)\| = \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|$, então temos o resultado desejado:

$$\int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2(s) ds \leq c_{\hat{h}}, \quad \forall t \geq 0 .$$

□

Provaremos agora, o seguinte resultado de estabilidade:

Teorema 2.2. (*Estabilidade assintótica*)

(i) Se $\nu_1 > 2C c_{u'}$, então existe solução fraca para o problema de valor inicial (2.2.29)-(2.2.32) e a solução básica é estável.

(ii) Se

$$\mathcal{E}_p(0) < \frac{4k\nu_1}{C\alpha^2 C_h^2}$$

$$\text{em que } k := \left(\frac{\nu_1}{2} - c_{u'}C - C\alpha c_h^2 - \frac{C\alpha c_E^2}{2} \right), \text{ e}$$

$$\nu_1 > 2c_{u'}C + 2C\alpha c_h^2 + C\alpha c_E^2,$$

então a energia da perturbação decai a zero de forma exponencial quando $t \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}_p(t) \leq \mathcal{E}_p(0) \exp\left(\frac{c_{im}^4}{2\nu_1} c_2 - c_1 t\right),$$

$$\text{em que } \mathcal{E}_p(t) := \frac{1}{2} \{ \|v'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|b\|^2 \}.$$

Demonstração. O nosso objetivo é obter uma estimativa a priori das soluções desse sistema. Formalmente, fazemos o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação (2.2.29) por v' e da equação (2.2.30) por b , e adicionando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \|v'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|b\|^2 \} + 2\alpha \|v'\|^2 + 2\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ = 2(\text{rot } h \wedge b, v') + 2(\text{rot}[u' \wedge b], b), \end{aligned}$$

dado que $(\text{rot } b \wedge (h+b+H_e), v')$ e $(\text{rot}[v' \wedge (h+b+H_e)], b)$ são simétricos. O próximo passo é obter as seguintes estimativas usando a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, 6]$. Seja C uma constante positiva que depende no máximo de c_{it} , c_{im} , c_p constantes de interpolações, imersões e Poincaré respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} |(\text{rot } h \wedge b, v')| &\leq \| \text{rot } h \|_{L^4} \| b \|_{L^4} \| v' \| \\ &\leq C \| \tilde{\mathcal{L}}h \| \| \tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b \| \| v' \| . \end{aligned}$$

$$|(\text{rot}[u' \wedge b], b)| \leq \| u' \|_{L^4} \| b \|_{L^4} \| \text{rot } b \|$$

$$\leq c_{u'} C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2,$$

em que $\|u'\|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} \leq c_{u'}$, $c_{u'}$ é constante que depende apenas da função f e do período T .

Seja

$$\mathcal{E}_p(t) := \frac{1}{2} \{ \|v'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|b\|^2 \}$$

a energia da perturbação. Substituindo as estimativas de cada um dos termos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_p(t) + \alpha \|v'\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2 \\ \leq C \|\tilde{\mathcal{L}}h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|v'\| + c_{u'} C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young com $\epsilon_1 = 2\nu_1$ no primeiro termo do lado direito da desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{C}{2\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2 + \frac{\nu_1}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2.$$

A hipótese sobre ν_1 garante que $\frac{\nu_1}{2} - c_{u'} C$ seja positivo. Sabemos que $\|v'\|^2 \leq 2\mathcal{E}_p(t)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_p(t) + \alpha \|v'\|^2 + \left(\frac{\nu_1}{2} - c_{u'} C \right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2 \\ \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \mathcal{E}_p(t). \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_p(t) \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \mathcal{E}_p(t).$$

Na seqüência, dividimos ambos os membros por $\sqrt{\mathcal{E}_p(t)}$ obtendo

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{E}_p(t)} \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \sqrt{\mathcal{E}_p(t)}.$$

Em seguida, integramos o resultado anterior de 0 a t , obtendo o seguinte

$$\sqrt{\mathcal{E}_p(t)} \leq \sqrt{\mathcal{E}_p(0)} \exp \left(\frac{C}{\nu_1} \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right).$$

Como $\int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \leq c_{\tilde{h}}, \forall t \geq 0$ (Lema 2.3), então,

$$\sqrt{\mathcal{E}_p(t)} \leq \sqrt{\mathcal{E}_p(0)}C_{\tilde{h}}, \quad (2.2.35)$$

em que $C_{\tilde{h}} := \exp\left(\frac{C}{\nu_1}c_{\tilde{h}}\right)$. Com essa estimativa e usando o método de Faedo-Galerkin, obtemos a existência e estabilidade de solução fraca para o problema (2.2.29)-(2.2.32).

Obteremos agora, a taxa de decaimento da energia associada às soluções do sistema em estudo. Para isso, fazemos o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação (2.2.29) por ϵv , em que $\epsilon \in (0, \alpha)$ e obtemos

$$\begin{aligned} (v'', \epsilon v) + \epsilon \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \frac{\epsilon\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 \\ = \epsilon(\operatorname{rot} h \wedge b, v) + \epsilon(\operatorname{rot} b \wedge (h + b + H_e), v). \end{aligned}$$

As seguintes estimativas foram obtidas usando a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, 6]$:

$$\begin{aligned} \epsilon \|\operatorname{rot} h \wedge b, v\| &\leq \epsilon \|\operatorname{rot} h\| \|b\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \\ &\leq \epsilon C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \|\operatorname{rot} b \wedge (h + H_e), v\| &\leq \epsilon \|\operatorname{rot} b\| \|h + H_e\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \\ &\leq \epsilon C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| \\ &\quad + \epsilon C c_E \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \|\operatorname{rot} b \wedge b, v\| &\leq \epsilon \|\operatorname{rot} b\| \|b\|_{L^3} \|v\|_{L^6} \\ &\leq \epsilon C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|, \end{aligned}$$

em que $\|H_e\|_{L^4} = c_E$. Note que

$$(v'', \frac{\alpha}{2}v) = \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} (v', v) - \frac{\alpha}{2} (v', v').$$

Seja $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$. Considerando as estimativas acima, deduzimos a seguinte

desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt}(v', v) + \frac{\alpha^2}{4} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 - \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 \\
\leq \alpha C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| \\
+ \frac{C\alpha}{2} c_E \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| \\
+ \frac{C\alpha}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|.
\end{aligned}$$

A essa desigualdade, adicionamos a desigualdade (2.2.34) obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_p(t) + \frac{\alpha}{2}(v', v) + \frac{\alpha^2}{4} \|v\|^2 \right\} + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\
+ \left(\frac{\nu_1}{2} - c_u' C \right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\
\leq C\alpha \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| + \frac{C\alpha}{2} c_E \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| \\
+ \frac{C\alpha}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| + \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2. \quad (2.2.36)
\end{aligned}$$

Considere o funcional

$$\mathcal{G}_p(t) := \left\{ \mathcal{E}_p(t) + \frac{\alpha}{2}(v', v) + \frac{\alpha^2}{4} \|v\|^2 \right\}.$$

Dado que

$$-\frac{1}{4} \|v'\|^2 - \frac{\alpha^2}{4} \|v\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} |(v', v)| \leq \frac{1}{4} \|v'\|^2 + \frac{\alpha^2}{4} \|v\|^2,$$

então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_p(t) - \frac{1}{4} \|v'\|^2 \leq \mathcal{G}_p(t) \leq \mathcal{E}_p(t) + \frac{\alpha^2}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{4} \|v'\|^2 \\
\frac{1}{2} \mathcal{E}_p(t) \leq \mathcal{G}_p(t) \leq c_T \mathcal{E}_p(t),
\end{aligned}$$

em que $c_T := 1 + \max \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha^2}{2} c_p^2 \right\}$. Essa relação entre o funcional $\mathcal{G}_p(t)$ e a energia é estabelecida no seguinte lema

Lema 2.4. *Seja $c_T := 1 + \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha^2}{2}c_p^2\right\}$. Então,*

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_p(t) \leq \mathcal{G}_p(t) \leq c_T\mathcal{E}_p(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Voltando à desigualdade (2.2.36), aplicamos a desigualdade de Young com $\epsilon_2 = \frac{\alpha}{2}$ nos dois primeiros termos do lado direito e $\epsilon_3 = \sqrt{\nu_1}$ no terceiro termo do lado direito. Absorvendo o resultado no lado esquerdo obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}_p(t) + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ + \left(\frac{\nu_1}{2} - c_u' C - C\alpha c_h^2 - \frac{C\alpha c_E^2}{2}\right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq \frac{C\alpha^2}{2\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2. \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Seja

$$k := \left(\frac{\nu_1}{2} - c_u' C - C\alpha c_h^2 - \frac{C\alpha c_E^2}{2}\right).$$

Observe que $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq 2\mathcal{E}_p(t)$. Então, usando (2.2.35) em (2.2.37) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}_p(t) + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ + \left(k - \frac{C\alpha^2}{4\nu_1}\mathcal{E}_p(0)C_{\tilde{h}}\right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2, \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, minoramos o termo

$$\left(k - \frac{C\alpha^2}{4\nu_1}\mathcal{E}_p(0)C_{\tilde{h}}\right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2$$

peelo termo

$$\frac{1}{c_p} \left(k - \frac{C\alpha^2}{4\nu_1}\mathcal{E}_p(0)C_{\tilde{h}}\right) \|b\|^2,$$

então,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}_p(t) + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c_p} \left(k - \frac{C\alpha^2}{4\nu_1} \mathcal{E}_p(0) C_{\tilde{h}} \right) \| b \|^2 \\
& \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2, \tag{2.2.39}
\end{aligned}$$

Seja $c_1 := \min \left\{ \alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{2}{c_p} \left(k - \frac{C\alpha^2}{4\nu_1} \mathcal{E}_p(0) C_{\tilde{h}} \right) \right\}$. Agora, aplicamos o Lema 2.4 em (2.2.39) obtendo a seguinte desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}_p(t) + c_1 \mathcal{G}_p(t) \leq \frac{C}{4\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \mathcal{G}_p(t).$$

Na seqüência, dividimos ambos os membros por $\mathcal{G}_p(t)$ e integramos de 0 a t , obtendo

$$\ln(\mathcal{G}_p(t)) \leq \ln(\mathcal{G}_p(0)) + \frac{C}{4\nu_1} \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds - c_1 t. \tag{2.2.40}$$

Seja $c_2 := \sup \left\{ \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2(s) ds, t > 0 \right\}$. Aplicamos exp na desigualdade (2.2.40) e obtemos a seguinte estimativa

$$\mathcal{G}_p(t) \leq \mathcal{G}_p(0) \exp \left(\frac{C}{4\nu_1} c_2 - c_1 t \right).$$

Novamente, aplicamos o Lema 2.4 e inferimos a estimativa desejada

$$\mathcal{E}_p(t) \leq 2c_T \mathcal{E}_p(0) \exp \left(\frac{C}{4\nu_1} c_2 - c_1 t \right).$$

□

2.3 Domínio tridimensional

2.3.1 Existência

A prova da existência de soluções para o caso do domínio tridimensional é feita de forma análoga à prova para o caso do domínio bidimensional. No entanto, salientamos que para o caso tridimensional assumimos hipóteses sobre ν_1 , mas como $H_{e,\eta} \neq 0$ na fronteira de Ω a simplificação feita no caso bidimensional não é possível.

A seguir, apresentamos o nosso principal resultado:

Teorema 2.3. *Seja $T > 0$ o período da função $f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, domínio limitado, simplesmente conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que se $\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \lambda^2$ e $\nu_1 \geq \left(\frac{c_E}{\lambda}\right)^2$, então, a solução fraca (u, h) periódica no tempo do problema (0.0.1)-(0.0.5) admite a seguinte regularidade adicional:*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; D(\mathcal{L})), \quad u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e} \\ h &\in L^2(0, T; D(\tilde{\mathcal{L}})) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Demonstração. Usaremos o Teorema 1.6 (Banach) para provar a existência de solução periódica em espaço de dimensão finita.

Iremos utilizar os operadores definidos no capítulo 1: o operador de Lamé \mathcal{L} e o operador $\tilde{\mathcal{L}}$.

Consideramos as equações usando as aproximações do Faedo-Galerkin para qualquer m inteiro positivo fixo

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u_m, \phi_j)_{2\eta}'' ds + \int_0^T a_I(u_m, \phi_j)_{2\eta} ds + \int_0^T (\alpha(u_m'), \phi_j)_{2\eta} ds \\ = \int_0^T B_I(h_m, h_m)_{2(\phi_j)} \eta ds + \int_0^T (f, \phi_j)_{2\eta} ds, \\ \forall \phi_j \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad \forall \eta \in \mathbb{D}_T, 1 \leq j \leq m. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^T (h_m, \tilde{\phi}_j)_{2\tilde{\eta}}' ds + \int_0^T a_{II}(h_m, \tilde{\phi}_j)_{2\tilde{\eta}} ds = \int_0^T B_{II}(u_m', h_m)_{2(\tilde{\phi}_j)} \tilde{\eta} ds, \\ \forall \tilde{\phi}_j \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega), \quad \forall \tilde{\eta} \in \mathbb{D}_T, 1 \leq j \leq m, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

em que $\mathbb{D}_T := \omega \in C^\infty(\mathbb{R}) : w(s) = w(s + T), \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Também consideramos as equações na forma de operador:

$$u_m'' + \mathcal{L}u_m + \alpha(u_m') = \mu_0 \operatorname{rot} h_m \wedge (h_m + H_e) + f, \quad (2.3.3)$$

$$h_m' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h_m = \operatorname{rot}[u_m' \wedge (h_m + H_e)], \quad (2.3.4)$$

$$u_m(0) = u_m(T), \quad u_m'(0) = u_m'(T), \quad h_m(0) = h_m(T), \quad (2.3.5)$$

em que

$$\mathcal{L} = -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div}, \quad D(\mathcal{L}) = H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3,$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \text{rot rot}, \quad D(\tilde{\mathcal{L}}) = \{b \in H^2(\Omega) \cap H_\sigma^1(\Omega)^3 : \text{rot } b \wedge n|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$u_m = \sum_{i=1}^m c_i(t)\phi_i, \quad h_m = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i(t)\tilde{\phi}_i,$$

$\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é a base de autofunções de

$$a_I(\phi_k, \omega) = \lambda_k(\phi_k, \omega)_2, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega),$$

e $\{\tilde{\phi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base de autofunções de

$$a_{II}(\tilde{\phi}_j, \tau) = \tilde{\lambda}_j(\tilde{\phi}_j, \tau)_2, \quad \forall \tau \in H_\sigma^1(\Omega).$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, definimos os espaços de dimensão finita

$$S_m = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\} \text{ e } \tilde{S}_m = \text{span}\{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_m\}.$$

Para simplificar a notação, de agora em diante, ocultamos o índice m nas funções u e h .

Agora, definimos a energia de segunda ordem do sistema como se segue

$$\mathcal{E}_{II}(t) := \frac{1}{2} \{ \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \| \mathcal{L}u \|^2 + \| \tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h \|^2 \}$$

e para $\epsilon \in (0, 1)$ definimos também uma nova função

$$\mathcal{G}(t) := \left\{ \mathcal{E}_{II}(t) + \frac{\alpha\epsilon}{2} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u \|^2 + \epsilon(u', \mathcal{L}u) \right\}.$$

Lembramos que o Lema 2.1 permanece válido, isto é,

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{2} \mathcal{E}_{II}(t) \leq \mathcal{G}(t) \leq C_1 \mathcal{E}_{II}(t).$$

Para aplicar o Teorema 1.6 (Banach), definimos o espaço Z^λ como se segue:

Seja $0 < \lambda < 1$ fixo, então

$$\begin{aligned} Z^\lambda &= \{(v, b) \in [C_{per}(0, T; D(\mathcal{L})) \cap C_{per}^1(0, T; H_0^1(\Omega))] \\ &\quad \times [C_{per}(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(\tilde{\mathcal{L}}))]\} : \\ &\quad \|v\|_{L^\infty(D(\mathcal{L}))} \leq \lambda, \|v'\|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} \leq \lambda, \|b\|_{L^2(H_\sigma^1(\Omega))} \leq \lambda, \|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda \}, \end{aligned}$$

com a respectiva norma

$$\begin{aligned} \| (v, b) \|_{Z^\lambda} &:= \| v \|_{L^\infty(D(\mathcal{L}))} + \| v' \|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} + \| b \|_{L^2(H_\sigma^1(\Omega))} + \| b \|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))}, \\ \| v \|_{D(\mathcal{L})} &:= \| \mathcal{L}v \|, \\ \| b \|_{D(\tilde{\mathcal{L}})} &:= \| \tilde{\mathcal{L}}b \| . \end{aligned}$$

Também definimos uma aplicação Φ para provar que ela tem um ponto fixo, isto é, $\Phi(u, h) = (u, h)$, $(u, h) \in Z^\lambda$. Seja Φ a aplicação definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi : Z^\lambda &\longrightarrow Z^\lambda, \\ (v, b) &\mapsto (u, h), \end{aligned}$$

em que (u, h) é (u_m, h_m) , que é a única solução do sistema linear acoplado (2.3.6)-(2.3.10), dada pela Proposição 1.1 tal que $u_m \in C^2(0, T; S_m)$ e $h_m \in C^1(0, T; \tilde{S}_m)$.

Agora, apresentamos o sistema na forma linearizada:

$$u'' + \mathcal{L}u + \alpha(u') = \mu_0 \operatorname{rot} b \wedge (b + H_e) + f, \quad (2.3.6)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h = \operatorname{rot}[v' \wedge h] + \operatorname{rot}[u' \wedge H_e], \quad (2.3.7)$$

$$\operatorname{div} h = 0, \text{ em } Q_T = \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.3.8)$$

$$u = 0, \quad h \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} h \wedge n = 0, \text{ em } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.3.9)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad u'(x, 0) = u'(x, T),$$

$$h(x, 0) = h(x, T), \quad x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (2.3.10)$$

Sejam c_{it} , c_{im} , c_p e c_{el} constantes de interpolações, imersões, Poincaré e regularidade elíptica respectivamente. Então, C é uma constante positiva que depende no máximo das constantes c_{it} , c_{im} , c_p , c_{el} e μ_0 .

a) Provaremos que Φ está bem definida. Isto é, $\| (u, h) \|_{Z^\lambda} \leq C\lambda$. Fazendo o produto interno da equação dada em (2.3.6) com $\mathcal{L}u'$ e $\epsilon_1 \mathcal{L}u$, $0 < \epsilon_1 \leq \alpha$ e da equação dada em (2.3.7) com $\tilde{\mathcal{L}}h$, somando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + (\alpha - \epsilon_1) \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \nu_1 \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \epsilon_1 \| \mathcal{L}u \|^2 \\ = \mu_0 (\operatorname{rot} b \wedge (b + H_e), \mathcal{L}u') + (\operatorname{rot}[v' \wedge h], \tilde{\mathcal{L}}h) + (\operatorname{rot}[u' \wedge H_e], \tilde{\mathcal{L}}h) \end{aligned}$$

$$+ \mu_0 \epsilon_1 (\text{rot } b \wedge (b + H_e), \mathcal{L}u) + (f, \mathcal{L}u') + \epsilon_1 (f, \mathcal{L}u) . \quad (2.3.11)$$

Agora, estimaremos cada um dos termos usando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $q \in [2, 6]$ e $H^{-1}(\Omega)$ em $L^{6/5}(\Omega)$ (ver [24]), Teorema 1.2 (regularidade elíptica) e a desigualdade de Poincaré:

$$\begin{aligned} & \mu_0 |(\text{rot } b \wedge (b + H_e), \mathcal{L}u')| \\ & \leq \mu_0 \| \text{rot } b \|_{L^6} \| b + H_e \|_{L^\infty} \| \mathcal{L}u' \|_{L^{6/5}} \\ & \leq C \| b \|_{2,2} \| b + H_e \|_{2,2} \| \mathcal{L}u' \|_{-1,2} \\ & \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| + C_{CE} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| , \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \| \mathcal{L}u' \|_{L^{6/5}(\Omega)} & \leq C \| \mathcal{L}u' \|_{H^{-1}(\Omega)} \\ & \leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} | \langle \mathcal{L}u', \varphi \rangle | \\ & \leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} | (\nabla u', \nabla \varphi) + (\text{div } u', \text{div } \varphi) | \\ & \leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} | (\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u', \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\varphi) | \\ & \leq C \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|=1} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\varphi \| \\ & \leq C \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u' \| . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |(\text{rot}[v' \wedge h], \tilde{\mathcal{L}}h)| \\ & \leq \| v' \|_{1,2} \| h \|_{L^\infty} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| + \| v' \|_{L^4} \| \text{rot } h \|_{L^4} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| \\ & \leq C \| v' \|_{1,2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |(\text{rot}[u' \wedge H_e], \tilde{\mathcal{L}}h)| \\ & \leq \| u' \|_{1,2} \| H_e \|_{L^\infty} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| + \| u' \|_{L^4} \| \text{rot } H_e \|_{L^4} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| \\ & \leq C_{EC} \| u' \|_{1,2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| . \end{aligned}$$

$$\mu_0 |(\text{rot } b \wedge (b + H_e), \epsilon_1 \mathcal{L}u)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon_1 \mu_0 \| \operatorname{rot} b \|_{L^4} \| b + H_e \|_{L^4} \| \mathcal{L}u \| \\
&\leq \epsilon_1 C \| b \|_{2,2} \| b + H_e \|_{1,2} \| \mathcal{L}u \| \\
&\leq \epsilon_1 C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \operatorname{rot} b \| \| \mathcal{L}u \| \\
&\quad + \epsilon_1 C c_E \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| \\
&\leq \epsilon_1 C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}u \| \\
&\quad + \epsilon_1 c_E C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| .
\end{aligned}$$

$$|(f, \mathcal{L}u')| \leq \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| .$$

$$\epsilon_1 |(f, \mathcal{L}u)| \leq \epsilon_1 \| f \| \| \mathcal{L}u \| .$$

Substituindo essas estimativas em (2.3.11) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + (\alpha - \epsilon_1) \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \nu_1 \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \epsilon_1 \| \mathcal{L}u \|^2 \\
&\leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + C \| v' \|_{1,2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 \\
&\quad + \epsilon_1 C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}u \| + \epsilon_1 c_E C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| \\
&\quad + c_E \| u' \|_{1,2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \| + c_E C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \\
&\quad + \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f \| + \epsilon_1 \| f \| \| \mathcal{L}u \| .
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young com $\epsilon = \sqrt{\nu_1}$ no termo $c_E \| u' \|_{1,2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2$ obtemos $\frac{c_E^2}{2\nu_1} \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \frac{\nu_1}{2} \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2$. Por hipóteses temos que $\| v' \|_{1,2} \leq \lambda$ e $\nu_1 \geq \left(\frac{c_E}{\lambda}\right)^2$. Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + (\alpha - \epsilon_1 - \frac{c_E^2}{2\nu_1}) \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + (\frac{\nu_1}{2} - C\lambda) \| \tilde{\mathcal{L}}h \|^2 + \epsilon_1 \| \mathcal{L}u \|^2 \\
&\leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + \epsilon_1 C \| \tilde{\mathcal{L}}b \|^2 \| \mathcal{L}u' \| \\
&\quad + \epsilon_1 c_E C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| + c_E C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \\
&\quad + \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f \| + \epsilon_1 \| f \| \| \mathcal{L}u \| . \tag{2.3.12}
\end{aligned}$$

Em particular, devido à relação de equivalência dada pelo Lema 2.1 temos

que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &\leq c_{II}^* \mathcal{E}_{II}(t) \\ &\leq \left(\alpha - \epsilon_1 - \frac{c_E^2}{2\nu_1}\right) \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \left(\frac{\nu_1}{2} - C\lambda\right) \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 + \epsilon_1 \|\mathcal{L}u\|^2, \end{aligned}$$

em que $c_{II}^* := \min\{2(\alpha - \epsilon_1 - \frac{c_E^2}{2\nu_1}), 2(\frac{\nu_1}{2} - C\lambda), 2\epsilon_1\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + c_{II}^* C \mathcal{G}(t) &\leq 2C \|\tilde{\mathcal{L}}b\|^2 \sqrt{\mathcal{G}(t)} + 2c_E C(1 + \epsilon_1) \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \sqrt{\mathcal{G}(t)} \\ &\quad + 2\epsilon_1 C \|\tilde{\mathcal{L}}b\|^2 \sqrt{\mathcal{G}(t)} + 2(1 + \epsilon_1) \|f\|_{1,2} \sqrt{\mathcal{G}(t)}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Assumindo sem perda de generalidade que $\mathcal{G}(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, dividimos todos os termos de (2.3.13) por $2\sqrt{\mathcal{G}(t)}$ e segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{G}(t)} + \frac{c_{II}^* C}{2} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b\|^2 + c_E C(1 + \epsilon_1) \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \\ &\quad + \epsilon_1 C \|\tilde{\mathcal{L}}b\|^2 + (1 + \epsilon_1) \|f\|_{1,2}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Integrando (2.3.14) de 0 a T obtemos

$$\begin{aligned} \frac{c_{II}^* C}{2} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(s)} ds &\leq (C + \epsilon_1 C) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \\ &\quad + (1 + \epsilon_1) c_E C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &\quad + (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds, \end{aligned}$$

pois \mathcal{G} é periódica de período T . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon_1) c_E C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds &\leq (1 + \epsilon_1) c_E C T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, usando a hipótese crucial de que $c_E \leq \lambda\sqrt{\nu_1}$ e a hipótese de que

$\|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda$ temos

$$(1 + \epsilon_1)c_E CT^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + \epsilon_1)\lambda\sqrt{\nu_1}CT^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{c_{II}^*C}{2} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(s)} ds &\leq \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} \right) \lambda^2 \\ &+ (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Na sequência, provaremos a seguinte

Afirmção: seja $0 \leq t \leq T$, então

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq \left(2C + 2\epsilon_1 C + 2(1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2(1 + \epsilon_1) \right. \\ &\left. + \frac{2}{c_{II}^*CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}}(1 + \epsilon_1) \right) \right) \lambda^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue do Teorema de valor médio que existe de um $t^* \in (0, T)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{c_{II}^*C}{2} T \sqrt{\mathcal{G}(t^*)} &= \frac{c_{II}^*C}{2} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(s)} ds \\ &\leq \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} \right) \lambda^2 \\ &+ (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t^*)} &\leq \frac{2}{c_{II}^*CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} \right) \lambda^2 \\ &+ \frac{2}{c_{II}^*CT} (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds. \end{aligned}$$

Integramos (2.3.14) de t^* a t , $t^* \leq t \leq T$ e obtemos

$$\sqrt{\mathcal{G}(t)} - \sqrt{\mathcal{G}(t^*)} \leq (C + \epsilon_1 C) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds$$

$$+ (1 + \epsilon_1)c_E C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds + (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c_{II}^* CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \lambda^2 \\ &\quad + (1 + \epsilon_1) \left(\frac{2}{c_{II}^* CT} + 1 \right) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds . \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Integramos (2.3.14) de novo, desta vez de 0 a t , $0 \leq t \leq t^*$ e obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} - \sqrt{\mathcal{G}(0)} &\leq (C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}}) \lambda^2 \\ &\quad + (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds . \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq (C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}}) \lambda^2 \\ &\quad + (1 + \epsilon_1) \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds + \sqrt{\mathcal{G}(0)} . \end{aligned}$$

Da **periodicidade** de $\mathcal{G}(t)$ e equação (2.3.16) temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq \left(2C + 2\epsilon_1 C + 2(1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c_{II}^* CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \lambda^2 \\ &\quad + \left((1 + \epsilon_1) \left(\frac{2}{c_{II}^* CT} + 2 \right) \right) \int_0^T \|f\|_{1,2}(s) ds . \end{aligned}$$

Por hipóteses temos que $\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \lambda^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &\leq \left(2C + 2\epsilon_1 C + 2(1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}} + 2(1 + \epsilon_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c_{II}^* CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1 T^{\frac{1}{2}}} (1 + \epsilon_1) \right) \right) \lambda^2 . \end{aligned}$$

□

Da relação de equivalência entre a função $\mathcal{G}(t)$ e a energia $\mathcal{E}_{II}(t)$ temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)} &\leq \left(2C + 2\epsilon_1 C + 2(1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2(1 + \epsilon_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c_{II}^*CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}}(1 + \epsilon_1) \right) \right) \lambda^2. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Já temos estimativas para todos os termos da energia. Falta obter uma estimativa para o termo $\|h\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))}$, para conseguirmos uma limitação para $\|(u, h)\|_{Z^\lambda}$ em termos de λ . Assim, ficará provado que Φ leva Z^λ em Z^λ . Sabemos que $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|$ e $\|\mathcal{L}u\|$ estão em $\sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)}$ que é limitado por λ^2 , então $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \leq \lambda$ e $\|\mathcal{L}u\| \leq \lambda$. Para estimar $\|h\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))}$, voltamos à equação (2.3.12), usando o fato de que $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\| \leq \lambda$ e $\|\mathcal{L}u\| \leq \lambda$, integramos de 0 a T e usamos a **periodicidade** de $\mathcal{G}(t)$ para obter

$$\begin{aligned} &(\alpha - \epsilon_1 - \frac{c_E^2}{2\nu_1}) \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'(s)\|^2 ds + (\frac{\nu_1}{2} - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\ &+ \epsilon_1 \int_0^T \|\mathcal{L}u(s)\|^2 ds \\ &\leq C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds + c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ \epsilon_1 C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds + \epsilon_1 c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ \lambda \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}f(s)\| ds + \epsilon_1 \lambda \int_0^T \|f(s)\| ds. \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} (\frac{\nu_1}{2} - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds &\leq (\alpha - \epsilon_1 - \frac{c_E^2}{2\nu_1}) \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'(s)\|^2 ds \\ &+ (\frac{\nu_1}{2} - C\lambda) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\ &+ \epsilon_1 \int_0^T \|\mathcal{L}u(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\nu_1}{2} - C\lambda\right) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\
& \leq C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds + c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\
& + \epsilon_1 C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds + \epsilon_1 c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\
& + (1 + \epsilon_1)\lambda \int_0^T \|f(s)\|_{1,2} ds . \tag{2.3.18}
\end{aligned}$$

Usando as hipóteses

$\|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda$ e $c_E \leq \lambda\sqrt{\nu_1}$, nos dois seguintes termos

$$c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds$$

e

$$\epsilon_1 c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds,$$

obtemos

$$c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \leq CT^{\frac{1}{2}}\sqrt{\nu_1}\lambda^3,$$

e

$$\epsilon_1 c_E C\lambda \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \leq \epsilon_1 CT^{\frac{1}{2}}\sqrt{\nu_1}\lambda^3 \text{ respectivamente.}$$

Portanto, segue de (2.3.18) que

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\nu_1}{2} - C\lambda\right) \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \\
& \leq \left(C + C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + \epsilon_1 C + \epsilon_1 C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 1 + \epsilon_1\right) \lambda^3 \\
& \leq \left(C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + \epsilon_1 C + 1 + \epsilon_1\right) \lambda^2 . \tag{2.3.19}
\end{aligned}$$

Obtendo essa estimativa para $\|h\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))}$ em termos de λ , temos que

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\|(u, h)\|_{\mathcal{Z}}\lambda} \\
& \leq \left(2C + 2\epsilon_1 C + 2(1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2(1 + \epsilon_1)\right) \\
& + \frac{2}{c_{II}^* CT} \left(C + \epsilon_1 C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}}(1 + \epsilon_1)\right)
\end{aligned}$$

$$+C + (1 + \epsilon_1)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + \epsilon_1C + 1 + \epsilon_1 \lambda^2 .$$

Portanto, Φ está bem definida.

b) Provaremos que Φ é uma contração, isto é,

$$0 < c < 1, \quad v := v_1 - v_2, \quad b := b_1 - b_2, \\ \|\Phi(v_1, b_1) - \Phi(v_2, b_2)\|_{Z^\lambda} \leq c \|(v_1 - v_2, b_1 - b_2)\|_{Z^\lambda} .$$

Definimos $u = u_1 - u_2$ e $h = h_1 - h_2$, em que (u_1, h_1) e (u_2, h_2) são duas soluções do sistema (2.3.6)-(2.3.10). Substituímos as soluções nas respectivas equações e subtraímos os resultados, obtemos

$$u'' + \mathcal{L}u + \alpha(u') = \mu_0 \operatorname{rot} b_2 \wedge b + \mu_0 \operatorname{rot} b \wedge (b_1 + H_e), \quad (2.3.20)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h = \operatorname{rot}[v' \wedge h_1] + \operatorname{rot}[v_2' \wedge h] + \operatorname{rot}[u' \wedge H_e], \quad (2.3.21)$$

dado que

$$\mu_0 \operatorname{rot} b_1 \wedge b_1 = \mu_0 \operatorname{rot}(b_2 + b) \wedge b_1 , \\ \operatorname{rot}[v_1' \wedge h_1] = \operatorname{rot}[(v' + v_2') \wedge h_1] .$$

Note que

$$\|\Phi(v_1, b_1) - \Phi(v_2, b_2)\|_{Z^\lambda} = \|(u_1, h_1) - (u_2, h_2)\|_{Z^\lambda} \\ = \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(D(\mathcal{L}))} + \|u_1' - u_2'\|_{L^\infty(H_0^1)} \\ + \|h_1 - h_2\|_{L^2(H_\sigma^1)} + \|h_1 - h_2\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} .$$

Usando a mesma estratégia usada na seção anterior, obteremos uma estimativa para as duas partes da energia separadamente. Inicialmente estimaremos a parte de energia relacionada ao campo magnético. Formalmente, fazemos o produto interno da equação (2.3.20) por $\mathcal{L}u'$ e $\alpha\mathcal{L}u$, adicionamos os resultados e obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \|\mathcal{L}u\|^2 \right\} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d}{dt} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha(u', \mathcal{L}u) + \alpha \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \alpha \|\mathcal{L}u\|^2 - (u', \alpha\mathcal{L}u') \\ = \mu_0 (\operatorname{rot} b_2 \wedge b, \mathcal{L}u') + \mu_0 (\operatorname{rot} b \wedge (b_1 + H_e), \mathcal{L}u')$$

$$+ \mu_0(\operatorname{rot} b_2 \wedge b, \alpha \mathcal{L}u) + \mu_0(\operatorname{rot} b \wedge (b_1 + H_e), \alpha \mathcal{L}u) . \quad (2.3.22)$$

Seja

$$\mathcal{E}_{II}^*(t) := \frac{1}{2} \left\{ \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \|\mathcal{L}u\|^2 \right\}$$

a parte da energia de segunda ordem do sistema e

$$\mathcal{G}^*(t) := \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \|\mathcal{L}u\|^2 + \alpha(u', \mathcal{L}u) \right\}$$

um funcional. O seguinte Lema é obtido do Lema 2.1

Lema 2.5. $\forall t \geq 0, \mathcal{E}_{II}^*(t) \leq \mathcal{G}^*(t) \leq C^* \mathcal{E}_{II}^*(t),$

em que $C^* := 2 + \max\{1, c_{el}^2 \alpha^2\}.$

Usando a equação (2.3.22), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}^*(t) + \alpha \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \alpha \|\mathcal{L}u\|^2 \\ = \mu_0(\operatorname{rot} b_2 \wedge b, \mathcal{L}u') + \mu_0(\operatorname{rot} b \wedge (b_1 + H_e), \mathcal{L}u') \\ + \mu_0(\operatorname{rot} b_2 \wedge b, \alpha \mathcal{L}u) + \mu_0(\operatorname{rot} b \wedge (b_1 + H_e), \alpha \mathcal{L}u) . \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

As mesmas propriedades usadas nas estimativas anteriores nos permitem obter as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \mu_0 |\operatorname{rot} b_2 \wedge b, \mathcal{L}u'| \\ \leq \mu_0 \|b_2\|_{2,2} \|b\|_{L^\infty} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| + \mu_0 \|\operatorname{rot} b_2\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} b\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| \\ \leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| + C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| \\ \leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b_2\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 |\operatorname{rot} b \wedge (b_1 + H_e), \mathcal{L}u'| \\ \leq \mu_0 \|b\|_{2,2} \|b_1 + H_e\|_{L^\infty} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| + \mu_0 \|\operatorname{rot} b\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} b_1\|_{L^4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| \\ \leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| + c_{EC} \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| \\ + C \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| \\ \leq C \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| + c_{EC} \|\tilde{\mathcal{L}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\| . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha\mu_0 |(\text{rot } b_2 \wedge b, \mathcal{L}u)| \\
& \leq \alpha\mu_0 \| b \|_{2,2} \| b \|_{1,2} \| \mathcal{L}u \| \\
& \leq \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha\mu_0 |(\text{rot } b \wedge (b_1 + H_e), \mathcal{L}u)| \\
& \leq \alpha\mu_0 \| b \|_{2,2} \| b_1 \|_{1,2} \| \mathcal{L}u \| + \alpha\mu_0 \| b \|_{2,2} \| H_e \|_{1,2} \| \mathcal{L}u \| \\
& \leq \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \| \mathcal{L}u \| + \alpha c_E C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| .
\end{aligned}$$

Essas estimativas e $c_E \leq \lambda\sqrt{\nu_1}$ (hipóteses sobre ν_1) implicam na seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \mathcal{G}^*(t) + \alpha \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \alpha \| \mathcal{L}u \|^2 \\
& \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \\
& \quad + C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| \\
& \quad + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \| \mathcal{L}u \| + \alpha C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| .
\end{aligned}$$

Observe que $C^* \mathcal{E}_{II}^*(t) \leq \alpha \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \|^2 + \alpha \| \mathcal{L}u \|^2$ e pelo Lema 2.5 temos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \mathcal{G}^*(t) + C^* \mathcal{G}^*(t) \\
& \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| \\
& \quad + C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u' \| + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| \\
& \quad + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \| \mathcal{L}u \| + \alpha C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \mathcal{L}u \| \\
& \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} \\
& \quad + C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| 2\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| 2\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} \\
& \quad + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| 2\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + \alpha C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| 2\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} + \frac{C^*}{2} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} \\
& \leq C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| + C \| \tilde{\mathcal{L}}b_1 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \| \\
& \quad + C\lambda\sqrt{\nu_1} \| \tilde{\mathcal{L}}b \| + \alpha C \| \tilde{\mathcal{L}}b_2 \| \| \tilde{\mathcal{L}}b \|
\end{aligned}$$

$$+ \alpha C \|\tilde{\mathcal{L}}b_1\| \|\tilde{\mathcal{L}}b\| + \alpha C \lambda \sqrt{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}b\| . \quad (2.3.24)$$

Na seqüência, integramos (2.3.24) de 0 a T e usando a **periodicidade** de $\mathcal{G}^*(t)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{C^*}{2} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}^*(s)} ds &\leq C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_2(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_1(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ C \lambda \sqrt{\nu_1} \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ \alpha C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_2(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ \alpha C \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b_1(s)\| \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds \\ &+ \alpha C \lambda \sqrt{\nu_1} \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\| ds . \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz em cada um dos termos do lado direito de (2.3.25) e usando a hipótese de que $\|b\|_{L^2(D(\tilde{\mathcal{L}}))} \leq \lambda$ obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{C^*}{2} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}^*(s)} ds &\leq C \lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C \lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ C \lambda \sqrt{\nu_1} T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha C \lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \alpha C \lambda \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha C \lambda \sqrt{\nu_1} T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lambda(2C + (1 + \alpha)C \sqrt{\nu_1} T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}b(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lambda(2C + (1 + \alpha)C \sqrt{\nu_1} T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \|(v, b)\|_{Z^\lambda} . \end{aligned}$$

Do teorema de valor médio, existe um $t^* \in (0, T)$, tal que

$$\frac{C^*}{2} T \sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} = \frac{C^*}{2} \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}^*(s)} ds$$

$$\leq \lambda(2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

Então,

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} \leq \frac{2}{C^*T} \lambda(2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

Usando a mesma estratégia usada na página 54, integramos (2.3.24) de t^* a t , $t^* \leq t \leq T$ obtendo

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t)} - \sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} \leq \lambda(2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} &\leq \lambda \left(2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{C^*T} (2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} . \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}^*(T)} &\leq \lambda \left(2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{C^*T} (2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} . \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Voltamos de novo à equação diferencial (2.3.24), integramos de 0 a t , $0 \leq t \leq t^*$ obtemos

$$\sqrt{\mathcal{G}^*(t^*)} - \sqrt{\mathcal{G}^*(0)} \leq \lambda(2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} .$$

A seguinte estimativa segue da **periodicidade** de $\mathcal{G}^*(t)$ e (2.3.26)

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{G}^*(t)} &\leq \lambda \left(4C + 2(1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 4\alpha C \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{C^*T} (2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \right) \| (v, b) \|_{Z^\lambda} . \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.5 obtemos uma estimativa para a $\sqrt{\mathcal{E}_{II}^*(t)}$ em termos de $\| (v, b) \|_{Z^\lambda}$:

$$\sqrt{\mathcal{E}_{II}^*(t)} \leq \lambda \left(4C + 2(1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 4\alpha C \right)$$

$$+ \frac{2}{C^*T} (2C + (1 + \alpha)C\sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}} + 2\alpha C) \left\| (v, b) \right\|_{Z^\lambda} . \quad (2.3.27)$$

Agora, obteremos uma estimativa para a parte de energia $\mathcal{E}_{II}(t)$ relacionada ao campo magnético. Formalmente, fazemos o produto interno de (2.3.21) por $\tilde{\mathcal{L}}h$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h \right\|^2 + 2\nu_1 \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\|^2 & \\ & \leq 2(\text{rot}[v' \wedge h_1], \tilde{\mathcal{L}}h) \\ & \quad + 2(\text{rot}[v_2' \wedge h], \tilde{\mathcal{L}}h) + 2(\text{rot}[u' \wedge H_e], \tilde{\mathcal{L}}h) \\ & \leq C \left\| v' \right\|_{1,2} \left\| \tilde{\mathcal{L}}h_1 \right\| \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\| + C \left\| v_2' \right\|_{1,2} \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\|^2 \\ & \quad + c_EC \left\| u' \right\|_{H^1} \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\| . \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h \right\|^2 + (2\nu_1 - C\lambda) \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\|^2 & \\ \leq C \left\| v' \right\|_{1,2} \left\| \tilde{\mathcal{L}}h_1 \right\| \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\| + c_EC \left\| u' \right\|_{1,2} \left\| \tilde{\mathcal{L}}h \right\| . \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Dado que h_1 é solução da equação (2.3.7), então da definição do espaço Z^λ temos que $\left\| \tilde{\mathcal{L}}h_1 \right\| \leq \lambda$. Note que $\left\| v' \right\|_{1,2} \leq \left\| (v, b) \right\|_{Z^\lambda}$, da definição do espaço Z^λ . Note ainda que da definição de $\mathcal{E}^*(t)$ e de (2.3.27), temos que $\left\| u' \right\|_{1,2} \leq \left\| (v, b) \right\|_{Z^\lambda}$. Lembrando que $c_E \leq \lambda\sqrt{\nu_1}$, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito, integramos o resultado de 0 a T e usando a **periodicidade** obtemos

$$\begin{aligned} (2\nu_1 - C\lambda) \int_0^T \left\| \tilde{\mathcal{L}}h(s) \right\|^2 ds & \\ \leq C\lambda \left\| (v, b) \right\|_{Z^\lambda} \left(\int_0^T \left\| \tilde{\mathcal{L}}h(s) \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} & \\ + C\sqrt{\nu_1}\lambda T^{\frac{1}{2}} \left\| (v, b) \right\|_{Z^\lambda} \left(\int_0^T \left\| \tilde{\mathcal{L}}h(s) \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Na sequência, dividimos ambos os lados por $\left(\int_0^T \left\| \tilde{\mathcal{L}}h(s) \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$ e ob-

temos

$$\begin{aligned} (2\nu_1 - C\lambda) \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C\lambda \|(v, b)\|_{Z^\lambda} + C\sqrt{\nu_1}\lambda T^{\frac{1}{2}} \|(v, b)\|_{Z^\lambda} . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C(1 + \sqrt{\nu_1}T^{\frac{1}{2}})\lambda}{2\nu_1 - C\lambda} \|(v, b)\|_{Z^\lambda} . \quad (2.3.29)$$

De (2.3.27) e (2.3.29), concluímos que

$$\|\Phi(v, b)\|_{Z^\lambda} = \|(u, h)\|_{Z^\lambda} \leq c \|(v, b)\|_{Z^\lambda},$$

portanto, Φ é uma contração, com $0 < c < 1$. Do Teorema 1.6 (Banach), existe uma única solução (u_m, h_m) T -periódico do problema (2.3.3)-(2.3.5) com as condições de fronteira (0.0.5) .

Agora, precisamos provar as convergências das soluções aproximadas obtidas. O procedimento para passar limite está detalhado na tese de Mohebbi [50]. Apresentaremos sucintamente essa parte.

A existência de solução forte do problema em dimensão finita nos permite obter sequência (u_m, h_m) tal que

- (I) $\{u_m\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; D(\mathcal{L}))$,
- (II) $\{u'_m\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$,
- (III) $\{h_m\}$ é limitada em $L^2(0, T; D(\tilde{\mathcal{L}})) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$.

Usando os Teoremas de compacidade e imersões extraímos subsequências de u'_m , u_m e h_m denotados novamente por u'_m , u_m e h_m respectivamente tais que

- (i) $u_m \rightarrow u$ fraca em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,
- (ii) $u'_m \rightarrow u'$ fraca em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$,
- (iii) $h_m \rightarrow h$ fraca* em $L^2(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ e
- (iv) $h_m \rightarrow h$ fraca em $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$.

Essas convergências, usando Lema de Compacidade de Aubin-Lions e Teorema de imersão ([44]) obtemos que

(v) $h_m \rightarrow h$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $h \in C([0, T]; H_\sigma^{-\frac{1}{4}}(\Omega))$.

A passagem ao limite dos dois primeiros termos da equação (2.3.1) é assegurada pelas convergências (ii) e (i) respectivamente. Para os dois primeiros termos da equação (2.3.2) temos as convergências (iii) e (iv). Agora, vamos analisar os termos acoplados. Começamos com a prova de que

$$\{B_{II}(u'_m, h_m)\} \rightarrow \{B_{II}(u', h)\}.$$

Seja $\langle g_n, \tilde{\phi} \rangle := \langle -\nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h_n - B_{II}(u'_m, h_m)_2 \tilde{\phi} \rangle = \langle h'_n, \tilde{\phi} \rangle_2$, $\forall \tilde{\phi} \in \tilde{S}_m$. Então,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \sup_{\|\tilde{\phi}\|_{H_\sigma^{3/2}}=1} |\langle B_{II}(u'_m, h_m), \tilde{\phi} \rangle| \right\}^2 dt \\ &= \int_0^T \left\{ \sup_{\|\tilde{\phi}\|_{H_\sigma^{3/2}}=1} |\langle (u'_m \wedge h_m), \text{rot } \tilde{\phi} \rangle| \right\}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ \sup_{\|\tilde{\phi}\|_{H_\sigma^{3/2}}=1} \|u'_m\| \|h_m\|_{1,2} \|\text{rot } \tilde{\phi}\|_{\frac{1}{2},2} \right\}^2 dt \\ &\leq c \int_0^T \left\{ \sup_{\|\tilde{\phi}\|_{H_\sigma^{3/2}}=1} \|u'_m\| \|h_m\|_{1,2} \|\tilde{\phi}\|_{H_\sigma^{3/2}} \right\}^2 dt \\ &\leq c \int_0^T \|u'_m\|^2 \|h_m\|_{1,2}^2 dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \sup_{\|\tilde{\phi}\|_{H_\sigma^{3/2}}=1} |\langle B_{II}(u'_m, h_m), \tilde{\phi} \rangle| \right\}^2 dt \\ &\leq c \|u'_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \int_0^T \|h_m\|^2 dt \leq C. \end{aligned}$$

Portanto $\{g_m\}$ é limitada em $L^2(0, T; H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega))$, isto é, $\{B_{II}(u'_m, h_m)\}$ é limitada em $L^2(0, T; H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega))$. Seja $\tilde{\phi} \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ e $\tilde{\phi} = P_m \tilde{\phi} + (I - P_m) \tilde{\phi}$, em que $P_m \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^m (\tilde{\phi}, \tilde{\phi}_i) \tilde{\phi}_i$. Então, $\langle h'_m, \tilde{\phi} \rangle = \langle g_m, P_m \tilde{\phi} \rangle$, $\forall \tilde{\phi} \in$

$H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega)$. Portanto, h'_m é limitado em $L^2(0, T; H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega))$. Sabendo que $\{B_{II}(u'_m, h_m)\}$ converge fracamente para algum z em $L^2(0, T; H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega))$. Agora, apresentamos a prova da seguinte convergência

$$\{B_{II}(u'_m, h_m)\} \rightarrow \{B_{II}(u', h)\}$$

fracamente em $L^2(0, T; H_\sigma^{-\gamma}(\Omega))$, $\gamma > \frac{5}{2}$, implicando que $z = \{B_{II}(u', h)\}$. Seja $\varphi \in L^2(0, T; H_\sigma^\gamma(\Omega))$, então

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle B_{II}(u'_m, h_m), \varphi \rangle dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega u'_m \cdot (\text{rot } \varphi) \wedge h_m dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega u' \cdot (\text{rot } \varphi) \wedge h dx dt, \end{aligned}$$

dado que $u'_m \rightarrow u'$ fraca* em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $\text{rot } \varphi \wedge h_m \rightarrow \text{rot } \varphi \wedge h$ forte em $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ pelo fato de que $\text{rot } \varphi \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ (sabendo que $H^{\gamma-1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ para $\gamma > \frac{5}{2}$ e $h_m \rightarrow h$ forte em $L^2(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$). Assim, $\{B_{II}(u'_m, h_m)\}$ converge fraca para $\{B_{II}(u', h)\}$ em $L^2(0, T; H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega))$. Agora consideramos o outro termo de acoplamento e apresentamos a prova para a seguinte convergência

$$\{B_I(h_m, h_m)\} \rightarrow \{B_I(h, h)\},$$

uma limitação de $B_I(h_m, h_m)$ em $L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-1}(\Omega))$. De fato,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|B_I(h_m, h_m)\|_{-1,2}^{\frac{4}{3}} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1} |(\text{rot } h_m \wedge h_m, \varphi)| \right\}^{\frac{4}{3}} dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1} \|h_m\|_{1,2} \|h_m\|_{\frac{1}{2},2} \|\varphi\|_{H_0^1} \right\}^{\frac{4}{3}} dt \\ &\leq \int_0^T \{ \|h_m\|_{1,2}^{\frac{3}{2}} \|h_m\|_{\frac{1}{2}} \}^{\frac{4}{3}} dt \\ &\leq \int_0^T \|h_m\|_{1,2}^2 \|h_m\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} dt \end{aligned}$$

$$\leq \|h_m\|_{L^\infty(0,T;L^2_\sigma(\Omega))}^{\frac{2}{3}} \int_0^T \|h_m\|_{1,2}^2 dt \leq C,$$

isto é, $B_I(h_m, h_m)$ converge fracamente para algum y em $L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Seja $\gamma > \frac{3}{2}$. Sejam $\psi \in \mathbb{D}_T$ e $v \in H_0^\gamma(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \int_0^T B_I(h_m, h_m)(v)\psi dt &= \int_0^T \int_\Omega h_m \wedge v \cdot \text{rot } h_m \psi dx dt \\ &\rightarrow \int_0^T \int_\Omega h \wedge v \cdot \text{rot } h \psi dx dt = \int_0^T \int_\Omega B_I(h, h)(v)\psi dx dt, \end{aligned}$$

dado que $\text{rot } h_m \rightarrow \text{rot } h$ fracamente em $L^2((0, T) \times \Omega)$ e $(h_m \wedge v)\psi \rightarrow h \wedge v)\psi$ fortemente em $L^2((0, T) \times \Omega)$ (pelo fato de que $H_0^\gamma(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ quando $\gamma > \frac{3}{2}$).

A convergência do termo dissipativo linear, isto é, $\alpha(u'_m) \rightarrow \alpha(u')$ vem de (ii). □

2.3.2 Estabilidade

Nesta seção estudamos a estabilidade de soluções T -periódicas forte para o sistema magneto-elástico, cuja regularidade foi provada na seção anterior. Isto é, tendo em consideração as definições 2.2, 2.3 e 2.4 de solução fraca, estabilidade e estabilidade assintótica respectivamente, estudamos a estabilidade das soluções fracas do seguinte problema:

Seja (v, b) a perturbação da solução forte T -periódica no tempo (u, h) do problema (0.0.1)-(0.0.5). Então, (v, b) satisfaz o seguinte sistema

$$v'' + \mathcal{L}v + \alpha v' = \text{rot } h \wedge b + \text{rot } b \wedge (h + b + H_e), \quad (2.3.30)$$

$$b' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}b = \text{rot}[u' \wedge b] + \text{rot}[v' \wedge (h + b + H_e)], \quad (2.3.31)$$

$$\text{div } b = 0 \quad (2.3.32)$$

Como a estabilidade é um problema de valor inicial assumimos as seguintes condições iniciais

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad b(0) = b_0. \quad (2.3.33)$$

De fato, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.4. (*Estabilidade assintótica*)

(i) Se $\nu_1 > c_u' C$, então existe solução fraca para o problema de valor inicial (2.3.30)-(2.3.33) e a solução básica é estável.

(ii) Se

$$\mathcal{E}_p^2(0) < \frac{16k(c_h^2 C^2)^3}{27\alpha C^4 C_h^2}$$

em que $k := \nu_1 - c_u' C - \frac{\alpha}{4} c_h^2 C^2 - \frac{\alpha}{16} C^2 c_E^2$, e

$$\nu_1 > C \left[c_u' - \frac{\alpha}{4} c_h^2 C - \frac{\alpha}{16} C c_E^2 \right],$$

então a energia da perturbação decai a zero de forma exponencial quando $t \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}_p(t) \leq \mathcal{E}_p(0) \exp\left(\frac{C}{\nu_1} c_2 - c_1 t\right),$$

em que $\mathcal{E}_p(t) := \|v'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|b\|^2$.

Demonstração. O nosso objetivo é obter uma estimativa a priori das soluções desse sistema. Formalmente, fazemos o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação (2.3.30) por v' e da equação (2.3.31) por b , e adicionando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \|v'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|b\|^2 \} + 2\alpha \|v'\|^2 + 2\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2 \\ = 2(\text{rot } h \wedge b, v') + 2(\text{rot}[u' \wedge b], b), \end{aligned}$$

visto que $(\text{rot } b \wedge (h+b+H_e), v')$ e $(\text{rot}[v' \wedge (h+b+H_e)], b)$ são simétricos. O próximo passo é estimar os termos não lineares usando a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, 6]$, a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de interpolação da norma em $L^3(\Omega)$. Seja C uma constante positiva que depende no máximo de c_{it} , c_{im} , c_p constantes de interpolações, imersões e Poincaré respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} |(\text{rot } h \wedge b, v')| &\leq \|\text{rot } h\|_{L^4} \|b\|_{L^4} \|v'\| \\ &\leq C \|\tilde{\mathcal{L}} h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|v'\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\operatorname{rot}[u' \wedge b], b)| &\leq \|u'\|_{L^6} \|b\|_{L^3} \|\operatorname{rot} b\| \\ &\leq C \|u'\|_{1,2} \|b\|_{1,2}^{\frac{1}{2}} \|b\|_{1,2}^{\frac{1}{2}} \|\operatorname{rot} b\| . \end{aligned}$$

Seja

$$\mathcal{E}_p(t) := \|v'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|b\|^2$$

a energia da perturbação e $\|u'\|_{L^\infty(H^1(\Omega))} \leq c_{u'}$ uma constante que depende só da função f e do período T . Então, substituindo as estimativas obtidas em cada um dos respectivos termos obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_p(t) + 2\alpha \|v'\|^2 + 2\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq C \|\tilde{\mathcal{L}}h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|v'\| + Cc_{u'} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 . \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young com $\epsilon_1 = \sqrt{2\nu_1}$ no primeiro termo do lado direito obtemos

$$\frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 .$$

Como o termo dissipativo absorve o termo $\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_p(t) + 2\alpha \|v'\|^2 + (\nu_1 - c_{u'}C) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2 . \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

A hipótese sobre ν_1 garante que $\nu_1 - c_{u'}C$ seja positivo. Sabemos que $\|v'\|^2 \leq \mathcal{E}_p(t)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_p(t) + 2\alpha \|v'\|^2 + (\nu_1 - c_{u'}C) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \mathcal{E}_p(t) . \end{aligned}$$

Minoramos o termo $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_p(t) + 2\alpha \|v'\|^2 + (\nu_1 - c_{u'}C) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2$ pelo termo $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_p(t)$ e obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_p(t) \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \mathcal{E}_p(t).$$

Na seqüência, dividimos ambos os membros por $\sqrt{\mathcal{E}_p(t)}$ obtendo

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{E}_p(t)} \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \sqrt{\mathcal{E}_p(t)}.$$

Integrando a desigualdade obtida de 0 a t e aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos o seguinte resultado

$$\sqrt{\mathcal{E}_p(t)} \leq \sqrt{\mathcal{E}_p(0)} \exp\left(\frac{C}{\nu_1} \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds\right).$$

Como $\int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds \leq c_{\tilde{h}}, \forall t \geq 0$ (Lema 2.3), então,

$$\sqrt{\mathcal{E}_p(t)} \leq \sqrt{\mathcal{E}_p(0)} C_{\tilde{h}}, \quad (2.3.35)$$

em que $C_{\tilde{h}} := \exp\left(\frac{C}{\nu_1} c_{\tilde{h}}\right)$. Com essa estimativa e usando o método de Faedo-Galerkin procedendo de forma similar à prova de existência de solução fraca do problema de valor inicial ([12]), obtemos a existência e estabilidade de solução fraca para o problema (2.3.30)-(2.3.33).

Agora, obteremos a taxa de decaimento da energia associada às soluções do sistema em estudo. Para isso, fazemos o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação (2.3.30) por ϵv , em que $\epsilon \in (0, \alpha)$ e obtemos

$$\begin{aligned} (v'', \epsilon v) + \epsilon \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \frac{\epsilon\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 \\ = \epsilon(\operatorname{rot} h \wedge b, v) + \epsilon(\operatorname{rot} b \wedge (h + b + H_e), v). \end{aligned}$$

As seguintes estimativas foram obtidas aplicando a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, 6]$ e a desigualdade de interpolação da norma em $L^3(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |\epsilon(\operatorname{rot} h \wedge b, v)| &\leq \epsilon \|\operatorname{rot} h\| \|b\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \\ &\leq \epsilon C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\epsilon(\operatorname{rot} b \wedge (h + H_e), v)| &\leq \epsilon \|\operatorname{rot} b\| \|h + H_e\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \\ &\leq \epsilon C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| \end{aligned}$$

$$+ \epsilon C c_E \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|,$$

$$\begin{aligned} \epsilon |(\operatorname{rot} b \wedge b, v)| &\leq \epsilon \|\operatorname{rot} b\| \|b\|_{L^3} \|v\|_{L^6} \\ &\leq \epsilon C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^{\frac{3}{2}} \|b\|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|, \end{aligned}$$

em que $\|H_e\|_{L^4} = c_E$. Seja $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$. Considerando essas estimativas e sabendo que

$$(v'', \frac{\alpha}{2}v) = \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt}(v', v) - \frac{\alpha}{2}(v', v'),$$

inferimos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt}(v', v) + \frac{\alpha^2}{4} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|^2 - \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 \\ \leq \alpha C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\| \\ + \frac{\alpha}{2} C c_E \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\| \\ + \frac{\alpha}{2} C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^{\frac{3}{2}} \|b\|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|. \end{aligned}$$

A essa desigualdade adicionamos a desigualdade (2.3.34) obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_p(t) + \frac{\alpha}{2}(v', v) + \frac{\alpha^2}{4} \|v\|^2 \right\} \\ + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\|^2 + (\nu_1 - c_u C) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^2 \\ \leq \alpha C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\| + \frac{\alpha}{2} c_E C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\| \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\| \\ + \frac{\alpha}{2} C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} b\|^{\frac{3}{2}} \|b\|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v\| + \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}} h\|^2 \|v'\|^2. \quad (2.3.36) \end{aligned}$$

Consideramos o funcional

$$\mathcal{G}_p(t) := \left\{ \mathcal{E}_p(t) + \eta(v', v) + \frac{\eta\alpha}{2} \|v\|^2 \right\}.$$

Note que o Lema 2.1 permanece válido. Isto é,

$$\forall t \geq 0, \mathcal{E}_p(t) \leq \mathcal{G}_p(t) \leq c_T \mathcal{E}_p(t),$$

em que $c_T := 1 + \max \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha^2}{2} c_p^2 \right\}$.

Voltando a (2.3.36), aplicamos a desigualdade de Young com $\epsilon_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{4}}$ nos dois primeiros termos do lado direito e absorvemos o resultado no lado esquerdo obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_p(t) + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ + \left(\nu_1 - c_u' C - \alpha c_h^2 C^2 - \frac{\alpha}{16} C^2 c_E^2 \right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq \frac{\alpha}{2} C \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^{\frac{3}{2}} \|b\|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\| + \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2, \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

em que $\|h\|_{L^\infty(H^1(\Omega))} \leq c_h$ constante que depende só da função f e do período T . De novo, aplicamos a desigualdade de Young com $\epsilon_3 = \left(\frac{\alpha c_h^2 C^2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ no primeiro termo do lado direito da desigualdade (2.3.37) e absorvemos no lado esquerdo obtendo o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_p(t) + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ + \left(\nu_1 - c_u' C - \frac{\alpha}{4} c_h^2 C^2 - \frac{\alpha}{16} C^2 c_E^2 \right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2 \\ \leq \frac{27(\alpha C)^4}{16(\alpha c_h^2 C^2)^3} \|b\|^2 \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^4 + \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2. \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

A hipótese sobre ν_1 garante que $\nu_1 - c_u' C - \frac{\alpha}{4} c_h^2 C^2 - \frac{\alpha}{16} C^2 c_E^2$ seja positivo. Seja $k := \nu_1 - c_u' C - \frac{\alpha}{4} c_h^2 C^2 - \frac{\alpha}{16} C^2 c_E^2$. Aplicando a desigualdade de Poincaré, minoramos o termo $\left(\nu_1 - c_u' C - \frac{\alpha}{4} c_h^2 C^2 - \frac{\alpha}{16} C^2 c_E^2 \right) \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}b\|^2$ pelo termo $Ck \|b\|^2$. Observe que $\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^4 \leq \mathcal{E}_p^2(t)$. Agora, utilizamos a estimativa (2.3.35) em (2.3.38) e obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_p(t) + \frac{\alpha}{2} \|v'\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ + C \left(k - \frac{27(\alpha C)^4}{16(\alpha c_h^2 C^2)^3} \mathcal{E}_p^2(0) C_h^2 \right) \|b\|^2 \\ \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \|v'\|^2. \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Seja

$$c_1 := \min \left\{ \frac{\alpha}{4}, C \left(k - \frac{27(\alpha C)^4}{16(\alpha c_h^2 C^2)^3} \mathcal{E}_p^2(0) C_h^2 \right) \right\}.$$

Note que $\|v'\|^2 \leq \mathcal{E}_p(t)$. Aplicamos o Lema 2.1 em (2.3.39) obtemos a

seguinte desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}_p(t) + c_1\mathcal{G}_p(t) \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 \mathcal{G}_p(t).$$

Na seqüência dividimos ambos os membros por $\mathcal{G}_p(t)$ e obtemos

$$\frac{1}{\mathcal{G}_p(t)} \frac{d}{dt}\mathcal{G}_p(t) \leq \frac{C}{\nu_1} \|\tilde{\mathcal{L}}h\|^2 - c_1.$$

Agora, integramos a desigualdade acima de 0 a t obtendo

$$\ln(\mathcal{G}_p(t)) \leq \ln(\mathcal{G}_p(0)) + \frac{C}{\nu_1} \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds - c_1 t. \quad (2.3.40)$$

Seja $c_2 := \sup \left\{ \int_0^t \|\tilde{\mathcal{L}}h(s)\|^2 ds, t > 0 \right\}$. Aplicamos exp na desigualdade (2.3.40) e obtemos a seguinte estimativa

$$\mathcal{G}_p(t) \leq \mathcal{G}_p(0) \exp \left(\frac{C}{\nu_1} c_2 - c_1 t \right).$$

Aplicamos novamente o Lema 2.1, inferimos que

$$\mathcal{E}_p(t) \leq c_T \mathcal{E}_p(0) \exp \left(\frac{C}{\nu_1} c_2 - c_1 t \right).$$

□

Capítulo 3

Sistema

Magneto-Elástico com Dissipação Não Linear e Acoplamentos Lineares

3.1 Existência e Unicidade

Nesta seção estudamos a existência de soluções T -periódicas para o sistema magneto-elástico com dissipação não linear do tipo $\rho(u') = |u'|^p u'$ e acoplamentos lineares, em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domínio limitado, simplesmente conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 :

$$u'' + \mathcal{L}u + \rho(u') = \text{rot } h \wedge H_e + f, \quad (3.1.1)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h = \text{rot}[u' \wedge H_e], \quad (3.1.2)$$

$$\text{div } h = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times \Omega, \quad (3.1.3)$$

com as seguintes condições de fronteira e periodicidade respectivamente

$$u = 0, \quad h.n = 0, \quad \text{rot } h \wedge n = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) = u(T, x), \quad u'(0, x) = u'(T, x), \\ h(0, x) = h(T, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Assumimos as seguintes hipóteses:

(H_0) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado simplesmente conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 .

(H_1) $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ com $f(0) = f(T)$.

(H_2) $p \in [3, 4]$.

(H_3) as funções ρ e $\frac{\partial\rho}{\partial s_k} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são contínuas e satisfazem as seguintes propriedades:

(a) Existe uma constante positiva k_0 tal que

$$(\rho(z), z)_{\mathbb{R}^3} \geq k_0 \|z\|_{\mathbb{R}^3}^{p+2}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^3.$$

(b) Existem constantes positivos k_1 e r_ρ tais que

$$\|\rho(z)\|_{\mathbb{R}^3} \leq k_1 \|z\|_{\mathbb{R}^3}^{p+1}, \text{ se } \|z\|_{\mathbb{R}^3} \geq r_\rho.$$

$$(c) \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial\rho_i(\cdot, s)}{\partial s_k} \xi_i \xi_k \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \forall s \in \mathbb{R}^3.$$

($\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$ e $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^3}$ representam norma Euclidiana e o produto interno correspondente.)

A seguir, definiremos a solução fraca para o problema (3.1.1)-(3.1.5).

Definição 3.1. Dizemos que (u, h) é uma solução fraca de (3.1.1)-(3.1.5) se

1. $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{p+2}(0, T; L^{p+2}(\Omega))$,
2. $h \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$,

3. u e h satisfazem:

$$\begin{aligned}
 i) \int_0^T (u, \varphi)_2 \eta'' ds + \int_0^T a_I(u, \varphi)_2 \eta ds + \int_0^T (\rho(u'), \varphi)_2 \eta ds \\
 = \int_0^T (\text{rot } h \wedge H_e, \varphi)_2 \eta ds + \int_0^T (f, \varphi)_2 \eta, \\
 \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega), \forall \eta \in \mathbb{D}_T \\
 ii) \int_0^T (h, \psi)_2 \eta' ds + \int_0^T a_{II}(h, \psi)_2 \eta ds \\
 = \int_0^T (\text{rot}[u' \wedge H_e], \psi)_2 \eta ds, \forall \psi \in H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\Omega), \forall \eta \in \mathbb{D}_T,
 \end{aligned}$$

em que $\mathbb{D}_T := \omega \in C^\infty(\mathbb{R}) : w(s) = w(s+T), \forall s \in \mathbb{R}$.

Agora, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja $T > 0$ o período das funções $f, f' \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$. Assumimos hipóteses $(H_0) - (H_3)$. Então, existe uma solução fraca (u, h) do problema (3.1.1)-(3.1.5) que admite a seguinte regularidade adicional:*

$$\begin{aligned}
 h' &\in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)), \\
 u' &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ e} \\
 u'' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).
 \end{aligned}$$

Demonstração. Consideramos as equações usando as aproximações do Faedo-Galerkin para qualquer m inteiro positivo fixo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (u_m, \phi_j)_2 \eta'' + \int_0^T a_I(u_m, \phi_j)_2 \eta + \int_0^T (\rho(u'_m), \phi_j)_2 \eta \\
 = \int_0^T D_I(h_m, h_m)_2 (\phi_j)_2 \eta ds + \int_0^T (f, \phi_j)_2 \eta, \quad (3.1.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall \phi_j \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega), \forall \eta \in \mathbb{D}_T, 1 \leq j \leq m. \\
 - \int_0^T (h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \tilde{\eta}' + \int_0^T a_{II}(h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \tilde{\eta} = \int_0^T D_{II}(u'_m, h_m)_2 (\tilde{\phi}_j)_2 \tilde{\eta}, \quad (3.1.7)
 \end{aligned}$$

$$\forall \tilde{\phi}_j \in H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\Omega), \forall \tilde{\eta} \in \mathbb{D}_T, 1 \leq j \leq m,$$

em que, $D_I : H_\sigma^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$

$$\langle D_I(h, b), v \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{rot} h \wedge H_e \cdot v \, dx,$$

$D_{II} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega)$

$$\langle D_{II}(u, h), b \rangle = \int_{\Omega} u \wedge H_e \cdot \operatorname{rot} b \, dx.$$

Também consideramos as equações na forma do operador:

$$u_m'' + \mathcal{L}u_m + \rho(u_m') = \operatorname{rot} h_m \wedge H_e + f, \quad (3.1.8)$$

$$h_m' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h_m = \operatorname{rot}[u_m' \wedge H_e], \quad (3.1.9)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div}, \quad D(\mathcal{L}) = H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3, \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot}, \quad D(\tilde{\mathcal{L}}) = \{b \in H^2(\Omega)^3 \cap H_\sigma^1(\Omega)^3 : \operatorname{rot} b \wedge n|_{\partial\Omega} = 0\}, \end{aligned}$$

$$u_m = \sum_{i=1}^m c_j(t)\phi_j, \quad h_m = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_j(t)\tilde{\phi}_j,$$

$\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é a base de autofunções de

$$a_I(\phi_k, \omega) = \lambda_k(\phi_k, \omega)_2, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega),$$

e $\{\tilde{\phi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base de autofunções de

$$a_{II}(\tilde{\phi}_j, \tau) = \tilde{\lambda}_j(\tilde{\phi}_j, \tau)_2, \quad \forall \tau \in H_\sigma^1(\Omega).$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, definimos os espaços

$$C_T^1(S_m) := \{\omega \in C^1(\mathbb{R}, S_m) : \omega(t) = \omega(t+T); \omega'(t) = \omega'(t+T), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$C_T^0(\tilde{S}_m) := \{\omega \in C^0(\mathbb{R}, \tilde{S}_m) : \omega(t) = \omega(t+T), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

em que $S_m = \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ e $\tilde{S}_m = \operatorname{span}\{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_m\}$.

Queremos provar que existe uma solução T -periódica $(u_m, h_m) \in [C_T^2(S_m) \times$

$C_T^1(\tilde{S}_m)$] para o sistema semilinear acoplado (3.1.8)-(3.1.9), usando o Teorema 1.5 (Leray-Schauder). Para isso, provaremos que existe um número positivo R que depende apenas de $\sup_{t \in [0, T]} \|f\|$, $\sup_{z \in B(0, r)} \|\rho(z)\|_E$ e tal que

$$\begin{aligned} \|(u_m, h_m)\|_{C_{m, T}^{2,1}} &:= \sup_{t \in [0, T]} \{ \|u'_m\| + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u_m\| + \|h_m\| \\ &+ \|u''_m\| + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'_m\| + \|h'_m\| \} \leq R, \end{aligned}$$

em que $C_{m, T}^{2,1} := C_T^2(S_m) \times C_T^1(\tilde{S}_m)$.

Seja $C_{m, T}^{1,0} := C_T^1(S_m) \times C_T^0(\tilde{S}_m)$ e $\|(u_m, h_m)\|_{C_{m, T}^{1,0}} := \sup_{t \in [0, T]} \{ \|u'_m\| + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u_m\| + \|h_m\| \}$. Definimos uma aplicação

$$\Phi : C_{m, T}^{1,0} \rightarrow C_{m, T}^{2,1}$$

tal que $\forall (v_m, b_m) \in C_{m, T}^{1,0}$,

$$\Phi(v_m, b_m) = (u_m, h_m),$$

em que $(u_m, h_m) \in C_{m, T}^{2,1}$ é a única solução do seguinte sistema

$$u''_m + \mathcal{L}u_m + \rho(v'_m) + \alpha u'_m = \alpha v'_m + \text{rot } h_m \wedge H_e + f, \quad (3.1.10)$$

$$h'_m + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h_m = \text{rot}[u'_m \wedge H_e], \quad (3.1.11)$$

$$u_m = 0, \quad h_m \cdot n = 0, \quad \text{rot } h_m \wedge n = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \quad (3.1.12)$$

$$u_m(0, x) = u_m(T, x), \quad u'_m(0, x) = u'_m(T, x),$$

$$h_m(0, x) = h_m(T, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (3.1.13)$$

com $\alpha > 0$ arbitrário.

Afirmção: $C^{k_1}(\bar{\Omega})$ está imerso compactamente em $C^{k_2}(\bar{\Omega})$, para $k_1 > k_2 \geq 0$ ([34], p.184-185). Então, $C_{m, T}^{2,1}$ está imerso compactamente em $C_{m, T}^{1,0}$, e logo podemos considerar a aplicação $\Phi : C_{m, T}^{1,0} \rightarrow C_{m, T}^{1,0}$ compacta. A existência de solução do sistema (3.1.10)-(3.1.13) segue da Proposição 1.1. Para ver que o sistema satisfaz as condições da proposição, consideramos o sistema homogêneo correspondente

$$u''_m + \mathcal{L}u_m + \alpha(u'_m) = \text{rot } h_m \wedge H_e, \quad (3.1.14)$$

$$h'_m + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}} h_m = \text{rot}[u'_m \wedge H_e], \quad (3.1.15)$$

e provamos que a única solução T -periódica possível é a solução trivial (ver [51]). Assumimos que o sistema tem solução T -periódica (u_m, h_m) . Fazemos o produto interno da equação (3.1.14) por u'_m e da equação (3.1.15) por h_m , adicionamos os resultados e obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u'_m\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u_m\|^2 + \|h_m\|^2 \} + \alpha \|u'_m\|^2 + \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h_m\|^2 = 0.$$

Integrando de 0 a T e usando a hipótese de que u_m e h_m são T -periódicos, obtemos

$$\int_0^T \|u'_m\|^2(s) ds = 0 \Rightarrow u'_m = 0,$$

e

$$\int_0^T c_p^{-1} \|h_m\|^2(s) ds \leq \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h_m\|^2(s) ds = 0 \Rightarrow h_m = 0.$$

Retornando à (3.1.14), obtemos que

$$\mathcal{L}u_m = 0 \Rightarrow u_m = 0.$$

Portanto, o sistema (3.1.10)-(3.1.13) tem uma única solução T -periódica $(u_m, h_m) \in C_{m,T}^{1,0}$ tal que

$$u_m(0) = u_m(T), \quad u'_m(0) = u'_m(T), \quad h_m(0) = h_m(T).$$

Logo, a aplicação Φ está bem definida.

Para simplificar a notação, de agora em diante, ocultamos o índice m nas funções u e h .

Provaremos que Φ é contínua. Sejam $(u_1, h_1) = \Phi(v_1, b_1)$ e $(u_2, h_2) = \Phi(v_2, b_2)$, para algum (v_2, b_2) na bola de centro (v_1, b_1) e raio δ . Sejam $v := v_2 - v_1$, $u := u_2 - u_1$, $h := h_2 - h_1$. Então, (u, h) é solução do seguinte sistema

$$u'' + \mathcal{L}u + \rho(v_2) - \rho(v_1) + \alpha u' = \alpha v' + \text{rot } h \wedge H_e, \quad (3.1.16)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}} h = \text{rot}[u' \wedge H_e]. \quad (3.1.17)$$

Fazemos o produto interno da equação (3.1.16) por u' e da equação (3.1.17)

por h , adicionamos os resultados e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \alpha \|u'\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 + (\rho(v_2'), u') - (\rho(v_1'), u') \\ = \alpha(v', u') + (\operatorname{rot} h \wedge H_e, u') + (\operatorname{rot}[u' + H_e], h), \end{aligned}$$

em que $\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \{ \|u'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|h\|^2 \}$. Sabemos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}[u' \wedge H_e], h) &= ([u' \wedge H_e], \operatorname{rot} h) \\ &= -(H_e \wedge u', \operatorname{rot} h) \\ &= -(\operatorname{rot} h \wedge H_e, u'). \end{aligned}$$

Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \alpha \|u'\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 \\ \leq \alpha \|v'\| \|u'\| + \|\rho(v_2') - \rho(v_1')\| \|u'\|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young com $\epsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$ nos dois termos do lado direito e absorvendo termo correspondente no lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \frac{\alpha}{4} \|u'\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 \\ \leq \alpha \|v'\|^2 + \alpha \|\rho(v_2') - \rho(v_1')\|^2. \end{aligned}$$

Da hipótese (H_3) , segue que $\forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que se $\|(v, b)\| < \delta_1$, então

$$\|(\rho(v_2'(x, t))) - (\rho(v_1'(x, t)))\| < |\Omega|^{\frac{1}{2}} \epsilon_1, \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]. \quad (3.1.18)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \frac{\alpha}{4} \|u'\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 \\ \leq \alpha \delta_1^2 + \alpha |\Omega| \epsilon_1^2. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq \alpha \delta_1^2 + \alpha |\Omega| \epsilon_1^2. \quad (3.1.20)$$

Voltando à (3.1.19), integrando de 0 a T e tendo em conta a **periodicidade** de $\mathcal{E}(t)$ obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{4} \int_0^T \|u'(s)\|^2 ds + \nu_1 \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h(s)\|^2 ds \\ & \leq T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Agora, voltamos a fazer o produto interno da equação (3.1.16), desta vez, por u e obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u', u) + (\mathcal{L}u, u) + \alpha(u', u) + (\rho(v_2'), u) - (\rho(v_1'), u) \\ & = \alpha(v', u) + (\text{rot } h \wedge H_e, u) + (u', u'). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a T e dado que $\alpha(u', u) \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2 ds \\ & \leq \int_0^T (\rho(v_2'(s)) - \rho(v_1'(s)), u(s)) ds + \alpha \int_0^T (v'(s), u(s)) ds \\ & \quad + \int_0^T (\text{rot } h(s) \wedge H_e, u(s)) ds + \int_0^T \|u'(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Como $v \in C_{m,T}^{1,0}$, então $\|v'\|$ é limitada pela norma do sup. Logo, temos que $\|v'\| \leq C_{v'}$, com $C_{v'}$ constante. Usando a hipótese (H_3) e as estimativas (3.1.18) (3.1.21) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2 ds \\ & \leq \int_0^T \|\rho(v_2'(s)) - \rho(v_1'(s))\| \|u(s)\| ds \\ & \quad + \int_0^T \|v'(s)\| \|u(s)\| ds \\ & \quad + c_E \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h(s)\| \|u(s)\| ds + \int_0^T \|u'(s)\|^2 ds \\ & \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \epsilon_1 \int_0^T \|u(s)\| ds + C_{v'} \int_0^T \|u(s)\| ds \\ & \quad + c_E \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h(s)\| \|u(s)\| ds + T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2), \end{aligned}$$

em que $\|H_e\| = c_E$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2 ds \\
& \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \epsilon_1 T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + C_{v'} T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + c_E \left(\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2) .
\end{aligned}$$

Usando novamente a estimativa (3.1.21), a desigualdade de Young no primeiro termo do lado direito, a desigualdade de Young com $\sqrt{\epsilon_1}$ no segundo e terceiro termo do lado direito, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2 ds \\
& \leq |\Omega|\epsilon_1 T + \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^T \|u(s)\|^2 ds \\
& \quad + \frac{C_{v'}^2}{2\epsilon_1} T + \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^T \|u(s)\|^2 ds \\
& \quad + \frac{c_E^2 T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2)}{2\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^T \|u(s)\|^2 ds + T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2) .
\end{aligned}$$

Na seqüência, aplicamos a desigualdade de Poincaré e inferimos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{3\epsilon_1 C}{2}\right) \int_0^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2 ds \\
& \leq |\Omega|\epsilon_1 T + \frac{C_{v'}^2}{2\epsilon_1} T + \frac{c_E^2 T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2)}{2\epsilon_1} + T(\alpha\delta_1^2 + \alpha|\Omega|\epsilon_1^2) .
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Essa estimativa juntamente com (3.1.21) nos permite concluir que

$$\int_0^T \|\mathcal{E}(s)\| ds \leq C\delta_1^2 + C\epsilon_1^2 . \tag{3.1.23}$$

Com as estimativas (3.1.20) e (3.1.23) estamos em condições de aplicar o

Lema 1.5 e concluir que

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}(t) = \|(u, h)\|_{C_{m, T}^{1,0}} \leq C\delta_1^2 + C\epsilon_1^2.$$

Para qualquer $\epsilon > 0$, escolhemos $\epsilon_1 \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2C_6}}$ e fixamos δ_1 correspondente.

Agora, escolhemos $\delta \leq \min\{\delta_1, \sqrt{\frac{\epsilon}{2C_5}}\}$ obtendo que $\|(u, h)\| < \epsilon$, terminando a prova de que Φ é contínua.

Dando continuidade à demonstração, queremos estar em condições de aplicar o Teorema 1.5 (Leray-Schauder). Portanto, falta obter a existência de um número positivo R tal que se (u, h) é solução de

$$(u, h) = \lambda\Phi(u, h), \quad (u, h) \in C_T^1(S_m) \times C_T^0(\tilde{S}_m), \quad 0 < \lambda < 1,$$

então,

$$\|(u, h)\|_{C_{m, T}^{1,0}} \leq R.$$

Assumimos que $(u, h) \in C_{m, T}^{1,0}$ é solução do seguinte sistema

$$u'' + \mathcal{L}u + \alpha(1 - \lambda)u' + \lambda\rho(u') = \text{rot } h \wedge H_e + \lambda f, \quad (3.1.24)$$

$$h' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h = \text{rot}[u' \wedge H_e], \quad (3.1.25)$$

Formalmente, fazemos o produto interno da equação (3.1.24) por u' e (3.1.25) por h , adicionamos os resultados obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|h\|^2 \} \\ & + \alpha(1 - \lambda)\|u'\|^2 + \lambda(\rho(u'), u') + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\|^2 \\ & = (\text{rot } h \wedge H_e, u') + \lambda(f, u') + (\text{rot}[u' \wedge H_e], h). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$(\text{rot}[u' \wedge H_e], h) = ([u' \wedge H_e], \text{rot } h) = -(\text{rot } h \wedge H_e, u'),$$

e $\alpha(1 - \lambda)\|u'\|^2 \geq 0$. Então, temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ & \|u'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|h\|^2 \} \\ & + \lambda(\rho(u'), u') + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\|^2 \\ & \leq \lambda(f, u'). \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Da hipótese (H_3) (a), temos que $\lambda(\rho(u'), u') \geq \lambda k_0 \|u'\|_{\mathbb{R}^3}^{p+2}$. Usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young com $\epsilon_1 = \left(\frac{\lambda k_0(p+2)}{2}\right)^{\frac{1}{p+2}}$ no lado direito da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} \lambda|(f, u')| & \leq \lambda \|f\|_q \|u'\|_{p+2} \\ & \leq \frac{\lambda^q}{\epsilon_1^q q} \|f\|_q^q + \frac{\epsilon_1^{p+2}}{p+2} \|u'\|_{p+2}^{p+2}, \end{aligned}$$

em que $q = \frac{p+2}{p+1}$. Substituindo essas desigualdades em (3.1.26) e absorvendo o termo $\frac{\epsilon_1^{p+2}}{p+2} \|u'\|_{p+2}^{p+2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ & \|u'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|h\|^2 \} \\ & + \frac{\epsilon_1^{p+2}}{p+2} \|u'\|_{p+2}^{p+2} + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\|^2 \\ & \leq \frac{\lambda^q}{\epsilon_1^q q} \|f\|_q^q. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Na sequência, integramos de 0 a T , usando a **periodicidade** e dado que $\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\|^2 \geq 0$, obtemos a seguinte estimativa para u'

$$\int_0^T \|u'(s)\|_{p+2}^{p+2} ds \leq \frac{\lambda^q(p+2)}{\epsilon_1^{p+1+q}q} \int_0^T \|f(s)\|_q^q ds := c_{1f}. \quad (3.1.28)$$

Voltamos à (3.1.27), integramos de 0 a T e como $\frac{\epsilon_1^{p+2}}{p+2} \|u'\|_{p+2}^{p+2} \geq 0$, obtemos a seguinte estimativa para h

$$\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h(s)\|^2 ds \leq \frac{\lambda^q}{\nu_1 \epsilon_1 q} \int_0^T \|f(s)\|_{L^q}^q ds := c_{2f}. \quad (3.1.29)$$

Para obter mais regularidade no tempo, voltamos ao sistema (3.1.24)-(3.1.25) e derivamos no tempo obtendo

$$u''' + \mathcal{L}u' + \alpha(1 - \lambda)u'' + \lambda D\rho(u').u'' = \text{rot } h' \wedge H_e + \lambda f', \quad (3.1.30)$$

$$h'' + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h' = \text{rot}[u'' \wedge H_e], \quad (3.1.31)$$

Fazemos o produto interno da equação (3.1.30) por u'' e (3.1.31) por h' , adicionamos os resultados obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u''\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \|h'\|^2 \} \\ & + \alpha(1 - \lambda) \|u''\|^2 + \lambda(D\rho(u').u'', u'') + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h'\|^2 \\ & = (\text{rot } h' \wedge H_e, u'') + \lambda(f', u'') + (\text{rot}[u'' \wedge H_e], h'). \end{aligned}$$

Note que

$$(\text{rot}[u'' \wedge H_e], h') = -(\text{rot } h' \wedge H_e, u'').$$

Então, temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u''\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \|h'\|^2 \} \\ & + \alpha(1 - \lambda) \|u''\|^2 + \lambda(D\rho(u').u'', u'') + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h'\|^2 \\ & = \lambda(f', u''). \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Usando a desigualdade de Young com $\epsilon_2 = \frac{\alpha(1 - \lambda)}{\lambda}$ no lado direito da igualdade obtemos

$$\lambda \|(f', u'')\| \leq \frac{\lambda}{2\epsilon_2} \|f'\|^2 + \frac{\lambda\epsilon_2}{2} \|u''\|^2.$$

Substituindo essas desigualdades em (3.1.32) e absorvendo o termo $\frac{\lambda\epsilon_2}{2} \|u''\|^2$ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u''\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \|h'\|^2 \} \\ & + \frac{\alpha}{2}(1 - \lambda) \|u''\|^2 + \lambda(D\rho(u').u'', u'') + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h'\|^2 \\ & \leq \frac{\lambda}{2\epsilon_2} \|f'\|^2. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Na seqüência, integramos de 0 a T e usando a hipótese sobre a ρ obtemos a seguinte estimativa para u''

$$\int_0^T \|u''\|^2(s) ds \leq \frac{1}{\alpha \epsilon_2} \int_0^T \|f'\|^2(s) ds := c_{3f'} . \quad (3.1.34)$$

Integramos novamente de 0 a T a equação (3.1.33), e obtemos uma estimativa para h'

$$\int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2\epsilon_2 \nu_1} \int_0^T \|f'(s)\|^2 ds := c_{4f'} . \quad (3.1.35)$$

Agora, definimos a energia de segunda ordem do sistema

$$\mathcal{E}_{II}(t) := \frac{1}{2} \left\{ \|u'\|^2 + \|u''\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|h\|^2 + \|h'\|^2 \right\}$$

e definimos também um funcional

$$\mathcal{G}(t) := \left\{ \mathcal{E}_{II}(t) + (u', \frac{\epsilon_3}{2} u) + (u'', \frac{\epsilon_3}{2} u') \right\} .$$

Estabeleceremos agora, a relação de equivalência entre a energia e o funcional $\mathcal{G}(t)$. Sabemos que

$$|(u', \frac{\epsilon_3}{2} u)| \leq \frac{\epsilon_3}{4} \|u'\|^2 + \frac{c_p \epsilon_3}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 .$$

O que implica que

$$(u', \frac{\epsilon_3}{2} u) \geq -\frac{\epsilon_3}{4} \|u'\|^2 - \frac{c_p \epsilon_3}{4} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 .$$

De forma análoga temos que

$$(u'', \frac{\epsilon_3}{2} u') \geq -\frac{\epsilon_3}{4} \|u''\|^2 - \frac{\epsilon_3}{4} \|u'\|^2 .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_3}{2}\right) \|u'\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c_p \epsilon_3}{4}\right) \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|h\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_3}{4}\right) \|u''\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 + \frac{1}{2} \|h'\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \mathcal{E}_{II}(t), \quad \forall t \geq 0 . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_3}{2}\right) \|u'\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{c_p \epsilon_3}{4}\right) \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|h\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_3}{4}\right) \|u''\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \frac{1}{2} \|h'\|^2 \\ &\leq 2\mathcal{E}_{II}(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Das duas desigualdades anteriores inferimos o seguinte Lema:

Lema 3.1. *Se $0 < \epsilon_3 < \min\{1, \frac{2}{c_p}\}$, então*

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_{II}(t) \leq \mathcal{G}(t) \leq 2\mathcal{E}_{II}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Para obter mais estimativas, fazemos o produto interno da equação (3.1.24) por $\frac{\epsilon_3}{2}u$ e obtemos

$$\begin{aligned} (u'', \frac{\epsilon_3}{2}u) + (\mathcal{L}u, \frac{\epsilon_3}{2}u) \\ + \alpha(1 - \lambda)(u', \frac{\epsilon_3}{2}u) + (\lambda\rho(u'), \frac{\epsilon_3}{2}u) \\ = (\text{rot } h \wedge H_e, \frac{\epsilon_3}{2}u) + (\lambda f, \frac{\epsilon_3}{2}u). \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Também, fazemos o produto interno da equação (3.1.30) por $\frac{\epsilon_3}{2}u'$ e obtemos

$$\begin{aligned} (u''', \frac{\epsilon_3}{2}u') + (\mathcal{L}u', \frac{\epsilon_3}{2}u') \\ + \alpha(1 - \lambda)(u'', \frac{\epsilon_3}{2}u') + (\lambda(\frac{\partial}{\partial t}\rho(u')), \frac{\epsilon_3}{2}u') \\ = (\text{rot } h' \wedge H_e, \frac{\epsilon_3}{2}u') + (\lambda f', \frac{\epsilon_3}{2}u'). \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Adicionando as equações (3.1.26), (3.1.32), (3.1.36) e (3.1.37) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) + \alpha(1 - \lambda)\|u'\|^2 + \lambda(\rho(u'), u') + \nu_1\|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h\|^2 \\ + \alpha(1 - \lambda)\|u''\|^2 + \lambda(\frac{\partial}{\partial t}(\rho(u')), u'') + \nu_1\|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}h'\|^2 \\ + \frac{\epsilon_3}{2}\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2}\alpha(1 - \lambda)(u', u) + \lambda\frac{\epsilon_3}{2}(\rho(u'), u) \\ + \frac{\epsilon_3}{2}\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2}\alpha(1 - \lambda)(u'', u') + \lambda\frac{\epsilon_3}{2}(\frac{\partial}{\partial t}(\rho(u')), u') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda \|f\| \|u'\| + \lambda \|f'\| \|u''\| + \lambda \frac{\epsilon_3}{2} \|f\| \|u\| + \lambda \frac{\epsilon_3}{2} \|f'\| \|u'\| \\
&+ c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|u\| + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\| \|u'\| \\
&+ \frac{\epsilon_3}{2} \|u'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|u''\|^2.
\end{aligned}$$

Das hipóteses assumidas sobre a função ρ temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 \\
&\leq \|f\| \|u'\| + \|f'\| \|u''\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f\| \|u\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f'\| \|u'\| \\
&+ c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|u\| + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\| \|u'\| + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u'\| \|u\| \\
&+ \frac{\epsilon_3}{2} \|u'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|u''\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} (\rho(u'), u) + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u''\| \|u'\|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, minoramos os termos $\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2$ e $\nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\|^2$ pelos termos $\nu_1 c_p^{-1} \|h\|^2$ e $\nu_1 c_p^{-1} \|h'\|^2$ respectivamente. Além disso, adicionamos e subtraímos os termos $\frac{\epsilon_3}{2} \|h\|^2$ e $\frac{\epsilon_3}{2} \|h'\|^2$ no lado esquerdo obtendo a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + (\nu_1 c_p^{-1} - \frac{\epsilon_3}{2}) \|h\|^2 + (\nu_1 c_p^{-1} - \frac{\epsilon_3}{2}) \|h'\|^2 \\
&+ \frac{\epsilon_3}{2} \|h\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|h'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 \\
&\leq \|f\| \|u'\| + \|f'\| \|u''\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f\| \|u\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f'\| \|u'\| \\
&+ c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|u\| + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\| \|u'\| + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u'\| \|u\| \\
&+ \frac{\epsilon_3}{2} \|u'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|u''\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} (\rho(u'), u) + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u''\| \|u'\|. \quad (3.1.38)
\end{aligned}$$

Note que o termo $\nu_1 c_p^{-1} - \frac{\epsilon_3}{2}$ é positivo pelo fato de ν_1 ser grande e $0 < \epsilon_3 < \min\{1, \frac{2}{c_p}\}$.

Estimaremos o termo $\frac{\epsilon_3}{2} (\rho(u'), u)$. Devido à hipótese $(H_3)(b)$, desigualdade de Hölder e a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_3}{2} \|(\rho(u'), u)\| &= \frac{\epsilon_3}{2} \int_{\Omega} \|(\rho(u'), u)\| \, dX \leq \frac{\epsilon_3}{2} k_1 \int_{\Omega} \|u'\|_{\mathbb{R}^3}^{p+1} \|u\|_E \, dX \\
&\leq \frac{\epsilon_3}{2} k_1 \left(\int_{\Omega} \|u'\|_{\mathbb{R}^3}^{p+2} \, dX \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \left(\int_{\Omega} \|u\|_{\mathbb{R}^3}^{p+2} \, dX \right)^{\frac{1}{p+2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \|u'\|_{L^{p+2}}^{p+1} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|_{L^{p+2}} .$$

Substituímos a estimativa anterior em (3.1.38) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) &+ \frac{\epsilon_3}{2} \|h\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|h'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u'\|^2 \\ &\leq \|f\| \|u'\| + \|f'\| \|u''\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f\| \|u\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f'\| \|u'\| \\ &+ c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|u\| + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\| \|u'\| + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u'\| \|u\| \\ &+ \frac{\epsilon_3}{2} \|u'\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \|u''\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u''\| \|u'\| \\ &+ \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \|u'\|_{L^{p+2}}^{p+1} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|_{L^{p+2}} . \end{aligned}$$

Na sequência adicionamos a ambos os lados os termos $\frac{\epsilon_3}{2} \|u'\|^2$ e $\frac{\epsilon_3}{2} \|u''\|^2$ e escolhemos $\epsilon_3 < \min\{1, \frac{2}{c_p}, \frac{2}{\nu_1 c_p}\}$ obtendo o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) &+ \frac{\epsilon_3}{2} \mathcal{E}_{II}(t) \\ &\leq \|f\| \|u'\| + \|f'\| \|u''\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f\| \|u\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f'\| \|u'\| \\ &+ c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| \|u\| + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\| \|u'\| + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u'\| \|u\| \\ &+ \epsilon_3 \|u'\|^2 + \epsilon_3 \|u''\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u''\| \|u'\| \\ &+ \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \|u'\|_{L^{p+2}}^{p+1} \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u\|_{L^{p+2}} . \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.1 e assumindo sem perda de generalidade que $\mathcal{G}(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, dividimos ambos os lados por $\sqrt{\mathcal{G}(t)}$ obtendo

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{G}(t)} &+ 4\epsilon_3 \sqrt{\mathcal{G}(t)} \\ &\leq \|f\| + \|f'\| + c_p \frac{\epsilon_3}{2} \|f\| + \frac{\epsilon_3}{2} \|f'\| \\ &+ c_p c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\| + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\| + c_p \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u'\| \\ &+ \epsilon_3 \|u'\| + \epsilon_3 \|u''\| + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha \|u''\| \\ &+ \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \|u'\|_{L^{p+2}}^{p+1} . \end{aligned}$$

Integrando de 0 a T e usando o fato de que $\mathcal{G}(t)$ é T -periódico, obtemos

$$\begin{aligned}
4\epsilon_3 \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}}(s) ds &\leq (1 + c_p \frac{\epsilon_3}{2}) \int_0^T \|f(s)\| ds + (1 + \frac{\epsilon_3}{2}) \int_0^T \|f'(s)\| ds \\
&+ c_p c_E \frac{\epsilon_3}{2} \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h(s)\| ds + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \int_0^T \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'(s)\| ds \\
&+ (\epsilon_3 + c_p \frac{\epsilon_3}{2} \alpha) \int_0^T \|u'(s)\| ds + (\epsilon_3 + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha) \int_0^T \|u''(s)\| ds \\
&+ \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \int_0^T \|u'(s)\|_{L^{p+2}}^{p+1} ds .
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (H_1) (sobre f e f') temos que $(1 + c_p \frac{\epsilon_3}{2}) \int_0^T \|f(s)\| ds \leq c_{5f}$ e $(1 + \frac{\epsilon_3}{2}) \int_0^T \|f'(s)\| ds \leq c_{6f'}$. Aplicando a desigualdade de Hölder e as estimativas (3.1.28), (3.1.29), (3.1.34) e (3.1.35) obtemos

$$\begin{aligned}
4\epsilon_3 \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}}(s) ds &\leq c_{5f} + c_{6f'} + c_p c_E \frac{\epsilon_3}{2} \sqrt{T c_{2f}} \\
&+ c_E \frac{\epsilon_3}{2} \sqrt{T c_{4f'}} + (\epsilon_3 + c_p \frac{\epsilon_3}{2} \alpha) \sqrt{T c_{1f}} \\
&+ (\epsilon_3 + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha) \sqrt{T c_{3f'}} + \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \sqrt{T c_{1f}} .
\end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned}
C_f &:= c_{5f} + c_{6f'} + c_p c_E \frac{\epsilon_3}{2} \sqrt{T c_{2f}} + c_E \frac{\epsilon_3}{2} \sqrt{T c_{4f'}} \\
&+ (\epsilon_3 + c_p \frac{\epsilon_3}{2} \alpha) \sqrt{T c_{1f}} + (\epsilon_3 + \frac{\epsilon_3}{2} \alpha) \sqrt{T c_{3f'}} + \frac{\epsilon_3}{2} k_1 c_p \sqrt{T c_{1f}} ,
\end{aligned}$$

e não depende de λ . Então,

$$\int_0^T \sqrt{\mathcal{G}}(s) ds \leq \frac{C_f}{4\epsilon_3} .$$

Em particular, pelo Lema 3.1, temos

$$\int_0^T \sqrt{\mathcal{E}_{II}}(s) ds \leq \frac{C_f}{2\sqrt{2}\epsilon_3} . \quad (3.1.39)$$

Para aplicar o Lema 1.5 (Gronwall periódico), obteremos a outra estimativa necessária. Para isso, adicionamos as equações (3.1.26) e (3.1.32) obtendo

a identidade de energia

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{II}(t) + \alpha(1 - \lambda) \|u'\|^2 + \lambda(\rho(u'), u') \\
& \quad + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h\|^2 + \alpha(1 - \lambda) \|u''\|^2 \\
& \quad + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho(u')), u'' \right) + \nu_1 \|\tilde{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}} h'\|^2 \\
& = \lambda(f, u') + \lambda(f', u'').
\end{aligned}$$

Usando a hipótese $\lambda < 1$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{II}(t) & \leq (f, u') + (f', u'') \\
& \leq \|f\| \sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)} + \|f'\| \sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)}.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $\sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)}$ obtemos a estimativa pretendida

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)} \leq \frac{1}{2} (\|f\| + \|f'\|) \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T]} (\|f\| + \|f'\|). \quad (3.1.40)$$

Aplicando o Lema 1.5 (Gronwall periódico) inferimos a seguinte estimativa uniforme

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathcal{E}_{II}(t)} \leq \frac{cf}{4T\epsilon_3} + 2T \sup_{t \in [0, T]} (\|f\| + \|f'\|).$$

Com essa estimativa, podemos aplicar o Teorema 1.5 (Leray-Schauder) para a aplicação Φ com a seguinte estimativa a priori

$$\|(u, h)\|_{C_{m, T}^{1,0}} \leq \frac{cf}{4T\epsilon_3} + 2T \sup_{t \in [0, T]} (\|f\| + \|f'\|) := R.$$

Portanto, provamos que para cada $m > 0$, existe uma única solução T -periódica $(u_m, h_m) \in C_{m, T}^{2,1}$ para o problema aproximado (3.1.8)-(3.1.9).

As normas $\|u'_m\|$, $\|u_m\|$ e $\|h_m\|$ são limitadas independentes de t e m . Como em dimensão finita todas as normas são equivalentes, então cada componentes dessas normas são limitadas pela norma do supremo. Essas limitações são independentes de u'_m , u_m e h_m . Portanto, suas componentes são limitadas em dimensão finita e são soluções de um sistema de EDO'S. Logo, essas soluções podem ser prolongadas à dimensão infinita.

Agora precisamos provar as convergências das soluções aproximadas obtidas. O procedimento para passar limite nos termos não oferece dificuldades e está detalhado na tese de Mohebbi [50]. Apresentaremos de forma resumida essa parte.

A existência de solução T -periódica forte do problema em dimensão finita nos permite obter sequência (u_m, h_m) tal que

I h_m é limitada em $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$,

II h'_m é limitada em $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$,

III u_m é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$,

IV u'_m é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, e

V u''_m é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

De (III) e Teorema de Banach-Alaoglu, segue a existência de uma $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e uma subsequência de $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, denotado novamente por $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $u_m \rightarrow u$ fraca*. Como $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ é imerso continuamente em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, segue também de (III) que u_m é limitado em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Portanto, existe um $u_1 \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ para a qual a subsequência u_m converge fraca. Da imersão contínua de L^∞ em L^2 , concluímos que $u_1 = u$. Assim, inferimos a existência de $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que

(i) $u_m \rightarrow u$ fraca em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

De forma análoga, obtemos a existência de $u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $h \in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ tais que

(ii) $u'_m \rightarrow u'$ fraca em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$,

(iii) $h_m \rightarrow h$ fraca* em $L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ e

(iv) $h_m \rightarrow h$ fraca em $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$.

Além das convergências fracas, temos também a seguinte convergência forte (v) $h_m \rightarrow h$ em $L^2(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$.

Para obter essa convergência, escrevemos a equação do campo magnético como um funcional de $H_\sigma^{-\frac{3}{2}}(\Omega)$, isto é,

$$\langle h'_m, \tilde{\phi} \rangle + \nu_1 \langle \tilde{\mathcal{L}}h_m, \tilde{\phi} \rangle = \langle \text{rot}[u'_m \wedge H_e], \tilde{\phi} \rangle, \quad \forall \tilde{\phi} \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

Usando o Lema 1.6 obtemos

$$\begin{aligned} \langle h'_m, \tilde{\phi} \rangle &= (u' \wedge H_e, \text{rot } \tilde{\phi}) - \nu_1 (\text{rot } h_m, \text{rot } \tilde{\phi}) \\ &\leq \|u'_m\| \|H_e\|_{H^1} \|\tilde{\phi}\|_{H^{\frac{3}{\sigma}}} + \nu_1 \|h_m\|_{H^1_\sigma} \|\tilde{\phi}\|_{H^{\frac{3}{\sigma}}}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $\|\tilde{\phi}\|_{H^{\frac{3}{\sigma}}}$ e tomando o sup sobre $\tilde{\phi} \in H^{\frac{3}{\sigma}}(\Omega)$, obtemos

$$\|h'_m\|_{H^{-\frac{3}{\sigma}}} \leq \|u'_m\| \|H_e\|_{H^1} + \nu_1 \|h_m\|_{H^1_\sigma}.$$

Na seqüência, elevamos ao quadrado ambos os lados, integramos de 0 a T e inferimos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \int_0^T \|h'_m\|_{H^{-\frac{3}{\sigma}}}^2 &\leq 2c_E \int_0^T \|u'_m\|^2 + 2\nu_1 \int_0^T \|h_m\|_{H^1_\sigma} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

em que foi usado I e IV e C é constante e $\|H_e\|_{H^1} \leq Cc_E$. Portanto, $\{h'_m\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado em $L^2(0, T; H^{-\frac{3}{\sigma}}(\Omega))$. Usando argumentos de compacidade e teorema de imersão obtemos a convergência pretendida (v).

Para obter a solução na forma da definição fraca, multiplicamos (3.1.8) e (3.1.9) por $\eta \in \mathbb{D}_T$ e integramos por partes no tempo, obtendo que para qualquer $\eta > 0$ e para qualquer $j > 0$, (u_m, h_m) satisfaz

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_m, \phi_j)_2 \eta'' + \int_0^T a_I(u_m, \phi_j)_2 \eta + \int_0^T (\rho(u'_m), \phi_j)_2 \eta \\ &= \int_0^T (\text{rot } h_m \wedge H_e, \phi_j)_2 \eta + \int_0^T (f, \phi_j)_2 \eta, \\ & - \int_0^T (h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \eta' + \int_0^T a_{II}(h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \eta = \int_0^T (u'_m \wedge H_e, \text{rot } \tilde{\phi}_j)_2 \eta. \end{aligned}$$

Na seqüência, passamos o limite nas equações acima quando $m \rightarrow \infty$. Usando as convergências fracas (i) e (iv) temos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (u_m, \phi_j)_2 \eta'' &= \int_0^T (u, \phi_j)_2 \eta'', \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T a_I(u_m, \phi_j)_2 \eta &= \int_0^T a_I(u, \phi_j)_2 \eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \eta' &= \int_0^T (h, \tilde{\phi}_j)_2 \eta', \text{ e} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T a_{II}(h_m, \tilde{\phi}_j)_2 \eta &= \int_0^T a_{II}(h, \tilde{\phi}_j)_2 \eta.\end{aligned}$$

Agora, passaremos o limite nos termos acoplados. Começamos com o termo acoplado na equação do campo de deslocamento. Isto é,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (\text{rot } h_m \wedge H_e, \phi_j) \eta \rightarrow \int_0^T (\text{rot } h \wedge H_e, \phi_j) \eta.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T (\text{rot } h_m \wedge H_e - \text{rot } h \wedge H_e, \phi_j) \eta \right| \\ \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T (\text{rot}(h_m - h) \wedge H_e, \phi_j) \eta \right| \\ = 0,\end{aligned}$$

em que adicionamos e subtraímos h , usamos (v) e o fato de que ϕ_j é nula na fronteira. Assim, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (\text{rot } h_m \wedge H_e, \phi_j) \eta = \int_0^T (\text{rot } h \wedge H_e, \phi_j) \eta.$$

De forma análoga obtemos a convergência do termo acoplado na equação do campo magnético. Isto é,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (u'_m \wedge H_e, \text{rot } \tilde{\phi}_j) \eta \rightarrow \int_0^T (u' \wedge H_e, \tilde{\phi}_j) \eta.$$

O próximo passo é provar a convergência do termo dissipativo não linear $\rho(u'_m)$. Seja $q = \frac{p+2}{p+1}$. Usando a hipótese $(H_3)(b)$ e IV temos a seguinte limitação

$$\begin{aligned}\|\rho(u'_m)\|_{L^q(0,T;L^q)}^q &= \int_0^T \int_{\Omega} \|\rho(u'_m)\|^q \\ &\leq k_1 \int_0^T \int_{\Omega} \|u'_m\|^{p+2} \\ &= k_1 \|u'_m\|_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2})}^{p+2}\end{aligned}$$

$$\leq C .$$

Portanto, temos que $\{\rho(u'_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitado em $L^q(0, T; L^q)$ e existe uma subsequência denotada novamente por u'_m e $\xi \in L^q(0, T; L^q)$ tal que

(vi) $\rho(u'_m) \rightarrow \xi$ fraco em $L^q(0, T; L^q)$, quando $m \rightarrow \infty$. Isto é,

$$\int_0^T (\rho(u'_m), \phi) ds \rightarrow \int_0^T (\xi, \phi) ds, \quad \forall \phi \in L^{p+2}(0, T; L^{p+2}).$$

A parte final da demonstração é provar que $\xi = \rho(u')$. O procedimento clássico para obtenção dessa igualdade é conhecido como "Minty's trick". Basicamente, obtém-se uma igualdade de energia, uma desigualdade de energia e usa-se propriedades de convolução, monotonia de ρ e teorema de convergência dominada. A igualdade de energia é obtida por regularização no tempo. Omitimos essa parte que pode ser encontrada em [50]. \square

A unicidade das soluções fortes T -periódicas no tempo é facilmente obtida usando o seguinte Lema ([41], p.7):

Lema 3.2. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\beta \geq 1$ a desigualdade*

$$(|x|^{\beta-1}x - |y|^{\beta-1}y) \cdot (x - y) \geq \frac{1}{2}(|x|^{\beta-1} + |y|^{\beta-1})|x - y|^2$$

é válida e o coeficiente $\frac{1}{2}$ é ótimo.

Agora enunciamos o teorema da unicidade:

Teorema 3.2. *Se*

$$(\rho(x) - \rho(y))(x - y) \geq \frac{1}{2}(|x|^p + |y|^p)|x - y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

então a solução forte T -periódica (u, h) para o problema (3.1.1) - (3.1.5) é única.

Capítulo 4

Existência de Soluções T -Periódicas para o Sistema Ferrofluidos

4.1 Introdução

O escopo deste capítulo é o estudo de questões de existência de soluções periódicas fracas e fortes de um sistema de equações diferenciais parciais que modelam o movimento de fluidos influenciado por forças fortes de polarização magnética, ou seja, certas equações diferenciais parciais da Ferro-hidrodinâmica (FHD). Os fluidos magnéticos, ou ferrofluidos, são fluidos contendo nano-partículas em grande quantidade (10^{23} partículas por metro cúbico, cada partícula com 3 a 15 nanômetros de diâmetro). Ferrofluidos tem sido empregados em várias aplicações como em selos de eixos rotativos nos discos rígidos de computadores, na manufatura de semicondutores, em selos de pressão para compressores, etc. Eles são também usados no resfriamento de bobinas de speakers, para administrar drogas em certas partes do corpo, como marcador de fluxo sanguíneo em medidas circulatórias não-invasivas, etc. ([63]).

Revisemos brevemente a obtenção das equações governantes (mais detalhes em [63], [64]).

A equação do movimento para o fluido magnético é obtida de um balanço de forças por unidade de volume (via segunda lei de Newton), sendo dada por

$$\rho \frac{dv}{dt} = f_p + f_v + f_g + f_m + f_a, \quad (4.1.1)$$

onde $d/dt = \partial/\partial t + v \cdot \nabla$ é a derivada material, ρ é a densidade do fluido e v é sua velocidade,

$$f_p = -\nabla p \quad (4.1.2)$$

é a força de pressão por unidade de volume (p é a pressão do fluido), $f_v = \nabla \cdot T_v$ é a força viscosa por unidade de volume, sendo T_v o tensor tensão viscoso, dado por

$$T_v = \eta [\nabla v + (\nabla v)^t] + \lambda (\nabla \cdot v) I,$$

onde η é o primeiro coeficiente de viscosidade e λ é o segundo coeficiente de viscosidade. Então,

$$f_v = \eta \nabla v + (\eta + \lambda) \nabla (\text{div } v).$$

Como para fluidos incompressíveis $\text{div } v = 0$, temos que

$$f_v = \eta \Delta v. \quad (4.1.3)$$

A força de corpo por unidade de volume devido ao campo gravitacional é dada por

$$f_g = \rho g, \quad (4.1.4)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Em relação à penúltima força na equação de balanço de momento linear, $f_m = \nabla \cdot T_m$, onde $T_m = -aI + Bh$ é o tensor tensão de um fluido magnetizável. Então,

$$\nabla \cdot T_m = -\nabla a + B \cdot \nabla h$$

(pois $\text{div } B = 0$ pela equação de Maxwell). Como

$$B = \mu_0 (h + m),$$

substituindo na equação anterior, obtém-se

$$f_m = -\nabla \left(a + \frac{\mu_0}{2} |h|^2 \right) + \mu_0 m \cdot \nabla h. \quad (4.1.5)$$

A força relacionada ao momento angular interno é $f_a = \nabla \cdot T_1$, onde

$$T_a = \frac{1}{2} \epsilon \cdot A,$$

$\epsilon = e_i e_j e_k \epsilon_{i,j,k}$ e

$$A = 2\xi (\text{rot } v - 2\omega).$$

A descreve a taxa de conversão do momento angular externo em momento angular interno. Então,

$$T_a = \xi \epsilon \cdot (\text{rot } v - 2\omega)$$

e portanto:

$$f_a = -\frac{1}{2} \text{rot } A = \xi \nabla (\nabla \cdot v) + \xi \Delta v + 2\xi \text{rot } \omega. \quad (4.1.6)$$

Portanto, a equação do movimento para fluidos magnéticos é dada por

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = & -\nabla \Pi + \eta_e \Delta v \\ & + \mu_0 m \cdot \nabla h + g + 2\xi \text{rot } \omega, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

com $\eta_e = \xi + \eta$, $\Pi = a + \frac{\mu_0}{2} |h|^2 + p$ e a condição de incompressibilidade é

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (4.1.8)$$

Derivemos agora a equação da magnetização m , que é o momento magnético do dipolo por unidade de volume. A denominada equação de relaxação estabelece que a taxa de variação do momento magnético é proporcional ao

seu deslocamento vetorial do equilíbrio. Isto é,

$$\frac{D'm}{Dt} = -\frac{1}{\tau} (m - m_0),$$

sendo τ a constante do tempo de relaxação. D' refere-se a um referencial F' que move-se e rotaciona com o movimento médio das partículas suspensas. Em 1974, Schliomis propôs o seguinte modelo:

$$\frac{dm}{dt} = \omega \wedge m - \frac{1}{\tau} (m - m_0). \quad (4.1.9)$$

Para baixos limites do campo magnético $m_0 = \chi_0 h$, onde χ_0 é a denominada suscetibilidade magnética inercial. Então,

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (v \cdot \nabla) m = \omega \wedge m - \frac{1}{\tau} (m - \chi_0 h). \quad (4.1.10)$$

A última equação de conservação do modelo a ser investigado neste capítulo é derivada de um balanço de momento angular interno:

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho G + \nabla \cdot C + A,$$

onde

$$C = \lambda' (\nabla \cdot \omega) I + \eta' [\nabla \omega + (\nabla \omega)t].$$

Então,

$$\nabla \cdot C = (\lambda' + \eta') \nabla (\nabla \cdot \omega) + \eta' \Delta \omega.$$

Logo,

$$\rho I \frac{d\omega}{dt} = \rho G + 2\xi (\text{rot } v - 2\omega) + \beta' \nabla (\nabla \cdot \omega) + \eta' \Delta \omega.$$

Usando a relação constitutiva $\rho G = \mu_0 m \wedge h$, obtemos a equação do momento angular do ferrofluido.

$$\rho I \frac{d\omega}{dt} = \mu_0 m \wedge h + 2\xi (\text{rot } v - 2\omega) + \beta' \nabla (\nabla \cdot \omega) + \eta' \Delta \omega. \quad (4.1.11)$$

onde $\beta' = \lambda' + \eta'$.

As equações destacadas são complementadas com as seguintes equações para o campo magnético (equações magneto-estáticas):

$$\text{rot } h = 0, \quad \text{div } (h + 4\pi m) = 0. \quad (4.1.12)$$

A primeira equação é a forma magneto-estática da lei de Ampère.

Revisão bibliográfica

O modelo matemático correspondente às equações governantes descritas na seção anterior é denominado na literatura de modelo de Rosensweig. Revisaremos apenas os trabalhos da literatura que trataram questões de existência de soluções para este modelo. Em 2008 Amirat, Hamdache e Murat ([3]) estabeleceram a existência de solução global fraca em domínios limitados do \mathbb{R}^3 . Para obter este resultado, os autores adicionaram um termo de regularização $-\sigma \Delta m$ é equação da magnetização e consideraram as condições de contorno: $u = 0$, $\omega = 0$, $\text{rot } m \wedge n = 0$, $m \cdot n = 0$ e $h \cdot n = 0$. Em 2010, Amirat e Handache ([4]) provaram a existência local de uma única solução forte em domínios limitados do \mathbb{R}^3 , sem o termo de regularização já mencionado, e com condições de contorno $v = 0$, $\omega = 0$, $(h + m) \cdot n = 0$.

Em 2010, Wang e Tan ([70]) estabeleceram a existência de soluções globais fracas em domínios limitados do \mathbb{R}^3 para as equações regularizadas (no sentido já descrito) do escoamento de um fluido incompressível não-homogêneo, ou seja, a densidade ρ depende de t e x e temos $\rho_t + \text{div}(\rho v) = 0$. Os autores também investigaram o comportamento assintótico no tempo para tais soluções e estudaram a relação entre as soluções deste modelo e as soluções de um outro modelo (de Shliomis).

Estes resultados destacados da literatura constituíram uma motivação para a nossa investigação. O resultado novo, neste capítulo, é o fato de obtermos a existência de soluções fortes T -periódicas para o modelo ferrofluidos de Rosensweig, em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

4.2 Existência

Nesta seção, estudamos a existência de soluções T -periódicas do modelo ferrofluidos de Rosenweig, em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto limitado com fronteira regular. Para atingir o nosso objetivo, usaremos o método de Faedo-Galerkin e o Teorema de ponto fixo de Brouwer. O sistema que iremos estudar é o

seguinte:

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - (\eta + \xi) \Delta u + \nabla p = \mu_0 (m \cdot \nabla) h + 2\xi \operatorname{rot} w, \quad (4.2.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\begin{aligned} \varrho k \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (u \cdot \nabla) w \right) - \eta' \Delta w - (\eta' + \lambda') \nabla (\operatorname{div} w) \\ = \mu_0 m \wedge h + 2\xi (\operatorname{rot} u - 2w), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (u \cdot \nabla) m = w \wedge m - \frac{1}{\tau} (m - \chi_0 h) + \sigma \Delta m, \quad (4.2.4)$$

$$\operatorname{rot} h = 0, \quad \operatorname{div} (h + 4\pi m) = f, \quad (4.2.5)$$

em $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$, com as seguintes condições de fronteira e periodicidade respectivamente

$$u = 0, \quad w = 0, \quad m \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} m \wedge n = 0, \quad h \cdot n = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_T := (0, T) \times \Omega, \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) = u(T, x), \quad w(0, x) = w(T, x), \quad m(0, x) = m(T, x), \\ h(0, x) = h(T, x), \quad x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do ferrofluidos; p representa a pressão do fluido; $w = (w_1, w_2, w_3)$ é o momento angular do ferrofluidos; $h = (h_1, h_2, h_3)$ é o campo magnético; $m = (m_1, m_2, m_3)$ é a magnetização em Ω ; ϱ é a densidade da massa do ferrofluidos; $\varrho, k, \eta, \xi, \eta', \lambda', \tau, \chi_0$ e μ_0 são constantes positivos e f é uma função dada em Ω_T tal que $\int_{\Omega} f dx = 0$. As condições de fronteira para a magnetização m , em (4.2.6), são consistentes com o operador de Laplace:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta m) \cdot q \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{rot} m \cdot \operatorname{rot} q \, dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} m)(\operatorname{div} q) \, dx \\ - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} m \wedge n) \cdot q \, dx - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} m \wedge) q \cdot n \, dx. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Agora, introduziremos os seguintes espaços funcionais:

$$\mathbb{D}_{\sigma}(\Omega) := \{v \in C_0^{\infty}(\Omega)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega\},$$

$$\mathbb{H}_{\sigma}(\Omega) := \overline{\mathbb{D}_{\sigma}(\Omega)}^{L^2(\Omega)^3},$$

$$\mathbb{V}_\sigma(\Omega) := \overline{\mathbb{D}_\sigma(\Omega)}^{H^1(\Omega)^3}.$$

Note que os espaços $\mathbb{V}_\sigma(\Omega)$ e $\mathbb{H}_\sigma(\Omega)$ podem ser caracterizados da seguinte forma:

Proposição 4.1. i) $\mathbb{V}_\sigma(\Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega\}$;

ii) $\mathbb{H}_\sigma(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega, v.n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$.

Note ainda que $\mathbb{V}_\sigma(\Omega) \subset \mathbb{H}_\sigma(\Omega) \subset \mathbb{V}'_\sigma(\Omega)$, em que $\mathbb{V}'_\sigma(\Omega)$ é o espaço dual de $\mathbb{V}_\sigma(\Omega)$.

Usando a decomposição de Helmholtz ([23], p.216), temos

$$L^2(\Omega)^3 = \mathbb{H}_\sigma(\Omega) \oplus \mathbb{H}_\sigma(\Omega)^\perp,$$

em que $\mathbb{H}_\sigma(\Omega)^\perp := \{h = \nabla w : w \in H^1(\Omega)\}$. Seja

$$\mathcal{M} := \{q \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} q \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} q \in L^2(\Omega)^d, q.n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

o espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle q_1, q_2 \rangle := \int_\Omega q_1 \cdot q_2 \, dx + \int_\Omega (\operatorname{div} q_1)(\operatorname{div} q_2) \, dx + \int_\Omega (\operatorname{rot} q_1) \cdot (\operatorname{rot} q_2) \, dx \quad (4.2.9)$$

e a norma associada. Temos a seguinte caracterização:

$$\mathcal{M} := \{q \in H^1(\Omega)^3 : q.n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

e $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^3}$ são duas normas equivalentes no espaço \mathcal{M} .

Seja $T > 0$ fixo. Assumimos que

$$u_0 \in \mathbb{H}_\sigma(\Omega); w_0 \in L^2(\Omega)^3; m_0 \in L^2(\Omega)^3; \quad (4.2.10)$$

$$f \in H^1(0, T; L^2(\Omega)^3); \int_\Omega f \, dx = 0. \quad (4.2.11)$$

Seja $h_0 := \nabla \varphi_0$, onde φ_0 é a única solução fraca em $H^1(\Omega)$ de

$$-\Delta \varphi_0 = 4\pi \operatorname{div} m_0 - f_0 \text{ em } \Omega, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (4.2.13)$$

$$\int_{\Omega} \varphi_0 \, dx = 0, \quad (4.2.14)$$

em que $f_0 := f|_{t=0}$. Denotamos por $\mathcal{C}([0, T]; X_{fraca})$ o espaço das funções de $[0, T]$ em um espaço de Hilbert contínua X na topologia fraca. Isto é, $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{C}([0, T]; X_{fraca})$ se $\langle v_n(t); w \rangle \rightarrow \langle v(t); w \rangle$ uniformemente em relação à $t \in [0, T]$, $\forall w \in X$.

A seguir, definiremos a solução fraca para o nosso problema.

Definição 4.1. Dizemos que (u, w, m, h) é uma solução global fraca de (4.2.1)-(4.2.7) se as condições (i), (ii) e (iii) abaixo são satisfeitas:

(i)

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; \mathbb{H}_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbb{V}_\sigma(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{V}_{\sigma fraca}(\Omega)), \\ w &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)_{fraca}^3), \\ m &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; \mathcal{M}) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)_{fraca}^3), \\ h &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^3); \end{aligned}$$

(ii) a função h é tal que $h = \nabla \varphi$, em que

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ e satisfaz}$$

$$-\Delta \varphi = 4\pi \operatorname{div} m - f \text{ em } \Omega_T, \quad (4.2.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_T := (0, T) \times \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} \varphi \, dx = 0 \text{ em } (0, T); \quad (4.2.16)$$

(iii) as equações (4.2.1), (4.2.3) e (4.2.4) são válidas no sentido fraco, ou seja, $\forall v \in \mathbb{V}_\sigma(\Omega)$, $z \in H_0^1(\Omega)^3$ e $q \in \mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned} &\varrho \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot v \, dx + \varrho \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx + (\eta + \xi) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \mu_0 \int_{\Omega} (m \cdot \nabla) h \cdot v \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} w) \cdot v \, dx, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (4.2.18)$$

$$\begin{aligned} &\varrho k \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w \cdot z \, dx + \varrho k \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) w \cdot z \, dx \\ &+ \eta' \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla z \, dx + (\eta' + \lambda') \int_{\Omega} (\operatorname{div} w)(\operatorname{div} z) \, dx \end{aligned}$$

$$= \mu_0 \int_{\Omega} (m \wedge h).z \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\text{rot } u - 2w).z \, dx, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad (4.2.19)$$

$$w|_{t=0} = w_0, \quad (4.2.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m.q \, dx + \int_{\Omega} (u.\nabla)m.q \, dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} (\text{rot } m).(\text{rot } q) \, dx + \sigma \int_{\Omega} (\text{div } m).(\text{div } q) \, dx \\ & = \int_{\Omega} (w \wedge m).q \, dx - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (m - \chi_0 h).q \, dx, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

$$m|_{t=0} = m_0. \quad (4.2.22)$$

4.2.1 Soluções fracas T -periódicas

Nesta subseção, provaremos a existência de soluções fracas T -periódicas para o problema (4.2.1)-(4.2.7). De fato, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Seja $T > 0$ fixo, o período da função f . $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto limitado com fronteira regular. Assumimos (4.2.11). Então, existem*

$$\begin{aligned} u & \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbb{V}_\sigma(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{H}_{\sigma \text{ fraca}}(\Omega)), \\ w & \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)_{\text{fraca}}^3), \\ m & \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; \mathcal{M}) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)_{\text{fraca}}^3), \\ h & \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^3), \end{aligned}$$

tais que (u, w, m, h) satisfazem o sistema (4.2.15)-(4.2.22) .

Demonstração. Usaremos o Teorema de ponto fixo de Brouwer para provar a existência de solução fraca T -periódica em espaço de dimensão finita. Para isso, consideramos as equações usando as aproximações do Faedo-Galerkin para qualquer m inteiro positivo fixo,

$$\begin{aligned} & \varrho \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m.\phi_j^u \, dx + \varrho \int_{\Omega} (u_m.\nabla)u_m.\phi_j^u \, dx + (\eta + \xi) \int_{\Omega} \nabla u_m.\nabla \phi_j^u \, dx \\ & = \mu_0 \int_{\Omega} (m_m.\nabla)h_m.\phi_j^u \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\text{rot } w_m).\phi_j^u \, dx, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0m}, \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned}
& \varrho k \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_m \cdot \phi_j^w dx + \varrho k \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla) w_m \cdot \phi_j^w dx \\
& + \eta' \int_{\Omega} \nabla w_m \cdot \nabla \phi_j^w dx + (\eta' + \lambda') \int_{\Omega} (\operatorname{div} w_m) (\operatorname{div} \phi_j^w) dx \\
& = \mu_0 \int_{\Omega} (m_m \wedge h_m) \cdot \phi_j^w dx + 2\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u_m - 2w_m) \cdot \phi_j^w dx, \quad (4.2.25)
\end{aligned}$$

$$w_m|_{t=0} = w_{0m}, \quad (4.2.26)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m_m \cdot \phi_j^m dx + \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla) m_m \cdot \phi_j^m dx + \sigma \int_{\Omega} (\operatorname{rot} m_m) \cdot (\operatorname{rot} \phi_j^m) dx \\
& = \int_{\Omega} (w_m \wedge m_m) \cdot \phi_j^m dx - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (m_m - \chi_0 h_m) \cdot \phi_j^m dx, \quad (4.2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m_m \cdot \nabla \psi_j^m dx + \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla) m_m \cdot \nabla \psi_j^m dx + \sigma \int_{\Omega} (\operatorname{div} m_m) \cdot (\Delta \psi_j^m) dx \\
& = \int_{\Omega} (w_m \wedge m_m) \cdot \nabla \psi_j^m dx - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (m_m - \chi_0 h_m) \cdot \nabla \psi_j^m dx, \quad (4.2.28)
\end{aligned}$$

$$m_m|_{t=0} = m_{0m}, \quad (4.2.29)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \psi_j^m dx = -4\pi \int_{\Omega} m_m \cdot \nabla \psi_j^m dx - \int_{\Omega} f \psi_j^m dx, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.2.30)$$

em que u_{0m}, w_{0m}, m_{0m} são projecções ortogonais de u_0, w_0, m_0 sobre o espaço gerado por $\phi_1^u, \dots, \phi_m^u$, $\phi_1^w, \dots, \phi_m^w$ e $\phi_1^m, \dots, \phi_m^m$, $\nabla \psi_1^m, \dots, \nabla \psi_m^m$ respectivamente e

$$\begin{aligned}
u_m &= \sum_{j=1}^m a_j(t) \phi_j^u, \quad w_m = \sum_{j=1}^m b_j(t) \phi_j^w, \\
m_m &= \sum_{j=1}^m c_j(t) \phi_j^m + \sum_{j=1}^m c_{j+m}(t) \nabla \phi_j^m, \\
h_m &= \nabla \varphi_m = \sum_{j=1}^m d_j(t) \nabla \psi_j^m,
\end{aligned}$$

$\{\phi_j^u\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base do espaço de Hilbert \mathbb{V}_σ , $\{\phi_j^w\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base do espaço $H_0^1(\Omega)^3$, $\{\phi_j^m\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base ortogonal do espaço \mathcal{G} (definida abaixo) em relação ao produto interno (4.2.9) e $\{\psi_j^m\}_{j \in \mathbb{N}}$ são autofunções, com respectivas autovalores $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, do operador de Laplace

$$-\Delta \psi_j^m = \lambda_j \psi_j^m \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial \psi_j^m}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} \psi_j^m dx = 0.$$

A sequência $\{\psi_j^m\}_{j \in \mathbb{N}}$ é a base ortogonal do espaço $\{m \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} m \, dx = 0\}$ em relação ao produto interno de $H^1(\Omega)$. Sejam

$$\mathcal{G} := \{v \in H^1(\Omega)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}, \text{ e}$$

$$\mathcal{H} := \{h = \nabla\psi : \psi \in H^2(\Omega), \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \int_{\Omega} \psi \, dx = 0\}$$

dois subespaços fechados de \mathcal{M} . Temos a decomposição $\mathcal{M} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$, em que \mathcal{G} e \mathcal{H} são ortogonais com relação ao produto interno definido em (4.2.9). Escolhemos para uma base de \mathcal{M} uma base ortogonal de \mathcal{G} completada por uma base espectral de \mathcal{H} ([3], Lema 2).

A partir de agora, iremos omitir o índice m nas funções u , w , m e h .

Com objetivo de obter a identidade de energia (que se encontra em [3]), supomos que (u, w, m, h) são soluções do sistema (4.2.1)-(4.2.7). Primeiro, consideramos as equações magneto-estáticas. Temos $h = \nabla\varphi$ e φ é a solução de (4.2.15), (4.2.16). Multiplicando (4.2.15) por φ e integrando por partes obtemos

$$\|h\|^2 = -4\pi \int_{\Omega} m \cdot h \, dx - \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \quad (4.2.31)$$

Derivando (4.2.15) no tempo, multiplicando o resultado por φ e integrando por partes obtemos

$$\frac{d}{dt} \|h\|^2 = -8\pi \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} m \cdot h \, dx - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f \cdot \varphi \, dx. \quad (4.2.32)$$

Agora, multiplicamos a equação de Navier-Stokes (4.2.1) por u e integramos por partes e usando o fato de que $\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot u \, dx = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{2} \|u\|^2 \right) + (\eta + \xi) \|\nabla u\|^2 = \mu_0 \int_{\Omega} (m \cdot \nabla) h \cdot u \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} w) \cdot u \, dx. \quad (4.2.33)$$

Como $\operatorname{rot} h = 0$, podemos escrever o gradiente da força magnética $(m \cdot \nabla) h$ da seguinte forma

$$\partial_k (m_i h_i) = h_i \partial_k m_i + m_i \partial_k h_i = h_i \partial_k m_i + m_i \partial_i h_k.$$

Seja $f^m = (m \cdot \nabla)h = m_i \partial_i h_k \hat{e}_k = (f_k^m)$. Temos $f_k^m = \partial_k(m_i h_i) - h_i \partial_k m_i$. Portanto,

$$(m \cdot \nabla)h \cdot u = \nabla(m \cdot h) \cdot u - (u \cdot \nabla)m \cdot h . \quad (4.2.34)$$

Usando a integração por partes juntamente com o fato de que $\text{div } u = 0$ em Ω_T e $u = 0$ em $\partial\Omega_T$, obtemos que

$$\int_{\Omega} (m \cdot \nabla)h \cdot u \, dx = \int_{\Omega} -(u \cdot \nabla)m \cdot h \, dx . \quad (4.2.35)$$

Então, (4.2.33) torna-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{2} \|u\|^2 \right) + (\eta + \xi) \|\nabla u\|^2 = -\mu_0 \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)m \cdot h \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\text{rot } w) \cdot u \, dx . \quad (4.2.36)$$

Por outro lado, multiplicamos a equação de magnetização (4.2.4) por h e integrando sobre Ω segue

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)m \cdot h \, dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial m}{\partial t} \cdot h \, dx - \int_{\Omega} (w \wedge m) \cdot h \, dx \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (m - \chi_0 h) \cdot h \, dx - \sigma \int_{\Omega} (\Delta m) \cdot h \, dx . \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

Combinando (4.2.31), (4.2.32) e (4.2.37), inferimos de (4.2.36) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{2} \|u\|^2 + \|h\|^2 \right] + (\eta + \xi) \|\nabla u\|^2 + \frac{\mu_0}{\tau} \left(\frac{1}{4\pi} + \chi_0 \right) \|h\|^2 \\ = -\mu_0 \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)m \cdot h \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\text{rot } w) \cdot u \, dx - \mu_0 \sigma \int_{\Omega} (\Delta m) \cdot h \, dx \\ - \frac{\mu_0}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi \, dx . \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Agora, como $-\Delta m = \text{rot rot } m - \nabla(\text{div } m)$, integrando por partes e usando as condições de fronteira $\text{rot } m \wedge n = 0$, $h \cdot n = 0$ sobre $\partial\Omega_T$ e as equações magneto-estáticas (4.2.5), obtemos

$$- \int_{\Omega} (\Delta m) \cdot h \, dx = \int_{\Omega} \text{rot rot } m \cdot h \, dx - \int_{\Omega} \nabla(\text{div } m) \cdot h \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} m \cdot h \, dx - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} m) h \cdot n \, dS + \int_{\Omega} (\operatorname{div} m)(\operatorname{div} h) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} m \cdot h \, dx + \int_{\Omega} f(\operatorname{div} m) \, dx - 4\pi \int_{\Omega} |\operatorname{div} m|^2 \, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} m \wedge h) \cdot n \, dx + \int_{\Omega} f(\operatorname{div} m) \, dx - 4\pi \int_{\Omega} |\operatorname{div} m|^2 \, dx \\
&= -4\pi \int_{\Omega} |\operatorname{div} m|^2 \, dx + \int_{\Omega} f(\operatorname{div} m) \, dx . \tag{4.2.39}
\end{aligned}$$

Usando (4.2.39) em (4.2.38), obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{\varrho}{2} \|u\|^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} \|h\|^2 \right] + (\eta + \xi) \|\nabla u\|^2 + \frac{\mu_0}{\tau} \left(\frac{1}{4\pi} + \chi_0 \right) \|h\|^2 + 4\pi\sigma\mu_0 \|\operatorname{div} m\|^2 \\
&= -\mu_0 \int_{\Omega} (w \wedge m) \cdot h \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} w) \cdot u \, dx - \frac{\mu_0}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx \\
&- \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi \, dx + \mu_0\sigma \int_{\Omega} f(\operatorname{div} m) \, dx . \tag{4.2.40}
\end{aligned}$$

Consideramos agora a equação do momento angular (4.2.3). Multiplicando (4.2.3) por w , integrando por partes e usando a identidade

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) w \cdot w \, dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\frac{\varrho k}{2} \|w\|^2 \right) + \eta' \|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 + 4\xi \|w\|^2 \\
&= \mu_0 \int_{\Omega} (m \wedge h) \cdot w \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u) \cdot w \, dx . \tag{4.2.41}
\end{aligned}$$

Adicionando (4.2.40) e (4.2.41) e usando as identidades

$$(w \wedge m) \cdot h = w \cdot (m \wedge h), \quad \int_{\Omega} (\operatorname{rot} w) \cdot u \, dx = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u) \cdot w \, dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{\varrho}{2} \|u\|^2 + \frac{\varrho k}{2} \|w\|^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} \|h\|^2 \right] + \eta' \|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 \\
&+ (\eta + \xi) \|\nabla u\|^2 - 4\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u) \cdot w \, dx + 4\xi \|w\|^2 \\
&+ \frac{\mu_0}{\tau} \left(\frac{1}{4\pi} + \chi_0 \right) \|h\|^2 + 4\pi\sigma\mu_0 \|\operatorname{div} m\|^2
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dS - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi \, dx + \mu_0 \sigma \int_{\Omega} f(\operatorname{div} m) \, dx . \quad (4.2.42)$$

Como $\operatorname{div} u = 0$, podemos escrever $-\Delta u = \operatorname{rot} \operatorname{rot} u$ e via integração por partes temos $\|\nabla u\|^2 = \|\operatorname{rot} u\|^2$. Então,

$$\xi \|\nabla u\|^2 + 4\xi \|w\|^2 - 4\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u) \cdot w \, dx = \xi \|\operatorname{rot} u - 2w\|^2 .$$

Então, (4.2.42) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{2} \|u\|^2 + \frac{\rho k}{2} \|w\|^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} \|h\|^2 \right] + \eta' \|\nabla w\|^2 \\ & + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 + \eta \|\nabla u\|^2 + \xi \|\operatorname{rot} u - 2w\|^2 \\ & + \frac{\mu_0}{\tau} \left(\frac{1}{4\pi} + \chi_0 \right) \|h\|^2 + 4\pi\sigma\mu_0 \|\operatorname{div} m\|^2 \\ & = -\frac{\mu_0}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi \, dx + \mu_0 \sigma \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} m \, dx . \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Multiplicando a equação de magnetização por m , integrando por partes e usando (4.2.31) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|m\|^2 \right) + \frac{1}{\tau} \|m\|^2 + \frac{\chi_0}{4\pi\tau} \|h\|^2 + \sigma (\|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2) \\ & = -\frac{\chi_0}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \varphi \, dx . \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Adicionando (4.2.43) e (4.2.44) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{2} \|u\|^2 + \frac{\rho k}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|m\|^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} \|h\|^2 \right] + \eta \|\nabla u\|^2 + \eta' \|\nabla w\|^2 \\ & + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 + \xi \|\operatorname{rot} u - 2w\|^2 + \frac{1}{\tau} \|m\|^2 + \sigma \|\operatorname{rot} m\|^2 \\ & + \sigma (1 + 4\pi\mu_0) \|\operatorname{div} m\|^2 + \left(\frac{\mu_0 + \chi_0 + 4\pi\mu_0\chi_0}{4\pi\tau} \right) \|h\|^2 \\ & = -\frac{(\mu_0 + \chi_0)}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi \, dx + \mu_0 \sigma \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} m \, dx . \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Seja

$$\mathcal{E}(t) := \frac{\rho}{2} \|u\|^2 + \frac{\rho k}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|m\|^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} \|h\|^2$$

e uma nova função

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &:= \eta \|\nabla u\|^2 + \eta' \|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 \\ &\quad + \xi \|\operatorname{rot} u - 2w\|^2 + \frac{1}{\tau} \|m\|^2 + \sigma \|\operatorname{rot} m\|^2 \\ &\quad + \sigma(1 + 4\pi\mu_0) \|\operatorname{div} m\|^2 + \left(\frac{\mu_0 + \chi_0 + 4\pi\mu_0\chi_0}{4\pi\tau}\right) \|h\|^2. \end{aligned}$$

Então, inferimos de (4.2.45) a seguinte identidade de energia

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \mathcal{F}(t) \\ &= -\frac{(\mu_0 + \chi_0)}{4\pi\tau} \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi \, dx + \mu_0 \sigma \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} m \, dx. \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

Dando continuidade à nossa prova, agora obteremos uma estimativa para $\mathcal{E}(t)$ independente do t e do m . Para isso, considerando (4.2.44), deduzimos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|m\|^2\right) + \frac{1}{\tau} \|m\|^2 + (1 - \varepsilon) \frac{\chi_0}{4\pi\tau} \|h\|^2 + \sigma (\|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2) \\ &\leq C_{\varepsilon} \frac{\chi_0}{4\pi\tau} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Integrando no tempo, e escolhendo $0 < \varepsilon < 1$, obtemos

$$\|m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C, \quad \|m\|_{L^2(0,T;\mathcal{M})} \leq C, \quad \|h\|_{L^2(\Omega_T)^3} \leq C.$$

Então, pelo resultado clássico de regularidade para o operador de Laplace, deduzimos de (4.2.15) e (4.2.16) que

$$\|h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)} \leq C.$$

Multiplicando (4.2.12) por φ_0 , integrando por partes e usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\|h_0\| \leq 4\pi \|m_0\| + C \|f_0\|.$$

Portanto, deduzimos de (4.2.43) que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C, \quad \|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)} \leq C, \\ \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C, \quad \|w\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)} \leq C, \\ \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C, \quad \sqrt{\xi}\|\operatorname{rot} u - 2w\|_{L^2(\Omega_T)^3} \leq C.\end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte desigualdade de energia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \mathcal{F}(t) &\leq \frac{\varepsilon(\mu_0 + \chi_0)}{4\pi\tau}\|h\|^2 + \frac{C_\varepsilon(\mu_0 + \chi_0)}{4\pi\tau}\|f\|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}\|h\|^2 \\ &+ \frac{C_\varepsilon\mu_0}{4\pi}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2 + \mu_0\sigma^2\|\operatorname{div} m\|^2 + \mu_0\sigma C_\varepsilon\|f\|^2 \\ &= \varepsilon\left(\frac{\mu_0 + \tau(\mu_0 + \chi_0)}{4\pi\tau}\right)\|h\|^2 + \mu_0\sigma\varepsilon^2\|\operatorname{div} m\|^2 \\ &+ C_\varepsilon\left(\mu_0\sigma + \frac{\mu_0 + \chi_0}{4\pi\tau}\right)\|f\|^2 + C_\varepsilon\frac{\mu_0}{4\pi}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned}\quad (4.2.47)$$

No próximo passo, analisamos as condições para obter os coeficientes positivos. Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \eta\|\nabla u\|^2 + \eta'\|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda')\|\operatorname{div} w\|^2 \\ + \xi\|\operatorname{rot} u - 2w\|^2 + \frac{1}{\tau}\|m\|^2 + \sigma\|\operatorname{rot} m\|^2 + \sigma(1 + 4\pi\mu_0 - \varepsilon\mu_0)\|\operatorname{div} m\|^2 \\ + \left(\frac{(1 - \varepsilon)\mu_0 + \chi_0 + 4\pi\mu_0\chi_0 - \varepsilon(\tau\mu_0 + \chi_0)}{4\pi\tau}\right)\|h\|^2 \\ \leq C_\varepsilon\left(\mu_0\sigma + \frac{\mu_0 + \chi_0}{4\pi\tau}\right)\|f\|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}C_\varepsilon\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned}\quad (4.2.48)$$

Usando a desigualdade de Poincaré obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \frac{\rho}{2}\|u\|^2\frac{2\eta}{\rho c_p} + \frac{\rho k}{2}\|w\|^2\frac{2\eta'}{\rho k c_p} \\ + \frac{\|m\|^2}{2}\frac{2}{\tau} + \frac{\mu_0}{8\pi}\|h\|^2\frac{2}{\tau}\left(\frac{(1 - \varepsilon)\mu_0 + \chi_0 + 4\pi\mu_0\chi_0 - \varepsilon(\tau\mu_0 + \chi_0)}{\tau}\right) \\ \leq C_\varepsilon\left(\mu_0\sigma + \frac{\mu_0 + \chi_0}{4\pi\tau}\right)\|f\|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}C_\varepsilon\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2,\end{aligned}$$

em que c_p é a constante de Poincaré. Portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + C_A\mathcal{E}(t) \leq C_\varepsilon\left(\mu_0\sigma + \frac{\mu_0 + \chi_0}{4\pi\tau}\right)\|f\|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}C_\varepsilon\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2,\quad (4.2.49)$$

onde

$$C_A := \min \left\{ \frac{2\eta}{\rho c_p}, \frac{2\eta'}{\rho k c_p}, \frac{2}{\tau}, 2 \left(\frac{(1-\epsilon)\mu_0 + \chi_0 + 4\pi\mu_0\chi_0 - \epsilon(\tau\mu_0 + \chi_0)}{\tau} \right) \right\}.$$

A aplicação da desigualdade de Gronwall em (4.2.49), $0 \leq t \leq T$, produz o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \exp(C_A t)\mathcal{E}(t) &\leq \mathcal{E}(0) \\ &+ \int_0^t \left(\exp(C_A s)C_\epsilon(\mu_0\sigma + \frac{\mu_0 + \chi_0}{4\pi\tau})\|f(s)\|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}C_\epsilon\|\frac{\partial f}{\partial t}(s)\|^2 \right) ds, \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)\exp(-C_A t) + C_B \int_0^t \left(\|f(s)\|^2 + \|\frac{\partial f}{\partial t}(s)\|^2 \right) ds, \quad (4.2.50)$$

em que $C_B := \max \left\{ \mu_0\sigma + \frac{\mu_0 + \chi_0}{4\pi\tau}, \frac{\mu_0}{4\pi} \right\} C_\epsilon$. Com o objetivo de construir a nossa solução periódica, majoramos t por T em (4.2.50), obtendo assim,

$$\mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(0)\exp(-C_A T) + C_B \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \|\frac{\partial f}{\partial t}(s)\|^2 \right) ds. \quad (4.2.51)$$

Agora, assumimos que $\mathcal{E}(0) \leq R$ e fixamos o raio da bola

$$R := \frac{C_B \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \|\frac{\partial f}{\partial t}(s)\|^2 \right) ds}{1 - \exp(-C_A T)}.$$

Usando essas informações em (4.2.51) deduzimos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(T) &\leq \mathcal{E}(0)\exp(-C_A T) + C_B \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \|\frac{\partial f}{\partial t}(s)\|^2 \right) ds \\ &\leq R\exp(-C_A T) + (1 - \exp(-C_A T))R \\ &\leq R. \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

Portanto, mostramos que se $\mathcal{E}(0) \leq R$, então $\mathcal{E}(T) \leq R$.

Definimos agora, uma aplicação Φ com objetivo de mostrar que ela tem

um ponto fixo. Seja

$$\Phi : \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, R)} \rightarrow \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, R)}$$

a aplicação de Poincaré que leva qualquer $(u_{0m}, w_{0m}, m_{0m}, h_{0m}) \in \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, R)}$ em $(u_m(T), w_m(T), m_m(T), h_m(T)) \in \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, R)}$, em que $(u_m(T), w_m(T), m_m(T), h_m(T))$ é solução de (4.2.15)-(4.2.22) no tempo T , e $\overline{\mathbb{R}^m} := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Temos também que a aplicação Φ é contínua. Então, pelo teorema de ponto fixo de Brouwer segue a existência de pelo menos uma solução T -periódica (u_m, w_m, m_m, h_m) . Voltando a (4.2.50) e usando a **periodicidade** de $\mathcal{E}(t)$, deduzimos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(T) &\leq \mathcal{E}(0) \exp(-C_A T) + C_B \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|^2 \right) ds \\ &\Rightarrow \mathcal{E}(0)(1 - \exp(-C_A T)) \leq C_B \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|^2 \right) ds \\ &\Rightarrow \mathcal{E}(0) \leq \frac{C_B \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|^2 \right) ds}{1 - \exp(-C_A T)}. \end{aligned}$$

Seja

$$C_{f,f'} = \int_0^T \left(\|f(s)\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|^2 \right) ds \text{ uma constante}$$

e $(1 - \exp(-C_A T)) \leq 1$. Então,

$$\mathcal{E}(0) \leq C_B C_{f,f'}. \quad (4.2.53)$$

Usando (4.2.53) em (4.2.50) e $(\exp(-C_A T)) \leq 1$, obtemos a estimativa desejada

$$\mathcal{E}(t) \leq 2C_B C_{f,f'}. \quad (4.2.54)$$

A passagem ao limite encontra-se em detalhes em [3]. Portanto, omitimos essa parte da prova. No entanto, destacamos que a prova é baseada no método de compacidade de Lions. Além das estimativas a priori independente de m , usa-se algumas estimativas para derivadas fracionárias no tempo para soluções aproximadas, (u_m, w_m, m_m, h_m) . Definindo as soluções em todo o $\overline{\mathbb{R}^m}$, usa-se a transformada de Fourier para obter esti-

mativas fracionárias, isto é, para $0 < \gamma < \frac{1}{4}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau \leq C,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{w}_m(\tau)\|^2 d\tau \leq C, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{m}_m(\tau)\|^2 d\tau \leq C .$$

O teorema de Banach-Alaoglu e imersões de Sobolev, nos permite obter a convergência fraca das subsequências. Tendo as estimativas para derivadas fracionárias, usa-se o teorema de Aubin-Lions para abstrair convergências fortes. Usando argumentos de linearidade, continuidade e densidade, passa-se o limite em cada um dos termos das equações. \square

4.2.2 Soluções fortes T -periódicas ($d=2$)

Nessa subseção, provaremos a regularidade das soluções fracas T -periódicas, cuja existência foi provada na subseção anterior. Sejam C, C'_1, C'_4, c_p constantes que não dependem do m . Sejam

A o operador de Stokes,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}() &:= \eta' \Delta() + (\eta' + \lambda') \nabla(\operatorname{div}()) \\ &\text{e } \tilde{\mathcal{L}}() := -\Delta() \end{aligned}$$

com os domínios $D(A) = H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}_\sigma(\Omega)$, $D(\mathcal{L}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $D(\tilde{\mathcal{L}}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ respectivamente. Então, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Seja $T > 0$ fixo, o período da função f . $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto limitado com fronteira regular. Assumimos (4.2.11) e a seguinte condição:*

$$\sigma^2 > 4(\pi C'_1)^2 C^4(f, \mathcal{E}(0)) + 2(c_p C'_4)^2 C^2(f, \mathcal{E}(0)).$$

Então, as soluções fracas T -periódicas, (u, w, m, h) , que satisfazem o sis-

tema (4.2.15)-(4.2.22), admitem a seguinte regularidade adicional:

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; \mathbb{V}_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(A)), \\ w &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; D(\mathcal{L})), \\ m &\in L^\infty(0, T; \mathcal{M}) \cap L^2(0, T; D(\tilde{\mathcal{L}})), \\ h &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^2). \end{aligned}$$

Demonstração. De forma similar ao caso de existência de soluções fracas T -periódicas, usamos o método de Faedo-Galerkin para obter a existência de soluções T -periódicas mais regulares no espaço aproximado. As funções de base a serem empregadas no método de Faedo-Galerkin são as respectivas autofunções destes operadores.

$$u_m(0) = P_1^m(u_0),$$

onde P_1^m é a projecção ortogonal de $\mathbb{H}_\sigma(\Omega)$ sobre S_1^m , o espaço de dimensão finita m gerado pelas m primeiras autofunções do operador de Stokes A .

$$w_m(0) = P_2^m(w_0),$$

onde P_2^m é a projecção ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre S_2^m , o espaço de dimensão finita m gerado pelas m primeiras autofunções do operador \mathcal{L} .

$$m_m(0) = P_3^m(m_0),$$

onde P_3^m é a projecção ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre S_3^m , o espaço de dimensão finita m gerado pelas m primeiras autofunções do operador $\tilde{\mathcal{L}}$.

$$h_m(0) = \nabla \varphi_m(0).$$

A passagem ao limite vai ser omitida. Neste caso, o nosso objetivo é obter uma estimativa a priori. Para isso, iremos utilizar multiplicadores de ordem mais alta, mais concretamente, escolhemos $v = Au$, em (4.2.17) obtendo

$$\varrho \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot Au \, dx + \varrho \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot Au \, dx + (\eta + \xi) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (Au) \, dx$$

$$= \mu_0 \int_{\Omega} (m \cdot \nabla) h \cdot Au \, dx + 2\xi \int_{\Omega} (\operatorname{rot} w) \cdot Au \, dx .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \varrho \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + (\eta + \xi) \|Au\|^2 \\ & \leq \mu_0 \|m\|_{L^\infty} \|\nabla h\| \|Au\| + 2\xi \|\operatorname{rot} w\| \|Au\| + \varrho \|Au\| \|u\|_{L^6} \|\nabla u\|_{L^3} . \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de interpolações para o domínio bidimensional e a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} & \varrho \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + (\eta + \xi) \|Au\|^2 \\ & \leq C_1 \|m\|_{2,2}^{\frac{1}{2}} \|m\|_{2,2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla h\| \|Au\| + \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} \|\operatorname{rot} w\|^2 + \frac{\eta + \xi}{4} \|Au\|^2 \\ & \quad + C_e \|Au\| \left(\|u\|_{1,2}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{1,2}^{\frac{1}{3}} \right) \left(\|\nabla u\|_{1,2}^{\frac{1}{3}} \|\nabla u\|_{1,2}^{\frac{2}{3}} \right) . \end{aligned}$$

Novamente, aplicamos a desigualdade de Young e absorvemos os termos $\|Au\|^2$ inferindo, assim, o seguinte resultado

$$\begin{aligned} & \varrho \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{(\eta + \xi)}{4} \|Au\|^2 \\ & \leq C'_1 \|m\|_{2,2} \|m\| \|\nabla h\|^2 + \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} \|\operatorname{rot} w\|^2 + C'_2 \|\nabla u\|^4 \|u\| . \quad (4.2.55) \end{aligned}$$

Escolhendo $z = \mathcal{L}w$, em (4.2.19) obtemos

$$\begin{aligned} & \varrho k \frac{d}{dt} \left\{ \eta' \|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 \right\} + \|\mathcal{L}w\|^2 \\ & \leq \varrho k \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) w \cdot \mathcal{L}w \, dx \right| + \mu_0 \left| \int_{\Omega} (m \wedge h) \cdot \mathcal{L}w \, dx \right| \\ & \quad + 2\xi \left| \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u - 2w) \cdot \mathcal{L}w \, dx \right| . \end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito acima, obtemos mais desigualdades usando as interpolações no domínio bidimensional:

$$\begin{aligned} & \varrho k \frac{d}{dt} \left\{ \eta' \|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 \right\} + \|\mathcal{L}w\|^2 \\ & \leq \varrho k C \left(\|u\|_{1,2}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{1,2}^{\frac{1}{3}} \right) \left(\|\nabla w\|_{1,2}^{\frac{1}{3}} \|\nabla w\|_{1,2}^{\frac{2}{3}} \right) \|\mathcal{L}w\| \end{aligned}$$

$$+ \mu_0 \|m\|_{1,2}^{\frac{1}{2}} \|m\|^{\frac{1}{2}} \|h\|_{1,2}^{\frac{1}{2}} \|h\|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}w\| + 2\xi \|\operatorname{rot} u - 2w\| \|\mathcal{L}w\| .$$

Depois de absorvemos os termos $\|\mathcal{L}w\|^2$, resultante da aplicação da desigualdade de Young, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} & \varrho k \frac{d}{dt} \left\{ \eta' \|\nabla w\|^2 + (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 \right\} + \frac{1}{8} \|\mathcal{L}w\|^2 \\ & \leq C'_3 \|u\|_{1,2}^2 \|u\| \|\nabla w\|^2 + C'_4 \|m\|_{1,2} \|m\| \|h\|_{1,2} \|h\| \\ & + C'_5 (\|\operatorname{rot} u\|^2 + \|w\|^2) . \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

Prosseguindo com a nossa estimativa, escolhemos $q = \tilde{\mathcal{L}}m$, em (4.2.21) obtendo

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m.(-\Delta m) \, dx + \int_{\Omega} (u.\nabla)m.(-\Delta m) \, dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} (\operatorname{rot} m).\operatorname{rot}(-\Delta m) \, dx + \sigma \int_{\Omega} (\operatorname{div} m).(\operatorname{div}(-\Delta m)) \, dx \\ & = \int_{\Omega} (w \wedge m).(-\Delta m) \, dx - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (m - \chi_0 h).(-\Delta m) \, dx, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \end{aligned}$$

Note que $\int_{\Omega} m(-\Delta m) \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{rot} m \operatorname{rot} m \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} m \operatorname{div} m \, dx$. Mais uma vez, recorreremos às desigualdades de interpolações, obtendo o seguinte

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ \|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2 \} + \sigma \|\Delta m\|^2 \\ & \leq \left| \int_{\Omega} (u.\nabla)m.(-\Delta m) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} (w \wedge m).(-\Delta m) \, dx \right| \\ & + \frac{1}{\tau} \left| \int_{\Omega} (m - \chi_0 h).(-\Delta m) \, dx \right| \\ & \leq C'_6 \left(\|u\|_{1,2}^{\frac{2}{3}} \|u\|^{\frac{1}{3}} \right) \left(\|\nabla m\|_{1,2}^{\frac{1}{3}} \|\nabla m\|^{\frac{2}{3}} \right) \|\Delta m\| \\ & + C'_7 \left(\|w\|_{1,2}^{\frac{1}{2}} \|w\|^{\frac{1}{2}} \right) \left(\|m\|_{1,2}^{\frac{1}{2}} \|m\|^{\frac{1}{2}} \right) \|\Delta m\| \\ & + C'_8 (\|m\| + \|h\|) \|\Delta m\| . \end{aligned}$$

O seguinte resultado segue aplicando a desigualdade de Young e absorvendo os termos $\|\Delta m\|^2$:

$$\frac{d}{dt} \{ \|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2 \} + \frac{\sigma}{2} \|\Delta m\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_6'' \|u\|_{1,2}^2 \|u\| \|\nabla m\|^2 \\
&+ C_7'' \|w\|_{1,2} \|w\| \|m\|_{1,2} \|m\| \\
&+ C_8'' (\|m\|^2 + \|h\|^2) .
\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

Na seqüência, somamos (4.2.55), (4.2.56) e (4.2.57) obtendo:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\{ \varrho \|\nabla u\|^2 + \varrho k \eta' \|\nabla w\|^2 + \varrho k (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 + \|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2 \right\} \\
&+ \frac{(\eta + \xi)}{4} \|Au\|^2 + \frac{1}{8} \|\mathcal{L}w\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\Delta m\|^2 \\
&\leq C_1' \|m\|_{2,2} \|m\| \|\nabla h\|^2 + \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} \|\operatorname{rot} w\|^2 + C_2' \|\nabla u\|^4 \|u\| \\
&+ C_3' \|u\|_{1,2}^2 \|u\| \|\nabla w\|^2 + C_4' \|m\|_{1,2} \|m\| \|h\|_{1,2} \|h\| \\
&+ C_5' (\|\operatorname{rot} u\|^2 + \|w\|^2) + C_6'' \|u\|_{1,2}^2 \|u\| \|\nabla m\|^2 \\
&+ C_7'' \|w\|_{1,2} \|w\| \|m\|_{1,2} \|m\| + C_8'' (\|m\|^2 + \|h\|^2) .
\end{aligned} \tag{4.2.58}$$

Observe que, considerando (4.2.15) e (4.2.16), temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\|\Delta \varphi\|^2 &= 4\pi \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla (\operatorname{div} m) \, dx - \int_{\Omega} f \Delta \varphi \, dx \\
&\leq 4\pi \|h\| \|\nabla (\operatorname{div} m)\| + \|f\| \|\Delta \varphi\| .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\nabla h\|^2 \leq 4\pi \|h\| \|\nabla (\operatorname{div} m)\| + \|f\|^2 . \tag{4.2.59}$$

Usando (4.2.59) em (4.2.58) inferimos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\{ \varrho \|\nabla u\|^2 + \varrho k \eta' \|\nabla w\|^2 + \varrho k (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 + \|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2 \right\} \\
&+ \frac{(\eta + \xi)}{4} \|Au\|^2 + \frac{1}{8} \|\mathcal{L}w\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\Delta m\|^2 \\
&\leq C_1' \|m\|_{2,2} \|m\| (4\pi \|h\| \|\nabla (\operatorname{div} m)\| + \|f\|^2) + \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} \|\operatorname{rot} w\|^2 + C_2' \|\nabla u\|^4 \|u\| \\
&+ C_3' \|u\|_{1,2}^2 \|u\| \|\nabla w\|^2 + C_4' \|m\|_{1,2} \|m\| \left(2\pi^{\frac{1}{2}} \|h\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla (\operatorname{div} m)\|^{\frac{1}{2}} + \|f\| \right) \|h\| \\
&+ C_5' (\|\operatorname{rot} u\|^2 + \|w\|^2) + C_6'' \|u\|_{1,2}^2 \|u\| \|\nabla m\|^2 \\
&+ C_7'' \|w\|_{1,2} \|w\| \|m\|_{1,2} \|m\| + C_8'' (\|m\|^2 + \|h\|^2) .
\end{aligned} \tag{4.2.60}$$

Seja

$$\mathcal{E}_2(t) := \left\{ \varrho \|\nabla u\|^2 + \varrho k \eta' \|\nabla w\|^2 + \varrho k (\eta' + \lambda') \|\operatorname{div} w\|^2 + \|\operatorname{rot} m\|^2 + \|\operatorname{div} m\|^2 \right\}.$$

Note que $\|u\|$, $\|w\|$, $\|m\|$, $\|h\|$ são limitadas por uma constante $C(f, \mathcal{E}(0))$, como consequência da existência de solução fraca. Aplicando a desigualdade de Young com ϵ adequado em (4.2.60) e absorvendo os termos $\|\Delta m\|^2$, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{E}_2(t) + \frac{(\eta + \xi)}{4} \|Au\|^2 + \frac{1}{8} \|\mathcal{L}w\|^2 \\ & + \left(\frac{\sigma}{4} - \frac{(\pi C'_1)^2 C^4(f, \mathcal{E}(0)) + 2(c_p C'_4)^2 C^2(f, \mathcal{E}(0))}{\sigma} \right) \|\Delta m\|^2 \\ & \leq \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} \|\operatorname{rot} w\|^2 + C'_2 \|\nabla u\|^4 C(f, \mathcal{E}(0)) \\ & + C'_3 \|u\|_{1,2}^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \|\nabla w\|^2 + C''_6 \|u\|_{1,2}^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \|\nabla m\|^2 \\ & + C''_7 \|w\|_{1,2} C^2(f, \mathcal{E}(0)) \|m\|_{1,2} + C_9(f, \mathcal{E}(0)). \end{aligned}$$

Seja

$$C_D := \min \left\{ \frac{c_p \rho (\eta + \xi)}{4}, \left(\frac{\sigma}{4} - \frac{(\pi C'_1)^2 C^4(f, \mathcal{E}(0)) + 2(c_p C'_4)^2 C^2(f, \mathcal{E}(0))}{\sigma} \right), \right. \\ \left. 8(\rho \eta' + \rho k (\eta' + \lambda)) \right\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{E}_2(t) + C_D \mathcal{E}_2(t) \\ & \leq \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} \mathcal{E}_2(t) + C'_2 \|\nabla u\|^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \mathcal{E}_2(t) \\ & + C'_3 \|u\|_{1,2}^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \mathcal{E}_2(t) + C''_6 \|u\|_{1,2}^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \mathcal{E}_2(t) \\ & + C''_7 C^2(f, \mathcal{E}(0)) \mathcal{E}_2(t) + C_9(f, \mathcal{E}(0)). \end{aligned}$$

Na sequência, deduzimos o seguinte resultado usando o fator integrante $\exp(C_D t)$ e integrando de 0 a t , $0 \leq t \leq T$

$$\exp(C_D t) \mathcal{E}_2(t) \leq \mathcal{E}_2(0) + \frac{C_9(f, \mathcal{E}(0)) (\exp(C_D t) - 1)}{C_D}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \left(\frac{4\xi^2}{\eta + \xi} + C'_2 \|\nabla u\|^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \right) \exp(C_D s) \mathcal{E}_2(s) ds \\
& + \int_0^t \left(C'_3 \|u\|_{1,2}^2 C(f, \mathcal{E}(0)) \right) \exp(C_D s) \mathcal{E}_2(s) ds \\
& + \int_0^t \left(+C''_6 \|u\|_{1,2}^2 C(f, \mathcal{E}(0)) + C''_7 C^2(f, \mathcal{E}(0)) \right) \exp(C_D s) \mathcal{E}_2(s) ds .
\end{aligned}$$

Nessas condições, aplicamos a desigualdade de Gronwall, $0 \leq t \leq T$, obtendo o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2(t) & \leq \mathcal{E}_2(0) \exp(-C_D t) + \frac{C_9(f, \mathcal{E}(0))}{C_D} (1 - \exp(-C_D t)) \\
& \exp \left(-C_D t + \frac{4\xi^2}{\eta + \xi} T + C'' C(f, \mathcal{E}(0)) \int_0^T \|\nabla u(s)\|^2 ds \right. \\
& \left. + C''_7 C^2(f, \mathcal{E}(0)) T \right) . \tag{4.2.61}
\end{aligned}$$

Sejam $C_{10}(f, \mathcal{E}(0)) := C'' C(f, \mathcal{E}(0)) \int_0^T \|\nabla u(s)\|^2 ds$ e

$$C_{exp} := \exp \left(\frac{4\xi^2}{\eta + \xi} T + C_{10}(f, \mathcal{E}(0)) + C''_7 C^2(f, \mathcal{E}(0)) T \right)$$

duas constantes. Então, obtemos a estimativa pretendida

$$\mathcal{E}_2(t) \leq \mathcal{E}_2(0) + \frac{C_9(f, \mathcal{E}(0))}{C_D} C_{exp}, \quad 0 \leq t \leq T .$$

$\mathcal{E}_2(0)$, isto é, $\mathcal{E}_2^n(0)$ é limitada por uma constante que independe de m devido ao fato de que, por exemplo, no caso do P_1^m temos que este operador de projeção também é a projeção ortogonal de \mathbb{V}_σ sobre S_1^m e logo

$$\|\nabla u_m(0)\| = \|P_1^m(u_0)\|_{\mathbb{V}_\sigma} \leq \|u_0\|_{\mathbb{V}_\sigma} = \|\nabla u_0\| .$$

□

Capítulo 5

Problemas em Aberto

Durante a nossa pesquisa, deparamos com alguns problemas que ainda não foram apresentadas quaisquer propostas. São problemas em abertos, que certamente constituirão a base de trabalhos posteriores. A seguir, discutiremos alguns desses problemas por ordem crescente de grau de complexibilidade:

1. Investigar a estabilidade assintótica de solução forte T -periódica para o sistema magneto-elástico com dissipação do tipo $|\frac{\partial u}{\partial t}|^p \frac{\partial u}{\partial t}$ e acoplamento linear. Isto é, investigar a estabilidade assintótica de solução forte T -periódica para o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{L}u + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^p \frac{\partial u}{\partial t} &= \text{rot } h \wedge H_e + f, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nu_1 \tilde{\mathcal{L}}h &= \text{rot} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \wedge H_e \right], \\ \text{div } h &= 0, \text{ em } \mathbb{R} \times \Omega, \end{aligned}$$

com as seguintes condições de fronteira e periodicidade respectivamente

$$\begin{aligned} u = 0, \quad h \cdot n = 0, \quad \text{rot } h \wedge n = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u(T, x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(T, x), \end{aligned}$$

$$h(0, x) = h(T, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega .$$

Como completar a energia constitui a maior dificuldade observada nesse problema.

2. Estudar a existência de soluções fortes T -periódicas "não pequenas" para o sistema magneto-elástico com dissipação linear e acoplamento não linear. Isto é, estudar a existência de soluções fortes T -periódicas "não pequenas" para o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \varrho_M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\beta + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu_0 (\operatorname{rot} h) \wedge (h + H_e) + f, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nu_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} h &= \operatorname{rot} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \wedge (h + H_e) \right], \\ \operatorname{div} h &= 0, \end{aligned}$$

em $\mathbb{R} \times \Omega$, com as seguintes condições de periodicidade e de fronteira respectivamente,

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u(T, x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(T, x), \\ h(0, x) &= h(T, x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$u = 0, \quad h \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} h \wedge n = 0 \quad \text{em } (0, T) \times \partial\Omega .$$

A grande dificuldade nesse problema é o fato de não termos uma estimativa a priori. Ao considerar o sistema magneto-elástico com dissipação linear e acoplamento não linear, enfrentamos dificuldades para estabelecer a existência de soluções fortes periódicas no tempo, devido às não linearidades. O fato de usarmos multiplicadores de ordem mais alta, os termos não se cancelam e a não linearidade domina, fazendo com que a obtenção de uma estimativa a priori seja muito difícil. Esse problema foi contornado, ao construir um espaço onde procuramos a solução. O fato da dissipação ser linear nos ajuda na construção de energia e na absorção de termos.

3. Investigar a existência de solução forte T -periódica para o sistema magneto-elástico com dissipação do tipo $\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^p \frac{\partial u}{\partial t}$ e acoplamento não linear. Isto é, investigar a existência de solução forte T -periódica

para o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \varrho_M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\beta + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^p \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu_0 (\operatorname{rot} h) \wedge (h + H_e) + f, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nu_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} h &= \operatorname{rot} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \wedge (h + H_e) \right], \\ \operatorname{div} h &= 0, \end{aligned}$$

em $\mathbb{R} \times \Omega$, com as seguintes condições de periodicidade e de fronteira respectivamente,

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u(T, x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(T, x), \\ h(0, x) &= h(T, x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$u = 0, \quad h \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} h \wedge n = 0 \quad \text{em } (0, T) \times \partial\Omega .$$

Quando consideramos o sistema magneto-elástico com dissipação não linear e acoplamentos não lineares, o grau de dificuldade para a obtenção de existência de soluções fortes periódicas no tempo é ainda maior. Isto porque, o método que usamos para obter a existência para os dois casos separados são diferentes e não se aplicam em conjunto. Além disso, as regularidades obtidas nos casos separados são de natureza distintas.

Serão essas algumas direções do nosso trabalho futuro.

Referências

Bibliográficas

- [1] R. A. Adams, John J. F. Fournier *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, second edition, Academic Press, 2003.
- [2] S. S. Agmon, A. A. Douglis, L. Nirenberg *Estimates near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I*, Communications on Pure and Applied Mathematics 1959.
- [3] Y. Amirat, K. Hamdache, F. Murat *Global Weak Solutions to Equations of motion for Magnetic Fluids*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics 10 (2008), 326-351.
- [4] Y. Amirat, K. Hamdache, *Unique Solvability of Equations of Motion for Ferrofluids*, Nonlinear Analysis 11 (2010), 471-494.
- [5] E. Andreou, G. Dassios, *Dissipation of Energy for Magnetoelastic Waves in a Conductive Medium*, Q. Appl. Math., Mar 1, 1997, American Mathematical Society, Boston, MA, USA.
- [6] G. Baghdasaryan, Z. Danoyan, *Magnetoelastic Waves*, Engineering Materials, Springer, 2018.
- [7] D. I. Bardzokas, M. L. Filshitskiy, L. A. Filshitskiy, *Mathematical Methods in Electro-Magneto-Elasticity, Lect. Notes Appl. Compt. Mech.*, Springer, 2007.
- [8] G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics: Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics (Cambridge*

- Texts in Applied Mathematics*) 1st Edition., Cambridge University Press, New York, 1996.
- [9] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces: an introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer 1976.
- [10] A. I. Borisenko, I. E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Dover Publications, New York, 1979.
- [11] O. M. Botsenyuk, *Global solutions of a two-dimensional initial boundary-value problem for a system of semilinear magnetoelasticity equations*, Ukrainian Mathematical Journal, 1996, 2, páginas 181–188.
- [12] O. M. Botsenyuk, *Solvability of an initial-boundary value problem for a system of semilinear equations in magnetoelasticity*, Ukraïn. Mat. Zh. 44 (9) (1992) 1181–1186.
- [13] O. M. Botsenyuk, *Regularity of solutions of an initial/boundary problem for a system of semilinear equations of magnetoelasticity*, J. Math. Sci. 81 (6) (1996) 3053–3057.
- [14] F. Boyer, P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Applied Mathematical Sciences, Springer 2013.
- [15] T. A. Burton, *Stability and Periodic solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications 2005.
- [16] B. Carbonaro, B., R. Russo, *On the uniqueness of solutions to the initial-boundary value problem of the dynamical theory of magnetoelasticity*, Math. Anal. Appl., 2, páginas 376–384 vol.114, 1986.
- [17] M. Chipot, M., I. Shafir, V. Valente, G. Vergara Caffarelli, *On a hyperbolic-parabolic system arising in magnetoelasticity*, Math. Anal. Appl., vol.352,1, páginas 120–141 2009.
- [18] R. C. Charão, J. C. Oliveira, G. Perla Menzala, *Decay rates of magnetoelastic waves in an unbounded conductive medium*, Electron. J. Differential Equations, 127 (2011) 1-14. 2011.
- [19] R. C. Charão, J. C. Oliveira, G. Perla Menzala, *Energy decay rates of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A 25 (3), páginas 797–821, 2009.

- [20] J. C. Oliveira, R. C. Charão, *Stabilization of a locally damped incompressible wave equation*, J. Mathematical Analysis and Applications 303, páginas 699–725, 2005.
- [21] Philippe G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and Its Applications, Elsevier Science Publishers, Netherlands, 1988.
- [22] C. M. Dafermos, *On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 29, páginas 241–271 1968.
- [23] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 3*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [24] F. Demengel, G. Demengel *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, London, 2012.
- [25] N. L. Dias, *Uma Breve Introdução à Análise Dimensional.*, Universidade Federal de Paraná, 2014.
- [26] S. S. Dragomir, *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*, Victoria University of Technology, Australia, 2002.
- [27] Lazar Dragos, *Contributions to the integration of the magnetoelasticity equations*, Int. J. Engng Sci., 4, páginas 525–527, 1966.
- [28] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics.*, Springer-Verlag, Berlin, páginas 328–332 1976.
- [29] A. C. Eringen, A. G. Maugin, *Electrodynamics of Continua. I Foundations and Solid Media*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [30] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type.*, Dover Publications, 2008.
- [31] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations* (Second Edition) Springer Monographs in Mathematics. New York: springer. Steady-state problems, 2011.
- [32] G. P. Galdi, S. Rionero, *Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathmanstics 1134, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

- [33] J. F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquids metals. Numerical mathematics and scientific computation.*, Oxford university press, oxford, 2006.
- [34] M.-H. Giga, Y. Giga, J. Saal, *Nonlinear Partial Differential Equations: Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 79. Birkhäuser Basel, Year, 2010.
- [35] M. Grobbelaar-Van Dalsen, *On the dissipative effect of a magnetic field in a Mindlin-Timoshenko plate model*, Z. Angew. Math. Phys., vol.62, 6, páginas 1047–1065, 2012.
- [36] M. Grobbelaar-Van Dalsen, *The role of magnetic fields in the strong stabilization of a hybrid magneto-elastic structure*, Math. Methods Appl. Sci., vol.35, 2, páginas 228–1237, 2012.
- [37] A. Haraux, *Non-resonance for a strongly dissipative wave equation in higher dimensions*, manuscripta mathematica, vol53, 1, páginas 145–166, Springer, 1985.
- [38] A. Haraux, *Nonlinear evolution equations. Global behavior of solutions*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [39] S. Ji, Y. Li *Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation*, Arch. Ration. Mech. Anal., vol199, 2, páginas 435–451, 2011.
- [40] H. Kato, *Existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Anal. Appl., vol208, 1, páginas 141–157, 1997.
- [41] Y. Kim, K. Li *Time-Periodic Strong Solutions of the 3D Navier-Stokes Equations with Damping*, Electronic Journal of Differential Equations, vol2017, 244, páginas 1–11, 2017.
- [42] H. Kozono, M. Nakao *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2), vol48, 1, páginas 33–50, 1996.
- [43] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.
- [44] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1972.

- [45] J. L. Lions, W. A. Strauss *Some non-linear evolution equations*, Bull. Soc. Math. France, vol93, páginas 43–96, 1965.
- [46] C. R. Luz, *Propriedades assintóticas de sistemas eletromagnéticos/elásticos anisotrópicos*, PhD thesis, UFRJ, 2009.
- [47] C. R. Luz, J. C. Oliveira, *Asymptotic behavior of solutions for the magneto-thermo-elastic system in 3-D*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, páginas 1200–1215, 2015.
- [48] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover Publications, Inc., New York, 1994.
- [49] G. Perla Menzala, E. Zuazua, *Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium*, Asymptot. Anal. 18 (3-4) (1998) 349–362.
- [50] M. Mohebbi, *Time-periodic solutions of magnetoelastic systems and embedding of the attractor of 2-dimensional Navier-Stokes equations into Euclidean spaces*, University of Pittsburgh, 2013.
- [51] M. Mohebbi, J. C. Oliveira, *Existence of time-periodic solutions for a magnetoelastic system in bounded domains*, J. Elasticity 113 (1) (2013) 113–133.
- [52] M. Nakao, *Global and periodic solutions for nonlinear wave equations with some localized nonlinear dissipation*, Journal of Differential Equations, vol190, páginas 81–107, Academic Press, 2003.
- [53] W. Neves, V. Priimenko, M. Vishnevskii, *Well-posedness of the Cauchy problem to a nonlinear magnetoelastic system in 1-D periodic media*, J. Inverse Ill-Posed Probl., vol.20(5-6), 6, páginas805–830, 2012.
- [54] J. C. Oliveira, *Asymptotic stability and regularity of solutions for a magnetoelastic system in bounded domains*, Acta Math. Vietnam. 39 (2) (2014) 133–150.
- [55] H. Parkus, *Electromagnetic Interactions in Elastic Solids, CISM Courses and Lectures, Vol257*, Springer-Verlag, Vienna, Y1979.
- [56] L.C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich, *Ordinary Differential Equations in \mathbb{R}^n* , Problems and Methods Springer-Verlag, New York, 1984.

- [57] V. Priimenko, M. Vishnevskii, *An initial boundary-value problem for model electromagnetoelasticity system*, J. Differential Equations, vol.235, 1, páginas 31–55, 2007.
- [58] V. Priimenko, M. Vishnevskii, *Direct problem for a nonlinear evolutionary system*, *Nonlinear Anal.*, vol.73, 6, páginas 1767–1782, 2010.
- [59] G. Prodi, *Soluzioni periodiche dell' equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, Rend. Semin. Mat.36, Univ. Padova, páginas 37–49, 1966.
- [60] G. Prouse, *Soluzioni periodiche dell' equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico*, Ric. Mat. 13, Amsterdam, páginas 261–280, 1964.
- [61] J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Magneto-thermo-elasticity, large time behavior for linear systems*, Adv. Differential Equations 6 (3) (2001) 359–384. .
- [62] J. E. Muñoz Rivera, M. L. Santos, *Polynomial stability to three-dimensional magnetoelastic waves*, Acta Appl. Math. 76 (3) (2003) 265–281.
- [63] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, 2014.
- [64] R. E. Rosensweig, *Magnetic Fluids*, Ann. Rev. Fluid Mech. 19 (1987), 437-461.
- [65] J. Serrin, *A note on the existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 3:120-122, 1959.
- [66] J. Serrin, *On the stability of viscous fluid motions*, Arch. Rational Mech. Anal., vol 3, 1959.
- [67] A. L. Silvestre, *Existence and uniqueness of time-periodic solutions with finite kinetic energy for the Navier-Stokes equations in R^3* , 25(1):37-55, 2012.
- [68] J. Simon, *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and pressure*, SIAM J. Math. Anal. 21, N.5, 1990, 1093-1117.
- [69] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

- [70] Y. Wang, Z. Tan, *Global existence and asymptotic analysis of weak solutions to the equations of ferrodynamics*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11 (2010), 4254-4268.
- [71] Jr. William H. Hayt, Jonh A. Buck, *Electromagnetismo*, LTC, 1983.
- [72] Y. Xia, *Theory and Applications of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2013.
- [73] V. Yudovich, *Periodic motions of a viscous incompressible fluid*. Sov. Math., Dokl., 1:168-172, 1960.
- [74] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Points Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [75] Z. Zhang, *Periodic solutions for wave equations with variable coefficients with nonlinear localized damping*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 363, páginas 549–558, Elsevier, 1959.