Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Categorias módulo e equivariantizações

Matheus Bordin Marchi
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Fevereiro de 2018

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Categorias módulo e equivariantizações

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Matheus Bordin Marchi
Florianópolis
Fevereiro de 2018

Categorias módulo e equivariantizações

por

Matheus Bordin Marchi[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof<u>ª</u>. Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS)

Profª. Dra. Sara Regina da Rosa Pinter
(Instituto Federal Catarinense - IFC)

Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, fevereiro de 2018.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

O estudo da Matemática é o mais indicado para desenvolver as
faculdades, fortalecer o raciocínio e iluminar o espírito.
(Sócrates, Filósofo Grego)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Regis e Naira, por todo apoio e encorajamento que me deram ao longo deste caminho. À minha mana Maura pela alegria que traz à minha vida desde o momento em que nasceu, e ao Kazuza pela companhia. À minha namorada Fani por ser minha fonte de inspiração e parceira de vida. Amo muito todos vocês.

Aos funcionários, colegas e professores do departamento, em especial à professora Virgínia que me orientou com paciência e dedicação durante estes anos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho ao longo do curso de mestrado.

Resumo

No presente trabalho dissertamos sobre categorias monoidais, categorias módulo e equivariantização destas. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, $\mathcal{M}$ um $\mathcal{C}$-módulo, G um grupo e H subgrupo de G. Temos como principal objetivo mostrar que se a categoria $\mathcal{M}$ é H-equivariante então a mesma admite uma estrutura de $\mathcal{C}^G$-módulo.

Abstract

In this work we study monoidal category, module category and their equivariantizations. Let $\mathcal{C}$ be a monoidal category, $\mathcal{M}$ a $\mathcal{C}$-module, G a group and H subgroup of G. Our main objective is to show that if the category $\mathcal{M}$ is H-equivariant, then it admits a $\mathcal{C}^G$-module structure.

Sumário

Introdução **1**

1 Pré-requisitos **5**
1.1 Categorias 5
1.2 Funtores e transformações naturais 7

2 Categorias monoidais **13**
2.1 Noções básicas 13
2.2 Funtores monoidais e transformações naturais monoidais 16

3 Categorias módulo **23**

4 Equivariantização de categorias monoidais **33**

5 Equivariantização de categorias módulo **41**
5.1 Noções preliminares 41
5.2 Categorias módulo H-equivariantes 43

Apêndice **51**

Introdução

A ideia de "categorificação" de estruturas matemáticas surgiu no trabalho de Louis Crane em parceria com Igor Frenkel sobre estruturas algébricas da teoria quântica de campos - QFT em [1]. Embora não haja ainda uma definição universal que se aplique em todos os conceitos, logo se percebeu que a categorificação é um fenômeno matemático amplo com aplicações que vão além de suas motivações originais. O objetivo da categorificação é converter noções de conjuntos por noções de categorias, funções por funtores e equações por isomorfismos naturais ou funtores. Dessa forma, pode-se ter um entendimento mais profundo de objetos matemáticos e descobrir estruturas não vistas no contexto original (ver [5]). Existe, ainda, uma noção precisa, porém dependente do contexto de "descategorificação", que é o processo de retornar o objeto categorificado ao contexto inicial.

A definição de categoria monoidal apareceu primeiramente no trabalho de MacLane (ver [7]) e pode ser pensada como uma categorificação do conceito de monoide, que é um conjunto X dotado de uma operação binária $(x, y) \mapsto x.y$ associativa, com elemento neutro 1 tal que $1^2 = 1$, e bijeções $1.x \mapsto x$ e $x.1 \mapsto x$ de X em X. Com essa mesma ideia, a noção de categoria módulo pode ser pensada como uma categorificação do conceito de um módulo sobre um anel com unidade.

A noção de ação de um grupo G em uma categoria $\mathcal{C}$ é uma coleção de funtores $\{F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C} : g \in G\}$ e isomorfismos naturais que satisfazem dois diagramas a respeito de certa associatividade destes funtores e propriedade de F_1, sendo 1 o elemento neutro de G. Com isto, é possível definir o conceito de equivariantização de uma categoria $\mathcal{C}$ por um grupo G, denotada por $\mathcal{C}^G$, que pode ser pensada como uma categorificação do conceito de anel de invariantes, voltaremos a falar disso mais adiante.

Seja H um subgrupo de G, uma categoria módulo $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}$ é dita H-equivariante se o grupo H age sobre a categoria $\mathcal{M}$, isto é, se existem funtores $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^g$ de $\mathcal{C}$-módulos que definem a ação de H sobre $\mathcal{M}$ e existe certa família de isomorfismos naturais μ que satisfazem algumas condições.

Dado um $\mathcal{C}$-módulo H-equivariante $\mathcal{M}$, podemos considerar a categoria de objetos e morfismos equivariantes, denotada por $\mathcal{M}^H$. O objetivo principal deste trabalho é mostrar que esta nova categoria $\mathcal{M}^H$ possui uma estrutura de categoria módulo sobre a categoria de $\mathcal{C}^G$.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos e um apêndice cujos assuntos abordados são descritos abaixo. São considerados como pré-requisitos as teorias de anéis, de grupos e de módulos.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos da teoria de categoria que são utilizados ao longo do trabalho. Mostramos as definições, conceitos e propriedades de categoria, funtor e transformação natural, assim como exemplos clássicos e outros mais voltados ao foco deste trabalho. Estudamos, também, as categorias e funtores produto, assim como propriedades relativas a estes.

No Capítulo 2 fazemos um estudo acerca das categorias monoidais apresentando sua definição, propriedades e principais exemplos, assim como as noções de funtores e transformações naturais monoidais. Em resumo, uma categoria monoidal é uma categoria munida de um funtor chamado produto tensorial que associa um par de objetos (X, Y) a um novo objeto na categoria, denotado por $X \otimes Y$, juntamente com certos isomorfismos naturais que satisfazem os Axiomas do Pentágono e do Triângulo.

No Capítulo 3 é estudado o conceito de categorias módulo. Uma categoria módulo consiste de uma categoria $\mathcal{M}$ que sofre ação de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ via o funtor $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ e morfismos que precisam satisfazer certas condições definidas, estas inspiradas na definição de módulo sobre um anel. Vemos também o conceito de funtor e transformação natural de $\mathcal{C}$-módulos.

No Capítulo 4 apresentamos a definição de equivariantização de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ por um grupo G. Primeiramente veremos que é possível definir um grupo agindo em uma categoria e concluir que $\mathcal{C}^G$ é uma categoria monoidal se $\mathcal{C}$ o é.

No Capítulo 5, com todos os conceitos que precisamos expostos, apresentamos como podemos equivariantizar uma categoria módulo $\mathcal{M}$ por um subgrupo H de G. Finalmente demonstraremos o teorema principal deste trabalho que verifica as condições necessárias para que a categoria M^H seja um $\mathcal{C}^G$-módulo.

O Apêndice contém um exemplo de categoria monoidal que precisa de conceitos próprios não utilizados ao longo do trabalho. Durante o ano passado na disciplina Tópicos em Categorias Tensoriais e suas

Representações estudamos diversos assuntos relacionados à teoria de categorias como, por exemplo, as categorias rígidas e algumas propriedades como objetos e morfismos equivariantes nesta categoria. Para o objetivo deste trabalho, que é demonstrar o Teorema 5.8, não precisamos destes conceitos e, para deixar o trabalho mais direcionado para seu objetivo, resolvemos não inserir estas partes.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Nesse primeiro capítulo abordaremos as definições e resultados necessários para a compreensão do trabalho. Apresentamos aqui os conceitos fundamentais de categoria, funtor, transformação natural, entre outros, assim como a notação e nomenclatura escolhida para os capítulos subsequentes. Todas as definições e noções podem ser encontradas em [6] e [8].

1.1 Categorias

Definição 1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de*
(i) *uma coleção de objetos $Obj(\mathcal{C})$;*
(ii) *para cada par de objetos (X, Y) em $\mathcal{C}$ há uma coleção de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$;*
(iii) *para todo objeto X em $Obj(\mathcal{C})$ existe um morfismo $id_X : X \to X$ em $Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ chamado morfismo identidade;*
(iv) *para quaisquer X, Y e Z em $\mathcal{C}$ existe uma função*

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

chamada composição de morfismos, denotada por $\circ(f, g) = f \circ g$, tal que, para quaisquer f em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e h em $Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$, valem os axiomas

$$id_Y \circ f = f = f \circ id_X \qquad \text{e} \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Um morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pode ser denotado por $f : X \to Y$ ou também $X \xrightarrow{f} Y$. Muitas vezes diremos apenas objeto X em $\mathcal{C}$ ou o morfismo f em $\mathcal{C}$, ao invés de X em $Obj(\mathcal{C})$ e f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Por abuso de notação, usamos o símbolo da pertinência nos casos $X \in \mathcal{C}$ e $f \in \mathcal{C}$ mesmo sabendo que $Obj(\mathcal{C})$ e $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ não são necessariamente conjuntos.

Definição 1.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é dito um isomorfismo se existe um morfismo $g : Y \to X$ em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$.*

Se existir um isomorfismo entre os objetos X e Y, então X diz-se isomorfo a Y e denotamos isto por $X \simeq Y$.

É fácil verificar que se a condição acima é válida, então o morfismo g é único. Neste caso, denotamos g por f^{-1}. Vejamos agora alguns exemplos conhecidos de categorias.

Exemplo 1.3. A categoria *Set* é a categoria cujos objetos são os conjuntos e os morfismos entre dois conjuntos são as funções entre tais conjuntos. Para cada $X \in Set$, a função $id_X \in Hom_{Set}(X,X)$ é a identidade de X. Como a composição de funções é associativa, segue que as condições da definição acima são satisfeitas, isto é, *Set* é uma categoria.

Exemplo 1.4. A categoria *Grp* é a categoria cujos objetos são os grupos, e os morfismos entre dois grupos são os homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.5. A categoria *Ring* é a categoria cujos objetos são os anéis e os morfismos entre objetos são os homomorfismos de anéis.

Exemplo 1.6. Seja $\Bbbk$ um corpo. Denotamos por $Vect_{\Bbbk}$ a categoria cujos objetos são os espaços vetoriais e os morfismos são as transformações lineares. Denotamos $vect_{\Bbbk}$ a categoria cujos objetos são os espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos as transformações lineares.

Exemplo 1.7. Seja A um anel. Denotamos por ${}_A\mathcal{M}$ (respectivamente $\mathcal{M}_A$) a categoria cujos objetos são os A-módulos à esquerda (à direita). Os morfismos são os homomorfismos de A-módulos à esquerda (à direita).

No próximo exemplo, apresentamos o conceito de categoria produto que será frequentemente usado nos próximos capítulos.

Exemplo 1.8. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias, $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ e $X', Y', Z' \in \mathcal{D}$. Então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma categoria cujos objetos são os pares (X, X') em que $X \in \mathcal{C}$ e $X' \in \mathcal{D}$.

Dados $(X, X'), (Y, Y')$ objetos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, é definido

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) = (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')).$$

Com isso em mente, é possível definirmos a operação composição

$$\begin{array}{ccc} (Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z), Hom_{\mathcal{D}}(Y', Z')) & \times & (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')) \\ (g, g') & & (f, f') \end{array}$$

por $(g, g') \circ (f, f') = (g \circ f, g' \circ f') \in (Hom_{\mathcal{C}}(X, Z), Hom_{\mathcal{D}}(X', Z')) = Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Z, Z'))$. O morfismo identidade do objeto $(X, X') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$.

Finalmente, se (f, f') é um isomorfismo em $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$, então f é um isomorfismo em $\mathcal{C}$ e f' um isomorfismo em $\mathcal{D}$. Daí, $(f, f')^{-1} = (f^{-1}, f'^{-1})$.

1.2 Funtores e transformações naturais

Apresentamos abaixo a definição de funtor, que são "funções" que "relacionam" objetos e morfismos de uma categoria a outra preservando a composição.

Definição 1.9. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de duas funções:*
(i) *uma função $F : Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{D})$ que associa a cada objeto X em $\mathcal{C}$ um objeto $F(X)$ em $\mathcal{D}$;*
(ii) *uma função $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ que associa a cada morfismo $f : X \to Y$ em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ tal que são verdadeiras*

$$F(id_X) = id_{F(X)} \quad e \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

para quaisquer g morfismo em $\mathcal{C}$ tal que a composição $f \circ g$ é possível.

Lembramos que a palavra função que aparece na definição acima significa apenas uma regra e não uma função no sentido usual da teoria dos conjuntos. Abaixo seguem algumas propriedades e exemplos de funtores.

Exemplo 1.10. Dado uma categoria $\mathcal{C}$, existe um funtor chamado *funtor identidade* $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, para quaisquer X em $Obj(\mathcal{C})$ e f morfismo em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.11. Seja $F : Grp \to Set$ tal que $F(G) = G$ e $F(f) = f$. Este funtor é chamado *funtor esquecimento*, pois em Set é esquecida a estrutura de grupo dos objetos de Grp. Assim como os morfismos de grupos são considerados apenas como função entre conjuntos.

Como vemos na próxima proposição, um funtor aplicado a um isomorfismo é também um isomorfismo.

Proposição 1.12. *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e $f : X \to Y$ um isomorfismo em $\mathcal{C}$. Então $F(f) : F(X) \to F(Y)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.*

Demonstração: De fato, sendo f um isomorfismo, existe um morfismo $f^{-1} : Y \to X$ tal que $f \circ f^{-1} = id_Y$ e $f^{-1} \circ f = id_X$. Assim,

$$id_{F(X)} = F(id_X) = F(f^{-1} \circ f) = F(f^{-1}) \circ F(f) \quad e$$
$$id_{F(Y)} = F(id_Y) = F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1}).$$

Logo $F(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$ com $(F(f))^{-1} = F(f^{-1})$. ■

Vemos agora um exemplo que define um funtor em uma categoria produto e como este atua nos objetos, morfismos e na composição, quando possível.

Exemplo 1.13. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ categorias, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ funtores, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$ e $f' : X' \to Y'$, $g' : Y' \to Z'$ morfismos em $\mathcal{D}$.

Definimos o funtor $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}' \times \mathcal{D}'$ por $(F \times G)(X, Y) = (F(X), G(Y))$ e $(F \times G)(f, f') = (F(f), G(f'))$. Então

$$\begin{aligned} (F \times G)(id_{(X,Y)}) &= (F \times G)(id_X, id_Y) \\ &= (F(id_X), G(id_Y)) \\ &= (id_{F(X)}, id_{G(Y)}) \\ &= id_{(F(X),G(Y))} \\ &= id_{(F\times G)(X,Y)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (F \times G)((g, g') \circ (f, f')) &= (F \times G)(g \circ f, g' \circ f') \\ &= (F(g \circ f), G(g' \circ f')) \\ &= (F(g) \circ F(f), G(g') \circ G(f')) \\ &= (F(g), G(g')) \circ (F(f), G(f')) \\ &= (F \times G)(g, g') \circ (F \times G)(f, f'), \end{aligned}$$

Portanto $F \times G$ é um funtor.

No próximo exemplo notemos que a categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é um caso particular de categoria produto, como visto no Exemplo 1.8.

Exemplo 1.14. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Consideremos X um objeto fixado em $\mathcal{C}$ e definimos o funtor

$$X \times Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C} \;\text{ por }\; (X \times Id_{\mathcal{C}})(Y) = (X, Y) \;\text{ e,}$$

para todo morfismo $f : W \to Z$ em $\mathcal{C}$, $(X \times Id_{\mathcal{C}})(f) = (id_X, f)$. De fato, $X \times Id_{\mathcal{C}}$ associa cada objeto Y em $\mathcal{C}$ a um objeto (X, Y) em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e a cada morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(W, Z)$ a um morfismo (id_X, f) em $Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}((X, W), (X, Z))$.

Além disso, $(X \times Id_{\mathcal{C}})(id_X) = (id_X, id_X) = id_{(X,X)}$. Agora, dado $g \in Hom_{\mathcal{C}}(V, W)$, segue que

$$\begin{aligned}
(X \times Id_{\mathcal{C}})(f \circ g) &= (id_X, f \circ g) \\
&= (id_X \circ id_X, f \circ g) \\
&= (id_X, f) \circ (id_X, g) \\
&= (X \times Id_{\mathcal{C}})(f) \circ (X \times Id_{\mathcal{C}})(g).
\end{aligned}$$

Portanto $X \times Id_{\mathcal{C}}$ é um funtor. De maneira análoga, pode-se mostrar que $Id_{\mathcal{C}} \times X$ é um funtor definindo-o por $(Id_{\mathcal{C}} \times X)(Y) = (Y, X)$ e $(Id_{\mathcal{C}} \times X)(f) = (f, id_X)$, para quaisquer Y em $Obj(\mathcal{C})$ e f morfismo em $\mathcal{C}$.

Estes funtores são fortemente usados na definição de categoria monoidal, que veremos no próximo capítulo.

Apresentamos agora uma observação muito utilizada ao longo deste trabalho afirmando que a composição de dois funtores, quando possível, é um funtor.

Observação 1.15. Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. Então $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor.

De fato, como $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ e, para cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, $(G \circ F)(f) = G(F(f))$, temos que

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(id_X) &= G(F(id_X)) \\
&= G(id_{F(X)}) \\
&= id_{G(F(X))} \\
&= id_{(G\circ F)(X)}.
\end{aligned}$$

Para todo $g : Y \to Z$ morfismo em $\mathcal{C}$

$$(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f))$$

$$
\begin{aligned}
&= G(F(g) \circ F(f)) \\
&= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\
&= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f).
\end{aligned}
$$

Portanto $G \circ F$ é um funtor. Assim, a composição de funtores, quando possível, é um funtor.

A próxima definição apresenta o conceito de transformação natural, e é bem usado em todos capítulos seguintes. Vimos que o funtor associa objetos e morfismos de uma categoria a outra. Uma transformação natural associa um funtor a outro, como vemos a seguir.

Definição 1.16. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Uma transformação natural $\mu : F \to G$ é uma coleção de morfismos*

$$\{\mu_X : F(X) \to G(X) : X \in \mathcal{C}\}$$

tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

comuta, isto é, $G(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ F(f)$, para quaisquer X, Y em $\mathcal{C}$ e para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$.

Se $\mu_X : F(X) \to G(X)$ é isomorfismo, para todo objeto X em $\mathcal{C}$, então μ é chamado *isomorfismo natural*. Neste caso, diremos que F é equivalente a G e denotamos isso por $F \sim G$.

Exemplo 1.17. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Notemos que sempre existe a transformação natural identidade $ID : F \to F$ dada por $ID_X = id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$, para todo objeto X em $\mathcal{C}$.

Definição 1.18. *Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. A equivalência entre categorias é denotada por $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$.*

Assim como os funtores, a composição de duas transformações naturais, quando possível, é uma transformação natural, como vemos abaixo. Tal composição é conhecida como *composição vertical* de transformações naturais. Há também a *composição horizontal*, para mais detalhes veja ([8], p.15).

Observação 1.19. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\mu : F \to G$ e $\lambda : G \to H$ transformações naturais. A composição $\lambda \circ \mu : F \to H$ dada por $(\lambda \circ \mu)_X = \lambda_X \circ \mu_X$ para todo objeto X em $\mathcal{C}$ é uma transformação natural pois, para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "(\lambda\circ\mu)_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "(\lambda\circ\mu)_Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

comuta. De fato,

$$\begin{aligned}
H(f) \circ (\lambda \circ \mu)_X &= H(f) \circ \lambda_X \circ \mu_X \\
&\overset{(*)}{=} \lambda_Y \circ G(f) \circ \mu_X \\
&\overset{(**)}{=} \lambda_Y \circ \mu_Y \circ F(f) \\
&= (\lambda \circ \mu)_Y \circ F(f)
\end{aligned}$$

em que as igualdades $(*)$ e $(**)$ são verdadeiras devido à naturalidade das transformações λ e μ, respectivamente.

Capítulo 2

Categorias monoidais

Apresentamos a definição de categorias monoidais, que é uma categoria munida de um funtor, de certos isomorfismos naturais e de um objeto chamado unidade. Tal conceito é uma categorificação da noção de monoide com multiplicação e unidade caracterizadas por um funtor e um objeto, respectivamente. Além disso, definimos funtor monoidal e verificamos alguns resultados importantes envolvendo as diferentes composições entre tais funtores, assim como algumas propriedades de certos morfismos e um determinado objeto. Este capítulo é desenvolvido com base nas referências [3] e [8].

Na definição abaixo, aparecem casos particulares dos funtores $X \times Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e de $Id_{\mathcal{C}} \times X : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, como visto no Exemplo 1.14, quando X é um objeto bem determinado em $\mathcal{C}$.

2.1 Noções básicas

Definição 2.1. *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla* $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ *em que* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor chamado produto tensorial,* $\mathbf{1}$ *é um objeto em* $\mathcal{C}$ *chamado unidade,*

$$a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes),$$

$$l : \otimes \circ (\mathbf{1} \times Id_{\mathcal{C}}) \to Id_{\mathcal{C}} \qquad e \qquad r : \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \mathbf{1}) \to Id_{\mathcal{C}}$$

são isomorfismos naturais tais que, para quaisquer objetos X, Y, Z, W em $\mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"'] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

são comutativos, ou seja,

$$a_{X,Y,Z\otimes W} \circ a_{X\otimes Y,Z,W} = (id_X \otimes a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \tag{2.1}$$

e

$$r_X \otimes id_Y = (id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y}. \tag{2.2}$$

Na definição acima, para quaisquer objetos X, Y, Z em $\mathcal{C}$,

$$a_{X,Y,Z} : (X\otimes Y)\otimes Z \to X\otimes(Y\otimes Z), \ \ l_X : \mathbf{1}\otimes X \to X \ \text{ e } \ r_X : X\otimes 1 \to X$$

são morfismos em $\mathcal{C}$.

O primeiro diagrama chama-se *Axioma do Pentágono* e o segundo *Axioma do Triângulo*. O isomorfismo natural a é chamado *associatividade* ou *morfismo associatividade* da categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$.

Escrevemos simplesmente $\mathcal{C}$ para denotar uma categoria monoidal quando os outros elementos da sêxtupla estão implícitos no contexto. Daqui para frente, $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal, quando nada for dito ao contrário.

Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W, Z)$. Então $\otimes(f, g) = f \otimes g \in Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes W, Y \otimes Z)$ e como $(id_X, id_Y) = id_{(X,Y)}$ é o morfismo identidade do objeto (X, Y) em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, então $id_X \otimes id_Y = \otimes(id_{(X,Y)}) = id_{\otimes(X,Y)} = id_{X\otimes Y}$.

Algumas propriedades bem utilizadas nos cálculos envolvendo categorias monoidais são descritas abaixo por meio de observações.

Observação 2.2. Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W,Z)$ morfismos. Então vale a propriedade

$$f \otimes g = (f \otimes id_Z) \circ (id_X \otimes g) = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_W).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
f \otimes g &= (f \circ id_X) \otimes (id_Z \circ g) \\
&= \otimes(f \circ id_X, id_Z \circ g) \\
&\overset{(*)}{=} \otimes((f, id_Z) \circ (id_X, g)) \\
&= \otimes(f, id_Z) \circ \otimes(id_X, g) \\
&= (f \otimes id_Z) \circ (id_X \otimes g),
\end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ é verdadeira pela estrutura de composição de morfismos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ apresentada no Exemplo 1.8. Analogamente, $f \otimes g = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_W)$. Logo,

$$f \otimes g = (f \otimes id_Z) \circ (id_X \otimes g) = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_W).$$

Observação 2.3. Sejam $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ isomorfismos em $\mathcal{C}$. Então $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

De fato, sabemos que $(f,g) \circ (f^{-1}, g^{-1}) = (id_Y, id_Z)$ e que $(f^{-1}, g^{-1}) \circ (f, g) = (id_X, id_W)$. Assim,

$$\otimes((f,g) \circ (f^{-1}, g^{-1})) = \otimes(id_Y, id_Z) = id_Y \otimes id_Z = id_{Y \otimes Z}.$$

Por outro lado,

$$\otimes((f,g) \circ (f^{-1}, g^{-1})) = \otimes(f,g) \circ \otimes(f^{-1}, g^{-1}) = (f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}).$$

Logo, $(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = id_{Y \otimes Z}$. Analogamente, $(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) = id_{X \otimes W}$. Assim, $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Haverá muitos casos em que as mesmas são usadas, não faremos qualquer menção quanto aos seus usos.

Proposição 2.4. *Sejam $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal. Então $\mathbf{1}$ é único, salvo isomorfismo.*

Demonstração: Suponhamos que exista $\mathbf{1}'$ outro objeto unidade na categoria $(\mathcal{C}, \otimes, a, l', r', \mathbf{1}')$. Temos que $l_{\mathbf{1}'} : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}' \to \mathbf{1}'$ e $r'_{\mathbf{1}} : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}' \to \mathbf{1}$ são isomorfismos e assim, $r'_{\mathbf{1}} \circ l_{\mathbf{1}'}^{-1} : \mathbf{1}' \to \mathbf{1}$ é um isomorfismo. Portanto, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}'$ são objetos isomorfos. ∎

Exemplo 2.5. A categoria dos conjuntos Set é monoidal, com unidade $\mathbf{1} = \{*\}$ sendo um conjunto unitário e o funtor $\otimes$ é dado pelo produto cartesiano $\times$. Os morfismos de associatividade são canônicos, e para todo X em Set, os isomorfismos $l_X : \mathbf{1} \times X \to X$ e $r_X : X \times \mathbf{1} \to X$ são definidos por $l_X(*, x) = x$ e $r_X(x, *) = x$.

Exemplo 2.6. Seja $\Bbbk$ um corpo. A categoria $Vect_{\Bbbk}$ é monoidal, com o funtor $\otimes$ sendo o produto tensorial sobre o corpo $\Bbbk$, isto é $\otimes_{\Bbbk}$. A unidade é o corpo $\Bbbk$ e os isomorfismos naturais a, l e r são canônicos e definidos por

$$\begin{array}{rcl} a_{X,Y,Z} : (X \otimes_{\Bbbk} Y) \otimes_{\Bbbk} Z & \to & X \otimes_{\Bbbk} (Y \otimes_{\Bbbk} Z) \\ (x \otimes y) \otimes z & \mapsto & x \otimes (y \otimes z), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} l_X : \Bbbk \otimes_{\Bbbk} X & \to & X \\ k \otimes x & \simeq & x, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} r_X : X \otimes_{\Bbbk} \Bbbk & \to & X \\ x \otimes k & \simeq & x, \end{array}$$

para quaisquer espaços vetoriais $X, Y, Z \in Vect_{\Bbbk}$ e $k \in \Bbbk$. A categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita $vect_{\Bbbk}$ também é monoidal com a mesma estrutura de $Vect_{\Bbbk}$.

No Apêndice, apresentamos um exemplo não trivial de categoria monoidal. Para desenvolvê-lo são necessárias algumas definições sobre espaços vetoriais graduados e de 3-coclico para um grupo G. Em vista disto, criamos tal apêndice para melhor explicar este exemplo.

2.2 Funtores monoidais e transformações naturais monoidais

Estudamos agora os funtores monoidais e as transformações naturais entre os mesmos, as chamadas transformações naturais monoidais. Além disso, mostramos que a composição de funtores monoidais é também um funtor monoidal.

Na próxima definição, usamos o mesmo símbolo $\otimes$ para representar o funtor produto tensorial de duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ monoidais distintas.

Definição 2.7. *Um funtor quase-monoidal entre duas categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma tripla (F, ξ, ϕ), em que*
(i) *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor;*
(ii) *$\xi : \otimes \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural entre os funtores $\otimes \circ (F \times F) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F \circ \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, isto é, $\{\xi_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y) : (X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}\}$ é uma família de isomorfismos em $\mathcal{C}$;*
(iii) *$\phi : \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \to F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})$ é um isomorfismo.*

Nos cálculos, omitimos as letras $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ que indicam os objetos unidade $1_{\mathcal{C}}$ e $1_{\mathcal{D}}$.

Definição 2.8. *O funtor (F, ξ, ϕ) é dito monoidal se é quase-monoidal e também satisfaz*

$$\text{(i) } \xi_{X,Y\otimes Z} \circ (id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}) \circ a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z}) \circ \xi_{X\otimes Y,Z} \circ (\xi_{X,Y} \otimes id_{F(Z)}); \tag{2.3}$$

$$\text{(ii) } l_{F(X)} = F(l_X) \circ \xi_{\mathbf{1},X} \circ (\phi \otimes id_{F(X)}); \tag{2.4}$$

$$\text{(iii) } r_{F(X)} = F(r_X) \circ \xi_{X,\mathbf{1}} \circ (id_{F(X)} \otimes \phi). \tag{2.5}$$

As igualdades (i), (ii) e (iii) da definição acima podem ser representadas através da comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
& (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[dl, "\xi_{X,Y} \otimes id_{F(Z)}"'] \arrow[dr, "a_{F(X),F(Y),F(Z)}"] & \\
F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "\xi_{X\otimes Y,Z}"'] & & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[d, "id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dr, "F(a_{X,Y,Z})"'] & & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[dl, "\xi_{X,Y\otimes Z}"] \\
& F(X \otimes (Y \otimes Z)), &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "\phi \otimes id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(1) \otimes F(X) \arrow[r, "\xi_{1,X}"] & F(1 \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes 1 \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "id_{F(X)} \otimes \phi"'] & F(X) \\
F(X) \otimes F(1) \arrow[r, "\xi_{X,1}"] & F(X \otimes 1). \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}$$

Quando não houver confusão quanto aos morfismos que acompanham o funtor (F, ξ, ϕ), diremos apenas que o funtor F é monoidal.

Exemplo 2.9. Com a notação do Exemplo A4, veja Apêndice, consideramos $\mu : G \times G \to \Bbbk^*$ uma função. Definimos o funtor $F : \mathcal{C}(G, \omega_1) \to \mathcal{C}(G, \omega_2)$ por $F(V) = V$, para todo $V \in \mathcal{C}(G, \omega_1)$, o isomorfismo $\xi_{U,V} : U \otimes V \to U \otimes V$ por $\xi_{U,V}(u \otimes v) = \mu(g, h)u \otimes v$, para quaisquer $U, V \in \mathcal{C}(G, \omega_1)$, $u \in U_g$ e $v \in V_h$, e o isomorfismo $\phi = id_{\Bbbk}$.

Por ([8], Lema 3.2.4.), o funtor $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C}(G, \omega_1) \to \mathcal{C}(G, \omega_2)$ é monoidal se

$$\omega_1(g, h, f)\mu(gh, f)\mu(g, h) = \mu(g, hf)\mu(h, f)\omega_2(g, h, f),$$

para quaisquer $g, h, f \in G$.

Proposição 2.10. *A composição (quando possível) de funtores monoidais é um funtor monoidal.*

Demonstração: Sejam $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $(F', \xi', \phi') : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores monoidais. Precisamos mostrar que $(F' \circ F, \varepsilon, \psi) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor monoidal, em que $\varepsilon_{X,Y} = F'(\xi_{X,Y}) \circ \xi'_{F(X),F(Y)}$, e $\psi = F'(\phi) \circ \phi'$, para quaisquer $X, Y \in C$.

Sabemos que $F' \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor pois é a composição de dois funtores. Além disso, para quaisquer X, Y em $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{X,Y} &: (F' \circ F)(X) \otimes (F' \circ F)(Y) \to (F' \circ F)(X \otimes Y) \quad e \\ \psi &: \mathbf{1}_{\mathcal{E}} \to F' \circ F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \end{aligned}$$

são isomorfismos em $\mathcal{E}$, pois ambos são composições de isomorfismos.

Verifiquemos primeiramente a condição (i). Sejam X, Y, Z em $\mathcal{C}$. Então

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{X,Y\otimes Z} \circ (id_{F'\circ F(X)} \otimes \varepsilon_{Y,Z}) \circ a_{F'\circ F(X),F'\circ F(Y),F'\circ F(Z)} \\ = \;& F'(\xi_{X,Y\otimes Z}) \circ \xi'_{F(X),F(Y\otimes Z)} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes (F'(\xi_{Y,Z}) \circ \xi'_{F(Y),F(Z)})) \circ \\ & a_{F'(F(X)),F'(F(Y)),F'(F(Z))} \\ = \;& F'(\xi_{X,Y\otimes Z}) \circ \xi'_{F(X),F(Y\otimes Z)} \circ (F'(id_{F(X)}) \otimes F'(\xi_{Y,Z})) \circ \\ & (id_{F'(F(X))} \otimes \xi'_{F(Y),F(Z)}) \circ a_{F'(F(X)),F'(F(Y)),F'(F(Z))} \\ \overset{(1)}{=} \;& F'(\xi_{X,Y\otimes Z}) \circ F'(id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}) \circ \xi'_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)} \circ \\ & (id_{F'(F(X))} \otimes \xi'_{F(Y),F(Z)}) \circ a_{F'(F(X)),F'(F(Y)),F'(F(Z))} \\ \overset{(2.3)}{=} \;& F'(\xi_{X,Y\otimes Z} \circ (id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z})) \circ F'(a_{F(X),F(Y),F(Z)}) \circ \\ & \xi'_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)} \circ (\xi'_{F(X),F(Y)} \otimes id_{F'(F(Z))}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F'(\xi_{X,Y\otimes Z} \circ (id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}) \circ a_{F(X),F(Y),F(Z)}) \circ \\
&\quad \xi'_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)} \circ (\xi'_{F(X),F(Y)} \otimes id_{F'(F(Z))}) \\
&\overset{(2.3)}{=} F'(F(a_{X,Y,Z}) \circ \xi_{X\otimes Y,Z} \circ (\xi_{X,Y} \otimes id_{F(Z)})) \circ \xi'_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)} \circ \\
&\quad (\xi'_{F(X),F(Y)} \otimes id_{F'(F(Z))}) \\
&= F'(F(a_{X,Y,Z})) \circ F'(\xi_{X\otimes Y,Z}) \circ F'(\xi_{X,Y} \otimes id_{F(Z)}) \circ \\
&\quad \xi'_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)} \circ (\xi'_{F(X),F(Y)} \otimes id_{F'(F(Z))}) \\
&\overset{(2)}{=} F'(F(a_{X,Y,Z})) \circ F'(\xi_{X\otimes Y,Z}) \circ \xi'_{F(X\otimes Y),F(Z)} \circ \\
&\quad (F'(\xi_{X,Y}) \otimes id_{F'(F(Z))}) \circ (\xi'_{F(X),F(Y)} \otimes id_{F'(F(Z))}) \\
&= F'(F(a_{X,Y,Z})) \circ \varepsilon_{X\otimes Y,Z} \circ ((F'(\xi_{X,Y}) \circ \xi'_{F(X),F(Y)}) \otimes id_{F'(F(Z))}) \\
&= F' \circ F(a_{X,Y,Z}) \circ \varepsilon_{X\otimes Y,Z} \circ (\varepsilon_{X,Y} \otimes id_{F'\circ F(Z)}),
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (1) segue devido à naturalidade de ξ'. De fato,

$$
\begin{tikzcd}
F'(F(X)) \otimes F'(F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[r, "\xi'_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)}"] \arrow[d, "F'(id_{F(X)})\otimes F'(\xi_{Y,Z})"'] & F'(F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z))) \arrow[d, "F'(id_{F(X)}\otimes \xi_{Y,Z})"] \\
F'(F(X)) \otimes F'(F(Y \otimes Z)) \arrow[r, "\xi'_{F(X),F(Y\otimes Z)}"'] & F'(F(X) \otimes F(Y \otimes Z)).
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, a igualdade (2) é verdadeira por causa da naturalidade de ξ', cujo respectivo diagrama é análogo ao visto acima.

Agora, provemos (ii). Seja $X \in \mathcal{C}$. Então

$$
\begin{aligned}
& F' \circ F(l_X) \circ \varepsilon_{\mathbf{1},X} \circ (\psi \otimes id_{F'\circ F(X)}) \\
&= F'(F(l_X)) \circ F'(\xi_{\mathbf{1},X}) \circ \xi'_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ (\psi \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&= F'(F(l_X) \circ \xi_{\mathbf{1},X}) \circ \xi'_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ (\psi \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&\overset{(2.4)}{=} F'(l_{F(X)} \circ (\phi^{-1} \otimes id_{F(X)})) \circ \xi'_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ (\psi \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&= F'(l_{F(X)}) \circ F'(\phi^{-1} \otimes id_{F(X)}) \circ \xi'_{F(\mathbf{1}),F(X)} \circ (\psi \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&\overset{(3)}{=} F'(l_{F(X)}) \circ \xi'_{\mathbf{1},F(X)} \circ (F'(\phi^{-1}) \otimes id_{F'(F(X))}) \circ \\
&\quad ((F'(\phi) \circ \phi') \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&= F'(l_{F(X)}) \circ \xi'_{\mathbf{1},F(X)} \circ ((F'(\phi^{-1}) \circ F'(\phi) \circ \phi') \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&= F'(l_{F(X)}) \circ \xi'_{\mathbf{1},F(X)} \circ ((F'(\phi^{-1} \circ \phi) \circ \phi') \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&= F'(l_{F(X)}) \circ \xi'_{\mathbf{1},F(X)} \circ ((F'(id_{\mathbf{1}}) \circ \phi') \otimes id_{F'(F(X))})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F'(l_{F(X)}) \circ \xi'_{\mathbf{1},F(X)} \circ ((id_{F'(\mathbf{1})} \circ \phi') \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&= F'(l_{F(X)}) \circ \xi'_{\mathbf{1},F(X)} \circ (\phi' \otimes id_{F'(F(X))}) \\
&\overset{(2.4)}{=} l_{F'(F(X))} = l_{F'\circ F(X)},
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (3) vale, pois ξ' é uma transformação natural, como vemos abaixo

$$
\begin{tikzcd}
F'(F(\mathbf{1})) \otimes F'(F(X)) \arrow[r, "\xi'_{F(\mathbf{1}),F(X)}"] \arrow[d, "F(\phi^{-1})\otimes F'(id_{F(X)})"'] & F'(F(\mathbf{1}) \otimes F(X)) \arrow[d, "F'(\phi^{-1}\otimes id_{F(X)})"] \\
F'(\mathbf{1}) \otimes F'(F(X)) \arrow[r, "\xi'_{\mathbf{1},F(X)}"'] & F'(\mathbf{1} \otimes F(X)).
\end{tikzcd}
$$

Finalmente mostremos (iii). Seja $X \in \mathcal{C}$. Então

$$
\begin{aligned}
& F' \circ F(r_X) \circ \varepsilon_{X,\mathbf{1}} \circ (id_{F'\circ F(X)} \otimes \psi) \\
&= F'(F(r_X)) \circ F'(\xi_{X,\mathbf{1}}) \circ \xi'_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes \psi) \\
&= F'(F(r_X) \circ \xi_{X,\mathbf{1}}) \circ \xi'_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes \psi) \\
&\overset{(2.5)}{=} F'(r_{F(X)} \circ (id_{F(X)} \otimes \phi^{-1})) \circ \xi'_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes \psi) \\
&= F'(r_{F(X)}) \circ F'(id_{F(X)} \otimes \phi^{-1}) \circ \xi'_{F(X),F(\mathbf{1})} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes \psi) \\
&\overset{(4)}{=} F'(r_{F(X)}) \circ \xi'_{F(X),\mathbf{1}} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes F'(\phi^{-1})) \circ \\
&\quad (id_{F'(F(X))} \otimes (F'(\phi) \circ \phi')) \\
&= F'(r_{F(X)}) \circ \xi'_{F(X),\mathbf{1}} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes (F'(\phi^{-1}) \circ F'(\phi) \circ \phi')) \\
&= F'(r_{F(X)}) \circ \xi'_{F(X),\mathbf{1}} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes (F'(\phi^{-1} \circ \phi) \circ \phi')) \\
&= F'(r_{F(X)}) \circ \xi'_{F(X),\mathbf{1}} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes (F'(id_{\mathbf{1}}) \circ \phi')) \\
&= F'(r_{F(X)}) \circ \xi'_{F(X),\mathbf{1}} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes (id_{F'(\mathbf{1})} \circ \phi')) \\
&= F'(r_{F(X)}) \circ \xi'_{F(X),\mathbf{1}} \circ (id_{F'(F(X))} \otimes \phi') \\
&\overset{(2.5)}{=} r_{F'(F(X))} = r_{F'\circ F(X)},
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (4) é justificada de forma análoga à (3). Portanto, o funtor $F' \circ F$ é monoidal. ∎

A seguinte definição é bem utilizada ao longo do trabalho.

Definição 2.11. *Sejam (F, ξ, ϕ) e (F', ξ', ϕ') funtores monoidais entre as categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Uma transformação natural monoidal*

$$\theta : (F, \xi, \phi) \to (F', \xi', \phi')$$

é uma transformação natural $\theta : F \to F'$ *tal que, para quaisquer* $X, Y \in \mathcal{C}$*, são satisfeitos*

$$\text{(i) } \theta_{\mathbf{1}} \circ \phi = \phi', \tag{2.6}$$

$$\text{(ii) } \theta_{X \otimes Y} \circ \xi_{X,Y} = \xi'_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes \theta_Y). \tag{2.7}$$

Se θ é uma transformação natural monoidal e θ_X é isomorfismo, para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, então θ é chamado *isomorfismo natural monoidal.*

Uma *equivalência monoidal* entre as categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é um funtor monoidal $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que existe um outro funtor monoidal $(F', \xi', \phi') : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais monoidais $\theta_1 : F \circ F' \to Id_{\mathcal{D}}$ e $\theta_2 : F' \circ F \to Id_{\mathcal{C}}$.

Capítulo 3

Categorias módulo

Assim como categorias monoidais "categorificam" a noção de anel, de maneira similar, categorias módulo "categorificam" a noção de um módulo sobre um anel. Isso é o que discutimos nesse capítulo, que é base para o entendimento do Capítulo 5. Consideremos $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ uma categoria monoidal. Seguimos basicamente [2], [8] e [10].

Definição 3.1. *Uma categoria módulo à esquerda ou um $\mathcal{C}$-módulo à esquerda é uma coleção $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ em que*
(i) $\mathcal{M}$ *é uma categoria;*
(ii) $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *é um funtor;*
(iii) $m : \overline{\otimes} \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{M}}) \to \overline{\otimes} \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \overline{\otimes})$ *e* $l : \overline{\otimes} \circ (\mathbf{1} \times Id_{\mathcal{M}}) \to Id_{\mathcal{M}}$ *são isomorfismos naturais tais que* $\{m_{X,Y,M} : (X \otimes Y)\overline{\otimes} M \to X \overline{\otimes}(Y \overline{\otimes} M) : X, Y \in \mathcal{C},\ M \in \mathcal{M}\}$ *e* $\{l_M : \mathbf{1}\overline{\otimes} M \to M : M \in \mathcal{M}\}$ *são isomorfismos em* $\mathcal{M}$ *tais que*

$$m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M} \circ m_{X\otimes Y,Z,M} = (id_X \overline{\otimes} m_{Y,Z,M}) \circ m_{X,Y\otimes Z,M} \circ (a_{X,Y,Z} \overline{\otimes} id_M), \tag{3.1}$$

e

$$(id_X \overline{\otimes} l_M) \circ m_{X,\mathbf{1},M} = r_X \overline{\otimes} id_M. \tag{3.2}$$

As igualdades da definição anterior podem ser expressas através da comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
& ((X \otimes Y) \otimes Z)\overline{\otimes}M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\overline{\otimes}id_M"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z))\overline{\otimes}M \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"'] & & (X \otimes Y)\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes}M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}"'] \\
X\overline{\otimes}((Y \otimes Z)\overline{\otimes}M) \arrow[rr, "id_X\overline{\otimes}m_{Y,Z,M}"] & & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes}M))
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1})\overline{\otimes}M \arrow[rr, "m_{X,\mathbf{1},M}"] \arrow[dr, "r_X\overline{\otimes}id_M"'] & & X\overline{\otimes}(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) \arrow[dl, "id_X\overline{\otimes}l_M"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

De forma semelhante, é possível definir uma categoria módulo à direita (ou um $\mathcal{C}$-módulo à direita).

Observamos que, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$, $\overline{\otimes}(X, M) = X\overline{\otimes}M$ e que, para quaisquer $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ e $g : M \to N \in \mathcal{M}$, $\overline{\otimes}(f, g) = f\overline{\otimes}g$. Um caso particular desse funtor apareceu na definição de categoria monoidal, o leitor pode observar isso no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2. Toda categoria monoidal é uma categoria módulo sobre si mesma, basta considerarmos $\otimes = \overline{\otimes}$ e $m = a$.

Podemos também definir um funtor entre dois $\mathcal{C}$-módulos, bem como o conceito de transformação natural entre dois destes funtores. Todas as definições e resultados ao longo desse trabalho são apresentados apenas para o caso de $\mathcal{C}$-módulos à esquerda, sendo o caso para $\mathcal{C}$-módulos à direita inteiramente análogo. Para facilitar a escrita, escrevemos apenas $\mathcal{C}$-módulos ao invés de $\mathcal{C}$-módulos à esquerda e ao considerarmos dois $\mathcal{C}$-módulos, usamos a mesma notação para os funtores e isomorfismos naturais pois acreditamos que não haja perigo de confusão devido ao contexto.

Definição 3.3. *Sejam $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ e $(\mathcal{N}, \overline{\otimes}, m, l)$ $\mathcal{C}$-módulos. Um funtor de $\mathcal{C}$-módulos entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ é um par (F, c), em que $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um funtor e $c : F \circ \overline{\otimes} \to \overline{\otimes} \circ (Id_{\mathcal{C}} \times F)$ é um isomorfismo natural tal que*

$$\{c_{X,M} : F(X\overline{\otimes}M) \to X\overline{\otimes}F(M) : X \in \mathcal{C},\ M \in \mathcal{M}\}$$

é uma família de isomorfismos em que são satisfeitas as igualdades

$$(id_X \overline{\otimes} c_{Y,M}) \circ c_{X,Y\overline{\otimes}M} \circ F(m_{X,Y,M}) = m_{X,Y,F(M)} \circ c_{X\otimes Y,M}, \quad (3.3)$$

e

$$l_{F(M)} \circ c_{\mathbf{1},M} = F(l_M). \quad (3.4)$$

As igualdades acima são expressas pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & F((X\otimes Y)\overline{\otimes}M) \arrow[dl, "c_{X\otimes Y,M}"'] \arrow[dr, "F(m_{X,Y,M})"] & \\
(X\otimes Y)\overline{\otimes}F(M) \arrow[d, "m_{X,Y,F(M)}"'] & & F(X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M)) \arrow[d, "c_{X,Y\overline{\otimes}M}"'] \\
X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}F(M)) & & X\overline{\otimes}F(Y\overline{\otimes}M) \arrow[ll, "id_X\overline{\otimes}c_{Y,M}"']
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) \arrow[rr, "c_{\mathbf{1},M}"] \arrow[dr, "F(l_M)"'] & & \mathbf{1}\overline{\otimes}F(M) \arrow[dl, "l_{F(M)}"] \\
 & F(M), &
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$.

Exemplo 3.4. Dado um $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$, o funtor identidade $Id_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é um funtor de $\mathcal{C}$-módulos em que $c_{X,M} = id_{X\overline{\otimes}M}$, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$.

Definição 3.5. ([4], Ssc. 2) *Sejam $(F, c), (G, d) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dois funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Uma transformação natural de $\mathcal{C}$-módulos é uma transformação natural $\theta : F \to G$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F(X\overline{\otimes}M) \arrow[r, "\theta_{X\overline{\otimes}M}"] \arrow[d, "c_{X,M}"'] & G(X\overline{\otimes}M) \arrow[d, "d_{X,M}"] \\
X\overline{\otimes}F(M) \arrow[r, "id_X\overline{\otimes}\theta_M"'] & X\overline{\otimes}G(M),
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $d_{X,M} \circ \theta_{X\overline{\otimes}M} = (id_X \overline{\otimes}\theta_M) \circ c_{X,M}$.

Caso exista um isomorfismo natural de $\mathcal{C}$-módulos entre os funtores F e G, então o funtor (F, c) diz-se *equivalente* à (G, d).

A seguir, mostramos que a composição de funtores de $\mathcal{C}$-módulos (quando a mesma é possível) é também um funtor de $\mathcal{C}$-módulos.

Proposição 3.6. *Sejam $(F, c) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ e $(G, d) : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ funtores de $\mathcal{C}$-módulos e seja $b_{X,M} = d_{X,F(M)} \circ G(c_{X,M})$, para todo $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. Então $(G \circ F, b) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3$ é um funtor de $\mathcal{C}$-módulos.*

Demonstração: Notemos que, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$, $b_{X,M}$ é um isomorfismo, pois é uma composição de isomorfismos. Agora, vejamos que b é uma transformação natural, isto é, provemos que o diagrama abaixo comuta, para quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : M \to N$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente,

$$\begin{tikzcd}
(G \circ F)(X \overline{\otimes} M) \arrow[r, "b_{X,M}"] \arrow[d, "(G\circ F)(f \overline{\otimes} g)"'] & X \overline{\otimes} (G \circ F)(M) \arrow[d, "f \overline{\otimes} (G \circ F)(g)"] \\
(G \circ F)(Y \overline{\otimes} N) \arrow[r, "b_{Y,N}"] & Y \overline{\otimes} (G \circ F)(N).
\end{tikzcd}$$

Temos

$$\begin{aligned}
(f \overline{\otimes} (G \circ F)(g)) \circ b_{X,M} &= (f \overline{\otimes} (G \circ F)(g)) \circ d_{X,F(M)} \circ G(c_{X,M}) \\
&\overset{(*)}{=} d_{Y,F(N)} \circ G(f \overline{\otimes} F(g)) \circ G(c_{X,M}) \\
&= d_{Y,F(N)} \circ G((f \overline{\otimes} F(g)) \circ c_{X,M}) \\
&\overset{(**)}{=} d_{Y,F(N)} \circ G(c_{Y,N} \circ F(f \overline{\otimes} g)) \\
&= d_{Y,F(N)} \circ G(c_{Y,N}) \circ (G \circ F)(f \overline{\otimes} g) \\
&= b_{Y,N} \circ (G \circ F)(f \overline{\otimes} g),
\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ deve-se à naturalidade de d via o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
G(X \overline{\otimes} F(M)) \arrow[r, "d_{X,F(M)}"] \arrow[d, "G(f \overline{\otimes} F(g))"'] & X \overline{\otimes} G(F(M)) \arrow[d, "f \overline{\otimes} G(F(g))"] \\
G(Y \overline{\otimes} F(N)) \arrow[r, "d_{Y,F(N)}"] & Y \overline{\otimes} G(F(N)),
\end{tikzcd}$$

e analogamente, $(**)$ segue da naturalidade de c.

Finalmente mostremos que o par $(G \circ F, b)$ satisfaz as igualdades

(3.3) e (3.4). De fato,

$$
\begin{aligned}
&(id_X\overline{\otimes}b_{Y,M})\circ b_{X,Y\overline{\otimes}M}\circ(G\circ F)(m_{X,Y,M})\\
&=(id_X\overline{\otimes}(d_{Y,F(M)}\circ G(c_{Y,M})))\circ d_{X,F(Y\overline{\otimes}M)}\circ G(c_{X,Y\overline{\otimes}M})\circ G(F(m_{X,Y,M}))\\
&=(id_X\overline{\otimes}d_{Y,F(M)})\circ(id_X\overline{\otimes}G(c_{Y,M}))\circ d_{X,F(Y\overline{\otimes}M)}\circ G(c_{X,Y\overline{\otimes}M}\circ F(m_{X,Y,M}))\\
&\overset{(*)}{=}(id_X\overline{\otimes}d_{Y,F(M)})\circ d_{X,Y\overline{\otimes}F(M)}\circ G(id_X\overline{\otimes}c_{Y,M})\circ G(c_{X,Y\overline{\otimes}M}\circ F(m_{X,Y,M}))\\
&=(id_X\overline{\otimes}d_{Y,F(M)})\circ d_{X,Y\overline{\otimes}F(M)}\circ G((id_X\overline{\otimes}c_{Y,M})\circ c_{X,Y\overline{\otimes}M}\circ F(m_{X,Y,M}))\\
&\overset{(3.3)}{=}(id_X\overline{\otimes}d_{Y,F(M)})\circ d_{X,Y\overline{\otimes}F(M)}\circ G(m_{X,Y,F(M)}\circ c_{X\otimes Y,M})\\
&=(id_X\overline{\otimes}d_{Y,F(M)})\circ d_{X,Y\overline{\otimes}F(M)}\circ G(m_{X,Y,F(M)})\circ G(c_{X\otimes Y,M})\\
&\overset{(3.3)}{=}m_{X,Y,G(F(M))}\circ d_{X\otimes Y,F(M)}\circ G(c_{X\otimes Y,M})=m_{X,Y,(G\circ F)(M)}\circ b_{X\otimes Y,M},
\end{aligned}
$$

em que a igualdade $(*)$ deve-se à naturalidade de d, isto é, à comutatividade de

$$
\begin{tikzcd}
G(X\overline{\otimes}F(Y\overline{\otimes}M)) \arrow[r, "d_{X,F(Y\overline{\otimes}M)}"] \arrow[d, "G(id_X\overline{\otimes}c_{Y,M})"'] & X\overline{\otimes}G(F(Y\overline{\otimes}M)) \arrow[d, "id_X\overline{\otimes}G(c_{Y,M})"] \\
G(X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}F(M))) \arrow[r, "d_{X,Y\overline{\otimes}F(M)}"] & X\overline{\otimes}G(Y\overline{\otimes}F(M)).
\end{tikzcd}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
l_{(G\circ F)(M)}\circ b_{\mathbf{1},M} &= l_{G(F(M))}\circ d_{\mathbf{1},F(M)}\circ G(c_{\mathbf{1},M})\\
&\overset{(3.4)}{=} G(l_{F(M)})\circ G(c_{\mathbf{1},M})\\
&= G(l_{F(M)}\circ c_{\mathbf{1},M})\\
&\overset{(3.4)}{=} G(F(l_M))=(G\circ F)(l_M).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(G\circ F,b)$ é um funtor de $\mathcal{C}$-módulos. ■

O próximo resultado é muito importante para a definição de equivariantização de categorias módulo que veremos adiante. Neste capítulo, será necessário definir uma "certa" ação de uma categoria monoidal em uma categoria módulo dada e, com tal resultado, há como vermos de forma mais natural como surge a ação dita acima.

O resultado mencionado acima pode ser inspirado em teoria de módulos. Sejam A, B anéis, M um B-módulo e $f:A\to B$ um homomorfismo de anéis. Podemos definir uma estrutura de A-módulo em M, ao definirmos a ação $\cdot : A\times M\to M$ por $a\cdot m=f(a)m$.

Proposição 3.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias monoidais, $(F,\xi,\phi):\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ um funtor monoidal e $(\mathcal{M},\overline{\otimes},m,l)$ um $\mathcal{D}$-módulo. Seja o funtor $\overline{\otimes}^F =$*

$\overline{\otimes} \circ (F \times Id_{\mathcal{M}}) : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. *Então* $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^F, m^F, l^F)$ *é um* $\mathcal{C}$*-módulo em que, para quaisquer* $X \in \mathcal{C}$ *e* $M \in \mathcal{M}$,

$$\overline{\otimes}^F(X, M) = X\overline{\otimes}^F M = F(X)\overline{\otimes}M,$$

para quaisquer $f : X \to Y$ *morfismo em* $\mathcal{C}$ *e* $g : M \to N$ *morfismo em* $\mathcal{M}$,

$$\overline{\otimes}^F(f, g) = f\overline{\otimes}^F g = F(f)\overline{\otimes}g$$

e os isomorfismos

$$m^F_{X,Y,M} : F(X \otimes Y)\overline{\otimes}M \to F(X)\overline{\otimes}(F(Y)\overline{\otimes}M) \text{ e } l^F_M : F(\mathbf{1})\overline{\otimes}M \to M$$

são dados por

$$m^F_{X,Y,M} = m_{F(X),F(Y),M} \circ (\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}id_M) \;\; e \;\; l^F_M = l_M \circ (\phi^{-1}\overline{\otimes}id_M).$$

Demonstração: Claramente, $m^F_{X,Y,M}$ e l^F_M são isomorfismos, pois cada um deles é uma composição de isomorfismos.

Verifiquemos agora a comutatividade dos diagramas de um $\mathcal{C}$-módulo, isto é, a validade das igualdades (3.1) e (3.2) para $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^F, m^F, l^F)$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
& m^F_{X,Y,Z\overline{\otimes}^F M} \circ m^F_{X\otimes Y,Z,M} \\
= \;& m_{F(X),F(Y),F(Z)\overline{\otimes}M} \circ (\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}id_{F(Z)\overline{\otimes}M}) \circ m_{F(X\otimes Y),F(Z),M} \circ \\
& (\xi^{-1}_{X\otimes Y,Z}\overline{\otimes}id_M) \\
\overset{(*)}{=} \;& m_{F(X),F(Y),F(Z)\overline{\otimes}M} \circ m_{F(X)\otimes F(Y),F(Z),M} \circ ((\xi^{-1}_{X,Y} \otimes id_{F(Z)})\overline{\otimes}id_M) \circ \\
& (\xi^{-1}_{X\otimes Y,Z}\overline{\otimes}id_M) \\
\overset{(3.1)}{=} \;& (id_{F(X)}\overline{\otimes}m_{F(Y),F(Z),M}) \circ m_{F(X),F(Y)\otimes F(Z),M} \circ (a_{F(X),F(Y),F(Z)}\overline{\otimes}id_M) \circ \\
& ((\xi^{-1}_{X,Y} \otimes id_{F(Z)})\overline{\otimes}id_M) \circ (\xi^{-1}_{X\otimes Y,Z}\overline{\otimes}id_M) \\
= \;& (id_{F(X)}\overline{\otimes}m_{F(Y),F(Z),M}) \circ m_{F(X),F(Y)\otimes F(Z),M} \circ ((a_{F(X),F(Y),F(Z)} \circ \\
& (\xi^{-1}_{X,Y} \otimes id_{F(Z)}) \circ \xi^{-1}_{X\otimes Y,Z})\overline{\otimes}id_M) \\
\overset{(2.3)}{=} \;& (id_{F(X)}\overline{\otimes}m_{F(Y),F(Z),M}) \circ m_{F(X),F(Y)\otimes F(Z),M} \circ (((id_{F(X)} \otimes \xi^{-1}_{Y,Z}) \circ \\
& \xi^{-1}_{X,Y\otimes Z} \circ F(a_{X,Y,Z}))\overline{\otimes}id_M) \\
= \;& (id_{F(X)}\overline{\otimes}m_{F(Y),F(Z),M}) \circ m_{F(X),F(Y)\otimes F(Z),M} \circ ((id_{F(X)} \otimes \xi^{-1}_{Y,Z})\overline{\otimes}id_M) \circ \\
& ((\xi^{-1}_{X,Y\otimes Z} \circ F(a_{X,Y,Z}))\overline{\otimes}id_M) \\
\overset{(**)}{=} \;& (id_{F(X)}\overline{\otimes}m_{F(Y),F(Z),M}) \circ (id_{F(X)}\overline{\otimes}(\xi^{-1}_{Y,Z}\overline{\otimes}id_M)) \circ m_{F(X),F(Y\otimes Z),M} \circ
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& ((\xi^{-1}_{X,Y\otimes Z}\circ F(a_{X,Y,Z})\overline{\otimes} id_M) \\
= \quad & (id_{F(X)}\overline{\otimes}(m_{F(Y),F(Z),M}\circ(\xi^{-1}_{Y,Z}\overline{\otimes} id_M)))\circ m_{F(X),F(Y\otimes Z),M}\circ \\
& (\xi^{-1}_{X,Y\otimes Z}\overline{\otimes} id_M)\circ(F(a_{X,Y,Z})\overline{\otimes} id_M) \\
= \quad & (id_{F(X)}\overline{\otimes} m^F_{Y,Z,M})\circ m^F_{X,Y\otimes Z,M}\circ(F(a_{X,Y,Z})\overline{\otimes} id_M) \\
= \quad & (id_X\overline{\otimes}^F m^F_{Y,Z,M})\circ m^F_{X,Y\otimes Z,M}\circ(a_{X,Y,Z}\overline{\otimes}^F id_M),
\end{aligned}
$$

em que a igualdade $(*)$ segue da naturalidade de m via a comutatividade do diagrama abaixo

$$
\begin{tikzcd}
(F(X\otimes Y)\otimes F(Z))\overline{\otimes} M \arrow[r, "m_{F(X\otimes Y),F(Z),M}"] \arrow[d, "(\xi^{-1}_{X,Y}\otimes id_{F(Z)})\overline{\otimes} id_M"'] & F(X\otimes Y)\overline{\otimes}(F(Z)\overline{\otimes} M) \arrow[d, "\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}(id_{F(Z)}\overline{\otimes} id_M)"] \\
((F(X)\otimes F(Y))\otimes F(Z))\overline{\otimes} M \arrow[r, "m_{F(X)\otimes F(Y),F(Z),M}"'] & (F(X)\otimes F(Y))\overline{\otimes}(F(Z)\overline{\otimes} M).
\end{tikzcd}
$$

A igualdade $(**)$ é verdadeira devido à naturalidade de m cujo diagrama é análogo ao feito para a igualdade $(*)$.

Agora, verificamos a comutatividade do segundo diagrama, isto é, a validade de (3.2) para $(\mathcal{M},\overline{\otimes}^F, m^F, l^F)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
& (id_X\overline{\otimes}^F l^F_M)\circ m^F_{X,\mathbf{1},M} \\
= \quad & (F(id_X)\overline{\otimes}(l_M\circ(\phi^{-1}\overline{\otimes} id_M)))\circ m_{F(X),F(Y),M}\circ(\xi^{-1}_{X,\mathbf{1}}\overline{\otimes} id_M) \\
= \quad & (id_{F(X)}\overline{\otimes} l_M)\circ(id_{F(X)}\overline{\otimes}(\phi^{-1}\overline{\otimes} id_M))\circ m_{F(X),F(Y),M}\circ(\xi^{-1}_{X,\mathbf{1}}\overline{\otimes} id_M) \\
\overset{(*)}{=} \quad & (id_{F(X)}\overline{\otimes} l_M)\circ m_{F(X),1,M}\circ((id_{F(X)}\otimes\phi^{-1})\overline{\otimes} id_M)\circ(\xi^{-1}_{X,\mathbf{1}}\overline{\otimes} id_M) \\
\overset{(3.2)}{=} \quad & (r_{F(X)}\overline{\otimes} id_M)\circ((id_{F(X)}\otimes\phi^{-1})\overline{\otimes} id_M)\circ(\xi^{-1}_{X,\mathbf{1}}\overline{\otimes} id_M) \\
= \quad & (r_{F(X)}\circ(id_{F(X)}\otimes\phi^{-1})\circ\xi^{-1}_{X,\mathbf{1}})\overline{\otimes} id_M \\
\overset{(2.5)}{=} \quad & F(r_X)\overline{\otimes} id_M = r_X\overline{\otimes}^F id_M,
\end{aligned}
$$

em que a igualdade $(*)$ segue devido à naturalidade de m segundo o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(F(X)\otimes F(Y))\overline{\otimes} M \arrow[r, "m_{F(X),F(Y),M}"] \arrow[d, "(id_{F(X)}\otimes\phi^{-1})\overline{\otimes} id_M"'] & F(X)\overline{\otimes}(F(Y)\overline{\otimes} M) \arrow[d, "id_{F(X)}\overline{\otimes}(\phi^{-1}\overline{\otimes} id_M)"] \\
(F(X)\otimes\mathbf{1})\overline{\otimes} M \arrow[r, "m_{F(X),\mathbf{1},M}"'] & F(X)\overline{\otimes}(\mathbf{1}\overline{\otimes} M).
\end{tikzcd}
$$

Para finalizar essa prova, discutimos sobre a naturalidade de m^F e de l^F. Observamos que $m^F: J\to H$, em que $J,H:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$

com $J = \overline{\otimes} \circ ((F \circ \otimes) \times Id_{\mathcal{M}})$ e $H = \overline{\otimes} \circ (Id_{\mathcal{D}} \times \overline{\otimes}) \circ (F \times F \times Id_{\mathcal{M}})$. Já $l^F : \overline{\otimes} \circ (F \times Id_{\mathcal{M}}) \circ (\mathbf{1} \times Id_{\mathcal{M}}) \to Id_{\mathcal{M}}$ e claramente, $\overline{\otimes} \circ (F \times Id_{\mathcal{M}}) \circ (\mathbf{1} \times Id_{\mathcal{M}}) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Sejam $X, X', Y, Y' \in \mathcal{C}$, $M, M' \in \mathcal{M}$, $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ morfismos em $\mathcal{C}$ e $h : M \to M'$ morfismo em $\mathcal{M}$. Para que m^F seja uma transformação natural, é necessário que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X \otimes Y)\overline{\otimes}M \arrow[r, "m^F_{X,Y,M}"] \arrow[d, "J(f,g,h)=F(f\otimes g)\overline{\otimes}h"'] & F(X)\overline{\otimes}(F(Y)\overline{\otimes}M) \arrow[d, "H(f,g,h)=F(f)\overline{\otimes}(F(g)\overline{\otimes}h)"] \\ F(X' \otimes Y')\overline{\otimes}M' \arrow[r, "m^F_{X',Y',M'}"'] & F(X')\overline{\otimes}(F(Y')\overline{\otimes}M') \end{tikzcd}$$

seja comutativo. De fato,

$$\begin{aligned} m^F_{X',Y',M'} \circ J(f,g,h) &= m_{F(X'),F(Y'),M'} \circ (\xi^{-1}_{X',Y'}\overline{\otimes}id_{M'}) \circ (F(f \otimes g)\overline{\otimes}h) \\ &= m_{F(X'),F(Y'),M'} \circ ((\xi^{-1}_{X',Y'} \circ F(f \otimes g))\overline{\otimes}h) \\ &\overset{(1)}{=} m_{F(X'),F(Y'),M'} \circ (((F(f) \otimes F(g)) \circ \xi^{-1}_{X,Y})\overline{\otimes}(h \circ id_M)) \\ &= m_{F(X'),F(Y'),M'} \circ ((F(f) \otimes F(g))\overline{\otimes}h) \circ (\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}id_M) \\ &\overset{(2)}{=} (F(f)\overline{\otimes}(F(g)\overline{\otimes}h)) \circ m_{F(X),F(Y),M} \circ (\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}id_M) \\ &= H(f,g,h) \circ m^F_{X,Y,M}, \end{aligned}$$

em que a igualdade (1) é verdadeira devido à naturalidade de ξ^{-1} e (2) devido à naturalidade de m. Finalmente, verificando a naturalidade de l^F, isto é, a comutatividade de

$$\begin{tikzcd} F(\mathbf{1})\overline{\otimes}M \arrow[r, "l^F_M"] \arrow[d, "F(id_{\mathbf{1}})\overline{\otimes}h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ F(\mathbf{1})\overline{\otimes}M' \arrow[r, "l^F_{M'}"'] & M'. \end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned} l^F_{M'} \circ (F(id_{\mathbf{1}})\overline{\otimes}h) &= l_{M'} \circ (\phi^{-1}\overline{\otimes}id_{M'}) \circ (id_{F(\mathbf{1})}\overline{\otimes}h) \\ &= l_{M'} \circ (id_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}h) \circ (\phi^{-1}\overline{\otimes}id_M) \\ &\overset{(3)}{=} h \circ l_M \circ (\phi^{-1}\overline{\otimes}id_M) \\ &= h \circ l^F_M, \end{aligned}$$

em que a igualdade (3) deve-se à naturalidade de l. Logo, $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^F, m^F, l^F)$ é um $\mathcal{C}$-módulo. $\blacksquare$

Capítulo 4

Equivariantização de categorias monoidais

Neste capítulo, estudamos o conceito de equivariantização de uma categoria monoidal por um grupo G. Para isto, é necessário entender o que seria um grupo "agir" em uma categoria monoidal, é exatamente aí onde surgem os conceitos de objetos e morfismos equivariantes. A importância deste capítulo está no fato de que a equivariantização de uma categoria é fortemente usada na demonstração de alguns resultados presentes no capítulo seguinte, dentre eles, o resultado principal deste trabalho.

Talvez seja interessante ressaltarmos que existe a definição de um grupo agindo em uma categoria $\mathcal{C}$ qualquer, veja ([2], p.35). Naturalmente, nosso interesse paira nas categorias monoidais.

Em resumo, dada uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$, podemos definir a equivariantização desta por um grupo G e deduzir que a categoria $\mathcal{C}^G$, equivariantização de $\mathcal{C}$ por G, também possui estrutura de categoria monoidal, esse é o papel principal deste capítulo.

Definição 4.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e G um grupo. Uma ação de G em $\mathcal{C}$ é uma coleção de funtores monoidais$^{(*)}$ $\{(F_g, \xi_g, \phi_g) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\}_{g \in G}$, munida de isomorfismos naturais monoidais $\gamma_{g,h} : (F_g \circ F_h, \varepsilon, \psi) \to (F_{gh}, \xi_{gh}, \phi_{gh})$ e $\gamma_0 : Id_{\mathcal{C}} \to F_1$ que satisfazem*

$$(\gamma_{gh,f})_X \circ (\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X \circ F_g((\gamma_{h,f})_X) \tag{4.1}$$

e

$$(\gamma_{g,1})_X \circ F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1,g})_X \circ (\gamma_0)_{F_g(X)} \tag{4.2}$$

para quaisquer $g, h, f \in G$ *e* $X \in \mathcal{C}$*, isto é, os diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h \circ F_f)(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_{F_f(X)}"] \arrow[d, "F_g((\gamma_{h,f})_X)"'] & (F_{gh} \circ F_f)(X) \arrow[d, "(\gamma_{gh,f})_X"] \\
(F_g \circ F_{hf})(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,hf})_X"'] & F_{ghf}(X)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
F_g(X) \arrow[r, "(\gamma_0)_{F_g(X)}"] \arrow[d, "F_g((\gamma_0)_X)"'] & (F_1 \circ F_g)(X) \arrow[d, "(\gamma_{1,g})_X"] \\
(F_g \circ F_1)(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,1})_X"'] & F_g(X).
\end{tikzcd}$$

Lembrando que dados (F_g, ξ_g, ϕ_g) e (F_h, ξ_h, ϕ_h) funtores monoidais, temos que $(F_g \circ F_h, \varepsilon, \psi)$ é um funtor monoidal com $\varepsilon_{X,Y} = F_g((\xi_h)_{X,Y}) \circ (\xi_g)_{F_h(X),F_h(Y)}$ e $\psi = F_g(\phi_h) \circ \phi_g$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, veja Proposição 2.10.

Além disso, segundo a Definição 2.11, são verificadas

$$(\gamma_{g,h})_{\mathbf{1}} \circ F_g(\phi_h) \circ \phi_g = \phi_{gh} \tag{4.3}$$

e

$$(\gamma_{g,h})_{X \otimes Y} \circ F_g((\xi_h)_{X,Y}) \circ (\xi_g)_{F_h(X),F_h(Y)} = (\xi_{gh})_{X,Y} \circ ((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y). \tag{4.4}$$

Uma definição equivalente à definição acima pode ser vista em [2] onde se requer a existência de um funtor monoidal $F : Cat(G) \to Aut_{\otimes}(\mathcal{C})$, em que $Cat(G)$ é a categoria monoidal cujos objetos são os elementos de G, os únicos morfismos são as identidades e o produto tensorial é dado pela multiplicação em G e $Aut_{\otimes}(\mathcal{C})$ é a categoria das autoequivalências monoidais de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$.

Desta definição equivalente vem a analogia com a teoria de anéis, já que uma ação de um grupo G em um anel S é exatamente um morfismo de grupos $\phi : G \to Aut(S)$. Neste caso, o anel dos invariantes é dado por

$$S^G = \{s \in S : \phi_g(s) = s, \forall g \in G\}.$$

Pelas observações acima, fica claro porque dizemos que a equivariantização pode ser pensada como uma categorificação da noção de anel dos invariantes por uma ação de um grupo G.

Seguindo, por exemplo ([2], Remark 2.4.6.) e ([9], p.3), podemos assumir que $\phi_1 = id_{\mathbf{1}}$, $(\xi_1)_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$ e também que $\gamma_{1,g}$, $\gamma_{g,1}$ e γ_0 sejam transformações naturais identidade. Em se considerando essas igualdades, está por trás uma equivalência funtorial entre F e $Id_{\mathcal{C}}$ que por simplicidade, consideramos $F = Id_{\mathcal{C}}$.

A próxima proposição diz respeito à $(*)$ da Definição 4.1 acima.

Proposição 4.2. *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal tal que G age em $\mathcal{C}$. Então $(F_g, \xi_g, \phi_g) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, para todo $g \in G$, é uma equivalência monoidal (ou autoequivalência monoidal).*

Demonstração: Como G age em $\mathcal{C}$, para todo $g \in G$, F_g e $F_{g^{-1}}$ são funtores monoidais e, além disso, $\gamma_{g,g^{-1}} : F_g \circ F_{g^{-1}} \to F_1$ e $\gamma_{g^{-1},g} : F_{g^{-1}} \circ F_g \to F_1$ são isomorfismos naturais monoidais. Pela observação acima, $F_1 = Id_{\mathcal{C}}$ e portanto, $\gamma_{g,g^{-1}} : F_g \circ F_{g^{-1}} \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\gamma_{g^{-1},g} : F_{g^{-1}} \circ F_g \to Id_{\mathcal{C}}$ são isomorfismos naturais monoidais e isso termina a prova. ■

Por isso, podemos escrever diretamente na Definição 4.1, coleção de autoequivalências monoidais, como é colocado na literatura, invés de coleção de funtores monoidais.

Agora, apresentamos a definição de objeto equivariante em uma categoria monoidal que sofre a ação de um grupo G.

Definição 4.3. *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal tal que G age em $\mathcal{C}$. Um objeto $X \in \mathcal{C}$ é dito equivariante se existe uma família $s = \{s_g : F_g(X) \to X\}_{g\in G}$ de isomorfismos em $\mathcal{C}$ tal que $s_1 \circ (\gamma_0)_X = id_X$ e*

$$s_g \circ F_g(s_h) = s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_X, \tag{4.5}$$

ou seja, os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(\gamma_0)_X"] \arrow[dr, "id_X"'] & & F_1(X) \arrow[dl, "s_1"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (F_g \circ F_h)(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_X"] \arrow[d, "F_g(s_h)"'] & F_{gh}(X) \arrow[d, "s_{gh}"] \\ F_g(X) \arrow[r, "s_g"'] & X, \end{tikzcd}$$

para quaisquer $g, h \in G$ e $X \in \mathcal{C}$.

Devido à Observação **??**, segue imediatamente que $s_1 = id_X$, para todo X em $\mathcal{C}$, e portanto, a igualdade $s_1 \circ (\gamma_0)_X = id_X$ torna-se trivialmente verdadeira sendo desnecessária sua verificação em futuras demonstrações.

Definição 4.4. *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal tal que G age em $\mathcal{C}$. A categoria $\mathcal{C}^G$, chamada de equivariantização de $\mathcal{C}$ por G, é uma categoria que consiste de uma coleção de objetos, que são pares (X, s), em que X é um objeto equivariante em $\mathcal{C}$ e s é a família de isomorfismos associada.*

Um morfismo entre dois objetos (X, s) e (Y, r) em $\mathcal{C}^G$ (ou morfismo equivariante), $f : (X, s) \to (Y, r)$, é um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ tal que

$$f \circ s_g = r_g \circ F_g(f), \tag{4.6}$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_g(X) \arrow[r, "F_g(f)"] \arrow[d, "s_g"'] & F_g(Y) \arrow[d, "r_g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

comuta, para todo $g \in G$.

Na literatura, muitos autores estudam equivariantização de categorias abelianas $\mathbb{k}$-lineares ou categorias tensoriais (sendo essas últimas categorias monoidais munidas de mais propriedades), o leitor pode encontrar mais sobre isso em [2], [4], [8], [10] e [11]. Provamos o principal resultado desse capítulo.

Teorema 4.5. *Sejam G um grupo e $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ uma categoria monoidal. Então a equivariantização $\mathcal{C}^G$ é uma categoria monoidal.*

Demonstração: Primeiramente, definimos o funtor $\otimes$ em objetos de $\mathcal{C}^G$. Sejam $(X, s), (Y, r)$ em $\mathcal{C}^G$. Definimos

$$(X, s) \otimes (Y, r) = (X \otimes Y, t),$$

em que $t = \{t_g : F_g(X \otimes Y) \to X \otimes Y\}_{g \in G}$ e

$$t_g = (s_g \otimes r_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y}. \tag{4.7}$$

Claramente, t_g é um isomorfismo, para todo $g \in G$, pois é uma composição de isomorfismos. Notemos que $t_1 = id_{X \otimes Y}$, como já dissemos acima. Escrevemos a composição dada acima

$$F_g(X \otimes Y) \xrightarrow{(\xi_g)^{-1}_{X,Y}} F_g(X) \otimes F_g(Y) \xrightarrow{s_g \otimes r_g} X \otimes Y.$$

Mostremos que o par $(X \otimes Y, t)$ é um objeto em $\mathcal{C}^G$, isto é, que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h)(X \otimes Y) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "F_g(t_h)"'] & F_{gh}(X \otimes Y) \arrow[d, "t_{gh}"] \\
F_g(X \otimes Y) \arrow[r, "t_g"] & X \otimes Y,
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $g, h \in G$ e $X \in \mathcal{C}$. De fato,

$$\begin{aligned}
& t_g \circ F_g(t_h) = (s_g \otimes r_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y} \circ F_g((s_h \otimes r_h) \circ (\xi_h)^{-1}_{X,Y}) \\
= \quad & (s_g \otimes r_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y} \circ F_g(s_h \otimes r_h) \circ F_g((\xi_h)^{-1}_{X,Y}) \\
\overset{(*)}{=} \quad & (s_g \otimes r_g) \circ (F_g(s_h) \otimes F_g(r_h)) \circ (\xi_g)^{-1}_{F_h(X),F_h(Y)} \circ F_g((\xi_h)^{-1}_{X,Y}) \\
= \quad & ((s_g \circ F_g(s_h)) \otimes (r_g \circ F_g(r_h))) \circ (\xi_g)^{-1}_{F_h(X),F_h(Y)} \circ F_g((\xi_h)^{-1}_{X,Y}) \\
\overset{(4.5)}{=} \quad & ((s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_X) \otimes (r_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_Y)) \circ (\xi_g)^{-1}_{F_h(X),F_h(Y)} \circ F_g((\xi_h)^{-1}_{X,Y}) \\
= \quad & (s_{gh} \otimes r_{gh}) \circ ((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y) \circ (\xi_g)^{-1}_{F_h(X),F_h(Y)} \circ F_g((\xi_h)^{-1}_{X,Y}) \\
\overset{(4.4)}{=} \quad & (s_{gh} \otimes r_{gh}) \circ (\xi_{gh})^{-1}_{X,Y} \circ (\gamma_{g,h})_{X\otimes Y} \\
\overset{(4.7)}{=} \quad & t_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_{X\otimes Y},
\end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ segue da naturalidade de $(\xi)^{-1}_g$, veja o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
F_g(F_h(X) \otimes F_h(Y)) \arrow[r, "(\xi_g)^{-1}_{F_h(X),F_h(Y)}"] \arrow[d, "F_g(s_h \otimes r_h)"'] & F_g(F_h(X)) \otimes F_g(F_h(Y)) \arrow[d, "F_g(s_h) \otimes F_g(r_h)"] \\
F_g(X \otimes Y) \arrow[r, "(\xi_g)^{-1}_{X,Y}"] & F_g(X) \otimes F_g(Y).
\end{tikzcd}$$

Agora, verifiquemos que $(\mathbf{1}, \{\phi_g^{-1}\}_{g\in G})$ é um objeto em $\mathcal{C}^G$. De fato, a condição (4.5) é expressa pela igualdade $\phi_{gh}^{-1} \circ (\gamma_{g,h})_{\mathbf{1}} = \phi_g^{-1} \circ F_g(\phi_h^{-1})$ que segue diretamente de (4.3).

Sejam $f : (X, s) \to (Y, r)$ e $h : (X', s') \to (Y', r')$ morfismos equivariantes. Temos que

$$f \otimes h : (X \otimes X', t) \to (Y \otimes Y', u),$$

em que $t_g = (s_g \otimes s'_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,X'}$ e $u_g = (r_g \otimes r'_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{Y,Y'}$. Precisamos verificar se o morfismo $f \otimes g$ é equivariante, isto é, se

$$u_g \circ F_g(f \otimes h) = (f \otimes h) \circ t_g, \ \forall g \in G.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
u_g \circ F_g(f \otimes h) &= (r_g \otimes r'_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{Y,Y'} \circ F_g(f \otimes h) \\
&\overset{(*)}{=} (r_g \otimes r'_g) \circ (F_g(f) \otimes F_g(h)) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,X'} \\
&= ((r_g \circ F_g(f)) \otimes (r'_g \circ F_g(h))) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,X'} \\
&\overset{(4.6)}{=} ((f \circ s_g) \otimes (h \circ s'_g)) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,X'} \\
&= (f \otimes h) \circ (s_g \otimes s'_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,X'} \\
&= (f \otimes h) \circ t_g.
\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ é válida pela naturalidade de ξ_g^{-1}. Portanto, o morfismo $f \otimes h$ é equivariante.

Sejam $(X,s), (Y,r)$ e (Z,t) objetos em $\mathcal{C}^G$. Definimos os isomorfismos naturais

$$\begin{aligned}
a_{(X,s),(Y,r),(Z,t)} &= a_{X,Y,Z} \\
l_{(X,s)} &= l_X \\
r_{(X,s)} &= r_X,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
a_{(X,s),(Y,r),(Z,t)} &: ((X,s) \otimes (Y,r)) \otimes (Z,t) \to (X,s) \otimes ((Y,r) \otimes (Z,t)) \\
l_{(X,s)} &: (\mathbf{1}, \{\phi_g^{-1}\}_{g \in G}) \otimes (X,s) \to (X,s) \\
r_{(X,s)} &: (X,s) \otimes (\mathbf{1}, \{\phi_g^{-1}\}_{g \in G}) \to (X,s).
\end{aligned}$$

Verifiquemos se estes são morfismos na categoria $\mathcal{C}^G$. Primeiramente, vejamos que a é um morfismo equivariante. Temos que $(X \otimes Y, t')$ e $(Y \otimes Z, t'')$ são objetos equivariantes, em que t' e t'' são definidos como na igualdade (4.7). Para tal, precisamos que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd}
F_g((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F_g(a_{X,Y,Z})"] \arrow[d, "\omega_g"'] & F_g(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "\nu_g"] \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z),
\end{tikzcd}$$

em que

$$\begin{cases}\omega_g = (t'_g \otimes t_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} = (((s_g \otimes r_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y}) \otimes t_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} \\ \nu_g = (s_g \otimes t''_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z} = (s_g \otimes ((r_g \otimes t_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{Y,Z})) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z}.\end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
& a_{X,Y,Z} \circ \omega_g = a_{X,Y,Z} \circ (((s_g \otimes r_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y}) \otimes t_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} \\
= \quad & a_{X,Y,Z} \circ (((s_g \otimes r_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y}) \otimes (t_g \circ id_{F_g(Z)})) \circ (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} \\
= \quad & a_{X,Y,Z} \circ ((s_g \otimes r_g) \otimes t_g) \circ ((\xi_g)^{-1}_{X,Y} \otimes id_{F_g(Z)}) \circ (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} \\
\overset{(*)}{=} \quad & (s_g \otimes (r_g \otimes t_g)) \circ a_{F_g(X),F_g(Y),F_g(Z)} \circ ((\xi_g)_{X,Y} \otimes id_{F_g(Z)})^{-1} \circ \\
& (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} \\
\overset{(2.3)}{=} \quad & (s_g \otimes (r_g \otimes t_g)) \circ (id_{F_g(X)} \otimes (\xi_g)^{-1}_{Y,Z}) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z} \circ F_g(a_{X,Y,Z}) \\
= \quad & (s_g \otimes ((r_g \otimes t_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{Y,Z})) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z} \circ F_g(a_{X,Y,Z}) \\
= \quad & \nu_g \circ F_g(a_{X,Y,Z}),
\end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ segue da naturalidade de a. Em (2.3), estamos usando que (F_g, ξ_g, ϕ_g) é monoidal.

Finalmente, vejamos que l e r são morfismos equivariantes. É necessário mostrar que os diagramas

$$\begin{tikzcd} F_g(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "F_g(l_X)"] \arrow[d, "t_g"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\ \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_g(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "F_g(r_X)"] \arrow[d, "t'_g"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\ X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"] & X, \end{tikzcd}$$

são comutativos, em que

$$\begin{cases} t_g = (\phi_g^{-1} \otimes s_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{\mathbf{1},X} \\ t'_g = (s_g \otimes \phi_g^{-1}) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,\mathbf{1}}. \end{cases}$$

Vejamos a comutatividade do primeiro diagrama. Temos que

$$\begin{aligned}
l_X \circ t_g \quad &= \quad l_X \circ (\phi_g^{-1} \otimes s_g) \circ (\xi_g)^{-1}_{\mathbf{1},X} \\
&\overset{(2.4)}{=} \quad l_X \circ (\phi_g^{-1} \otimes s_g) \circ (\phi_g \otimes id_{F_g(X)}) \circ l^{-1}_{F_g(X)} \circ F_g(l_X) \\
&= \quad l_X \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes s_g) \circ l^{-1}_{F_g(X)} \circ F_g(l_X)
\end{aligned}$$

$$= \quad s_g \circ F_g(l_X).$$

A última igualdade segue do fato de que l é um isomorfismo natural, veja o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes F_g(X) \arrow[r, "l_{F_g(X)}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes s_g"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] & X.
\end{tikzcd}$$

A comutatividade do segundo diagrama é análoga. Logo, $\mathcal{C}^G$ é uma categoria monoidal. ■

Capítulo 5

Equivariantização de categorias módulo

Nesse capítulo, fazemos um estudo análogo ao que fizemos no capítulo anterior, só que para o caso de categorias módulos. Esse estudo culmina no objetivo principal desse trabalho, que é mostrar o Teorema 5.8. As referências utilizadas são, principalmente, [2], [4] e [10].

5.1 Noções preliminares

Suponhamos que um grupo G age em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Por definição, os funtores $F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ são monoidais (na verdade são autoequivalências monoidais), para todo $g \in G$.

Seja $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ um $\mathcal{C}$-módulo. Considerando $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ na Proposição 3.7, temos que a categoria $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^{F_g}, m^{F_g}, l^{F_g})$ é um $\mathcal{C}$-módulo, para todo $g \in G$. Denotamos tal categoria por $\mathcal{M}^g$ e ainda, segundo a proposição recém citada, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$, f morfismo em $\mathcal{C}$ e h morfismo em $\mathcal{M}$, temos

$$X\overline{\otimes}^{F_g}M = F_g(X)\overline{\otimes}M, \ f\overline{\otimes}^{F_g}h = F_g(f)\overline{\otimes}h,$$
$$l_M^{F_g} = l_M \circ (\phi_g^{-1}\overline{\otimes}id_M) \text{ e}$$
$$m_{X,Y,M}^{F_g} = m_{F_g(X),F_g(Y),M} \circ ((\xi_g)_{X,Y}^{-1}\overline{\otimes}id_M).$$

Apenas como curiosidade, tendo em vista a Observação **??**, segue facilmente que $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}$.

Agora, consideremos H um subgrupo de G. Para cada $g \in H$, seja $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^g$ um funtor de $\mathcal{C}$-módulos, em que

$$c^g = \{c^g_{X,M} : U_g(X \overline{\otimes} M) \to X \overline{\otimes}^{F_g} U_g(M)\}$$

é uma família de isomorfismos que satisfaz as igualdades (3.3) e (3.4), isto é,

$$(id_X \overline{\otimes}^{F_g} c^g_{Y,M}) \circ c^g_{X, Y \overline{\otimes} M} \circ U_g(m_{X,Y,M}) = m^{F_g}_{X,Y,U_g(M)} \circ c^g_{X \otimes Y, M} \quad e$$

$$l^{F_g}_{U_g(M)} \circ c^g_{\mathbf{1},M} = U_g(l_M),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$. Essas igualdades podem ser reescritas levando em consideração a estrutura de categoria módulo de $\mathcal{M}^g$ e assim obtemos

$$(id_{F_g(X)} \overline{\otimes} c^g_{Y,M}) \circ c^g_{X, Y \overline{\otimes} M} \circ U_g(m_{X,Y,M}) =$$

$$m_{F_g(X), F_g(Y), U_g(M)} \circ ((\xi_g)^{-1}_{X,Y} \overline{\otimes} id_{U_g(M)}) \circ c^g_{X \otimes Y, M} \tag{5.1}$$

e

$$l_{U_g(M)} \circ (\phi_g^{-1} \overline{\otimes} id_{U_g(M)}) \circ c^g_{\mathbf{1},M} = U_g(l_M). \tag{5.2}$$

Um passo crucial para esse trabalho é entendermos a definição de um $\mathcal{C}$-módulo H-equivariante, que é algo semelhante à ação de um grupo G sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, desenvolvido no capítulo anterior.

Em tal definição, o leitor verá que surge uma família de isomorfismos naturais $\mu_{g,h}$ entre os funtores de $\mathcal{C}$-módulos $(U_g \circ U_h, b)$ e (U_{gh}, c^{gh}). O desafio é entender o comportamento da composição $U_g \circ U_h$ e do isomorfismo natural b. A observação serve de auxílio para tal.

Observação 5.1. Sejam $g, h \in H$. Então as categorias $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^h$ e $\mathcal{M}^{gh}$ são iguais em objetos e morfismos, queremos entender como suas estruturas de $\mathcal{C}$-módulo estão relacionadas.

Sejam $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^g$ e $(U_h, c^h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^h$ funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Definimos $(U_g)^h : \mathcal{M}^h \to \mathcal{M}^{gh}$ por $(U_g)^h = U_g$ e a família de isomorfismos $d = \{d^{gh}_{X,M}\}_{g,h \in H}$ por

$$d^{gh}_{X,M} = ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} id_{U_g(M)}) \circ c^g_{F_h(X),M}, \tag{5.3}$$

isto é,

$$U_g(F_h(X) \overline{\otimes} M) \xrightarrow{c^g_{F_h(X),M}} F_h(X) \overline{\otimes}^{F_g} U_g(M) \xrightarrow{(\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} id_{U_g(M)}} F_{gh}(X) \overline{\otimes} U_g(M),$$

para quaisquer X em $\mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}^h$.

O próximo resultado não é demonstrado aqui, porém sua demonstração encontra-se feita de maneira muito detalhada em ([10], Lema 3.2.1), caso o leitor tenha interesse em sua leitura.

Proposição 5.2. *Sejam $g, h \in H$. O funtor $((U_g)^h, d^{gh}) : \mathcal{M}^h \to \mathcal{M}^{gh}$ definido acima é um funtor de $\mathcal{C}$-módulos.*

Agora, sejam $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^g$ e $(U_h, c^h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^h$ funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Pela proposição acima, $((U_g)^h, d^{gh}) : \mathcal{M}^h \to \mathcal{M}^{gh}$ é um funtor de $\mathcal{C}$-módulos. Pela Proposição 3.6, a composição

$$((U_g)^h \circ U_h, b) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^h \to \mathcal{M}^{gh}$$

é um funtor de $\mathcal{C}$-módulos em que o isomorfismo natural b é definido por

$$\begin{aligned} b_{X,M} &= d^{gh}_{X,U_h(M)} \circ U_g(c^h_{X,M}) \\ &= ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} id_{(U_g \circ U_h)(M)}) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ U_g(c^h_{X,M}), \end{aligned} \tag{5.4}$$

para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$. Para facilitar, escrevemos a composição acima que é expressa por

$$U_g(U_h(X \overline{\otimes} M)) \xrightarrow{U_g(c^h_{X,M})} U_g(X \overline{\otimes}^{F_h} U_h(M)) \xrightarrow{c^g_{F_h(X),U_h(M)}}$$

$$F_h(X) \overline{\otimes}^{F_g} U_g(U_h(M)) \xrightarrow{(\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} id_{U_g(U_h(M))}} X \overline{\otimes}^{F_{gh}} U_g(U_h(M)).$$

5.2 Categorias módulo H-equivariantes

Agora, apresentamos um dos principais conceitos deste trabalho que nos permite provar o Teorema 5.8. Para esse assunto usamos principalmente [4] e [10].

Suponhamos que um grupo G age em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e seja H um subgrupo de G. Mantemos a notação dada na seção anterior.

Definição 5.3. *Um $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$ diz-se H-equivariante se existem funtores de $\mathcal{C}$-módulos $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^g$ e uma família de isomorfismos naturais $\mu_{g,h} : ((U_g)^h \circ U_h, b) \to (U_{gh}, c^{gh})$ tais que*

$$(\mu_{g,hf})_M \circ U_g((\mu_{h,f})_M) = (\mu_{gh,f})_M \circ (\mu_{g,h})_{U_f(M)} \tag{5.5}$$

e

$$c^{gh}_{X,M} \circ (\mu_{g,h})_{X \overline{\otimes} M} = ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} (\mu_{g,h})_M) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ U_g(c^h_{X,M}), \tag{5.6}$$

para quaisquer $g, h, f \in H$, $X \in \mathcal{C}$ e $M \in \mathcal{M}$.

As igualdades acima são expressas pela comutatividade dos diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd}
(U_g \circ U_h)(U_f(M)) \arrow[r, "(\mu_{g,h})_{U_f(M)}"] \arrow[d, "U_g((\mu_{h,f})_M)"'] & U_{gh}(U_f(M)) \arrow[d, "(\mu_{gh,f})_M"] \\
U_g(U_{hf}(M)) \arrow[r, "(\mu_{g,hf})_M"'] & U_{ghf}(M)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(U_g \circ U_h)(X\overline{\otimes}M) \arrow[rr, "U_g(c^h_{X,M})"] \arrow[d, "(\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M}"'] & & U_g(F_h(X)\overline{\otimes}U_h(M)) \arrow[d, "c^g_{F_h(X),U_h(M)}"] \\
U_{gh}(X\overline{\otimes}M) \arrow[dr, "c^{gh}_{X,M}"'] & & (F_g \circ F_h)(X)\overline{\otimes}(U_g \circ U_h)(M) \arrow[dl, "(\gamma_{g,h})_X\overline{\otimes}(\mu_{g,h})_M"] \\
& F_{gh}(X)\overline{\otimes}U_{gh}(M). &
\end{tikzcd}$$

Observação 5.4. Notemos que este último diagrama é exatamente a naturalidade do isomorfismo natural de $\mathcal{C}$-módulos $\mu_{g,h}$ ao escrever o morfismo $b_{X,M}$ como dado pela equação (5.4). De fato, $\mu_{g,h}$ é uma transformação natural de $\mathcal{C}$-módulos se, e somente se, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
(U_g \circ U_h)(X\overline{\otimes}M) \arrow[r, "(\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M}"] \arrow[d, "b_{X,M}"'] & U_{gh}(X\overline{\otimes}M) \arrow[d, "c^{gh}_{X,M}"] \\
X\overline{\otimes}^{F_{gh}}(U_g \circ U_h)(M) \arrow[r, "id_X\overline{\otimes}^{F_{gh}}(\mu_{g,h})_M"'] & X\overline{\otimes}^{F_{gh}}U_{gh}(M)
\end{tikzcd}$$

comuta. Basta usarmos a igualdade (5.4) e dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
&(id_X\overline{\otimes}^{F_{gh}}(\mu_{g,h})_M) \circ b_{X,M} \\
&= (id_{F_{gh}(X)}\overline{\otimes}(\mu_{g,h})_M)((\gamma_{g,h})_X\overline{\otimes}id_{(U_g\circ U_h)(M)}) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ U_g(c^h_{X,M}) \\
&= ((\gamma_{g,h})_X\overline{\otimes}(\mu_{g,h})_M) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ U_g(c^h_{X,M}) \\
&\overset{(5.6)}{=} c^{gh}_{X,M} \circ (\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.5. Toda categoria monoidal $\mathcal{C}$ é uma categoria módulo G-equivariante sobre si mesma, via $(U_g, c^g) = (F_g, \xi_g^{-1})$ e $\mu_{g,h} = \gamma_{g,h}$, para quaisquer $g, h \in G$.

De fato, primeiramente é conveniente que o leitor fique atento para a estrutura de $\mathcal{C}$-módulo de $\mathcal{C}^g$ ($\mathcal{C}^g = \mathcal{C}$ como categorias) dada no início desse capítulo. Além disso, como G age sobre $\mathcal{C}$, a família $\gamma_{g,h} : (F_g \circ F_h, b) \to (F_{gh}, \xi_{gh}^{-1})$ é de isomorfismos naturais monoidais e valem (4.1) e (4.4).

Para que $(F_g, \xi_g^{-1}) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^g$ seja um funtor de $\mathcal{C}$-módulos, precisamos verificar as igualdades (5.1) e (5.2) e isso vai acontecer, pois F_g é um funtor monoidal, para todo $g \in G$. De fato, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned} &(id_{F_g(X)} \otimes (\xi_g)^{-1}_{Y,Z}) \circ (\xi_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z} \circ F_g(a_{X,Y,Z}) \\ \overset{(2.3)}{=} \quad &a_{F_g(X),F_g(Y),F_g(Z)} \circ ((\xi_g)^{-1}_{X,Y} \otimes id_{F_g(Z)}) \circ (\xi_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z}, \end{aligned}$$

isso verifica (5.1) e

$$l_{F_g(X)} \circ (\phi_g^{-1} \otimes id_{F_g(X)}) \circ (\xi_g)^{-1}_{1,X} \overset{(2.4)}{=} F_g(l_X),$$

verifica (5.2).

A verificação das igualdades (5.5) e (5.6) é imediata, pois a igualdade (5.5) é exatamente (4.1) e a igualdade (5.6) é (4.4). Logo, $\mathcal{C}$ é uma categoria módulo G-equivariante sobre si mesma.

Definição 5.6. *Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{C}$-módulo H-equivariante. Um objeto M em $\mathcal{M}$ é dito equivariante se existir uma família de isomorfismos $v = \{v_g : U_g(M) \to M\}_{g\in H}$ tal que, para quaisquer $g, h \in H$,*

$$v_{gh} \circ (\mu_{g,h})_M = v_g \circ U_g(v_h). \tag{5.7}$$

Satisfazer esta igualdade é equivalente a comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd} (U_g \circ U_h)(M) \arrow[r, "(\mu_{g,h})_M"] \arrow[d, "U_g(v_h)"'] & U_{gh}(M) \arrow[d, "v_{gh}"] \\ U_g(M) \arrow[r, "v_g"'] & M. \end{tikzcd}$$

Denotamos um objeto equivariante M pelo par (M, v).

Definição 5.7. *Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{C}$-módulo H-equivariante. Um morfismo $f : (M, v) \to (N, w)$ entre objetos equivariantes é um morfismo $f : M \to N$ em $\mathcal{M}$ tal que, para todo $g \in H$,*

$$f \circ v_g = w_g \circ U_g(f), \tag{5.8}$$

isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
U_g(M) \arrow[r, "v_g"] \arrow[d, "U_g(f)"'] & M \arrow[d, "f"] \\
U_g(N) \arrow[r, "w_g"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Com a notação acima, a categoria cujos objetos são equivariantes e os morfismos entre objetos equivariantes são como definido acima é denotada por $\mathcal{M}^H$.

Finalmente, apresentamos o resultado principal deste trabalho. O esboço da prova do mesmo encontra-se em ([4], Lemma 3.3).

Teorema 5.8. *Sejam H um subgrupo de G e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{C}$-módulo H-equivariante. Então a categoria $\mathcal{M}^H$ é uma categoria módulo sobre $\mathcal{C}^G$.*
Demonstração: Primeiramente, sejam $(X,u) \in \mathcal{C}^G$ e $(M,v) \in \mathcal{M}^H$. Definimos

$$(X,u)\overline{\otimes}(M,v) = (X\overline{\otimes}M, \tilde{v}),$$

em que $\tilde{v}_g = (u_g\overline{\otimes}v_g) \circ c^g_{X,M}$, para todo $g \in H$. Tal composição é expressa por

$$\tilde{v}_g : U_g(X\overline{\otimes}M) \stackrel{c^g_{X,M}}{\longrightarrow} F_g(X)\overline{\otimes}U_g(M) \stackrel{u_g\overline{\otimes}v_g}{\longrightarrow} X\overline{\otimes}M$$

e é claramente um isomorfismo, pois é uma composição de isomorfismos.

Mostremos que o objeto $(X\overline{\otimes}M, \tilde{v})$ é equivariante. Para isso é necessário provarmos a igualdade (5.7). De fato,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{gh} \circ (\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M} &= (u_{gh}\overline{\otimes}v_{gh}) \circ c^{gh}_{X,M} \circ (\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M} \\
&\stackrel{(5.6)}{=} (u_{gh}\overline{\otimes}v_{gh}) \circ ((\gamma_{g,h})_X\overline{\otimes}(\mu_{g,h})_M) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ \\
&\quad U_g(c^h_{X,M}) \\
&= ((u_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_X)\overline{\otimes}(v_{gh} \circ (\mu_{g,h})_M)) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ \\
&\quad U_g(c^h_{X,M}) \\
&\stackrel{(*)}{=} ((u_g \circ F_g(u_h))\overline{\otimes}(v_g \circ U_g(v_h))) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ \\
&\quad U_g(c^h_{X,M}) \\
&= (u_g\overline{\otimes}v_g) \circ (F_g(u_h)\overline{\otimes}U_g(v_h)) \circ c^g_{F_h(X),U_h(M)} \circ U_g(c^h_{X,M}) \\
&\stackrel{(**)}{=} (u_g\overline{\otimes}v_g) \circ c^g_{X,M} \circ U_g(u_h\overline{\otimes}v_h) \circ U_g(c^h_{X,M})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (u_g \overline{\otimes} v_g) \circ c^g_{X,M} \circ U_g((u_h \overline{\otimes} v_h) \circ c^h_{X,M}) \\ &= \tilde{v}_g \circ U_g(\tilde{v}_h), \end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ segue de (4.5) e de (5.7) e a igualdade $(**)$ segue da naturalidade de c^g, dada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} U_g(F_h(X)\overline{\otimes}U_h(M)) \arrow[r, "c^g_{F_h(X),U_h(M)}"] \arrow[d, "U_g(u_h\overline{\otimes}v_h)"'] & F_g(F_h(X))\overline{\otimes}U_g(U_h(M)) \arrow[d, "F_g(u_h)\overline{\otimes}U_g(v_h)"] \\ U_g(X\overline{\otimes}M) \arrow[r, "c^g_{X,M}"'] & F_g(X)\overline{\otimes}U_g(M). \end{tikzcd}$$

Logo, $(X\overline{\otimes}M, \tilde{v}) \in \mathcal{M}^H$.

Agora, vejamos como o funtor $\overline{\otimes}$ age nos morfismos. Sejam $f : (X, s) \to (Y, r)$ um morfismo em $\mathcal{C}^G$ e $h : (M, v) \to (N, w)$ um morfismo em $\mathcal{M}^H$. Então $f\overline{\otimes}h : (X\overline{\otimes}M, \tilde{v}) \to (Y\overline{\otimes}N, \tilde{w})$, em que $\tilde{v}_g = (s_g\overline{\otimes}v_g) \circ c^g_{X,M}$ e $\tilde{w}_g = (r_g\overline{\otimes}w_g) \circ c^g_{Y,N}$, para todo $g \in H$.

Mostremos que $f\overline{\otimes}h$ é um morfismo em $\mathcal{M}^H$. Precisamos mostrar a igualdade (5.8). De fato,

$$\begin{aligned} (f\overline{\otimes}h) \circ \tilde{v}_g &= (f\overline{\otimes}h) \circ (s_g\overline{\otimes}v_g) \circ c^g_{X,M} \\ &= ((f \circ s_g)\overline{\otimes}(h \circ v_g)) \circ c^g_{X,M} \\ &\overset{(*)}{=} ((r_g \circ F_g(f))\overline{\otimes}(w_g \circ U_g(h))) \circ c^g_{X,M} \\ &= (r_g\overline{\otimes}w_g) \circ (F_g(f)\overline{\otimes}U_g(h)) \circ c^g_{X,M} \\ &\overset{(**)}{=} (r_g\overline{\otimes}w_g) \circ c^g_{Y,N} \circ U_g(f\overline{\otimes}h) \\ &= \tilde{w}_g \circ U_g(f\overline{\otimes}h), \end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ segue (4.6) e de (5.8) e a igualdade $(**)$ segue da naturalidade de c^g, veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} U_g(X\overline{\otimes}M) \arrow[r, "c^g_{X,M}"] \arrow[d, "U_g(f\overline{\otimes}h)"'] & F_g(X)\overline{\otimes}U_g(M) \arrow[d, "F_g(f)\overline{\otimes}U_g(h)"] \\ U_g(Y\overline{\otimes}N) \arrow[r, "c^g_{Y,N}"'] & F_g(Y)\overline{\otimes}U_g(N). \end{tikzcd}$$

Sejam $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$ e $(M, v) \in \mathcal{M}^H$. Necessitamos mostrar que $m_{(X,s),(Y,r),(M,v)}$ e que $l_{(M,v)}$ são morfismos em $\mathcal{M}^H$.

Sabemos $(X\otimes Y,t)$ é um objeto em $\mathcal{C}^G$ com $t_g=(s_g\otimes r_g)\circ(\xi_g)^{-1}_{X,Y}$, para todo $g\in G$. Tendo isso em mente,

$$((X,s)\otimes(Y,r))\overline{\otimes}(M,v)=(X\otimes Y,t)\overline{\otimes}(M,v)=((X\otimes Y)\overline{\otimes}M,\tilde{v}),$$

em que $\tilde{v}_g=(t_g\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{X\otimes Y,M}$, ou seja,

$$\tilde{v}_g=(((s_g\otimes r_g)\circ(\xi_g)^{-1}_{X,Y})\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{X\otimes Y,M},$$

para todo $g\in H$.

Temos também que $((Y,r)\overline{\otimes}(M,v),\tilde{w}')$ é um objeto em $\mathcal{M}^H$ com $\tilde{w}'_g=(r_g\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{Y,M}$, para todo $g\in H$. Assim,

$$(X,s)\overline{\otimes}((Y,r)\overline{\otimes}(M,v))=(X,s)\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M,\tilde{w}')=(X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M),\tilde{w}),$$

em que $\tilde{w}_g=(s_g\overline{\otimes}\tilde{w}'_g)\circ c^g_{X,Y\overline{\otimes}M}$, isto é,

$$\tilde{w}_g=(s_g\overline{\otimes}((r_g\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{Y,M}))\circ c^g_{X,Y\overline{\otimes}M},$$

para todo $g\in H$.

Agora, definimos os morfismos

$$m_{(X,s),(Y,r),(M,v)}=m_{X,Y,M}\text{ e }l_{(M,v)}=l_M$$

que obviamente são isomorfismos e verifiquemos que tais morfismos são morfismos em $\mathcal{M}^H$.

Vejamos a igualdade (5.8) para $m_{(X,s),(Y,r),(M,v)}$, ou seja, a comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
U_g((X\otimes Y)\overline{\otimes}M) \arrow[r, "\tilde{v}_g"] \arrow[d, "U_g(m_{(X,s),(Y,r),(M,v)})"'] & (X\otimes Y)\overline{\otimes}M \arrow[d, "m_{(X,s),(Y,r),(M,v)}"] \\
U_g(X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M)) \arrow[r, "\tilde{w}_g"'] & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M).
\end{tikzcd}$$

Temos

$$\begin{aligned}
& m_{(X,s),(Y,r),(M,v)}\circ\tilde{v}_g \quad = \quad m_{X,Y,M}\circ\tilde{v}_g \\
= \quad & m_{X,Y,M}\circ(((s_g\otimes r_g)\circ(\xi_g)^{-1}_{X,Y})\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{X\otimes Y,M} \\
= \quad & m_{X,Y,M}\circ(((s_g\otimes r_g)\circ(\xi_g)^{-1}_{X,Y})\overline{\otimes}(v_g\circ id_{U_g(M)}))\circ c^g_{X\otimes Y,M} \\
= \quad & m_{X,Y,M}\circ((s_g\otimes r_g)\overline{\otimes}v_g)\circ((\xi_g)^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}id_{U_g(M)})\circ c^g_{X\otimes Y,M} \\
\overset{(*)}{=} \quad & (s_g\overline{\otimes}(r_g\overline{\otimes}v_g))\circ m_{F_g(X),F_g(Y),U_g(M)}\circ((\xi_g)^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}id_{U_g(M)})\circ c^g_{X\otimes Y,M}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.1)}{=} && (s_g\overline{\otimes}(r_g\overline{\otimes}v_g))\circ(id_{F_g(X)}\overline{\otimes}c^g_{Y,M})\circ c^g_{X,Y\overline{\otimes}M}\circ U_g(m_{X,Y,M})\\
&= && (s_g\overline{\otimes}((r_g\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{Y,M}))\circ c^g_{X,Y\overline{\otimes}M}\circ U_g(m_{X,Y,M})\\
&= && \tilde{w}_g\circ U_g(m_{(X,s),(Y,r),(M,v)}).
\end{aligned}
$$

A igualdade $(*)$ segue da naturalidade de m, isto é, o diagrama abaixo comuta

$$
\begin{tikzcd}
((F_g(X)\otimes F_g(Y))\overline{\otimes}U_g(M)) \arrow[r, "m_{F_g(X),F_g(Y),U_g(M)}"] \arrow[d, "(s_g\otimes r_g)\overline{\otimes}v_g"'] & F_g(X)\overline{\otimes}(F_g(Y)\overline{\otimes}U_g(M)) \arrow[d, "s_g\overline{\otimes}(r_g\overline{\otimes}v_g)"] \\
(X\otimes Y)\overline{\otimes}M \arrow[r, "m_{X,Y,M}"'] & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M)
\end{tikzcd}.
$$

O próximo passo é provarmos que $l_{(M,v)}$ é um morfismo em $\mathcal{M}^H$. Primeiramente, observamos que $(\mathbf{1},\{\phi_g^{-1}\}_{g\in H})\overline{\otimes}(M,v) = (\mathbf{1}\overline{\otimes}M,\tilde{v})$, em que $\tilde{v}_g = (\phi_g^{-1}\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{\mathbf{1},M}$, para todo $g\in H$. Vejamos a igualdade (5.8) para $l_{(M,v)}$, ou seja, que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
U_g(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) \arrow[r, "\tilde{v}_g"] \arrow[d, "U_g(l_{(M,v)})"'] & \mathbf{1}\overline{\otimes}M \arrow[d, "l_{(M,v)}"] \\
U_g(M) \arrow[r, "v_g"'] & M
\end{tikzcd}
$$

comuta. Temos

$$
\begin{aligned}
l_{(M,v)}\circ\tilde{v}_g &= l_M\circ\tilde{v}_g\\
&= l_M\circ(\phi_g^{-1}\overline{\otimes}v_g)\circ c^g_{\mathbf{1},M}\\
&= l_M\circ((id_{\mathbf{1}}\circ\phi_g^{-1})\overline{\otimes}(v_g\circ id_{U_g(M)}))\circ c^g_{\mathbf{1},M}\\
&= l_M\circ(id_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}v_g)\circ(\phi_g^{-1}\overline{\otimes}id_{U_g(M)})\circ c^g_{\mathbf{1},M}\\
&\overset{(5.2)}{=} l_M\circ(id_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}v_g)\circ l^{-1}_{U_g(M)}\circ U_g(l_M)\\
&\overset{(*)}{=} v_g\circ U_g(l_M) = v_g\circ U_g(l_{(M,v)}).
\end{aligned}
$$

A igualdade $(*)$ segue da naturalidade de l, isto é, da comutatividade do diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\overline{\otimes}U_g(M) \arrow[r, "l_{U_g(M)}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}v_g"'] & U_g(M) \arrow[d, "v_g"] \\
\mathbf{1}\overline{\otimes}M \arrow[r, "l_M"'] & M.
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, verificarmos as igualdades (3.1) e (3.2) é imediato, devido às definições de $m_{(X,s),(Y,r),(Z,t)}$ e de $l_{(M,v)}$. Logo, a categoria $\mathcal{M}^H$ é um $\mathcal{C}^G$-módulo. $\blacksquare$

Apêndice

É sabido que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita e que toda categoria é equivalente a uma categoria esquelética. Um fato interessante é que uma categoria monoidal não precisa ser monoidalmente equivalente a uma categoria que seja esquelética e estrita ao mesmo tempo, veja ([2], p.39). A categoria $\mathcal{C}(G, \omega)$ dada no Exemplo A.4 não é monoidalmente equivalente a uma categoria esquelética estrita, sendo portanto, um exemplo para o que foi dito acima. Esse também é um dos motivos de desenvolvermos esse exemplo, além é claro, de ser um exemplo não trivial de uma categoria monoidal.

Para tal, lembramos algumas definições sobre espaços vetoriais graduados por um grupo G.

Definição A1. *Seja G um grupo. Dizemos que um $\mathbb{k}$-espaço vetorial V é G-graduado se $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, em que V_g é um $\mathbb{k}$-subespaço vetorial de V, para cada $g \in G$.*

Dizemos que um $\mathbb{k}$-subespaço vetorial $W \subseteq V$ é G-graduado se

$$W = \bigoplus_{g \in G} (W \cap V_g).$$

Definição A2. *Sejam $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ e $W = \bigoplus_{g \in G} W_g$ $\mathbb{k}$-subespaços vetoriais G-graduados. Dizemos que um morfismo $f : V \to W$ é um morfismo G-graduado se f é $\mathbb{k}$-linear e $f(V_g) \subseteq W_g$, para todo $g \in G$.*

Definição A3. *Sejam G um grupo e $\mathbb{k}$ um corpo. Um 3-cociclo é uma função $\omega : G \times G \times G \to \mathbb{k}^*$ que satisfaz a seguinte condição*

$$\omega(g, h, l)\omega(g, hl, t)\omega(h, l, t) = \omega(gh, l, t)\omega(g, h, lt), \tag{A}$$

para todo $g, h, l, t \in G$.

Exemplo A4. ([8], Capítulo 3, Exemplo 7) Sejam ω um 3-cociclo, G um grupo finito e $\mathcal{C}(G,\omega)$ a categoria cujos objetos são os espaços vetoriais de dimensão finita G-graduados.

Os morfismos nesta categoria são os morfismos G-graduados. Então $\mathcal{C}(G,\omega)$ é uma categoria monoidal.

De fato, definimos o objeto unidade $\mathbf{1} \in \mathcal{C}(G,\omega)$ como sendo o corpo $\Bbbk$. Sejam $V, W \in \mathcal{C}(G,\omega)$. Então $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$, $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ e estamos considerando $V_1 = W_1 = \Bbbk$. O funtor $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$ é definido como

$$\otimes(V,W) := \bigoplus_{g\in G}(V\otimes W)_g,$$

em que $(V\otimes W)_g = \bigoplus_{xy=g} V_x \otimes W_y = \bigoplus_{i\in G} V_{gi^{-1}} \otimes W_i$. Podemos definir os isomorfismos naturais a, l e r por

$$\begin{aligned} a_{U,V,W}((u\otimes v)\otimes w) &= \omega(g,h,t)\ u\otimes(v\otimes w) \\ l_U(k\otimes u) &= \omega(1,g,g^{-1})\ u \\ r_U(u\otimes k) &= \omega(g,1,1)\ u, \end{aligned}$$

para quaisquer $u \in U_g$, $v \in V_h$, $w \in W_t$, $k \in \Bbbk$, $g,h,t \in G$.

Temos que $a_{U,V,W} : (U\otimes V)\otimes W \to U\otimes(V\otimes W)$, $l_U : \Bbbk\otimes U \to U$ e $r_U : U\otimes\Bbbk \to U$ são isomorfismos e isso segue do fato de que produto tensorial sobre qualquer anel é associativo, l_U e r_U são os isomorfismos canônicos, em que $U,V,W \in \mathcal{C}(G,\omega)$.

Sejam $U,V,W,Z \in \mathcal{C}(G,\omega)$ e $u \in U_a$, $v \in V_b$, $w \in W_c$, $z \in Z_d$ e $k \in \Bbbk$. Então verifiquemos o Axioma do Pentágono

$$\begin{aligned} & (id_U\otimes a_{V,W,Z})\circ a_{U,V\otimes W,Z}\circ(a_{U,V,W}\otimes id_Z)(((u\otimes v)\otimes w)\otimes z) \\ = \ & (id_U\otimes a_{V,W,Z})\circ a_{U,V\otimes W,Z}(\omega(a,b,c)\ ((u\otimes(v\otimes w))\otimes z)) \\ = \ & \omega(a,b,c)\ (id_U\otimes a_{V,W,Z})\circ a_{U,V\otimes W,Z}((u\otimes(v\otimes w))\otimes z) \\ = \ & \omega(a,b,c)\ (id_U\otimes a_{V,W,Z})(\omega(a,bc,d)\ (u\otimes((v\otimes w)\otimes z))) \\ = \ & \omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\ (id_U\otimes a_{V,W,Z})(u\otimes((v\otimes w)\otimes z)) \\ = \ & \omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\ (id_U(u)\otimes a_{V,W,Z}((v\otimes w)\otimes z)) \\ = \ & \omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\ (u\otimes\omega(b,c,d)\ (v\otimes(w\otimes z)) \\ = \ & \omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\omega(b,c,d)\ (u\otimes(v\otimes(w\otimes z)) \\ \overset{(A)}{=} \ & \omega(ab,c,d)\omega(a,b,cd)\ (u\otimes(v\otimes(w\otimes z)) \\ = \ & \omega(ab,c,d)\ a_{U,V,W\otimes Z}((u\otimes v)\otimes(w\otimes z))) \\ = \ & a_{U,V,W\otimes Z}\circ a_{U\otimes V,W,Z}(((u\otimes v)\otimes w)\otimes z), \end{aligned}$$

isto é,

$$(id_U\otimes a_{V,W,Z})\circ a_{U,V\otimes W,Z}\circ(a_{U,V,W}\otimes id_Z) = a_{U,V,W\otimes Z}\circ a_{U\otimes V,W,Z}.$$

Finalmente, verificamos o Axioma do Triângulo

$$\begin{aligned}
(id_U \otimes l_Z) \circ a_{U,\Bbbk,Z}((u \otimes k) \otimes z) &= (id_U \otimes l_Z)(a_{U,\Bbbk,Z}((u \otimes k) \otimes z)) \\
&= (id_U \otimes l_Z)(\omega(a,1,d)(u \otimes (k \otimes z))) \\
&= (id_U \otimes l_Z)(\omega(a,1,d)\ u \otimes (k \otimes z)) \\
&= id_U(\omega(a,1,d)\ u) \otimes l_Z(k \otimes z) \\
&= \omega(a,1,d)\ u \otimes \omega(1,d,d^{-1})\ z \\
&= \omega(a,1,d)\omega(1,d,d^{-1})\ u \otimes z \\
&\overset{(*)}{=} \omega(a,1,1)\ u \otimes z \\
&= r_U(u \otimes k) \otimes z \\
&= (r_U \otimes id_Z)((u \otimes k) \otimes z),
\end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ é verdadeira ao considerarmos $a = g$, $1 = h$, $d = l$ e $d^{-1} = t$ em (A). Assim, $(id_U \otimes l_Z) \circ a_{U,\Bbbk,Z} = (r_U \otimes id_Z)$ e portanto, a categoria $(\mathcal{C}(G,\omega), \otimes, a, l, r, \Bbbk)$ é monoidal.

Referências Bibliográficas

[1] CRANE, L.; FRENKEL, I. B.. Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases. **Journal of Mathematical Physics**, v. 35, n. 10, p. 5136-5154, 1994.

[2] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V.. **Tensor Categories**. American Mathematical Society, 2015.

[3] ETINGOF, P.; OSTRIK, V.. Finite tensor categories. **Moscow Mathematical Journal**, v. 4, n. 3, p. 627-654, 2004.

[4] GALINDO, C.; MOMBELLI, M.. Module categories over finite pointed tensor categories. **Selecta Mathematica, New Series**, v. 18, n. 2, p. 357-389, 2012.

[5] LAUDA, D.. An introduction to diagrammatic algebra and categorified quantum sl_2. **Academia Sinica, New Series**, v. 7, n. 2, p. 165-270, 2012.

[6] MACLANE, S.. **Categories for the Working Mathematician**. Springer Science & Business Media, v. 5, 2013.

[7] MACLANE, S.. Natural associativity and commutativity. **Rice University Studies**, v. 49, n. 4, p. 28-46, 1963.

[8] MOMBELLI, J. M. **Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**, Notas de aula. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/∼mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>. Acesso em 30 de janeiro de 2018.

[9] NATALE, S.; BURCIU, S.. Fusion rules of equivariantization of fusion categories. **Journal of Mathematical Physics**, v. 54, n. 1, 2013.

[10] PINTER, S. **Sobre equivariantizações de categorias módulo e seus objetos simples**. 04/2017. 148p. Tese (Doutorado). UFSC.

[11] ULIANA, L. **Equivariantização de categorias k-lineares**. 03/2015. 128p. Dissertação (Mestrado). UFSC.