Paula Savana Estácio Moreira

Representações de álgebras de caminhos de Leavitt

Florianópolis

Fevereiro de 2019

Paula Savana Estácio Moreira

Representações de álgebras de caminhos de Leavitt

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Professor Doutor Danilo Royer

Florianópolis

Fevereiro de 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Moreira, Paula Savana Estácio
Representações de álgebras de caminhos de Leavitt / Paula Savana Estácio Moreira ; orientador, Danilo Royer, 2019.
102 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de caminhos de Leavitt . 3. Sistemas ramificados E algébricos. 4. Representações. I. Royer, Danilo . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Paula Savana Estácio Moreira[1]

Representações de álgebras de caminhos de Leavitt

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre" e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Professor Doutor Marcelo Sobottka
Coordenador

Banca examinadora:

Professor Doutor Danilo Royer
Orientador

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Professor Doutor Daniel Gonçalves
UFSC

Professor Doutor Dirceu Bagio
UFSM

Professor Doutor Giuliano Boava
UFSC

Florianópolis

Fevereiro de 2019

Agradecimentos

Agradeço à minha família por ter sempre me incentivado e apoiado. Agradeço também ao Natã pelo companheirismo nessa trajetória e aos meus amigos por me alegrarem nos momentos de descanso.

Sou grata ao Danilo Royer pela paciência e dedicação ao me orientar. Agradeço aos professores Daniel Gonçalves, Dirceu Bagio e Giuliano Boava por aceitarem o convite para participar da banca.

Agradeço ainda aos professores Ivan Pontual, Eliezer Batista, Jáuber Cavalcante, Daniel Gonçalves, Marcelo Sobottka, Gilles de Castro e Vladimir Pestov pelo conhecimento transmitido nas disciplinas do mestrado.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e aos funcionários do departamento de matemática.

Resumo

Neste tralhado serão demonstrados resultados envolvendo álgebras de caminhos de Leavitt de um grafo dirigido E e sistemas ramificados E-algébricos. Será provado que uma condição suficiente para a existência de um sistema ramificado E-algébrico interessante é que $\mathbf{s}^{-1}(v)$ seja enumerável para todo vértice v do grafo. Todo sistema ramificado E-algébrico induz uma representação da álgebra de caminhos de Leavitt de E. Serão vistos os requisitos para que tal representação seja fiel, sem que o grafo precise ser nem mesmo enumerável. Por último, será provado que nem toda representação da álgebra de caminhos de Leavitt é equivalente a uma representação induzida por um sistema ramificado E-algébrico, mas, sob algumas condições, apresenta uma sub-representação que é equivalente.

Palavras-chave: Álgebras de caminhos de Leavitt. Sistemas ramificados E-algébricos. Representações.

Abstract

This paper presents results involving Leavitt path algebras of a directed graph E and E-algebraic branching systems. It will be shown that a sufficient condition for the existence of a interesting E-algebraic branching system is that $\mathbf{s}^{-1}(v)$ is enumerable for every vertex v of the graph. Every E-algebraic branching system induces a representation of the Leavitt path algebra of E. Under some conditions, this representation will be faithful. Finally, we will see that not every representation of Leavitt path algebra is equivalent to a representation induced by a E-algebraic branching system, but has a sub-representation which is equivalent.

Keywords: Leavitt path algebras. E-algebraic branching systems. Representation.

Sumário

Introdução

As álgebras de caminhos de Leavitt foram definidas em (1), por Abrams e Aranda-Pino e por Pere Ara em (3) como uma perspectiva algébrica para as C^*-álgebras de grafos. Este trabalho foi baseado no artigo (9), que teve como objetivo demonstrar resultados análogos aos teoremas de representação de C^*-álgebras de grafos apresentados em (7) e (8).

O relato será dividido em quatro capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo serão apresentadas propriedades e exemplos das álgebras de caminhos de Leavitt, denotadas por $L_{\mathbb{K}}(E)$, em que E é um grafo dirigido. No apêndice será abordado o processo de construção de $L_{\mathbb{K}}(E)$.

No segundo capítulo será introduzida a definição de sistema ramificado E-algébrico. Primeiramente, será demonstrado um teorema que garante que todo sistema ramificado E-algébrico induz uma representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$. Em seguida, será dada uma demonstração construtiva para um teorema que assegura a existência de sistemas ramificados E-algébricos interessantes para grafos E com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável, para todo vértice v. Este resultado havia sido demonstrado em (9) para grafos enumeráveis.

O Teorema 4.2 da referência (9) estabelece, sob algumas condições, que a representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$ induzida por um sistema ramificado E-algébrico é fiel, para E grafo linha-finita e sem poços. Por meio do Teorema de Redução, demonstrado em (2), será generalizado tal resultado para um grafo E qualquer. Este será o objetivo do capítulo três.

No último capítulo veremos que nem toda representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$ é equivalente a uma representação induzida por um sistema ramificado E-algébrico. Entretanto, será provado que, sob algumas condições, todo homomorfismo de álgebras com domínio em $L_{\mathbb{K}}(E)$ apresentará uma sub-representação que é equivalente. Deixando clara a importância do estudo de representações induzidas por sistemas ramificados E-algébricos.

1 Propriedades das álgebras de caminhos de Leavitt

Para a compreensão da estrutura das álgebras de caminhos de Leavitt são necessárias algumas definições, que serão apresentadas neste capítulos. Além de exemplos que ilustram estas álgebras, serão demonstradas propriedades das mesmas que serão utilizadas nos teoremas posteriores.

Definição 1.1. Consideramos um **grafo** (dirigido) uma quádrupla $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ em que E^0 é um conjunto de vértices, E^1 é um conjunto de arestas e

$$\mathbf{r}, \mathbf{s} : E^1 \longrightarrow E^0$$

são as funções ***range*** e ***source***, respectivamente.

Definição 1.2. Denominamos por **caminho** uma sequência $\alpha := e_1e_2...e_n$ de arestas com

$$\mathbf{r}(e_i) = \mathbf{s}(e_{i+1}),$$

para $1 \leqslant i \leqslant n-1$ e dizemos que o caminho α tem tamanho $\mid \alpha \mid := n$.

Denotamos o conjunto de caminhos de tamanho n por E^n e consideramos que os vértices em E^0 sejam caminhos de tamanho zero. Definimos o conjunto de símbolos

$$(E^1)^* := \{e^* : e \in E^1\}.$$

Consideramos $v^* = v$, para todo $v \in E^0$ e se $\alpha = e_1 ... e_n \in E^n$, definimos

$$\alpha^* := e_n^* e_{n-1}^* ... e_1^*.$$

Para que a definição seguinte seja compreendida, recomenda-se a leitura do Apêndice A. Além disso, a Observação A.1 deve ser consultada para o entendimento da notação.

Definição 1.3. Sejam E um grafo dirigido e $\mathbb{K}$ um corpo. A **álgebra de caminhos de Leavitt de E com coeficientes em $\mathbb{K}$**, denotada por $L_{\mathbb{K}}(E)$, é a $\mathbb{K}$-álgebra universal gerada pelo conjunto $\{v : v \in E^0\}$, com elementos idempotentes e ortogonais dois a dois e pelo conjunto $\{e, e^* : e \in E^1\}$ e que satisfaz:

1. $p_{\mathbf{s}(e)} s_e = s_e p_{\mathbf{r}(e)} = s_e$, para todo $e \in E^1$;

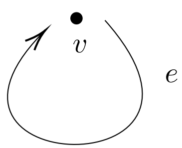
2. $p_{\mathbf{r}(e)} s_{e^*} = s_{e^*} p_{\mathbf{s}(e)} = s_{e^*}$, para todo $e \in E^1$;

3. $s_{e^*} s_f = \delta_{e,f} p_{\mathbf{r}(e)}$, para todo $e, f \in E^1$;

4. $p_v = \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e) = v}} s_e s_{e^*}$, para todo $v \in E^0$ tal que $0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \infty$.

Vejamos um exemplo de álgebra de caminhos de Leavitt.

Exemplo 1.4. Considere $E^0 = \{v\}$ e $E^1 = \{e\}$. $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um grafo, com $\mathbf{r}(e) := v$ e $\mathbf{s}(e) := v$.



Note que o conjunto de geradores é dado por $G = \{v\} \cup \{e\} \cup \{e^*\}$.

Seja $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ a álgebra de polinômios de Laurent com coeficientes em $\mathbb{K}$. Defina

$$\phi : \{v\} \cup \{e\} \cup \{e^*\} \longrightarrow \mathbb{K}[x, x^{-1}]$$

por

$$\phi(v) = 1,\ \phi(e) = x \text{ e } \phi(e^*) = x^{-1}.$$

Vejamos que a imagem de ϕ satisfaz as relações **R**, definidas no apêndice. Com efeito,

- $\phi(v)\phi(v) = 1.1 = 1 = \phi(v)$;
- $\phi(\mathbf{s}(e))\phi(e) = \phi(v)\phi(e) = 1.x = x = \phi(e)$;
  $\phi(e)\phi(\mathbf{r}(e)) = \phi(e)\phi(v) = x.1 = x = \phi(e)$;
- $\phi(\mathbf{r}(e))\phi(e^*) = \phi(v)\phi(e^*) = 1.x^{-1} = x^{-1} = \phi(e^*)$;
  $\phi(e^*)\phi(\mathbf{s}(e)) = \phi(e^*)\phi(v) = x^{-1}.1 = x^{-1} = \phi(e^*)$;
- $\phi(e^*)\phi(e) = x^{-1}.x = 1 = \phi(v) = \phi(\mathbf{r}(e))$;
- $\phi(e)\phi(e^*) = x.x^{-1} = 1 = \phi(v)$.

Pelo Teorema A.3, existe um único $\mathbb{K}$-homomorfismo

$$\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathbb{K}[x, x^{-1}]$$

que estende ϕ. Definindo um $\mathbb{K}$-homomorfismo

$$\psi : \mathbb{K}[x, x^{-1}] \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E)$$

em que

$$\psi(x) = s_e,\ \psi(x^{-1}) = s_{e^*} \text{ e } \psi(1) = v,$$

segue que $\psi = \varphi^{-1}$ e $L_{\mathbb{K}}(E) \cong \mathbb{K}[x, x^{-1}]$.

Observação 1.5. Dado um caminho $\alpha = \alpha_1 ... \alpha_m$ em E, denotamos $s_\alpha := s_{\alpha_1} ... s_{\alpha_m}$ em $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Lema 1.6. *Sejam E um grafo dirigido e $\mathbb{K}$ um corpo. Então*

$$L_{\mathbb{K}}(E) = span\{s_\alpha s_{\beta^*} : \alpha \textit{ e } \beta \textit{ são caminhos em } E \textit{ e } \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)\}.$$

Demonstração. A prova deste resultado foi dividida em três afirmações.

Afirmação. *Todo produto finito de arestas e vértices vistos em $L_{\mathbb{K}}(E)$ é da forma $s_\alpha s_{\beta^*}$.*

Demonstração. Note que se $v \in E^0$ e $e \in E^1$, então

$$p_v s_e = p_v p_{\mathbf{s}(e)} s_e = \begin{cases} s_e, & \text{se } v = \mathbf{s}(e) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$p_v s_{e^*} = p_v p_{\mathbf{r}(e)} s_{e^*} = \begin{cases} s_{e^*}, & \text{se } v = \mathbf{r}(e) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os casos $s_e p_v$ e $s_{e^*} p_v$ são semelhantes. Portanto, basta analisar o produto finito de elementos de $E^1 \cup (E^1)^*$ vistos em $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Considere $\gamma_1 ... \gamma_n \in E^1 \cup (E^1)^*$. Suponha que $\gamma_i = e^* \in (E^1)^*$ e $\gamma_{i+1} = d \in E^1$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
s_{\gamma_1}...s_{\gamma_n} &= s_{\gamma_1}...s_{\gamma_{i-1}}s_{e^*}s_d s_{\gamma_{i+2}}...s_{\gamma_n} \\
&= \delta_{e,d}s_{\gamma_1}...s_{\gamma_{i-1}}p_{\mathbf{r}(e)}s_{\gamma_{i+2}}...s_{\gamma_n} \\
&= \begin{cases} s_{\gamma_1}...s_{\gamma_{i-1}}p_{\mathbf{r}(e)}s_{\gamma_{i+2}}...s_{\gamma_n}, & \text{se } e = d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

O resultado segue dos casos anteriores.

Afirmação. *Se* $\alpha \in E^m$ *e* $\beta \in E^n$, *com* $n \geqslant 1$ *e* $\mathbf{r}(\alpha) \neq \mathbf{r}(\beta)$, *então* $s_\alpha s_{\beta^*} = 0$.

Demonstração. Denote $\alpha = \alpha_1...\alpha_m$ e $\beta = \beta_1...\beta_n$. Segue que

$$
\begin{aligned}
s_\alpha s_{\beta^*} &= s_{\alpha_1}...s_{\alpha_m}s_{\beta_n^*}...s_{\beta_1^*} \\
&= s_{\alpha_1}...s_{\alpha_m}p_{\mathbf{r}(\alpha_m)}p_{\mathbf{r}(\beta_n)}s_{\beta_n^*}...s_{\beta_1^*} \\
&= s_\alpha p_{\mathbf{r}(\alpha)}p_{\mathbf{r}(\beta)}s_{\beta^*} \\
&= \begin{cases} s_\alpha s_{\beta^*}, & \text{se } \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Afirmação. *Sejam* $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ *caminhos com* $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$ *e* $\mathbf{r}(\gamma) = \mathbf{r}(\epsilon)$, *então*

$$s_\alpha s_{\beta^*}.s_\gamma s_{\epsilon^*} \in \{s_\lambda s_{\mu^*} : \lambda \textit{ e } \mu \textit{ são caminhos e } \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(\mu)\}.$$

Demonstração. Podemos ver $s_\alpha s_{\beta^*}.s_\gamma s_{\epsilon^*}$ como um produto finito de arestas. Pela primeira afirmação, segue o resultado. Portanto,

$$L_{\mathbb{K}}(E) = span\{s_\alpha s_{\beta^*} : \alpha \text{ e } \beta \text{ são caminhos em } E \text{ e } \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)\}.$$

□

Exemplo 1.7. Considere o seguinte grafo E :

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_3} v_4 \xrightarrow{e_4} v_5 \cdots$$

Vamos identificar $L_{\mathbb{K}}(E)$ neste caso. Para tanto, defina

$$\mathbb{A} = \{(A_{i,j})_{\{i,j \in \mathbb{N}\}} : A_{i,j} \in \mathbb{K} \text{ e } \exists \ F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ finito tal que se}$$
$$(i,j) \notin F, \text{ então } A_{i,j} = 0\}$$

Considere

$$\phi : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \longrightarrow \mathbb{A}$$

definida por

$$\phi(v_i) = E_{i,i}$$
$$\phi(e_i) = E_{i,i+1}$$
$$\phi(e_i^*) = E_{i+1,i},$$

em que $E_{i,j}$ é a matriz em $\mathbb{A}$ cuja entrada na linha i e coluna j é 1 e 0 nas restantes. Note que

- Para $v_i, v_j \in E^0$, com $i, j \in \mathbb{N}$, vale que

$$\phi(v_i)\phi(v_j) = E_{i,i}E_{j,j} = \begin{cases} E_{i,i}, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- Para $e_i \in E^1$,

$$\phi(\mathbf{s}(e_i))\phi(e_i) = \phi(v_i)\phi(e_i) = E_{i,i}E_{i,i+1} = E_{i,i+1} = \phi(e_i);$$

$$\phi(e_i)\phi(\mathbf{r}(e_i)) = \phi(e_i)\phi(v_{i+1}) = E_{i,i+1}E_{i+1,i+1} = E_{i,i+1} = \phi(e_i);$$

- Para $e^* \in E^1$,

$$\phi(\mathbf{r}(e_i))\phi(e_i^*) = \phi(v_{i+1})\phi(e_i^*) = E_{i+1,i+1}E_{i+1,i} = E_{i+1,i} = \phi(e_i^*);$$

$$\phi(e_i^*)\phi(\mathbf{s}(e_i)) = \phi(e_i^*)\phi(v_i) = E_{i+1,i}E_{i,i} = E_{i+1,i} = \phi(e_i^*);$$

- Para $e_i, e_j \in E^1$,

$$\phi(e_i^*)\phi(e_j) = E_{i+1,i}E_{j,j+1} = \begin{cases} E_{i+1,i+1}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$= \delta_{e_i,e_j}E_{i+1,i+1} = \delta_{e_i,e_j}\phi(v_{i+1}) = \delta_{e_i,e_j}\phi(\mathbf{r}(e_i)).$$

- Observe que para todo $v_i \in E^0$, $\{e \in E^1 : \mathbf{s}(e) = v_i\} = \{e_i\}$. Assim,

$$\sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e) = v_i}} \phi(e)\phi(e^*) = \phi(e_i)\phi(e_i^*) = E_{i,i+1}E_{i+1,i} = E_{i,i} = \phi(v_i).$$

Pelo Teorema A.3, existe um único homomorfismo $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que φ estende ϕ. Nosso objetivo é mostrar que φ é bijetor.

Se $B \in \mathbb{A}$, então existe $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito tal que $B_{i,j} = 0$ para $(i,j) \notin F$. Assim,

$$B = \sum_{(i,j) \in F} \lambda_{i,j}E_{i,j},$$

para alguns $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$.

Mostremos que $E_{i,j}$ pertence à imagem de φ, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Caso $i < j$:

$$E_{i,j} = \prod_{k=i}^{j-1} E_{k,k+1} = \prod_{k=i}^{j-1} \varphi(s_{e_k}).$$

Caso $i > j$:

$$E_{i,j} = \prod_{k=j+1}^{i} E_{((i+j-k)+1),(i+j-k)} = \prod_{k=j+1}^{i} \varphi(s_{e^*_{(i+j-k)}}).$$

Caso $i = j$, já sabemos que $E_{i,j}$ pertence à imagem de φ. Como $B = \sum\limits_{(i,j)\in F} \lambda_{i,j} E_{i,j}$, segue que $B \in Im(\varphi)$.

A conta acima motiva a definição de uma aplicação linear ψ que é uma inversa para φ.

Considere

$$\psi : \mathbb{A} \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E)$$

tal que, para todo $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\psi(E_{i,j}) = \begin{cases} \prod\limits_{k=i}^{j-1} s_{e_k}, & \text{se } i < j \\ \prod\limits_{k=j+1}^{i} s_{e^*_{(i+j-k)}}, & \text{se } i > j \\ p_{v_i}, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

e ψ é estendida linearmente para $\mathbb{A}$. Pelo que foi observado acima, sabe-se que

$$\varphi \circ \psi(E_{i,j}) = E_{i,j}$$

. Pelo Lema 1.6 e como ψ é linear, para ver que $\psi \circ \varphi(a) = a$ para todo $a \in L_{\mathbb{K}}(E)$, basta notar que dados α e β caminhos de E com $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, vale a igualdade

$$\psi \circ \varphi(s_\alpha s_{\beta^*}) = s_\alpha s_{\beta^*}.$$

A observação seguinte tem o intuito de facilitar tal verificação.

Observação 1.8. Sejam α e β caminhos no grafo E, com $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$. Pela definição de E, segue que

$$\alpha = e_k ... e_{(k+m)}$$

e

$$\beta = e_{(k+m-n)} ... e_{(k+m)}.$$

Usando as relações satisfeitas por $L_{\mathbb{K}}(E)$ e a definição de caminho, segue que

$$\begin{aligned}
s_\alpha s_{\beta^*} &= s_{e_k} ... s_{e_{(k+m-1)}} s_{e_{(k+m)}} s_{e^*_{(k+m)}} s_{e^*_{(k+m-1)}} ... s_{e^*_{(k+m-n)}} \\
&= s_{e_k} ... s_{e_{(k+m-1)}} p_{\mathbf{s}(e_{(k+m)})} s_{e^*_{(k+m-1)}} ... s_{e^*_{(k+m-n)}} \\
&= s_{e_k} ... s_{e_{(k+m-1)}} p_{\mathbf{r}(e_{(k+m-1)})} s_{e^*_{(k+m-1)}} ... s_{e^*_{(k+m-n)}} \\
&= s_{e_k} ... s_{e_{(k+m-1)}} s_{e^*_{(k+m-1)}} ... s_{e^*_{(k+m-n)}} \\
&= \begin{cases} s_{e_k} ... s_{e_{(k+m-n-1)}}, & se \;\; m > n \\ s_{e^*_{(k+m-m-1)}} ... s_{e^*_{(k+m-n)}}, & se \;\; m < n \\ p_{\mathbf{s}(e_k)}, & se \;\; m = n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pela observação acima, basta verificar que $\psi \circ \varphi(s_\alpha s_{\beta^*}) = s_\alpha s_{\beta^*}$ para caminhos $s_\alpha s_{\beta^*}$ da forma $s_{e_k} ... s_{e_{(k+m)}}$ e outros da forma $s_{e^*_{k+m}} ... s_{e^*_k}$, para $m \in \mathbb{N}$, além do caso em que $s_\alpha s_{\beta^*} = p_{\mathbf{s}(e_k)}$. Para tanto, note que

$$\psi \circ \varphi(s_{e_k} ... s_{e_{(k+m)}}) = \psi(E_{k,(k+m)}) = \prod_{j=k}^{k+m} s_{e_j} = s_{e_k} ... s_{e_{(k+m)}}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(s_{e^*_{(k+m)}} ... s_{e^*_k}) &= \psi(E_{(k+m+1),(k+m)} E_{(k+m),(k+m-1)} ... E_{k+1,k}) \\
&= \psi(E_{(k+m+1),(k+m)}) \psi(E_{(k+m),(k+m-1)}) ... \psi(E_{k+1,k}) \\
&= s_{e^*_{((k+m+1)+(k+m)-(k+m+1))}} ... s_{e^*_{((k+1)+k-(k+1))}} \\
&= s_{e^*_{(k+m)}} ... s_{e^*_k}.
\end{aligned}$$

Por último,

$$\psi \circ \varphi(p_{\mathbf{s}(e_k)}) = \psi \circ \varphi(p_{v_{k-1}}) = \psi(E_{(k-1),(k-1)}) = p_{v_{k-1}} = p_{\mathbf{s}(e_k)}.$$

Logo, ψ é a transformação linear inversa de φ. Portanto, φ é um homomorfismo bijetor e $\mathbb{A} \cong L_{\mathbb{K}}(E)$.

Vejamos, agora, dois resultados técnicos que serão utilizados em capítulos posteriores.

Lema 1.9. *Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo. Então, para todo $y \in L_{\mathbb{K}}(E)$, existem $v_1, ..., v_m \in E^0$ tal que $y(p_{v_1} + ... + p_{v_m}) = y$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.6, se $y \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*}$, com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ e α_i, β_i caminhos de E satisfazendo $\mathbf{r}(\alpha_i) = \mathbf{r}(\beta_i)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Para que possamos demonstrar este lema, vejamos primeiramente que dados dois caminhos α, β em E, existe um vértice $v \in E^0$, tal que $s_\alpha s_{\beta^*} = s_\alpha s_{\beta^*} p_v$. De fato, precisamos considerar três casos:

1. Caso $\alpha\beta^* \in E^0$, basta escolher $v = \alpha\beta^*$.

2. Caso $|\beta| = 0$, segue que $\beta \in E^0$. Assim, $s_\alpha s_{\beta^*} = s_\alpha p_{\mathbf{r}(\beta)} = s_\alpha p_{\mathbf{r}(\alpha)}$.

3. Por último, se $|\beta| > 0$, então $s_\alpha s_{\beta^*} = s_\alpha s_{\beta^*} p_{\mathbf{s}(\beta)}$.

Voltando ao caso geral, pelo que foi observado acima, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe um vértice $v_i \in E^0$ tal que

$$s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*} = s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*} p_{v_i}.$$

Como não é necessário que os vértices acima sejam distintos para cada $i \in \{1, ..., n\}$, defina como P o conjunto dos v_i obtidos acima. Com isso,

$$
\begin{aligned}
y\left(\sum_{v_i\in P} p_{v_i}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*}\right)\left(\sum_{v_i\in P} p_{v_i}\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*} p_{v_i}\right)\left(\sum_{v_i\in P} p_{v_i}\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*} p_{v_i}^2\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i^*} p_{v_i}\right)\\
&= y,
\end{aligned}
$$

como desejado. □

Para finalizar este capítulo, vejamos uma proposição que será utilizada posteriormente.

Proposição 1.10. *Seja $\mathbb{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra qualquer. Então, existe um $\mathbb{K}$-módulo M e um homomorfismo $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(M)$ injetor.*

Demonstração. Vejamos que $M := \mathbb{A} \times \mathbb{K}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra unital com operações dadas por

$$
\begin{aligned}
(a,k)+(b,l) &:= (a+b, k+l)\\
k(a,l) &:= (ka, kl)\\
(a,k)(b,l) &:= (ab+kb+la, kl),
\end{aligned}
$$

para $a, b \in \mathbb{A}$ e $k, l \in \mathbb{K}$. É fácil ver que M é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Além disso, a multiplicação em M é associativa. Portanto,

M é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Observe que $(0,1)$ é unidade de M, pois para $(a,k) \in M$,

$$(a,k)(0,1) = (a.0 + k.0 + 1.a, k.1) = (a,k),$$

$$(0,1)(a,k) = (0.a + 1.a + k.0, 1.k) = (a,k).$$

Defina

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A} &\longrightarrow End_{\mathbb{K}}(M) \\ a &\longmapsto \varphi(a) : M \longrightarrow M \\ &\qquad\qquad (b,l) \longmapsto (a,0)(b,l) = (ab{+}al, 0). \end{aligned}$$

É fácil ver que φ é linear. Ainda, se $a, c \in \mathbb{A}$, e $(b,l) \in M$,

$$\begin{aligned} \varphi(ac)(b,l) &= (ac,0)(b,l) \\ &= (acb + acl, 0) \\ &= (a,0)(cb + cl, 0) \\ &= (a,0)(\varphi(c)(b,l)) \\ &= \varphi(a) \circ \varphi(c)(b,l). \end{aligned}$$

Logo, φ é um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras. Por último, note que φ é injetor, pois se $\varphi(a) = 0$, para algum $a \in \mathbb{A}$, então

$$(0,0) = \varphi(a)(0,1) = (a,0)(0,1) = (a,0).$$

Portanto, $a = 0$.

$\square$

2 Sistemas Ramificados E-algébricos

Neste capítulo será introduzida a noção de sistema ramificado E-algébrico. Além disso, teremos duas seções, a primeira tem como objetivo demonstrar a existência de uma representação específica da álgebra de caminhos de Leavitt. Na segunda seção, será provado que para todo grafo $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$, com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável para todo vértice $v \in E^0$, existe um sistema ramificado E-algébrico correspondente.

Definição 2.1. Sejam $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo, X um conjunto e $\{R_e\}_{e\in E^1}$, $\{D_v\}_{v\in E^0}$ famílias de subconjuntos de X, tais que:

1. $R_e \cap R_d = \emptyset$, para todo $d, e \in E^1$, com $d \neq e$;
2. $D_u \cap D_v = \emptyset$, para todo $u, v \in E^0$, com $u \neq v$;
3. $R_e \subseteq D_{\mathbf{s}(e)}$, para todo $e \in E^1$;
4. $D_v = \bigcup\limits_{\substack{e\in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} R_e$, para todo $v \in E^0$ tal que $0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \infty$;
5. Para cada $e \in E^1$, existe uma bijeção $f_e : D_{\mathbf{r}(e)} \longrightarrow R_e$.

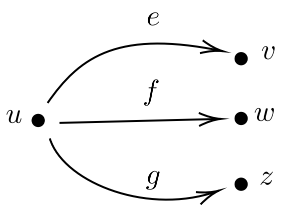
Um conjunto X, com famílias de subconjuntos $\{R_e\}_{e\in E^1}$, $\{D_v\}_{v\in E^0}$ e de funções $\{f_e\}_{e\in E^1}$, como acima, é chamado de um **sistema ramificado E-algébrico**, que denotamos por

$$(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$$

ou, simplesmente, por X.

Vejamos agora a construção de um exemplo de um sistema ramificado E-algébrico.

Exemplo 2.2. Considere o grafo $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ abaixo



,

considere $X = [1, 7)$ e defina os subconjuntos de X indexados por vértices da seguinte forma

$$D_v = [1, 2), \ \ D_w = [2, 3), \ \ D_z = [3, 4) \ \ e \ \ D_u = [4, 7).$$

Note que tais conjuntos são disjuntos, como na condição (2) da definição acima. Defina ainda os subconjuntos de X indexados por arestas

$$R_e = [4, 5), \ \ R_f = [5, 6), \ \ e \ \ R_g = [6, 7).$$

Perceba que estes conjuntos são disjuntos, como em (1). Agora,

$$\mathbf{s}(e) = \mathbf{s}(f) = \mathbf{s}(g) = u$$

e

$$R_e, \ \ R_f, \ \ R_g \subseteq [4, 7) = D_u,$$

satisfazendo (3). Como

$$\#\mathbf{s}^{-1}(v) = \#\mathbf{s}^{-1}(w) = \#\mathbf{s}^{-1}(z) = 0,$$

basta notar que, por construção,

$$D_u = R_e \cup R_f \cup R_g.$$

Desse modo, a condição (4) também é satisfeita. Para (5), note que

$$D_{\mathbf{r}(e)} = D_v, \;\; D_{\mathbf{r}(f)} = D_w \;\; e \;\; D_{\mathbf{r}(g)} = D_z.$$

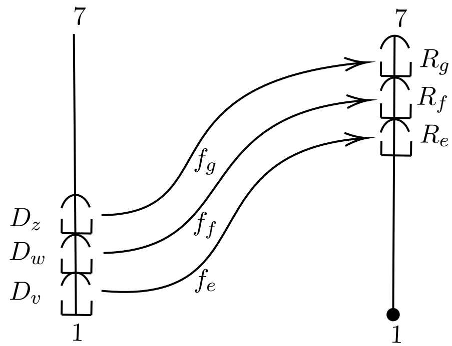
Considere, por exemplo, bijeções lineares,

$$f_e : D_v \longrightarrow R_e,$$

$$f_f : D_w \longrightarrow R_f,$$

$$f_g : D_z \longrightarrow R_g.$$

Com as funções e conjuntos assim definidos, $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ é um sistema ramificado E-algébrico. A imagem abaixo ilustra as bijeções $\{f_e\}_{e\in E^1}$.



2.1 Uma representação da álgebra de caminhos de Leavitt

Fixe X um sistema ramificado E-algébrico e defina como $F(X)$ o $\mathbb{K}$-módulo das funções de X em $\mathbb{K}$, com operações de adição e multiplicação por escalar ponto a ponto. Considere a $\mathbb{K}$-álgebra

$$End_{\mathbb{K}}(F(X)) = \{T : F(X) \longrightarrow F(X) : \text{ T é homomorfismo}\},$$

com multiplicação dada pela composição de homomorfismos e adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente.

Cada $e \in E^1$ e $v \in E^0$ serão associados a homomorfismos S_e, S_{e^*} e $P_v \in End_{\mathbb{K}}(F(X))$. Considere, então:

$$\begin{aligned} S_e : F(X) &\longrightarrow \quad F(X) \\ \phi &\longmapsto \quad S_e(\phi) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} S_e(\phi) : \ X \quad &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x \quad &\longmapsto \begin{cases} \phi(f_e^{-1}(x)), \text{ se } x \in R_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vejamos que S_e é homomorfismo de $\mathbb{K}$-módulo, ou seja, mostremos que S_e é linear. Para $x \in X$, $\phi_1, \phi_2 \in F(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, segue que:

- se $x \in R_e$,

$$\begin{aligned} S_e(\lambda\phi_1 + \phi_2)(x) &= (\lambda\phi_1 + \phi_2)(f_e^{-1}(x)) \\ &= \lambda\phi_1(f_e^{-1}(x)) + \phi_2(f_e^{-1}(x)) \\ &= \lambda S_e(\phi_1)(x) + \lambda S_e(\phi_1)(x). \end{aligned}$$

- Se $x \notin R_e$,

$$S_e(\lambda\phi_1 + \phi_2)(x) = 0 = \lambda S_e(\phi_1)(x) + \lambda S_e(\phi_1)(x).$$

Portanto, $S_e \in End_{\mathbb{K}}(F(X))$. Com o intuito de simplificar as contas na próxima demonstração, denotaremos, para cada $\phi \in F(X)$,

$$S_e(\phi) = \chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}).$$

Defina, ainda para $e \in E^1$,

$$\begin{aligned} S_e^* : F(X) &\longrightarrow F(X) \\ \phi &\longmapsto S_e^*(\phi) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} S_e^*(\phi) :\ X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \phi(f_e(x)), \text{ se } x \in D_{\mathbf{r}(e)} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

De maneira análoga ao caso S_e, segue que S_e^* é linear e, portanto, é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-módulo, ou seja, $S_e^* \in End_{\mathbb{K}}(F(X))$. Denotaremos, para cada $\phi \in F(X)$,

$$S_e^*(\phi) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot (\phi \circ f_e).$$

Por último, para cada $v \in E^0$, considere

$$\begin{aligned} P_v : F(X) &\longrightarrow F(X) \\ \phi &\longmapsto P_v(\phi) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} P_v(\phi) :\ X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \phi(x), \text{ se } x \in D_v \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Como P_v é linear, $P_v \in End_{\mathbb{K}}(F(X))$. Utilizaremos a notação

$$P_v(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi.$$

Teorema 2.3. *Seja X um sistema ramificado E-algébrico. Então, existe uma representação (ou seja, um homomorfismo de álgebras)*

$$\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$$

tal que

$$\pi(s_e) = S_e, \ \ \pi(s_e^*) = S_e^* \ \ e \ \ \pi(p_v) = P_v,$$

para todo $e \in E^1$ e para todo $v \in E^0$.

Demonstração. Defina $f : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ por

$$f(e) = S_e, \ \ f(e^*) = S_e^* \ \ e \ \ f(v) = P_v,$$

para todo $e \in E^1$ e, para todo $v \in E^0$. Com o intuito de utilizar o Teorema A.3, mostremos que os conjuntos

$$\{f(v) : v \in E^0\} = \{P_v : v \in E^0\}$$

$$\{f(e) : e \in E^1\} = \{S_e : e \in E^1\}$$

$$\{f(e^*) : e \in E^1\} = \{S_e^* : e \in E^1\}$$

satisfazem as relações em **R** definidas no Apêndice A. De fato,

- dados $v, w \in E^0$, e $\phi \in F(X)$, como $D_v \cap D_w = \emptyset$ se $v \neq w$, segue que

  $$\begin{aligned}(P_v \circ P_w)(\phi) &= P_v(P_w(\phi)) = \chi_{D_v} \cdot (P_w(\phi)) = \chi_{D_v} \cdot (\chi_{D_w} \cdot \phi) \\ &= \begin{cases} \chi_{D_v} \cdot \phi = P_v(\phi), & \text{se } v = w \\ 0 \cdot \phi = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

  Portanto, $(P_v \circ P_w) = \delta_{v,w} P_v$.

- Vejamos que se $e \in E^1$, então

$$f(\mathbf{s}(e)) \circ f(e) = f(e) \circ f(\mathbf{r}(e)) = f(e).$$

Para $\phi \in F(X)$, como $R_e \subseteq D_{\mathbf{s}(e)}$,

$$\begin{aligned}
(f(\mathbf{s}(e)) \circ f(e))(\phi) &= (P_{\mathbf{s}(e)} \circ S_e)(\phi) \\
&= P_{\mathbf{s}(e)}(S_e(\phi)) \\
&= \chi_{D_{\mathbf{s}(e)}} \cdot S_e(\phi) \\
&= \chi_{D_{\mathbf{s}(e)}} \cdot (\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})) \\
&= \chi_{(D_{\mathbf{s}(e)} \cap R_e)} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \\
&= \chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \\
&= S_e(\phi) \\
&= f(e)(\phi).
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
(f(e) \circ f(\mathbf{r}(e)))(\phi) &= (S_e \circ P_{\mathbf{r}(e)})(\phi) \\
&= S_e(P_{\mathbf{r}(e)}(\phi)) \\
&= \chi_{R_e} \cdot (P_{\mathbf{r}(e)}(\phi) \circ f_e^{-1}) \\
&= \chi_{R_e} \cdot ((\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi) \circ f_e^{-1}).
\end{aligned}$$

Dado $x \in X$, segue que se $x \in X \setminus R_e$,

$$\begin{aligned}
(\chi_{R_e} \cdot ((\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi) \circ f_e^{-1}))(x) &= \chi_{R_e}(x) \cdot ((\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi) \circ f_e^{-1})(x) \\
&= 0 \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi)(f_e^{-1}(x)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, se $x \in R_e$, como a imagem de f_e^{-1} é o conjunto $D_{\mathbf{r}(e)}$, então

$$\begin{aligned}(\chi_{R_e} \cdot ((\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi) \circ f_e^{-1}))(x) &= \chi_{R_e}(x) \cdot ((\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi) \circ f_e^{-1})(x) \\ &= 1 \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi)(f_e^{-1}(x)) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(f_e^{-1}(x)) \cdot \phi(f_e^{-1}(x)) \\ &= 1 \cdot \phi(f_e^{-1}(x)) \\ &= (\phi \circ f_e^{-1})(x).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(f(e) \circ f(\mathbf{r}(e)))(\phi) &= (S_e \circ P_{\mathbf{r}(e)})(\phi) \\ &= \chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \\ &= S_e(\phi) \\ &= f(e)(\phi).\end{aligned}$$

- Mostremos que se $e \in E^1$, então

$$f(\mathbf{r}(e)) \circ f(e^*) = f(e^*) \circ f(\mathbf{s}(e)) = f(e^*).$$

Dado $\phi \in F(X)$, observe que

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}(e)) \circ f(e^*)(\phi) &= (P_{\mathbf{r}(e)} \circ S_{e^*})(\phi) \\ &= P_{\mathbf{r}(e)}(S_{e^*}(\phi)) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot S_{e^*}(\phi).\end{aligned}$$

Seja $x \in X$. Se $x \in X \setminus D_{\mathbf{r}(e)}$, então

$$\begin{aligned}(\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot S_{e^*}(\phi))(x) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot (S_{e^*}(\phi))(x) \\ &= 0 \cdot (S_{e^*}(\phi))(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Agora, se $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$,

$$\begin{aligned}(\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot S_{e^*}(\phi))(x) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot (S_{e^*}(\phi))(x)\\ &= 1 \cdot (S_{e^*}(\phi))(x)\\ &= 1 \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot (\phi \circ f_e))(x)\\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot (\phi \circ f_e)(x)\\ &= 1 \cdot (\phi \circ f_e)(x).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}(e)) \circ f(e^*)(\phi) &= (P_{\mathbf{r}(e)} \circ S_{e^*})(\phi)\\ &= (\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot (\phi \circ f_e))(\phi)\\ &= S_{e^*}(\phi)\\ &= f(e^*).\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(f(e^*) \circ f(\mathbf{s}(e)))(\phi) &= (S_{e^*} \circ P_{\mathbf{s}(e)})(\phi)\\ &= S_{e^*}(P_{\mathbf{s}(e)}(\phi))\\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e).\end{aligned}$$

Assim, se $x \in X \setminus D_{\mathbf{r}(e)}$,

$$\begin{aligned}(\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e))(x) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e)(x)\\ &= 0 \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e)(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$, como a imagem de f_e é R_e e $R_e \subseteq D_{\mathbf{s}(e)}$,

$$\begin{aligned}(\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e))(x) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e)(x) \\ &= 1 \cdot ((P_{\mathbf{s}(e)}(\phi)) \circ f_e)(x) \\ &= (P_{\mathbf{s}(e)}(\phi))(f_e(x)) \\ &= (\chi_{D_{\mathbf{s}(e)}} \cdot \phi)(f_e(x)) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{s}(e)}}(f_e(x)) \cdot \phi(f_e(x)) \\ &= 1 \cdot \phi(f_e(x)) \\ &= (\phi \circ f_e)(x).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(f(e^*) \circ f(\mathbf{s}(e)))(\phi) &= (S_{e^*} \circ P_{\mathbf{s}(e)})(\phi) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot (\phi \circ f_e) \\ &= S_{e^*} \\ &= f(e^*).\end{aligned}$$

- Provemos agora que para todo $e, g \in E^1$, é válido que

$$f(e^*)f(g) = \delta_{e,g} f(\mathbf{r}(e)).$$

Note que, dado $\phi \in F(X)$,

$$\begin{aligned}f(e^*)f(g)(\phi) &= (S_{e^*} \circ S_g)(\phi) \\ &= S_{e^*}(S_g(\phi)) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((S_g(\phi)) \circ f_e) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e).\end{aligned}$$

Com isso, se $e = g$,

$$(S_{e^*} \circ S_e)(\phi) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})) \circ f_e).$$

Para $x \in X$, com $x \in X \setminus D_{\mathbf{r}(e)}$,

$$\begin{aligned}(S_{e^*} \circ S_e)(\phi)(x) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})) \circ f_e)(x) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}))(f_e(x)) \\ &= 0 \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}))(f_e(x)).\end{aligned}$$

Caso $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$, como R_e é a imagem de f_e, segue que

$$\begin{aligned}(S_{e^*} \circ S_e)(\phi)(x) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})) \circ f_e)(x) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}))(f_e(x)) \\ &= 1 \cdot ((\chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}))(f_e(x)) \\ &= \chi_{R_e}(f_e(x)) \cdot (\phi \circ f_e^{-1})(f_e(x)) \\ &= \chi_{R_e}(f_e(x)) \cdot (\phi(f_e^{-1}(f_e(x))) \\ &= 1 \cdot (\phi(x)).\end{aligned}$$

Logo, $(S_{e^*} \circ S_e)(\phi) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \phi = P_{\mathbf{r}(e)}$.

Para o caso $e \neq g$, se $x \in X \setminus D_{\mathbf{r}(e)}$,

$$\begin{aligned}((S_{e^*} \circ S_g)(\phi))(x) &= (\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e))(x) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e)(x) \\ &= 0 \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e)(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$, então

$$\begin{aligned}((S_{e^*} \circ S_g)(\phi))(x) &= (\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e))(x) \\ &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}(x) \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e)(x) \\ &= 1 \cdot ((\chi_{R_g} \cdot (\phi \circ f_g^{-1})) \circ f_e)(x) \\ &= \chi_{R_g}(f_e(x)) \cdot (\phi \circ f_g^{-1}))(f_e(x)).\end{aligned}$$

Como $f_e(x) \in R_e$ e $R_e \cap R_g = \emptyset$, segue que $\chi_{R_g}(f_e(x)) = 0$ e, portanto, $((S_{e^*} \circ S_g)(\phi))(x) = 0$. Conclui-se que

$$f(e^*)f(g) = S_{e^*} \circ S_g = \delta_{e,g} P_{\mathbf{r}(e)} = \delta_{e,g} f(\mathbf{r}(e)).$$

- Finalmente, mostremos que para todo $v \in E^0$ com $0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \emptyset$,

$$f(v) = \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} f(e) \circ f(e^*).$$

De fato, dado $\phi \in F(X)$, se $e \in \mathbf{s}^{-1}(v)$,

$$\begin{aligned}
(f(e) \circ f(e^*))(\phi) &= S_e \circ S_{e^*}(\phi) \\
&= S_e(S_{e^*}(\phi)) \\
&= \chi_{R_e} \cdot (S_{e^*}(\phi) \circ f_e^{-1}) \\
&= \chi_{R_e} \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}_e}} \cdot (\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1}).
\end{aligned}$$

Seja $x \in X$. Se $x \in X \setminus R_e$,

$$\begin{aligned}
(f(e) \circ f(e^*))(\phi)(x) &= ((S_e \circ S_{e^*})(\phi))(x) \\
&= \chi_{R_e}(x) \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}_e}} \cdot (\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1})(x) \\
&= 0 \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}_e}} \cdot (\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1})(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, se $x \in R_e$, como a imagem de f_e^{-1} é $\chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}$, segue que

$$\begin{aligned}
(f(e) \circ f(e^*))(\phi)(x) &= (S_e \circ S_{e^*}(\phi))(x) \\
&= \chi_{R_e}(x) \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}_e}} \cdot (\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1})(x) \\
&= 1 \cdot (\chi_{D_{\mathbf{r}_e}} \cdot (\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1})(x) \\
&= \chi_{D_{\mathbf{r}_e}}(f_e^{-1}(x)) \cdot (\phi \circ f_e)(f_e^{-1}(x)) \\
&= 1 \cdot \phi(f_e(f_e^{-1}(x))) \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

Logo, $f(e) \circ f(e^*) = \chi_{R_e} \cdot \phi$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} (f(e) \circ f(e^*))(\phi) &= \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} (S_e \circ S_{e^*})(\phi) \\
&= \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} \chi_{R_e} \cdot \phi \\
&= \chi_{\{\dot\cup R_e : \mathbf{s}(e)=v\}} \cdot \phi \\
&= \chi_{D_v} \cdot \phi \\
&= P_v(\phi) \\
&= f(v)(\phi),
\end{aligned}$$

como desejado.

Pelo Teorema A.3, existe um único homomorfismo

$$\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$$

tal que

$$\pi(s_e) = S_e, \;\; \pi(s_e^*) = S_e^* \;\; e \;\; \pi(p_v) = P_v,$$

para todo $e \in E^1$ e para todo $v \in E^0$.

$\square$

Observação 2.4. Perceba que o resultado do Teorema 2.3 continua válido se mudarmos o módulo $F(X)$ de todas as funções de X em $\mathbb{K}$, pelo módulo $F_c(X)$ de todas as funções de X em $\mathbb{K}$ que só não se anulam em um número finito de pontos de X. Basta notar que se $\phi \in F_c(X)$, então, para todo $e \in E^1$ e para todo $v \in E^0$, S_e, S_{e^*} e $P_v \in End_{\mathbb{K}}(F_c(X))$, por construção. A demonstração do teorema para o caso $F_c(X)$ é idêntica.

2.2 Existência de sistemas ramificados E-algébricos

O objetivo desta seção é dar uma demonstração construtiva da existência de sistemas ramificados E-algébricos para grafos $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$, com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável, para todo $v \in E^0$. Este resultado generaliza o Teorema 3.1 da referência (9), provado para grafos $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ com E^0 e E^1 enumeráveis.

Definição 2.5. Dado um grafo $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$, um vértice $v \in E^0$ é dito um poço se $v \notin \mathbf{s}(E^1)$, ou seja, $\{e \in E^1 : \mathbf{s}(e) = v\} = \emptyset$.

O teorema a seguir foi originalmente demonstrado em (9) sob a condição de o grafo ser enumerável.

Teorema 2.6. *Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo tal que $\mathbf{s}^{-1}(v)$ é enumerável, para todo $v \in E^0$. Então, existe um sistema ramificado E-algébrico em $\mathbb{R} \times (E^1 \cup E^0)$.*

Demonstração. Construiremos um sistema ramificado E-algébrico X em $\mathbb{R} \times (E^1 \cup E^0)$. Primeiramente, defina, para cada $e \in E^1$,

$$R_e := (0, 1] \times \{e\}.$$

Defina W:=$\{v \in E^0$: v é um poço$\}$. Para $v \in E^0 \setminus W$, seja

$$D_v := \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e) = v}} R_e = \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ e \in \mathbf{s}^{-1}(v)}} (0, 1] \times \{e\} = (0, 1] \times \mathbf{s}^{-1}(v).$$

Para $v \in W$, considere

$$D_v := (0, 1] \times \{v\}.$$

Vejamos que $\{R_e\}_{e \in E^1}$ e $\{D_v\}_{v \in E^0}$ satisfazem as condições da Definição 2.1.

1. Sejam $e, d \in E^1$, com $e \neq d$. Então,

$$\begin{aligned} R_e \cap R_d &= (0,1] \times \{e\} \cap (0,1] \times \{d\} \\ &= (0,1] \times (\{e\} \cap \{d\}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

2. Fixe $u, v, \in E^0$, com $u \neq v$. Três situações precisam ser analisadas.

   - Se $u, v \in W$, então

   $$\begin{aligned} D_u \cap D_v &= (0,1] \times \{u\} \cap (0,1] \times \{v\} \\ &= (0,1] \times (\{u\} \cap \{v\}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

   - Caso $u, v \in E^0 \setminus W$, segue que

   $$\begin{aligned} D_u \cap D_v &= ((0,1] \times \mathbf{s}^{-1}(u)) \cap ((0,1] \times \mathbf{s}^{-1}(v)) \\ &= (0,1] \times (\mathbf{s}^{-1}(u) \cap \mathbf{s}^{-1}(v)) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

   - Se $u \in E^0 \setminus W$ e $v \in W$, então

   $$\begin{aligned} D_u \cap D_v &= ((0,1] \times \mathbf{s}^{-1}(u)) \cup ((0,1] \times \{v\}) \\ &= (0,1] \times (\mathbf{s}^{-1}(u) \cap \{v\}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

3. Seja $e \in E^1$. Como $e \in \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{s}(e))$, então

$$R_e = (0,1] \times \{e\} \subseteq (0,1] \times \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{s}(e)) = D_{\mathbf{s}(e)}.$$

4. Seja $v \in E^0$ com $0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \infty$. Então, $v \in E^0 \setminus W$. Segue que, por definição,

$$D_v := \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e) = v}} R_e.$$

5. Seja $d \in E^1$. Com o intuito de demonstrar que existe uma bijeção $f_d : D_{\mathbf{r}(d)} \longrightarrow R_d$, esta prova será dividida em três casos.

   - Caso 1. $\mathbf{r}(d) \in W$, isto é, $\#\{e \in E^1 : \mathbf{s}(e) = \mathbf{r}(d)\} = 0$. Por definição,

     $$D_{\mathbf{r}(d)} = (0,1] \times \{\mathbf{r}(d)\}.$$

     Defina $f_d : D_{\mathbf{r}(d)} \longrightarrow R_d$ da seguinte forma:

     $$\begin{aligned} f_d : (0,1] \times \{\mathbf{r}(d)\} &\longrightarrow (0,1] \times \{d\} \\ (t, \mathbf{r}(d)) &\longrightarrow (t, d). \end{aligned}$$

   - Caso 2. $\mathbf{r}(d) \notin W$ e $\{e \in E^1 : \mathbf{s}(e) = \mathbf{r}(d)\} = \{e_1, ..., e_N\}$. Por definição,

     $$D_{\mathbf{r}(d)} := \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=\mathbf{r}(d)}} R_e = \bigcup_{k=1}^{N} R_{e_k}.$$

     Note que podemos dividir $(0,1]$ em N intervalos abertos à esquerda e fechados à direta $I_{e_k} = (y_k, y_{k+1}]$, com $k = \{1, ..., N\}$, de forma que

     $$y_1 = 0 < y_2 < ... < y_{N+1} = 1.$$

     Assim,

     $$R_d = (0,1] \times \{d\} = \bigcup_{k=1}^{N} (y_k, y_{k+1}] \times \{d\} =: \bigcup_{k=1}^{N} I_{e_k} \times \{d\}.$$

     Para cada $k \in \{1, ..., N\}$, definimos uma bijeção linear, por exemplo, $g^k : (0,1] \longrightarrow I_{e_k}$. Assim,

     $$\begin{aligned} f_d^k : (0,1] \times \{e_k\} &\longrightarrow I_{e_k} \times \{d\} \\ (t, e_k) &\longmapsto (g^k(t), d) \end{aligned}$$

é uma bijeção entre R_{e_k} e $I_{e_k} \times \{d\}$. Por último,

$$f_d : \bigcup_{k=1}^{N} R_{e_k} \longrightarrow \bigcup_{k=1}^{N} I_{e_k} \times \{d\}$$
$$x \longmapsto f_d^k(x), \text{ para } x \in R_{e_k}$$

é uma bijeção entre $D_{\mathbf{r}(d)}$ e R_d, como desejado.

- Caso 3. $\mathbf{r}(d) \notin W$ e $\#\{e \in E^1 : \mathbf{s}(e) = \mathbf{r}(d)\} = \infty$. Aqui usamos a hipótese a respeito do grafo e escrevemos $\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{r}(d)) = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$. Por definição,

$$D_{\mathbf{r}(d)} := \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=\mathbf{r}(d)}} R_e = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{e_k}.$$

Considere a sequência $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$. Note que

$$R_d = (0,1] \times \{d\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \times \{d\} =: \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{e_k} \times \{d\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos uma bijeção linear $g^k : (0,1] \longrightarrow I_{e_k}$. Considerando f_d^k de maneira análoga ao caso anterior, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$f_d : \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{e_k} \longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{e_k} \times \{d\}$$
$$x \longmapsto f_d^k(x), \ \ para \ \ x \ \in \ R_{e_k}.$$

é uma bijeção entre $D_{\mathbf{r}(d)}$ e R_d.

Seja

$$X := \left(\bigcup_{e \in E^1} R_e \right) \cup \left(\bigcup_{v \in E^0} D_v \right) \subseteq \mathbb{R} \times \left(E^1 \cup E^0 \right).$$

Desta forma, $(X, \{R_e\}_{e \in E^1}, \{D_v\}_{v \in E^0}, \{f_e\}_{e \in E^1})$ é um sistema ramificado E-algébrico. $\square$

O corolário a seguir é uma consequência dos Teoremas 2.3 e 2.6.

Corolário 2.7. *Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo tal que, para todo $v \in E^0$, tenhamos $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável. Então, existe um homomorfismo*

$$\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$$

tal que

$$\pi(s_e)(\phi) = \chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}), \ \ \pi(s_e^*)(\phi) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot (\phi \circ f_e) \ \ e$$

$$\pi(p_v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi,$$

para todo $e \in E^1$, para todo $v \in E^0$ e para cada $\phi \in F(X)$, considerando X, $\{R_e\}_{e \in E^1}$ e $\{D_v\}_{v \in E^0}$ como no Teorema 2.6.

Demonstração. A demonstração é imediata a partir dos Teoremas 2.3 e 2.6. □

Observação 2.8. Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo qualquer. Defina E^∞ como o conjunto dos caminhos infinitos em E, podemos considerar um sistema ramificado E-algébrico da seguinte forma:

- $X := E^\infty \cup \{\beta : \beta$ é caminho em E e $\mathbf{r}(\beta)$ é poço $\}$;
- Para cada $e \in E^1$, $R_e := \{\beta : \beta$ é caminho em E e $\beta_1 = e\}$;
- Para $v \in E^0$ poço, $D_v = \{v\}$. Caso contrário,

$$D_v = \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e) = v}} R_e;$$

- Para cada $e \in E^1$,

$$\begin{array}{rccl} f_e: & D_{\mathbf{r}(e)} & \longrightarrow & R_e \\ & \beta & \longmapsto & e\beta. \end{array}.$$

Deixamos para o leitor a demonstração que este é um sistema ramificado E-algébrico.

No próximo capítulo, veremos que apesar da possibilidade de definirmos este sistema ramificado E-algébrico para um grafo qualquer, a construção acima não é interessante, pois a representação induzida por este sistema ramificado E-algébrico pode não ser injetora.

Aplicando a construção acima para o grafo do Exemplo 1.4, segue que $R_e = D_v = \{eeeee...\}$. Considerando a representação induzida, como no Teorema 2.3, segue que para $\phi \in F(X)$, e $x = eee... \in R_e$,

$$(\pi(s_e)(\phi))(x) = (S_e(\phi))(x) = \phi(f_e^{-1}(x)) = \phi(eee...).$$

Agora, aplicando duas vezes a conta acima,

$$\begin{aligned} (\pi(s_e s_e)(\phi))(x) &= \pi(s_e) \circ \pi(s_e)(\phi)(x) = (S_e \circ S_e)(\phi)(x) \\ &= (S_e(\phi))(eee...) = \phi(eee...). \end{aligned}$$

Portanto, $\pi(s_e) = \pi(s_e s_e)$. Note que $s_e \neq s_e s_e$, visto que no Exemplo 1.4, s_e e $s_e s_e$ foram associados a elementos distintos na Álgebra de polinômios de Laurent. Assim, a representação π induzida por este sistema ramificado E-algébrico não é injetora.

No caso em que o grafo é enumerável, é possível obter um sistema ramificado um pouco mais simples do que no Teorema 2.6, como será demonstrado no próximo teorema.

Lema 2.9. *Seja* $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ *um sistema ramificado E-algébrico e* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *uma função bijetora. Então,* $(Y, \{\varphi(R_e)\}_{e\in E^1}, \{\varphi(D_v)\}_{v\in E^0}, \{\varphi\circ f_e\circ\varphi^{-1}\}_{e\in E^1})$ *é um sistema ramificado E-algébrico.*

Demonstração. Vejamos que as condições $(1)-(4)$ da Definição 2.1 são satisfeitas:

1. Para todo $d, e \in E^1$, com $e \neq d$,
$$\varphi(R_d)\cap\varphi(R_e) = \varphi(R_d\cap R_e) = \emptyset.$$
2. Se $u, v \in E^0$, com $u \neq v$, então
$$\varphi(D_u)\cap\varphi(D_v) = \varphi(D_u\cap D_v) = \emptyset.$$
3. Seja $e \in E^1$. Como $R_e \subseteq D_{\mathbf{s}(e)}$, segue que $\varphi(R_e) \subseteq \varphi(D_{\mathbf{s}(e)})$.
4. Seja $v \in E^0$ com $0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \infty$. Segue que, por definição,
$$D_v := \bigcup_{\substack{e\in E^1\\ \mathbf{s}(e)=v}} R_e.$$
Portanto,
$$\begin{aligned}\varphi(D_v) &= \varphi\left(\bigcup_{\substack{e\in E^1\\ \mathbf{s}(e)=v}} R_e\right)\\ &= \bigcup_{\substack{e\in E^1\\ \mathbf{s}(e)=v}} \varphi(R_e).\end{aligned}$$

Para a condição (5), basta definir, para cada $e \in E^1$, a bijeção
$$\varphi\circ f_e\circ\varphi^{-1} : \varphi(D_{\mathbf{r}(e)}) \longrightarrow \varphi(R_e),$$
como na ilustração a seguir.

$$\begin{tikzcd}
D_{\mathbf{r}(e)} \arrow[r, "f_e"] & R_e \arrow[d, "\varphi"] \\
\varphi(D_{\mathbf{r}(e)}) \arrow[u, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "\varphi \circ f_e \circ \varphi^{-1}"'] & \varphi(R_e)
\end{tikzcd}$$

Logo, $(Y, \{\varphi(R_e)\}_{e\in E^1}, \{\varphi(D_v)\}_{v\in E^0}, \{\varphi \circ f_e \circ \varphi^{-1}\}_{e\in E^1})$ é um sistema ramificado E-algébrico. □

Teorema 2.10. *Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo com E^0 e E^1 enumeráveis. Então, existe um sistema ramificado E-algébrico X em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Defina $W{:=}\{v \in E^0\colon v$ é um poço$\}$. Como E^0 e E^1 são enumeráveis, em particular, W é finito ou infinito enumerável. Vamos demonstrar o caso W infinito. Caso W seja finito a demonstração é semelhante.

Denote

$$E^1 = \{e_i\}_{i=1}^{\infty} \;\; e \;\; W = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

Pelo teorema anterior, existe um sistema ramificado E-algébrico com subconjuntos indexados por arestas e vértices da seguinte maneira:

- $R_{e_i} := (0,1] \times \{e_i\}$, para todo $e_i \in E^1$;
- $D_v := \bigcup_{\substack{e_k\in E^1\\ \mathbf{s}(e_k)=v}} R_{e_k}$, para todo $v \in E^0 \setminus W$;

- $D_{v_j} := (0,1] \times \{v_j\}$, para todo $v \in W$.

Além disso,

$$X := (\bigcup_{e\in E^1} R_e) \cup (\bigcup_{v\in E^0} D_v) \subseteq (0,1] \times (E^1 \cup E^0) \subseteq \mathbb{R} \times (E^1 \cup E^0).$$

Defina

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, e_i) &\longmapsto t + i - 1, \ \ para \ \ e_i \in E^1 \\ (t, v_j) &\longmapsto t - j, \ \ para \ \ v_j \in W. \end{aligned}$$

Note que $\widetilde{\varphi} : X \longrightarrow \varphi(X)$ é bijetora, pois, para cada $e_i \in E^1$,

$$\widetilde{\varphi}(R_{e_i}) = (i-1, i]$$

e, para todo $v_j \in W$,

$$\widetilde{\varphi}(D_{v_j}) = (-j, -j+1].$$

Pelo Lema 2.9,

$$(\widetilde{\varphi}(X), \{\widetilde{\varphi}(R_e)\}_{e\in E^1}, \{\widetilde{\varphi}(D_v)\}_{v\in E^0}, \{\widetilde{\varphi} \circ f_e \circ \widetilde{\varphi^{-1}}\}_{e\in E^1})$$

é um sistema ramificado E-algébrico em $\mathbb{R}$.

□

Corolário 2.11. *Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo com E^0 e E^1 enumeráveis. Então, existe um homomorfismo $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ tal que para todo $e \in E^1$, para todo $v \in E^0$ e para cada $\phi \in F(X)$,*

$$\pi(s_e)(\phi) = \chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}), \ \ \pi(s_e^*)(\phi) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot (\phi \circ f_e) \ \ e$$

$$\pi(p_v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi,$$

em que X, é um intervalo de $\mathbb{R}$, possivelmente ilimitado, e $\{R_e\}_{e\in E^1}$ e $\{D_v\}_{v\in E^0}$ são como no Teorema 2.10.

Demonstração. A demonstração é imediata a partir dos Teoremas 2.3 e 2.10. $\square$

Observação 2.12. Dado um grafo $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$, considere $L_{\mathbb{K}}(E)$. Vejamos que, em $L_{\mathbb{K}}(E)$, $p_v \neq 0$, para todo $v \in E^0$. De fato, pela Observação 2.8, usando a representação π induzida pelo sistema ramificado E-algébrico construído, vale que

$$\pi(p_v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi,$$

para todo $\phi \in F(X)$. Em particular, para

$$\begin{aligned} \mathbb{1} : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto 1, \end{aligned}$$

segue que

$$\pi(p_v)(\mathbb{1}) = \chi_{D_v} \cdot \mathbb{1} = \chi_{D_v}.$$

Como $D_v \neq \emptyset$, então $\pi(p_v) \neq 0$. Desse modo, $p_v \neq 0$, pois π é homomorfismo. Analogamente, para $e \in E^1$,

$$\pi(s_e)(\mathbb{1}) = \chi_{R_e} \cdot \mathbb{1} \circ f_e^{-1} = \chi_{R_e}.$$

Como $R_e \neq \emptyset$, $\pi(s_e) \neq 0$. Assim, $s_e \neq 0$. Ainda,

$$\pi(s_e^*)(\mathbb{1}) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \mathbb{1} \circ f_e = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}}.$$

Como $D_{\mathbf{r}(e)} \neq \emptyset$, segue que $\pi(s_e^*) \neq 0$ e, consequentemente, $s_e^* \neq 0$.

Uma aplicação da Observação 2.12 é o seguinte lema:

Lema 2.13. *Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo. Então, E possui finitos vértices se e somente se $L_{\mathbb{K}}(E)$ possui unidade.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Denote a unidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$ por $\mathbb{1}_{L_k}$. Pelo Lema 1.9, existem $v_1, ..., v_n \in E^0$, tais que

$$\mathbb{1}_{L_k}(p_{v_1} + ... + p_{v_n}) = \mathbb{1}_{L_k}.$$

Suponha que exista um $u \in E^0$ com $u \neq v_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Pela igualdade acima e como $\mathbb{1}_{L_k}$ é a unidade em $L_{\mathbb{K}}(E)$, segue que

$$\mathbb{1}_{L_k}(p_{v_1} + ... + p_{v_n})p_u = \mathbb{1}_{L_k} p_u = p_u.$$

Pela Observação 2.12, $p_u \neq 0$, contradizendo a Definição 1.3 que garante que como $u \neq v_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, então $p_{v_i} p_u = 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto, E possui n vértices $v_1, ..., v_n$.

$(\Rightarrow)$ Suponha que E possua somente finitos vértices $v_1, ...,$ v_n. Vejamos que $(p_{v_1} + ... + p_{v_n})$ é a unidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$. De fato, pela Definição 1.3,

$$(p_{v_1} + ... + p_{v_n})p_{v_j} = p_{v_j},$$

para todo $v_j \in \{v_1, ..., v_n\} = E^0$. Além disso, para $e \in E^1$, $\mathbf{s}(e), \mathbf{r}(e) \in E^0$. Assim, $\mathbf{s}(e) = v_k$ e $\mathbf{r}(e) = v_l$, para alguns $k, l \in \{1, ..., n\}$. Pela Definição 1.3,

$$\begin{aligned}
(p_{v_1} + ... + p_{v_n})s_e &= (p_{v_1} + ... + p_{v_n})p_{\mathbf{s}(e)} s_e \\
&= (p_{v_1} + ... + p_{v_k} + ... + p_{v_n})p_{v_k} s_e \\
&= p_{v_k} s_e \\
&= p_{\mathbf{s}(e)} s_e \\
&= s_e.
\end{aligned}$$

Ainda pela Definição 1.3,

$$
\begin{aligned}
s_e(p_{v_1} + ... + p_{v_n}) &= s_e p_{\mathbf{r}(e)}(p_{v_1} + ... + p_{v_n}) \\
&= s_e p_{v_l}(p_{v_1} + ... + p_{v_l} + ... + p_{v_n}) \\
&= s_e p_{v_l} \\
&= s_e p_{\mathbf{r}(e)} \\
&= s_e.
\end{aligned}
$$

Analogamente, utilizando que $p_{\mathbf{r}(e)} s_{e^*} = s_{e^*} p_{\mathbf{s}(e)} = s_{e^*}$, para todo $e \in E^1$, obtém-se que

$$(p_{v_1} + ... + p_{v_n}) s_{e^*} = s_{e^*}(p_{v_1} + ... + p_{v_n}) = s_{e^*}.$$

Pelo Lema 1.6, segue que $(p_{v_1} + ... + p_{v_n})$ é a unidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$. $\square$

3 Representações fiéis de álgebras de caminhos de Leavitt

No Teorema 4.2 da referência (9), foi mostrado que dado um sistema ramificado E-algébrico

$$(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1}),$$

a representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$ induzida por X é fiel desde que algumas condições sejam satisfeitas, como a de que E seja um grafo linha-finita (ou seja, $\mathbf{s}^{-1}(v)$ é finito, para todo $v \in E^0$) e sem poços. O objetivo deste capítulo é generalizar este resultado para um grafo qualquer, utilizando o Teorema 2.2.11, chamado de Teorema de Redução, da referência (2) que será enunciado a seguir. Vejamos algumas definições e um lema necessários para a demonstração do teorema almejado.

Definição 3.1. Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo. Um **caminho fechado** $\alpha = e_1...e_n$, em E, é um caminho tal que, para $i \in \{1, ..., n-1\}$,

$$\mathbf{r}(e_i) = \mathbf{s}(e_{i+1})$$

e

$$\mathbf{r}(\alpha) := \mathbf{r}(e_n) = \mathbf{s}(e_1) =: \mathbf{s}(\alpha).$$

Definição 3.2. Seja $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ um sistema ramificado E-algébrico. Dado um caminho fechado $\alpha =$

$e_1...e_n$ em E, definimos

$$f_\alpha : D_{\mathbf{r}(e_n)} \longrightarrow R_{e_1}$$

por

$$f_\alpha := f_{e_1} \circ ... \circ f_{e_n}.$$

Vejamos que de fato as composições envolvidas em f_α estão bem definidas. Note que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$,

$$f_{e_i} : D_{\mathbf{r}(e_i)} \longrightarrow R_{e_i}.$$

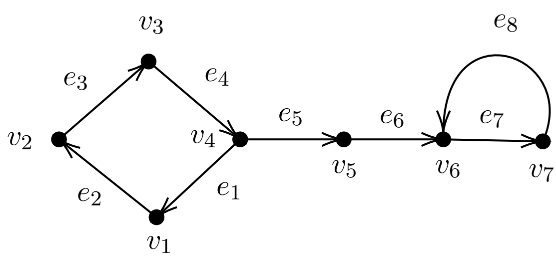
Como α é caminho, segue que

$$R_{e_i} \subseteq D_{\mathbf{s}(e_i)} = D_{\mathbf{r}(e_{i-1})},$$

para todo $i \in \{2, ..., n\}$. Como $D_{\mathbf{r}(e_{i-1})}$ é domínio de $f_{e_{i-1}}$, para todo $i \in \{2, ..., n\}$, segue o resultado.

Definição 3.3. [Referência (2).] Sejam E um grafo, $c = c_1...c_n$ um caminho fechado em E e $e \in E^1$. Dizemos que e é uma **saída** para c se existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\mathbf{s}(e) = \mathbf{s}(c_i)$ e $e \neq c_i$.

Exemplo 3.4. Considere o grafo E abaixo:



.

Note que e_5 é uma saída para o caminho fechado $e_1e_2e_3e_4$, pois $\mathbf{s}(e_5) = \mathbf{s}(e_1)$ e $e_5 \neq e_1$. Agora, e_7e_8 é um exemplo de caminho fechado sem saída em E.

Teorema 3.5. ***(O Teorema de Redução)*** *Sejam E um grafo arbitrário e $\mathbb{K}$ um corpo. Para qualquer elemento não nulo $x \in L_{\mathbb{K}}(E)$ existem caminhos α e β em E, tais que*

1. $0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = k p_v$, *para alguns $k \in \mathbb{K}$ e $v \in E^0$, ou*

2. $0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = p(s_c)$, *em que c é um caminho fechado sem saída e $p(y)$ é um polinômio em $\mathbb{K}[y, y^{-1}]$.*

Demonstração. Disponível na página 34 da referência (2). □

Definição 3.6. Dado um sistema ramificado E-algébrico X, defina, para cada $z \in X$, a função $\delta_z : X \longrightarrow \mathbb{K}$, por

$$\delta_z(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = z \\ 0, & \text{se } y \neq z. \end{cases}$$

Além disso, dado um conjunto $Y \subseteq X$ e um elemento $z \in X$, usaremos a notação $[z \in Y]$ sob a definição

$$[z \in Y] = \begin{cases} 1, & \text{se } z \in Y \\ 0, & \text{se } z \notin Y. \end{cases}$$

Lema 3.7. *Seja $(X, \{R_e\}_{e \in E^1}, \{D_v\}_{v \in E^0}, \{f_e\}_{e \in E^1})$ um sistema ramificado E-algébrico. Considere $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ a representação induzida por X, como no Teorema 2.3. Então, para cada caminho $c_1 ... c_n$ em E e cada $z \in X$,*

$$\pi(s_{c_1} ... s_{c_n})(\delta_z) = [z \in D_{\mathbf{r}(c_n)}] \delta_{f_{c_1 ... c_n}(z)}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre o tamanho do caminho c. Mostremos, primeiramente, que vale a igualdade para o caso $n = 1$. De fato,

$$\pi(s_{c_1})(\delta_z) = \chi_{R_{c_1}} \cdot \delta_z \circ f_{c_1}^{-1},$$

e para $y \in X$,

$$\begin{aligned}
(\chi_{R_{c_1}} \cdot \delta_z \circ f_{c_1}^{-1})(y) &= \chi_{R_{c_1}}(y) \cdot \delta_z(f_{c_1}^{-1}(y)) \\
&= \chi_{R_{c_1}}(y) \cdot \begin{cases} 1, & \text{se } z = f_{c_1}^{-1}(y) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= \chi_{D_{\mathbf{r}(c_1)}}(z) \cdot \begin{cases} 1, & \text{se } f_{c_1}(z) = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= [z \in D_{\mathbf{r}(c_1)}]\delta_{f_{c_1}(z)}(y).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\pi(s_{c_1})(\delta_z) = [z \in D_{\mathbf{r}(c_1)}]\delta_{f_{c_1}(z)}.$$

Suponha que valha a igualdade para o caso em que o caminho tenha tamanho $n-1$, ou seja,

$$\pi(s_{c_1}...s_{c_{n-1}})(\delta_z) = [z \in D_{\mathbf{r}(c_{n-1})}]\delta_{f_{c_1...c_{n-1}(z)}}.$$

Então, para o caso n,

$$\begin{aligned}
\pi(s_{c_1}...s_{c_{n-1}}s_{c_n})(\delta_z) &= \pi(s_{c_1}) \circ ... \circ \pi(s_{c_{n-1}}) \circ \pi(s_{c_n})(\delta_z) \\
&= \pi(s_{c_1}) \circ ... \circ \pi(s_{c_{n-1}})(\pi(s_{c_n})(\delta_z)) \\
&= \pi(s_{c_1}) \circ ... \circ \pi(s_{c_{n-1}})(\chi_{R_{c_n}} \cdot \delta_z \circ f_{c_n}^{-1}).
\end{aligned}$$

Note que se $y \in X$,

$$\begin{aligned}
(\chi_{R_{c_n}} \cdot \delta_z \circ f_{c_n}^{-1})(y) &= \chi_{R_{c_n}}(y) \cdot \delta_z(f_{c_n}^{-1}(y)) \\
&= \chi_{R_{c_n}}(y) \cdot \begin{cases} 1, & \text{se } z = f_{c_n}^{-1}(y) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= \chi_{D_{\mathbf{r}(c_n)}}(z) \cdot \begin{cases} 1, & \text{se } f_{c_n}(z) = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= [z \in D_{\mathbf{r}(c_n)}]\delta_{f_{c_n}(z)}(y).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\pi(s_{c_1}...s_{c_{n-1}}s_{c_n})(\delta_z) &= \pi(s_{c_1})\circ ... \circ \pi(s_{c_{n-1}})([z\in D_{\mathbf{r}(c_n)}]\delta_{f_{c_n}(z)}) \\ &= [z\in D_{\mathbf{r}(c_n)}]\pi(s_{c_1})\circ ... \circ \pi(s_{c_{n-1}})(\delta_{f_{c_n}(z)}) \\ &= [z\in D_{\mathbf{r}(c_n)}][f_{c_n}(z)\in D_{\mathbf{r}(c_{n-1})}]\delta_{f_{c_1...c_{n-1}(f_{c_n}(z))}} \\ &= [z\in D_{\mathbf{r}(c_n)}][f_{c_n}(z)\in D_{\mathbf{r}(c_{n-1})}]\delta_{f_{c_1...c_{n-1}c_n}(z)}.\end{aligned}$$

Como o domínio de f_{c_n} é $D_{\mathbf{r}(c_n)}$ e

$$f_{c_n}(D_{\mathbf{r}(c_n)}) = R_{c_n} \subseteq D_{\mathbf{s}(c_n)} = D_{\mathbf{r}(c_{n-1})},$$

segue que $[f_{c_n}(z)\in D_{\mathbf{r}(c_{n-1})}] = [z\in D_{\mathbf{r}(c_n)}]$. Logo,

$$\pi(s_{c_1}...s_{c_{n-1}}s_{c_n})(\delta_z) = [z\in D_{\mathbf{r}(c_n)}]\delta_{f_{c_1...c_{n-1}c_n}(z)}.$$

□

Observe que no lema acima, se denotarmos $c := c_1...c_n$, segue que como $D_{\mathbf{r}(c)} = D_{\mathbf{r}(c_n)}$, então

$$\pi(s_c)(\delta_z) = [z\in D_{\mathbf{r}(c)}]\delta_{f_{c(z)}}.$$

O teorema seguinte é uma versão do Teorema 4.2 da referência (9), aqui com a hipótese enfraquecida a respeito do grafo. Além disso, esse resultado e a recíproca dele foram provados para álgebras relativas de caminhos de Cohn em (6).

Teorema 3.8. *Seja $(X, \{R_e\}_{e\in E^1}, \{D_v\}_{v\in E^0}, \{f_e\}_{e\in E^1})$ um sistema ramificado E-algébrico, com $D_v \neq \emptyset$ para todo $v\in E^0$. Se para todo caminho fechado c sem saída em E e para todo conjunto finito $F\subseteq \mathbb{N}$ existe $z_0\in D_{\mathbf{r}(c)}$ tal que $f_{c^i}(z_0) := f_{cc...c}(z_0) \neq z_0$, para todo $i\in F$, então a representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$ induzida por este sistema ramificado E-algébrico (como no Teorema 2.3) é fiel, ou seja, injetora.*

Demonstração. Seja $x \in L_{\mathbb{K}}(E)$ um elemento não nulo. Mostremos que $\pi(x) \neq 0$. Pelo Teorema 3.5, existem caminhos α e β em E, tais que ou

1. $0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = k p_v$, para alguns $k \in \mathbb{K}$ e $v \in E^0$, ou

2. $0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = \sum\limits_{i=-n}^{n} \lambda_i s_{c^i}$, em que c é um caminho fechado sem saída e $\lambda_i \in \mathbb{K}$, para todo $i \in \{-n, ..., n\}$. (Observe que para $m \in \{1, ..., n\}$, $c^{-m} = (c^*)^m$).

Caso 1, se $0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = k p_v$, para alguns $k \in \mathbb{K}$ e $v \in E^0$, então

$$\begin{aligned} \pi(s_{\alpha^*} x s_\beta) &= \pi(s_{\alpha^*})\pi(x)\pi(s_\beta) \\ &= k\pi(p_v). \end{aligned}$$

Agora, para $\mathbb{1} \in F(X)$, como $\mathbb{1}(x) = 1$, para todo $x \in X$,

$$(\pi(s_{\alpha^*})\pi(x)\pi(s_\beta))(\mathbb{1}) = k\pi(p_v)(\mathbb{1}) = k\chi_{D_v} \cdot \mathbb{1} = k\chi_{D_v}.$$

Por hipótese, $D_v \neq \emptyset$, então $\pi(x) \neq 0$.

Para o caso 2, se $0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = \sum\limits_{i=-n}^{n} \lambda_i s_{c^i}$, em que c é um caminho fechado sem saída e $\lambda_i \in K$, para todo $i \in \{-n, ..., n\}$, considere

$$i_0 := min\{i \in \{-n, ..., n\} : \lambda_i \neq 0\}.$$

Mostremos que $\pi(x) \neq 0$, para as situações $i_0 \geqslant 1$ e $i_0 < 1$.

- Caso 2.1: $i_0 \geqslant 1$. Neste caso,

$$0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = \sum_{i=i_0}^{n} \lambda_i s_{c^i}.$$

Por hipótese, existe um $z_0 \in D_{\mathbf{r}(c)}$ tal que

$$f_{c^i}(z_0) \neq z_0,$$

para todo $i \in \{i_0 + 1, ..., n\}$. Assim, como $f_{c^{i_0}}$ é injetora,

$$f_{c^i}(z_0) = f_{c^{i_0}} \circ f_{c^{(i-i_0)}}(z_0) \neq f_{c^{i_0}}(z_0),$$

para todo $i \in \{i_0 + 1, ..., n\}$. Pelo Lema 3.7

$$\begin{aligned}
\pi(s_{\alpha^*} x s_\beta)(\delta_{z_0})(f_{c^{i_0}}(z_0)) &= \sum_{i=i_0}^{n} \lambda_i \pi(s_{c^i})(\delta_{z_0})(f_{c^{i_0}}(z_0)) \\
&= \sum_{i=i_0}^{n} \lambda_i [z_0 \in D_{\mathbf{r}(c^i)}] \delta_{f_{c^i(z_0)}}(f_{c^{i_0}}(z_0)) \\
&= \sum_{i=i_0}^{n} \lambda_i [z_0 \in D_{\mathbf{r}(c)}] \delta_{f_{c^i(z_0)}}(f_{c^{i_0}}(z_0)) \\
&= \lambda_{i_0} \delta_{f_{c^{i_0}(z_0)}}(f_{c^{i_0}}(z_0)) \\
&= \lambda_{i_0} \neq 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\pi(x) \neq 0$, se $i_0 \geqslant 1$.

- Caso 2.2: $i_0 < 1$. Neste caso,

$$0 \neq s_{\alpha^*} x s_\beta = \sum_{i=-|i_0|}^{n} \lambda_i s_{c^i}.$$

O objetivo agora é obter um polinômio cujo primeiro coeficiente não nulo acompanhe o termo s_{c^1}. Considere

$$
\begin{aligned}
(s_{\alpha^*} x s_\beta) s_{c^{(|i_0|+1)}} &= \left(\sum_{i=-|i_0|}^{n} \lambda_i s_{c^i} \right) s_{c^{(|i_0|+1)}} \\
&= \lambda_{-|i_0|} s_{c^{*|i_0|}} s_{c^{(|i_0|+1)}} + ... + \lambda_{-1} s_{c^*} s_{c^{(|i_0|+1)}} \\
&+ ... + \lambda_n s_{c^n} s_{c^{(|i_0|+1)}} \\
&= \lambda_{-|i_0|} s_c + ... + \lambda_{-1} s_{c^{|i_0|}} + ... \\
&+ \lambda_n s_{c^{(|i_0|+n+1)}} \\
&= \sum_{i=-|i_0|}^{n} \lambda_i s_{c^{(i+|i_0|+1)}}.
\end{aligned}
$$

Para facilitar a notação, defina para $k \in \{1, ..., |i_0| + n + 1\}$

$$\gamma_k = \lambda_{(k-|i_0|-1)}.$$

Desse modo,

$$(s_{\alpha^*} x s_\beta) s_{c^{(|i_0|+1)}} = \sum_{k=1}^{|i_0|+n+1} \gamma_k s_{c^k}.$$

Note que $\gamma_1 = \lambda_{-|i_0|} \neq 0$. Pelo caso 2.1, $\pi \left(\sum_{k=1}^{|i_0|+n+1} \gamma_k s_{c^k} \right) \neq 0$. Portanto, $\pi(x) \neq 0$ e π é uma representação fiel de $L_{\mathbb{K}}(E)$, como desejado.

□

Agora, dado um grafo E com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável, para todo vértice v, será construído um sistema ramificado E-algébrico que satisfaça as condições do Teorema 3.8, induzindo, assim, uma representação fiel de $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Seja E um grafo, com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável, para todo $v \in E^0$. Defina $W = \{v \in E^0 : v \text{ é poço}\}$. Para $v \in W$, considere

$$D_v = [1, 2) \times \{v\}.$$

Defina ainda, para $e \in E^1$,

$$R_e = [1, 2) \times \{e\}.$$

Por último, considere, para $v \in E^0 \setminus W$,

$$D_v = \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} R_e = \bigcup_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} [1, 2) \times \{e\} = [1, 2) \times \mathbf{s}^{-1}(v).$$

A demonstração que as condições $(1) - (4)$ da Definição 2.1 são satisfeitas é análoga ao que foi feito na prova do Teorema 2.6. Precisamos construir funções bijetoras, para cada $e \in E^1$,

$$f_e : D_{\mathbf{r}(e)} \longrightarrow R_e,$$

de forma que o sistema ramificado E-algébrico construído satisfaça as condições impostas no Teorema 3.8. Desse modo, podemos considerar as f_e como no Teorema 2.3, para $e \in E^1$, exceto para as arestas c_i presentes em algum caminho fechado sem saída $c = c_1 ... c_n$ de E. Neste caso, pela Definição 3.3,

$$\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{r}(c_i)) = \{c_{i+1}\},$$

para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, e $\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{r}(c_n)) = \{c_1\}$. Então,

$$D_{\mathbf{r}(c_i)} = R_{c_{i+1}} = [1, 2) \times \{c_{i+1}\},$$

para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, e $D_{\mathbf{r}(c_n)} = R_{c_1} = [1, 2) \times \{c_1\}$.

Para que possamos definir f_{c_i}, fixe $\theta \in [0, 1)$ irracional e considere

$$\begin{aligned} h_\theta : \ [0, 1) &\longrightarrow [0, 1) \\ x &\longmapsto (x + \theta) \mod (1). \end{aligned}$$

Vejamos que h_θ é uma bijeção. Para a injetividade, considere $x, y \in [0,1)$ com $h_\theta(x) = h_\theta(y)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&(x+\theta) \equiv (y+\theta) \mod (1)\\
&\Rightarrow (x+\theta) - (y+\theta) \in \mathbb{Z}\\
&\Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}\\
&\Rightarrow x - y = 0 \text{ (pois } x, y \in [0,1))\\
&\Rightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Note que

$$h_\theta(x) = \begin{cases} x+\theta, & \text{se } x+\theta < 1\\ x+\theta-1, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Para a sobrejetividade, considere $y \in [0,1)$. Caso $y \geqslant \theta$, seja $x = y - \theta \in [0,1)$. Assim,

$$h_\theta(x) = (y - \theta + \theta) \mod (1) = (y) \mod (1) = y.$$

Por outro lado, caso $y < \theta$, escolha $x = y - \theta + 1 \in [0,1)$. Logo,

$$h_\theta(x) = (y - \theta + 1 + \theta) \mod (1) = (y+1) \mod (1) = y.$$

Portanto, h_θ é bijetora.

Defina ainda, para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}
g_{c_i} : [0,1) &\longrightarrow [1,2) \times \{c_i\}\\
x &\longmapsto (x+1, c_i)
\end{aligned}$$

que é uma bijeção com inversa

$$\begin{aligned}
g_{c_i}^{-1} : [1,2) \times \{c_i\} &\longrightarrow [0,1)\\
(x, c_i) &\longmapsto x - 1.
\end{aligned}$$

Considere a seguinte bijeção de $D_{\mathbf{r}(c_i)}$ em R_{c_i}, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$,

$$\begin{aligned} f_{c_i} : [1,2) \times \{c_{i+1}\} &\longrightarrow [1,2) \times \{c_i\} \\ (x, c_{i+1}) &\longmapsto (g_{c_i} \circ h_\theta \circ g_{c_{i+1}}^{-1})((x, c_{i+1})). \end{aligned}$$

Para $i = n$, seja

$$\begin{aligned} f_{c_n} : [1,2) \times \{c_1\} &\longrightarrow [1,2) \times \{c_n\} \\ (x, c_1) &\longmapsto (g_{c_n} \circ h_\theta \circ g_{c_1}^{-1})((x, c_1)). \end{aligned}$$

Desse modo, temos bijeções $f_e : D_{\mathbf{r}(e)} \longrightarrow R_e$, para todo $e \in E^1$. Definindo $X := \left(\bigcup_{e \in E^1} R_e \right) \cup \left(\bigcup_{v \in E^0} D_v \right)$, obtemos um sistema ramificado E-algébrico.

Dado c um caminho fechado sem saída, vejamos como expressar f_{c_i}, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Para tanto, fixe $i \in \{1, ..., n-1\}$ e considere $y \in D_{\mathbf{r}(c_i)}$. Então, $y = (x, c_{i+1}) \in R_{c_{i+1}}$. Assim,

$$\begin{aligned} f_{c_i}(y) &= f_{c_i}((x, c_{i+1})) \\ &= (g_{c_i} \circ h_\theta \circ g_{c_{i+1}}^{-1})((x, c_{i+1})) \\ &= (g_{c_i} \circ h_\theta)(x-1) \\ &= g_{c_i}((x - 1 + \theta) \mod (1)) \\ &= \begin{cases} g_{c_i}(x-1+\theta), & \text{para } x - 1 + \theta < 1 \\ g_{c_i}(x-2+\theta), & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x+\theta, c_i), & \text{para } x - 1 + \theta < 1 \\ (x+\theta-1, c_i), & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Para $i = n$, a conta é análoga, substituindo c_{i+1} por c_1. Portanto, para todo $i \in \{i, ..., n\}$.

$$f_{c_i}(y) = (x + \theta + r_{c_i}(y), c_i),$$

em que $r_{c_i}(y)$ é 0 ou 1 para cada $y \in D_{\mathbf{r}(c_i)}$. Finalmente, podemos usar o 3.8 para provar o corolário a seguir.

Corolário 3.9. *Seja E um grafo com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ enumerável. Então a representação $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ induzida pelo sistema ramificado E-algébrico construído acima é fiel.*

Demonstração. Basta verificar a hipótese do Teorema 3.8 que diz que para todo caminho fechado c sem saída e para todo conjunto finito $F \in \mathbb{N}$, existe um $z_0 \in D_{\mathbf{r}(c)}$ tal que $f_{c^k}(z_0) \neq z_0$, para todo $k \in F$. Para tanto, fixe $c = c_1...c_n$ caminho fechado sem saída em E e $y = (x, c_1) \in D_{\mathbf{r}(c_n)} = R_{c_1}$, vejamos que

$$f_c(y) = f_{c_1} \circ ... \circ f_{c_n}((x, c_1)) = (x + n\theta + \overline{r}(y), c_1),$$

em que $\overline{r}(y)$ é um número racional. Sabemos que, para o caso $n = 1$,

$$f_{c_1}(y) = (x + \theta + r_{c_1}(y), c_1),$$

em que $r_{c_1}(y)$ é 0 ou 1 para cada $y \in D_{\mathbf{r}(c_1)}$.

Suponha que a igualdade seja válida para o caso em que o caminho tem tamanho $n-1$, digamos para o caminho $c_2...c_n$. Assim, para $y \in D_{\mathbf{r}(c_n)}$,

$$f_{c_2} \circ ... \circ f_{c_n}((x, c_1)) = (x + (n-1)\theta + \overline{r}((x, c_1)), c_2),$$

em que $\overline{r}((x, c_1))$ é um número racional. Assim, para o caso em que o caminho tem tamanho n, isto é, da forma $c_1...c_n$, segue que para $y \in D_{\mathbf{r}(c_n)}$,

$$\begin{aligned} f_{c_1} \circ ... \circ f_{c_n}((x, c_1)) &= f_{c_1}(x + (n-1)\theta + \overline{r}(y), c_2) \\ &= (x + (n-1)\theta + \overline{r}(y) + \theta + \overline{r}(f_{c_2...c_n}(x, c_1)), c_1) \\ &= (x + n\theta + (\overline{r}(y) + \overline{r}(f_{c_2...c_n}(x, c_1))), c_1), \end{aligned}$$

em que $\overline{r}(y) + \overline{r}(f_{c_2 \dots c_n}(x, c_1))$ é um número racional, como desejado.

Note que se $y = (x, c_1) \in D_{\mathbf{r}(c_n)}$ com x racional, então, como θ é irracional e o restante dos termos na primeira coordenada são racionais, segue que

$$f_{c_1 \dots c_n}(y) = (z, c_1)$$

com z irracional. Assim, nenhum ponto $y = (x, c_1)$ com x racional é ponto fixo de $f_c = f_{c_1 \dots c_n}$.

Seja $F \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto finito. Dado $k \in F$, aplicando f_c k vezes, segue que, para todo $y = (x, c_1) \in D_{\mathbf{r}(c_n)}$,

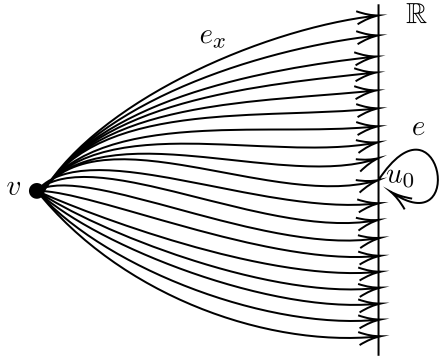
$$f_{c^k}(y) = (x + kn\theta + r_k(y), c_1),$$

em que $r_k(y)$ é um número racional. Pelo mesmo argumento usado para f_c, segue que $y = (x, c_1)$ com x racional não é ponto fixo de f_{c^k}. Pelo Teorema 3.8, a representação $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ como no Teorema 2.3 é fiel.

□

Dado um grafo E sem a condição de que $\mathbf{s}^{-1}(v)$ é enumerável para todo vértice $v \in E^0$, não temos a garantia que é possível construir um sistema ramificado E-algébrico, como foi feito no Teorema 2.6. Apresentaremos um exemplo específico de um grafo com $\mathbf{s}^{-1}(v)$ não enumerável para algum $v \in E^0$ e para o qual possa ser definido um sistema ramificado E-algébrico que satisfaça as condições do Teorema 3.8.

Exemplo 3.10. Considere $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo com $E^0 := \{v\} \cup \{u_x : x \in \mathbb{R}\}$, de modo que, para cada $x \in \mathbb{R}$, exista uma aresta e_x com $\mathbf{s}(e_x) = v$ e $\mathbf{r}(e_x) = u_x$. Além disso, para o vértice u_0, exista uma aresta $e \in E^1$ satisfazendo $\mathbf{s}(e) = \mathbf{r}(e) = u_0$, como o desenho abaixo ilustra.



Note que $\mathbf{s}^{-1}(v)$ não é enumerável. Defina

$$R_e = [0,1) \times \{e\}$$

e

$$R_{e_x} = [0,1) \times \{e_x\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, seja

$$D_{u_x} = [0,1) \times \{u_x\}.$$

Por último, considere

$$D_{u_0} = R_e$$

e

$$D_v = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} R_{e_x}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, defina a bijeção

$$\begin{aligned} f_{e_x} : [0,1) \times \{\mathbf{r}(e_x)\} &\longrightarrow [0,1) \times \{e_x\} \\ (t, \mathbf{r}(e_x)) &\longmapsto (t, e_x), \end{aligned}$$

e considere

$$\begin{aligned} f_{e_0} : D_{u_0} &\longrightarrow R_{e_0} \\ (t,e) &\longmapsto (t,e_0). \end{aligned}$$

Finalmente, para a aresta e, considere

$$\begin{aligned} f_e : D_{u_0} &\longrightarrow R_e \\ (t,e) &\longmapsto (t^2,e). \end{aligned}$$

Considerando $X := \left(\bigcup_{e \in E^1} R_e \right) \cup \left(\bigcup_{v \in E^0} D_v \right)$, é fácil ver que temos um sistema ramificado E- algébrico. Como e é o único caminho fechado em E e a hipótese do Teorema 3.8 é válida para qualquer $z_0 \in (0,1) \times \{e\} \subseteq D_{u_0}$, segue que a representação $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ como no Teorema 2.3 é fiel.

4 Equivalência de Representações de $L_{\mathbb{K}}(E)$

Nos capítulos anteriores, foram introduzidas representações da álgebra de caminhos de Leavitt induzidas por sistemas ramificados E-algébricos. Isto motiva o questionamento se toda representação pode ser obtida desta maneira. Veremos que isto não é verdade em geral, mas com algumas condições, mostraremos que dado um grafo E, todo homomorfismo $\psi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathbb{A}$ tem uma sub-representação que é equivalente a uma representação induzida por um sistema ramificado E-algébrico.

Vejamos alguns conceitos necessários para os resultados desta seção. Seja $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo, $\mathbb{A}$ uma álgebra e $\widetilde{\pi} : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathbb{A}$ um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Pela Proposição 1.10, existe um $\mathbb{K}$-módulo V e um homomorfismo $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(V)$ injetor. Assim, podemos definir a composição

$$\varphi \circ \widetilde{\pi} : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(V).$$

Como φ é injetor, de agora em diante, consideraremos apenas representações (homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras) de $L_{\mathbb{K}}(E)$ em $End_{\mathbb{K}}(V)$, em que V é um $\mathbb{K}$-módulo.

Dada uma representação $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(V)$, defina os $\mathbb{K}$-submódulos

$$V_u = \phi(p_u)(V) \qquad e \qquad V_e = \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(V),$$

para todo $u \in E^0$ e para todo $e \in E^1$. Como ϕ é representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$, ϕ satisfaz as relações da Definição 1.3. Disso, seguem as seguintes propriedades:

1. $V_e \subseteq V_{\mathbf{s}(e)}$, para todo $e \in E^1$.

   Demonstração. Seja $y \in V_e$. Por definição, $y = \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x)$ para algum $x \in V$. Assim,

$$\begin{aligned}\phi(p_{\mathbf{s}(e)})(y) &= \phi(p_{\mathbf{s}(e)})(\phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x)) \\ &= \phi(p_{\mathbf{s}(e)}s_e)\phi(s_{e^*})(x) \\ &= \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x) \\ &= y.\end{aligned}$$

   Logo, $y = \phi(p_{\mathbf{s}(e)})(y) \in V_{\mathbf{s}(e)}$.

2. $V_e \cap V_f = 0$, para todo $e, f \in E^1$ com $e \neq f$.

   Demonstração. Seja $y \in V_e \cap V_f$. Assim, existem $x_1, x_2 \in V$ tal que

$$y = \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x_1) = \phi(s_f)\phi(s_{f^*})(x_2).$$

   Agora, aplicaremos $\phi(s_e)\phi(s_{e^*})$ na igualdade e usaremos que $s_{e^*}s_f = \delta_{e,f}p_{\mathbf{r}(e)}$.

$$\begin{aligned}\phi(s_e)\phi(s_{e^*})\phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x_1) &= \phi(s_e)\phi(s_{e^*})\phi(s_f)\phi(s_{f^*})(x_2) \\ \phi(s_e)\phi(s_{e^*}s_e)\phi(s_{e^*})(x_1) &= \phi(s_e)\phi(s_{e^*}s_f)\phi(s_{f^*})(x_2) \\ \phi(s_e)\phi(p_{\mathbf{r}(e)})\phi(s_{e^*})(x_1) &= 0 \\ \phi(s_e p_{\mathbf{r}(e)})\phi(s_{e^*})(x_1) &= 0 \\ \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x_1) &= 0 \\ y &= 0.\end{aligned}$$

3. $V_u \cap V_w = 0$, para todo $u, w \in E^0$ com $u \neq w$.

Demonstração. Seja $y \in V_u \cap V_w$. Então, existem $x_1, x_2 \in V$, tal que $y = \phi(p_u)(x_1) = \phi(p_w)(x_2)$. Como $p_u p_w = \delta_{u,w} p_u$, basta aplicar $\phi(p_u)$ na igualdade. Desse modo,

$$\begin{aligned}\phi(p_u)\phi(p_u)(x_1) &= \phi(p_u)\phi(p_w)(x_2)\\ \phi(p_u)(x_1) &= 0\\ y &= 0.\end{aligned}$$

4. $\phi(s_e) : V_{\mathbf{r}(e)} \longrightarrow V_e$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-módulo com inversa $\phi(s_{e^*})$, para todo $e \in E^1$.

   Demonstração. Vejamos que $\phi(s_{e^*})$ é inversa de $\phi(s_e)$, para todo $e \in E^1$. Para tanto, fixe $x \in V_{\mathbf{r}(e)}$. Por definição de $V_{\mathbf{r}(e)}$, existe $y \in V$ tal que $x = \phi(p_{\mathbf{r}(e)})(y)$. Assim,

$$\begin{aligned}\phi(s_{e^*})\phi(s_e)(x) &= \phi(s_{e^*})\phi(s_e)(\phi(p_{\mathbf{r}(e)})(y))\\ &= \phi(s_{e^*})\phi(s_e p_{\mathbf{r}(e)})(y)\\ &= \phi(s_{e^*})\phi(s_e)(y) \qquad .\\ &= \phi(p_{\mathbf{r}(e)})(y)\\ &= x.\end{aligned}$$

   Agora, dado $y \in V_e$, pela definição de V_e, existe $x \in V$ tal que $y = \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\phi(s_e)\phi(s_{e^*})(y) &= \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(\phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x))\\ &= \phi(s_e)\phi(s_{e^*} s_e)\phi(s_{e^*})(x)\\ &= \phi(s_e)\phi(p_{\mathbf{r}(e)})\phi(s_{e^*})(x)\\ &= \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(x)\\ &= y.\end{aligned}$$

5. $V_u = \bigoplus_{\substack{e \in E^1\\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e$ se $0 < \#s^{-1}(u) < \infty$.

Demonstração. Por definição,

$$\begin{aligned} V_u &= \phi(p_u)(V) \\ &= \phi\left(\sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} s_e s_{e^*}\right)(V) \\ &= \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} \phi(s_e)\phi(s_{e^*})(V) \\ &= \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e \\ &= \bigoplus_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e, \end{aligned}$$

pois $V_e \cap V_f = \emptyset$, para $e, f \in E^1$ com $e \neq f$.

6. $V_u = \left(\bigoplus_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e\right) \bigoplus \overline{V}_u$ se $\#s^{-1}(u) = \infty$, em que $\overline{V}_u$ é um $\mathbb{K}$-submódulo de V_u.

Demonstração. Por (1), para todo $e \in s^{-1}(u)$, $V_e \subseteq V_{\mathbf{s}(e)} = V_u$. Em particular, V_u é um espaço vetorial, pois é um módulo sobre o corpo $\mathbb{K}$. Por (2),

$$\bigoplus_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e = \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e \subseteq V_u.$$

Como $\bigoplus_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e$ é subespaço de V_u, podemos completar a base (de Hammel) de $\bigoplus\limits_{\substack{e\in E^1\\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e$ e obter uma base de V_u. Assim,

$$V_u = \left(\bigoplus_{\substack{e\in E^1\\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e\right) \bigoplus \overline{V}_u,$$

em que $\overline{V}_u$ é o submódulo de V_u gerado pelo completamento acima.

7. $V = \left(\bigoplus\limits_{u\in E^0} V_u\right) \bigoplus \overline{V}$, em que $\overline{V}$ é um $\mathbb{K}$-submódulo de V.

   Demonstração. Sabemos que $V_u \subseteq V$ é subespaço vetorial de V, para todo $u \in E^0$. Por (3),

$$\bigoplus_{u\in E^0} V_u = \sum_{u\in E^0} V_u \subseteq V.$$

   Completando a base de Hammel de $\bigoplus\limits_{u\in E^0} V_u$, obtemos

$$\left(\bigoplus_{u\in E^0} V_u\right) \bigoplus \overline{V},$$

   em que $\overline{V}$ é o K-submódulo de V gerado pelo completamento.

Agora, nosso objetivo é escolher uma base particular para o espaço vetorial V. Por (7), basta escolher uma base para $\overline{V}$ e para cada V_u com $u \in E^0$. Por (6),

$$V_u = \left(\bigoplus_{\substack{e\in E^1\\ \mathbf{s}(e)=u}} V_e\right) \bigoplus \overline{V}_u.$$

Como $\overline{V}_u$ e V_e com $e \in s^{-1}(u)$ são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, então existe uma base de Hammel $\{m_x : x \in R_e\}$ para cada V_e e $\{m_x : x \in \overline{I_u}\}$ para $\overline{V}_u$. Considere os conjuntos indexadores das bases R_e e $\overline{I_u}$ de forma que sejam dois a dois disjuntos.

Definimos a base de V_u da seguinte maneira:

- se $\#s^{-1}(u) = 0$, escolha uma base $\{m_x : x \in D_u\}$ de V_u, em que D_u é um conjunto indexador;
- se $0 < \#s^{-1}(u) < \infty$, considere $D_u := \bigcup\limits_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} R_e$ e $\{m_x : x \in D_u\}$ como base de V_u;
- se $\#s^{-1}(u) = \infty$, seja $D_u := \left(\bigcup\limits_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=u}} R_e \right) \cup \overline{I_u}$ e $\{m_x : x \in D_u\}$ a base de V_u.

Por construção, os conjuntos indexadores D_u obtidos nos dois últimos itens são dois a dois disjuntos. No primeiro item, escolha conjuntos indexadores D_u tais que os conjuntos em $\{D_u\}_{u \in E^0}$ sejam dois a dois disjuntos. Por último, considere uma base $\{m_x : x \in \overline{I}\}$ de $\overline{V}$ em que $\overline{I}$ é um conjunto indexador com $\overline{I} \cap D_u = \emptyset$, para todo $u \in E^0$. Sendo assim, a base de V foi escolhida como

$$\{m_x : x \in \bigcup_{u \in E^0} D_u \cup \overline{I}\}.$$

Defina

$$W = \bigoplus_{u \in E^0} V_u.$$

Note que $V = W \oplus \overline{V}$. Considere as projeções canônicas $P_1 : V \longrightarrow W$ e $P_2 : V \longrightarrow \overline{V}$ e as inclusões canônicas $\iota_1 : W \longrightarrow V$ e $\iota_2 : \overline{V} \longrightarrow V$.

Perceba que, para cada $a \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $\phi(a) : V \longrightarrow V$. Portanto, podemos escrever para $v \in V$,

$$\phi(a)(v) = P_1(\phi(a)(v)) + P_2(\phi(a)(v)) = P_1(\phi(a)(v)),$$

pois pelo Lema 1.6 e como, para todo $e \in E^1$, $\phi(s_e)(V) = \phi(\mathbf{s}(e))(V)\phi(s_e)(V) \subseteq V_{\mathbf{s}(e)}$ e $\phi(s_{e^*})(V) = \phi(\mathbf{r}(e))(V)\phi(s_{e^*})(V) \subseteq V_{\mathbf{r}(e)}$, segue que $Im(\phi(a)) \subseteq W$

Consideremos a “restrição de ϕ a W“, ou seja, a função

$$\begin{aligned} \phi_1 : L_{\mathbb{K}}(E) &\longrightarrow End_{\mathbb{K}}(W) \\ a &\longmapsto P_1\phi(a)\iota_1 = \phi(a)\iota_1 \end{aligned}$$

que é uma representação. Nosso objetivo é mostrar, que sob algumas hipóteses adicionais, a representação ϕ_1 é equivalente de alguma forma, que será esclarecida mais adiante, a uma representação induzida por um sistema ramificado E-algébrico. Precisamos, portanto, definir tal sistema.

Considere $X = \bigcup_{u \in E^0} D_u$. Da maneira como as famílias $\{D_v\}_{v \in E^0}$ e $\{R_e\}_{e \in E^1}$ foram construídas, as condições (1) – (4) da Definição 2.1 são satisfeitas. Basta, portanto, definir bijeções $f_e : D_{\mathbf{r}(e)} \longrightarrow R_e$, para cada $e \in E^1$. Lembrando que, para cada $e \in E^1$, a restrição

$$\phi(s_e) : V_{\mathbf{r}(e)} \longrightarrow V_e$$

é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-módulos com inversa $\phi(s_{e^*})$, e os conjuntos $D_{\mathbf{r}(e)}$ e R_e são os conjuntos de índices das bases de $V_{\mathbf{r}(e)}$ e R_e, respectivamente.

Note que se a base indexada por $D_{\mathbf{r}(e)}$ é levada na base indexada por R_e, isto é, se para cada $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$

$$\phi(s_e)(m_x) = m_y,$$

para algum $y \in R_e$, então a função

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{r}(e)} &\longrightarrow R_e \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Assim, adicionamos esta hipótese, ou seja, assumimos que

$$\phi(s_e)(\{m_x : x \in D_{\mathbf{r}(e)}\}) = \{m_y : y \in R_e\}, \qquad (BPB)$$

para cada $e \in E^1$. Como $\phi(e^*)$ é a inversa de $\phi(s_e)$, isto equivale a dizer que

$$\phi(s_{e^*})(\{m_y : y \in R_e\}) = \{m_x : x \in D_{\mathbf{r}(e)}\},$$

para cada $e \in E^1$. Assim, podemos definir, para cada $e \in E^1$, a bijeção

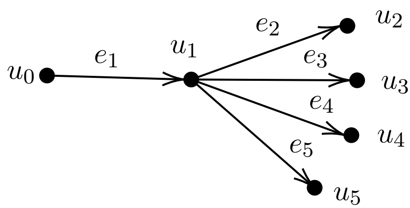
$$\begin{aligned} f_e : D_{\mathbf{r}(e)} &\longrightarrow R_e \\ x &\longmapsto y, \end{aligned}$$

em que y é tal que $\phi(s_e)(m_x) = m_y$. Desse modo,

$$(X, \{R_e\}_{e \in E^1}, \{D_v\}_{v \in E^0}, \{f_e\}_{e \in E^1})$$

é um sistema ramificado E-algébrico.

Exemplo 4.1. Vejamos um exemplo de um grafo E em que é possível que (BPB) seja satisfeita.



Sejam V um $\mathbb{K}$-módulo e $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(V)$ um homomorfismo. Pela propriedade (4), demonstrada anteriormente, segue que $\phi(s_{e_i}) : V_{\mathbf{r}(e_i)} \longrightarrow V_{e_i}$ é isomorfismo, para todo $i \in \{1, ..., 5\}$. Para $i \in \{2, ..., 5\}$, denote por $B_{\mathbf{r}(e_i)}$ a base de $V_{\mathbf{r}(e_i)}$ e defina por $B_{e_i} := \phi(s_{e_i})(B_{\mathbf{r}(e_i)})$ a base de V_{e_i}. Agora, note que pela propriedade (5), provada no início do capítulo, como $s^{-1}(u_1) = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$,

$$V_{\mathbf{r}(e_1)} = V_{u_1} = \bigoplus_{i=2}^{5} V_{e_i}.$$

Defina $B_{\mathbf{r}(e_1)} := B_{e_2} \cup ... \cup B_{e_5}$ que é base de $V_{\mathbf{r}(e_1)}$. Considere $B_{e_1} := \phi(s_{e_1})(B_{\mathbf{r}(e_1)})$. Assim, a condição (BPB) é satisfeita.

Definição 4.2. Sejam $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(M)$ e $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(W)$ representações de $L_{\mathbb{K}}(E)$, em que M e W são $\mathbb{K}$-módulos. Dizemos que π é equivalente a ϕ se existe um isomorfismo de $\mathbb{K}$-módulo $U : W \longrightarrow M$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\phi(a)"] & W \arrow[d, "U"] \\ M \arrow[u, "U^{-1}"] \arrow[r, "\pi(a)"'] & M \end{tikzcd}$$

comute, para todo $a \in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Observação 4.3. Não é verdade que toda representação de $L_{\mathbb{K}}(E)$ é equivalente a uma representação induzida por um sistema ramificado E-algébrico. Para esclarecimento, considere o grafo E

como no Exemplo 1.4. Defina $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^2)$ por:

- $\phi(s_e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\phi(s_{e^*}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$,
- $\phi(p_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

para todo $e \in E^1$ e para todo $u \in E^0$. Pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$, existe tal homomorfismo.

Suponha que exista um sistema ramificado E-algébrico X tal que a representação induzida $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(F(X))$ seja equivalente a ϕ, ou seja, exista um isomorfismo $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow F(X)$ tal que $\pi(a) = U \circ \phi(a) \circ U^{-1}$, para todo $a \in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Para cada $x \in X$, considere as funções linearmente independentes $\delta_x \in F(X)$, em que

$$\begin{aligned} \delta_x : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $F(X)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$, X possui dois elementos, digamos, $X = \{x_1, x_2\}$.

Caso $D_v = R_e = X$, as únicas possíveis bijeções $f_e : D_v \longrightarrow R_e$ são a identidade Id e a permutação T que leva x_1 em

x_2 e vice-versa. Note que

$$\pi(s_e)(\delta_{x_1}) = \delta_{x_1} \circ f_e^{-1} = \begin{cases} \delta_{x_1}, & \text{se } f_e = Id \\ \delta_{x_2}, & \text{se } f_e = T \end{cases}$$

e $\pi(s_e)(\delta_{x_2}) = \begin{cases} \delta_{x_2}, & \text{se } f_e = Id \\ \delta_{x_1}, & \text{se } f_e = T. \end{cases}$

Assim, $\pi(s_e)^2 = Id$ e $(U^{-1} \circ \pi(s_e) \circ U)^2 = Id$. Porém, $\phi(s_e)^2 \neq Id$, contradizendo a equivalência de ϕ a π.

Caso $D_v = R_e = \{x_1\}$, segue que f_e é a identidade e

$$\pi(s_e)(\delta_{x_2}) = \chi_{\{x_1\}} \cdot (\delta_{x_2} \circ f_e^{-1}) = 0.$$

Entretanto, como U e $\phi(s_e)$ são inversíveis e $\delta_{x_2} \neq 0$, então $\pi(s_e)(\delta_{x_2}) = (U \circ \phi(s_e) \circ U^{-1})(\delta_{x_2}) \neq 0$, o que é uma contradição. Os casos $D_e = R_e = \{x_2\}$, $D_e = \{x_1\}$ e $R_e = \{x_2\}$ e vice-versa são análogos. Portanto, independentemente de como seja definido o sistema ramificado E-algébrico X, ϕ não é equivalente à representação π.

Para que possamos provar o teorema a seguir, defina

$$M := \{g : X \longrightarrow \mathbb{K} : g(x) \neq 0 \text{ apenas para finitos } x \in X\}.$$

Seja $Y = X \cup \overline{I}$, lembrando que $\overline{I}$ é o conjunto indexador da base de $\overline{V}$ e considere

$$N = \{g : Y \longrightarrow \mathbb{K} : g(x) \neq 0 \text{ apenas para finitos } x \in Y\}.$$

Lembrando que $W = \bigoplus\limits_{u \in E^0} V_u$, vejamos o teorema.

Teorema 4.4. *Seja $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(V)$ uma representação. Escolha uma base do $\mathbb{K}$-espaço vetorial V como construída no* *início desta seção. Suponha que esta base satisfaça a condição (BPB). Suponha também que*

$$\phi(s_{e^*})(\overline{V_{\mathbf{s}(e)}}) = 0,$$

para todo $e \in E^1$, em que $\overline{V_{\mathbf{s}(e)}}$ foi definido anteriormente no item (6). Então:

1. *Existe uma representação $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(M)$ induzida por um sistema ramificado E-algébrico que é equivalente a ϕ_1 (a "restrição de ϕ a W").*

2. *Se $\overline{V}$ (como no item (7) acima) puder ser escolhido de forma que $\phi(p_u)(\overline{V}) = 0$, para cada $u \in E^0$, então existe um sistema ramificado E-algébrico que induz uma representação $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(N)$ que é equivalente a ϕ.*

Demonstração. Provemos primeiramente o item (1). Sejam

$$(X, \{R_e\}_{e \in E^1}, \{D_v\}_{v \in E^0}, \{f_e\}_{e \in E^1})$$

e M definidos como nos parágrafos anteriores a este teorema. Pelo Teorema 2.3 e pela Observação 2.4, existe uma representação

$$\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(M)$$

tal que, para todo $u \in E^0$, $e \in E^1$ e $g \in M$,

$$\begin{aligned} \pi(s_e)(g) &= \chi_{R_e} \cdot g \circ f_e^{-1}, \\ \pi(s_{e^*})(g) &= \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot g \circ f_e \text{ e } \pi(p_u)(g) = \chi_{D_u} \cdot g. \end{aligned}$$

Da maneira como M foi definido, M é um $\mathbb{K}$-módulo com base $\{\delta_x\}_{x \in X}$. Lembre que $\{m_x : x \in X\}$ é uma base para W. Então, a função

$$\begin{aligned} \{m_x : x \in X\} &\longrightarrow M \\ m_x &\longmapsto \delta_x \end{aligned}$$

induz um isomorfismo de $\mathbb{K}$-módulo $U : W \longrightarrow M$. Para vermos que π é equivalente a ϕ_1, basta provarmos que, para todo $a \in L_{\mathbb{K}}(E)$,

$$\phi_1(a) = U^{-1} \circ \pi(a) \circ U.$$

Como π é homomorfismo,

$$\begin{aligned} U^{-1} \circ \pi(a) \circ U \circ U^{-1} \circ \pi(b) \circ U &= U^{-1} \circ \pi(a)\pi(b) \circ U \\ &= U^{-1} \circ \pi(ab) \circ U, \end{aligned}$$

para todo $a, b \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Pelo Lema 1.6, é suficiente mostrar para todo $e \in E^1$ e para todo $v \in E^0$,

$$\begin{aligned} \phi_1(s_{e^*}) &= U^{-1} \circ \pi(s_{e^*}) \circ U, \\ \phi_1(s_e) &= U^{-1} \circ \pi(s_e) \circ U \quad e \\ \phi_1(p_v) &= U^{-1} \circ \pi(p_v) \circ U. \end{aligned}$$

Para a primeira igualdade, fixe $x \in X$ e $e \in E^1$. Segue que

$$\pi(s_{e^*})(U(m_x)) = \pi(s_{e^*})(\delta_x) = \chi_{D_{\mathbf{r}(e)}} \cdot \delta_x \circ f_e.$$

É claro que para $y \in X \setminus D_{\mathbf{r}(e)}$, $\pi(s_{e^*})(\delta_x)(y) = 0$. Agora, para $y \in D_{\mathbf{r}(e)}$,

$$\begin{aligned} \pi(s_{e^*})(\delta_x)(y) &= \delta_x(f_e(y)) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } x = f_e(y) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \; y = f_e^{-1}(x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \delta_{f_e^{-1}(x)}(y). \end{aligned}$$

Como f_e é bijeção, $y = f_e^{-1}(x) \in D_{\mathbf{r}(e)}$ se e só se $x \in R_e$. Assim, podemos reescrever:

$$\pi(s_{e^*})(\delta_x) = [x \in R_e]\delta_{f_e^{-1}(x)}.$$

Com isso, segue que, pela definição de U^{-1},

$$\begin{aligned} U^{-1} \circ \pi(s_{e^*}) \circ U(m_x) &= U^{-1} \circ \pi(s_{e^*})(\delta_x) \\ &= U^{-1}([x \in R_e]\delta_{f_e^{-1}(x)}). \\ &= [x \in R_e]m_{f_e^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Calculemos agora $\phi_1(s_{e^*})(m_x)$, começando com o caso em que $m_x \in V_u$ com $u \neq s(e)$. Para isso, provaremos uma afirmação que será usada na demonstração do teorema.

Afirmação 1. *Dado $x \in X$, se $m_x \in V_u$, então $\phi(p_u)(m_x) = m_x$.*

Demonstração. Como $V_u = \phi(p_u)(V)$, então existe $z \in V$ tal que $m_x = \phi(p_u)(z)$. Portanto,

$$\phi(p_u)(m_x) = \phi(p_u) \circ \phi(p_u)(z) = \phi(p_u)(z) = m_x,$$

como desejado.

Voltando à demonstração do teorema, pela definição de ϕ_1, como $m_x \in W$ e pela afirmação acima, segue que

$$\begin{aligned} \phi_1(s_{e^*})(m_x) &= \phi(s_{e^*})\iota_1(m_x) \\ &= \phi(s_{e^*}p_{\mathbf{s}(e)})(m_x) \\ &= \phi(s_{e^*})\phi(p_{\mathbf{s}(e)})(m_x) \\ &= \phi(s_{e^*})\phi(p_{\mathbf{s}(e)})\phi(p_u)(m_x) \\ &= \phi(s_{e^*})\phi(p_{\mathbf{s}(e)}p_u)(m_x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $s(e) \neq u$.

Calculemos $\phi_1(s_{e^*})(m_x)$ para o caso em que $m_x \in V_{\mathbf{s}(e)}$, lembrando que

$$V_{\mathbf{s}(e)} = \left(\bigoplus_{\substack{d \in E^1 \\ \mathbf{s}(d)=\mathbf{s}(e)}} V_d \right) \bigoplus \overline{V_{\mathbf{s}(e)}}.$$

Para tanto, será necessário demonstrar mais uma afirmação.

Afirmação 2. *Sejam $x \in X$ e $d \in E^1$ com $m_x \in V_d$. Então $\phi(s_d)\phi(s_{d^*})(m_x) = m_x$.*

Demonstração. Como $m_x \in V_d$, existe um $z \in V$ tal que $m_x = \phi(s_d)\phi(s_{d^*})(z)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(s_d)\phi(s_{d^*})(m_x) &= \phi(s_d)\phi(s_{d^*})(\phi(s_d)\phi(s_{d^*})(z)) \\
&= \phi(s_d)\phi(s_{d^*}s_d)\phi(s_{d^*})(z) \\
&= \phi(s_d)\phi(p_{\mathbf{r}(d)})\phi(s_{d^*})(z) \\
&= \phi(s_d p_{\mathbf{r}(d)})\phi(s_{d^*})(z) \\
&= \phi(s_d)\phi(s_{d^*})(z) \\
&= m_x,
\end{aligned}$$

como desejado.

Voltando ao teorema, dado $d \in E^1$ com $\mathbf{s}(e) = \mathbf{s}(d)$, $d \neq e$ e $m_x \in V_d \subseteq W$, pela afirmação acima,

$$\begin{aligned}
\phi_1(s_{e^*})(m_x) &= \phi(s_{e^*})\iota_1(m_x) \\
&= \phi(s_{e^*})(m_x) \\
&= \phi(s_{e^*})(\phi(s_d)\phi(s_{d^*})(m_x)) \\
&= \phi(s_{e^*}s_d)\phi(s_{d^*})(m_x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $e \neq d$.

Se $m_x \in \overline{V_{\mathbf{s}(e)}}$, então, por uma hipótese do teorema,

$$\phi_1(s_{e^*})(m_x) = \phi(s_{e^*})\iota_1(m_x) = \phi(s_{e^*})(m_x) = 0.$$

Só falta calcular $\phi_1(s_{e^*})(m_x)$ para o caso em que $m_x \in V_e$. Pela definição de $\phi(s_{e^*})$,

$$\begin{aligned}\phi_1(s_{e^*})(m_x) &= \phi(s_{e^*})\iota_1(m_x)\\ &= \phi(s_{e^*})(m_x)\\ &= m_y,\end{aligned}$$

em que $y = f_e^{-1}(x)$. Como R_e é o conjunto indexador de V_e, $m_x \in V_e$ se e somente se $x \in R_e$. Desse modo, para todo $x \in W$,

$$\phi_1(s_{e^*})(m_x) = [x \in R_e]m_{f_e^{-1}(x)}.$$

Segue que $U^{-1} \circ \pi(s_{e^*}) \circ U = \phi_1(s_{e^*})$, pois a igualdade é satisfeita para todos os elementos da base de W.

Provemos agora que para $e \in E^1$, $U^{-1} \circ \pi(s_e) \circ U = \phi_1(s_e)$. Considere $x \in X$. Para m_x elemento da base de W,

$$\pi(s_e) \circ U(m_x) = \pi(s_e)(\delta_x) = \chi_{R_e} \cdot \delta_x \circ f_e^{-1}.$$

Seja $y \in X$. Note que se $y \in X \setminus R_e$, $\pi(s_e) \circ U(m_x) = 0$. Agora, se $y \in R_e$, então

$$\begin{aligned}\pi(s_e)(\delta_x)(y) &= \delta_x(f_e^{-1}(y))\\ &= \begin{cases}1, & \text{se } f_e^{-1}(y) = x\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}1, & \text{se } y = f_e(x)\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \delta_{f_e(x)}(y).\end{aligned}$$

Como f_e é bijeção, $y = f_e(x) \in R_e$ se e só se $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$. Logo,

$$\pi(s_e)(\delta_x) = [x \in D_{\mathbf{r}(e)}]\delta_{f_e(x)}.$$

Assim, pela definição de U^{-1},

$$\begin{aligned} U^{-1} \circ \pi(s_e) \circ U(m_x) &= U^{-1} \circ \pi(s_e)(\delta_x) \\ &= U^{-1}([x \in D_{\mathbf{r}(e)}]\delta_{f_e(x)}) \\ &= [x \in D_{\mathbf{r}(e)}]m_{f_e(x)}. \end{aligned}$$

Calculemos $\phi_1(s_e)(m_x)$ para $x \in X$. Como $m_x \in W$, então $m_x \in V_u$ para algum $u \in E^0$. Pela Afirmação 1 e pela definição de ϕ_1,

$$\begin{aligned} \phi_1(s_e)(m_x) &= \phi(s_e)\iota_1(m_x) \\ &= \phi(s_e)(m_x) \\ &= \phi(s_e)(\phi(p_u)(m_x)) \\ &= \phi(s_e)\phi(p_{\mathbf{r}(e)})(\phi(p_u)(m_x)) \\ &= \begin{cases} \phi(s_e)\phi(p_{\mathbf{r}(e)})(m_x), & \text{se } u = \mathbf{r}(e) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \phi(s_e)(m_x), & \text{se } u = \mathbf{r}(e) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Para $u = \mathbf{r}(e)$, ou seja, se $m_x \in V_{\mathbf{r}(e)}$, como $D_{\mathbf{r}(e)}$ é o conjunto indexador de $V_{\mathbf{r}(e)}$, segue que $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$. Pela definição de $\phi(s_e)$, para $x \in D_{\mathbf{r}(e)}$,

$$\phi_1(s_e)(m_x) = \phi(s_e)(m_x) = m_y,$$

com $y = f_e(x)$. Com isso, para $x \in X$,

$$\phi_1(s_e)(m_x) = [x \in D_{\mathbf{r}(e)}]m_{f_e(x)},$$

provando assim, que $U^{-1} \circ \pi(s_e) \circ U = \phi_1(s_e)$.

Por último, mostremos que para $v \in E^0$, $U^{-1} \circ \pi(p_v) \circ U = \phi_1(p_v)$. Sabemos que, para $x \in X$,

$$\pi(p_v) \circ U(m_x) = \pi(p_v)(\delta_x) = \chi_{D_v} \cdot \delta_x.$$

Note que se $y \in X \setminus D_v$, então $\pi(p_v) \circ U(m_x)(y) = 0$. Por outro lado, se $y \in D_v$,

$$\pi(p_v) \circ U(m_x)(y) = \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, se $x = y$, então $x \in D_v$. Logo, $\pi(p_v) \circ U(m_x) = [x \in D_v]\delta_x$. Portanto, por definição de U^{-1},

$$\begin{aligned} U^{-1} \circ \pi(p_v) \circ U(m_x) &= U^{-1}([x \in D_v]\delta_x) \\ &= [x \in D_v]U^{-1}(\delta_x) \\ &= [x \in D_v]m_x. \end{aligned}$$

Vejamos quanto vale $\phi_1(p_v)(m_x)$, para $x \in X$. Como $m_x \in W$, então $m_x \in V_u$, para algum $u \in E^0$. Pela Afirmação 1,

$$\begin{aligned} \phi_1(p_v)(m_x) &= \phi(p_v)\iota_1(m_x) \\ &= \phi(p_v)(m_x) \\ &= \phi(p_v)\phi(p_u)(m_x) \\ &= \begin{cases} \phi(p_u)(m_x) = m_x, & \text{para } u = v \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Para $u = v$, então $m_x \in V_v$ e como D_v é o conjunto indexador de V_v, consequentemente, $x \in D_v$. Assim,

$$\phi_1(p_v)(m_x) = [x \in D_v]m_x.$$

Com isso, foi provado que $U^{-1} \circ \pi(p_v) \circ U = \phi_1(p_v)$, para todo $v \in E^0$.

Conclui-se que $U^{-1} \circ \pi(a) \circ U = \phi_1(a)$, para todo $a \in L_{\mathbb{K}}(E)$, ou seja, ϕ_1 e π são equivalentes.

Para a demonstração da parte (2) do teorema, considere o sistema ramificado E-algébrico $Y = X \cup \overline{I}$, em que $\overline{I}$ é o conjunto indexador de $\overline{V}$. Sejam $\{R_e\}_{e\in E^1}$, $\{D_u\}_{u\in E^0}$ e $\{f_e\}_{e\in E^1}$ como na parte (1). Este sistema ramificado E-algébrico induz uma representação

$$\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(N),$$

em que N foi definido acima deste teorema.

Lembre que $\{m_x : x \in Y\}$ é uma base para V. A função

$$\begin{aligned} \{m_x : x \in Y\} &\longrightarrow N \\ m_x &\longmapsto \delta_x \end{aligned}$$

induz um isomorfismo de $\mathbb{K}$-módulo $Q : V \longrightarrow N$.

Por hipótese do teorema, $\phi(p_u)(\overline{V}) = 0$, para todo $u \in E^0$. Em particular, para todo $e \in E^1$, $\phi(s_e)(\overline{V}) = \phi(s_e)\phi(p_{\mathbf{r}(e)})(\overline{V}) = 0$ e $\phi(s_{e^*})(\overline{V}) = \phi(s_{e^*})\phi(p_{\mathbf{s}(e)})(\overline{V}) = 0$. Assim, o restante da demonstração é análoga ao caso (1). $\square$

Observação 4.5. Note que se o grafo E é linha-finita, então, pelo item (5), no início do capítulo,

$$V_{\mathbf{s}(e)} = \bigoplus_{\substack{d\in E^1 \\ \mathbf{s}(d)=\mathbf{s}(e)}} V_d.$$

Neste caso, a hipótese no teorema anterior que $\phi(s_{e^*})(\overline{V_{\mathbf{s}(e)}}) = 0$ é satisfeita por vacuidade. Portanto, a primeira parte do teorema se aplica a qualquer representação de grafos de linha finita que satisfaça a condição (BPB).

Observação 4.6. Se E^0 é finito, digamos, $E^0 = \{u_1, ..., u_n\}$, então $\overline{V}$ pode ser escolhido de forma que $\phi(p_u)(\overline{V}) = 0$, para todo $u \in E^0$. De fato, se E^0 for finito, defina

$$\overline{V} = \{x \in V : \phi(p_u)(x) = 0, \text{ para todo } u \in E^0\}.$$

Note que $\left(\bigoplus_{u\in E^0} V_u\right) \cap \overline{V} = \{0\}$, pois, se $x \in \left(\bigoplus_{u\in E^0} V_u\right) \cap \overline{V}$, como $V_u = \phi(p_u)(V)$, então

$$x = \sum_{i=1}^{n} \phi(p_{u_i})(x_i),$$

para alguns $x_i \in V$ com $i \in \{1, ..., n\}$. Como $x \in \overline{V}$, para todo $i_0 \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} 0 = \phi(p_{u_{i_0}})(x) = \phi(p_{u_{i_0}}) &\left(\sum_{i=1}^{n} \phi(p_{u_i})(x_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \phi(p_{u_{i_0}})\phi(p_{u_i})(x_i) \\ &= \phi(p_{u_{i_0}})(x_i). \end{aligned}$$

Logo, $x = 0$. Além disso, $\left(\bigoplus_{u\in E^0} V_u\right) \bigoplus \overline{V} \subseteq V$. Agora, dado $y \in V$, escreva

$$y = \left(\sum_{u\in E^0} \phi(p_u)(y)\right) + \left(y - \sum_{u\in E^0} \phi(p_u)(y)\right).$$

Perceba que $\sum_{u\in E^0} \phi(p_u)(y)$ é uma soma finita, pois E^0 é finito, e que

$$\sum_{u\in E^0} \phi(p_u)(y) \in \bigoplus_{u\in E^0} V_u.$$

Note ainda que

$$y - \sum_{u \in E^0} \phi(p_u)(y) \in \overline{V},$$

pois, para todo $v \in E^0$,

$$\begin{aligned}
\phi(p_v)\left(y - \sum_{u \in E^0} \phi(p_u)(y)\right) &= \phi(p_v)(y) - \sum_{u \in E^0} \phi(p_v)\phi(p_u)(y) \\
&= \phi(p_v)(y) - \phi(p_v)(y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $V = \left(\bigoplus_{u \in E^0} V_u\right) \bigoplus \overline{V}$. Com isso, a parte (2) do teorema acima se aplica a qualquer representação de grafo E com E^0 finito, desde que a condição (BPB) seja satisfeita.

Apêndices

APÊNDICE A – Álgebras de caminhos de Leavitt

Sejam $E = (E^0, E^1, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ um grafo dirigido e $\mathbb{K}$ um corpo. Vejamos a construção da álgebra de caminhos de Leavitt de E com coeficientes em $\mathbb{K}$, denotada por $L_{\mathbb{K}}(E)$, que é a $\mathbb{K}$-álgebra universal gerada por E^0, E^1 e $(E^1)^*$.

A.1 Construção de $L_{\mathbb{K}}(E)$

Considere $G = E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$, o conjunto de geradores. Defina

$$\mathcal{F}_G := \{r_1...r_n : r_1, ..., r_n \in G \ \ e \ \ n \in \mathbb{N}^*\}$$

e considere o produto por concatenação em $\mathcal{F}_G$, ou seja,

$$\circ : \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{F}_G$$

$$(r_1...r_n, s_1...s_m) \longmapsto r_1...r_n s_1...s_m.$$

Seja

$$\mathcal{B}_G := span(\mathcal{F}_G) = \{ \sum^{finita} \lambda_r r : r \in \mathcal{F}_G, \lambda_r \in \mathbb{K}\}.$$

Defina em $\mathcal{B}_G$ a adição e multiplicação por escalar de maneira natural e defina a multiplicação de forma que seja distributiva com a adição e tal que

$$(\lambda_r r).(\lambda_s s) = (\lambda_r \lambda_s)(r.s),$$

para todo $r, s \in \mathcal{F}_G$ e para todo $\lambda_r, \lambda_s \in \mathbb{K}$. Desse modo, segue que $\mathcal{B}_G$ é uma **álgebra**.

Queremos construir $L_{\mathbb{K}}(E)$ de maneira que em $L_{\mathbb{K}}(E)$ valham as seguintes relações:

- $vw = \delta_{v,w}v$, para todo $v, w \in E^0$. (Em que $\delta_{v,w} = 1$, para $v = w$ e $\delta_{v,w} = 0$ para $v \neq w$);
- $\mathbf{s}(e)e = e\mathbf{r}(e) = e$, para todo $e \in E^1$;
- $\mathbf{r}(e)e^* = e^*\mathbf{s}(e) = e^*$, para todo $e \in E^1$;
- $e^*f = \delta_{e,f}\mathbf{r}(e)$, para todo $e, f \in E^1$;
- $v = \sum\limits_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} ee^*$, para todo $v \in E^0$ tal que $0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \infty$.

Denominaremos o conjunto de relações acima por $\mathbf{R}$. Defina os seguintes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \{vw - \delta_{v,w}v : v, w \in E^0\} \\
I_2 &= \{\mathbf{s}(e)e - e : e \in E^1\} \\
I_3 &= \{e\mathbf{r}(e) - e : e \in E^1\} \\
I_4 &= \{\mathbf{r}(e)e^* - e^* : e \in E^1\} \\
I_5 &= \{e^*\mathbf{s}(e) - e^* : e \in E^1\} \\
I_6 &= \{e^*f - \delta_{e,f}\mathbf{r}(e) : e, f \in E^1\} \\
I_7 &= \{v - \sum_{\substack{e \in E^1 \\ \mathbf{s}(e)=v}} ee^* : v \in E^0 \, e \, 0 < \#\mathbf{s}^{-1}(v) < \infty\}.
\end{aligned}
$$

Seja I o ideal de $\mathcal{B}_G$ gerado pela união dos conjuntos $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ e I_7. Considere o quociente

$$L_{\mathbb{K}}(E) := \mathcal{B}_G/I.$$

Com o intuito de verificar que $L_{\mathbb{K}}(E)$ satisfaz a propriedade universal seguem as observações seguintes.

Observação A.1. Definimos o homomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{B}_G &\longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E) \\ x &\longmapsto x + I. \end{aligned}$$

Consideramos

$$\iota(E^0) := \{p_v : v \in E^0\}$$

$$\iota(E^1) := \{s_e : e \in E^1\}$$

$$\iota((E^1)^*) := \{s_{e^*} : e \in E^1\}$$

Esta notação será utilizada em todo o trabalho para denotar os elementos do grafo E vistos em $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Observação A.2. Dada uma álgebra A e uma função $f : G \longrightarrow A$,

$$\begin{aligned} \rho_f : \mathcal{B}_G &\longrightarrow A \\ \sum_i \lambda_i \prod_j r_{ij} &\longmapsto \sum_i \lambda_i \prod_j f(r_{ij}) \end{aligned}$$

é o homomorfismo que estende f em $\mathcal{B}_G$.

Teorema A.3. ***{Propriedade Universal}*** *Sejam A uma álgebra e $f : G \longrightarrow A$ uma função tal que os conjuntos*

$$\{f(v) : v \in E^0\}$$

$$\{f(e) : e \in E^1\}$$

$$\{f(e^*) : e \in E^1\}$$

satisfazem as relações de $\mathbf{R}$*. Então, existe um único homomorfismo*

$$\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$$

tal que $\varphi \circ \iota = \rho_f$*, ou seja, tal que o diagrama abaixo comute.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_G \arrow[rr, "\rho_f"] \arrow[dr, "\iota"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & A \\
& L_{\mathbb{K}}(E) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina

$$\varphi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$$

$$x + I \longmapsto \rho_f(x).$$

Vejamos que φ está bem definida, pois se $x, y \in \mathcal{B}_G$ e $x+I = y+I$, então $x - y \in I$. Como a imagem de f satisfaz as relações em $\mathbf{R}$, consequentemente, $\rho_f(x - y) = 0$. Logo, $\rho_f(x) = \rho_f(y)$ e $\varphi(x + I) = \varphi(y + I)$.

Note que φ é homomorfismo, pois ρ_f é homomorfismo. Além disso,

$$\varphi \circ \iota(x) = \varphi(x + I) = \rho_f(x).$$

Para a unicidade, suponhamos que exista um homomorfismo $\psi : L_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow A$, tal que $\psi \circ \iota = \rho_f$. Então, se $x+I \in L_{\mathbb{K}}(E)$,

$$\psi(x + I) = \psi(\iota(x)) = \rho_f(x) = \varphi \circ \iota(x) = \varphi(x + I).$$

Logo, φ é o único homomorfismo de $L_{\mathbb{K}}(E)$ em A com tal propriedade. $\square$

A.2 Unicidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$

Teorema A.4. *{Unicidade}* *Sejam C uma álgebra e $j : \mathcal{B}_G \longrightarrow C$ um homomorfismo tal que, para qualquer homomorfismo $\rho : \mathcal{B}_G \longrightarrow A$ que satisfaça* **R**, *exista um único homomorfismo $\varphi : C \longrightarrow A$ tal que $\varphi \circ j = \rho$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comute.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "j"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & A \\
& C \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Nestas condições, $C \cong L_{\mathbb{K}}(E)$.

Demonstração. Apliquemos repetidas vezes a propriedade universal que C e $L_{\mathbb{K}}(E)$ obedecem.

(i) Pela propriedade universal, existe um único homomorfismo ψ_1 tal que $\psi_1 \circ \iota = \iota$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_G \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & L_{\mathbb{K}}(E) \\
& L_{\mathbb{K}}(E) \arrow[ur, dashed, "\psi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $Id_{L_{\mathbb{K}}(E)}$ é um homomorfismo tal que $Id_{L_{\mathbb{K}}(E)} \circ \iota = \iota$, então $\psi_1 = Id_{L_{\mathbb{K}}(E)}$.

(ii) Pela propriedade universal, existe um único homomorfismo ψ_2 tal que $\psi_2 \circ j = j$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_G \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & C \\
& C \arrow[ur, dashed, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Como Id_C é um homomorfismo tal que $Id_C \circ j = j$, então $\psi_2 = Id_C$.

(iii) Pela propriedade universal, existe um único homomorfismo ψ_3 tal que $\psi_3 \circ \iota = j$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_G \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\iota"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & C \\
& L_{\mathbb{K}}(E) \arrow[ur, dashed, "\psi_3"'] &
\end{tikzcd}$$

(iv) Analogamente, existe um único homomorfismo ψ_4 tal que $\psi_4 \circ j = \iota$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_G \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "j"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & L_{\mathbb{K}}(E) \\
& C \arrow[ur, dashed, "\psi_4"'] &
\end{tikzcd}$$

Note que o homomorfismo

$$\psi_3 \circ \psi_4 : C \longrightarrow C$$

é tal que

$$(\psi_3 \circ \psi_4) \circ j = \psi_3 \circ \iota = j.$$

Por (ii),

$$\psi_3 \circ \psi_4 = Id_C.$$

De maneira análoga, por (i),

$$\psi_4 \circ \psi_3 = Id_{L_{\mathbb{K}}(E)}.$$

Como $\psi_3 = \psi_4^{-1}$, então

$$C \cong L_{\mathbb{K}}(E).$$

$\square$

Referências

1 G. Abrams and G. Aranda-Pino. The Leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, 293:319–334, 2005. Citado na página 13.

2 G. Abrams, M. Molina, and P. Ara. *Leavitt path algebras a primer and handbook*. Springer, 1st edition, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 13, 53, 54 e 55.

3 P. Ara, M. Moreno, and E. Pardo. Nonstable K-theory for graph algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 2007. Citado na página 13.

4 G. Boava. Caracterizações da C^*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais. *Dissertação (Mestrado) — UFSC*, 2007. Nenhuma citação no texto.

5 Ado R. D. Costa. Teorema de unicidade das álgebras de Leavitt via produtos cruzados parciais. *Dissertação (Mestrado) — UFSC*, 2016. Nenhuma citação no texto.

6 Daniel Gonçalves and C. Canto. Representations of relative Cohn path algebras. *Submetido para publicação, disponível em: https://arxiv.org/abs/1806.03077*, 2018. Citado na página 57.

7 Daniel Gonçalves and Danilo Royer. Graph Algebras as Subalgebras of the Bounded Operators in $l_2(\mathbb{R})$. *Submetido para publicação, disponível em: https://arxiv.org/abs/0908.1055v1*, 2009. Citado na página 13.

8 Daniel Gonçalves and Danilo Royer. Unitary equivalence of representations of graph algebras and branching systems. *Functional Analysis and Its Applications*, 2011. Citado na página 13.

9 Daniel Gonçalves and Danilo Royer. On the Representations of Leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 13, 40, 53 e 57.