Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Pós-Graduação em Matemática

MTM

Exame de Qualificação em Análise – 2025.1

Nome:

Regra. Você deve resolver 5 (cinco) questões sendo:

- 2 (duas) da Parte I. Análise Funcional;
- 2 (duas) da Parte II. Medida e Integração;
- 1 (uma) da Parte III. Topologia.

Parte I. Análise Funcional

Questão I.1. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ (que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com $\dim X = \infty$, e defina $S = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$. Mostre que $\overline{B}_1^X(0) \subset \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$ e conclua que S não é fechado em $\sigma(X,X^*)$, onde $\sigma(X,X^*)$ denota a topologia fraca em X.

Notação. $\overline{B}_1^X(0) := \{x \in X \colon \|x\| \leqslant 1\}$ denota a bola unitária fechada de $(X, \|\cdot\|)$.

Questão I.2. Considere $\ell^2(\mathbb{C}) = \{\mathbf{z} = \{z_n\} \subset \mathbb{C} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^2 < \infty\}$ com norma $\|\mathbf{z}\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, que já sabemos ser um espaço de Banach.

Sejam Δ um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e $\{\alpha_n\}$ uma sequência de pontos de Δ que é densa em Δ. Defina $T \colon \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ por

$$T\mathbf{z} = \{\alpha_n z_n\} \quad \text{onde } \mathbf{z} = \{z_n\}.$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$. Mostre também que $\sigma(T) = \Delta$, que α_n é um autovalor de T para cada $n \in \mathbb{N}$ e que para $\lambda \in \Delta \setminus \{\alpha_n\}$ temos $\lambda \in \sigma_c(T)$ (o espectro contínuo de T).

Questão I.3. Assuma verdadeiro o seguinte resultado: "sejam X um espaço vetorial e duas normas em X, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, tais X é um espaço de Banach para ambas as normas, e que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leqslant c\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Então essas duas normas são equivalentes, isto é, existe $d > 0$ para o qual $\|x\|_1 \leqslant d\|x\|_2$ para todo $x \in X$."

Com isto, enuncie e demonstre o **Teorema do Gráfico Fechado**.

Questão I.4. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Demonstre o seguinte **Teorema da Representação de Riesz**: Se $f \in H^*$ então existe um único $u \in H$ tal que $\langle v, f\rangle = \langle v, u\rangle$ para todo $v \in H$.

Com isto, a aplicação $T \colon H \to H^*$ definida por $\langle v, Tu\rangle = \langle v, u\rangle$ para todos $u, v \in H$ é sobrejetora. Mostre ainda que T é uma isometria linear–conjugada, isto é, que $\|Tu\|_{H^*} = \|u\|_H$ para todo $u \in H$ e que $T(u_1 + \alpha u_2) = Tu_1 + \overline{\alpha} Tu_2$ para todos $u_1, u_2 \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Notação. Aqui para $f \in H^*$ e $v \in H$, estamos usando a notação $\langle v, f\rangle = f(v)$.

Parte II. Medida e Integração

Questão II.1. Demonstre o **Teorema da Convergência Dominada**: considere $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}$ uma sequência de funções μ–integráveis. Assuma que $\{f_n\}$ converge μ–quase sempre para uma função f e existe uma função μ–integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é μ–integrável e $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Mostre ainda que, sob as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada, vale $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Questão II.2. Se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de probabilidade, isto é, um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, mostre que para todo $1 < p < \infty$ temos $L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu) \subset L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ e que $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$.

Questão II.3. Se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $f \in \mathscr{L}^+$, isto é, $f \colon X \to [0, \infty]$ é mensurável e $\int f d\mu < \infty$, mostre que dado $\varepsilon > 0$ existe $E \in \mathscr{M}$ com $\mu(E) < \infty$ e

$$\int f d\mu \leqslant \int_E f d\mu + \varepsilon.$$

Questão II.4. Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Se f e g são funções mensuráveis em X, defina

$$\rho(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

Então sabemos (não precisa provar) que ρ é uma métrica no espaço das funções mensuráveis em X, e identificamos as funções que são iguais μ–quase sempre. Mostre que $\rho(f_n, f) \to 0$ se, e somente se, $f_n \to f$ em medida.

Parte III. Topologia

Questão III.1. Demonstre o **Teorema de Tychonoff**: se $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de espaços topológicos compactos então $\left(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda\right)$ é compacto, onde $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ denota a topologia produto no espaço produto $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Questão III.2. Seja $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos, X um conjunto não–vazio qualquer e, para cada $\lambda \in \Lambda$, uma função $f_\lambda : X \to X_\lambda$. A topologia menos fina em X que torna todas as funções f_λ contínuas é chamada de **topologia gerada pela família** $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, que denotaremos por τ. Mostre que a coleção formada por

$$\mathscr{E} = \{f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \colon U_\lambda \in \tau_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\},$$

é uma subbase para uma topologia em X, e que a topologia gerada por $\mathscr{E}$ é exatamente τ. Mostre também que, se (Y, β) é um espaço topológico, uma função $g \colon (Y, \beta) \to (X, \tau)$ é contínua se, e somente se, $f_\lambda \circ g \colon (Y, \beta) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$.

Questão III.3. Uma coleção $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ tem a **propriedade da interseção finita** (ou **PIF**, para simplificar) se para todos $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$ temos $\cap_{i=1}^n \overline{F_i} \neq \varnothing$.

Mostre que um espaço topológico (X, τ) é compacto se, e somente se, toda família $\mathscr{F}$ com a PIF satisfaz $\cap_{F \in \mathscr{F}} \overline{F} \neq \varnothing$.