Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise - 2022/01

Escolha e resolva **somente 5** das 6 primeiras questões abaixo. A última questão é optativa e vale um ponto extra.

1. Apresente um exemplo de dois espaços de Banach X e Y e de um operador linear e contínuo $T\colon X \longrightarrow Y$ tais que: (i) T é injetivo; (ii) $T^{-1}\colon Z \longrightarrow X$ é descontínuo, onde $Z = \mathcal{R}(T) \subset Y$ é o conjunto imagem de T. Tal operador pode existir caso X tenha dimensão finita? E se Y tiver dimensão finita? (Dica: analise o operador integral.)

2. Sejam $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach. Suponha que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c_0\|x\|_2$, para todo $x \in X$. Mostre que existe uma constante $c_1 > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq c_1\|x\|_1$, para todo $x \in X$.

3. Sejam X um espaço de Banach e $B \subset X$ um conjunto qualquer. Assuma que o conjunto
$$f(B) = \{f(x) : x \in B\} \subset \mathbb{R}$$
é limitado para qualquer funcional linear e contínuo $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Prove que B é limitado. (Dica: aplique o Princípio da Limitação Uniforme à família $(T_x)_{x\in B}$, onde $T_x\colon X' \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$.)

4. Essa questão diz respeito à medida de de Lebesgue.

   a) Defina conjunto mensurável em $\mathbb{R}^n$. Dê alguma caracterização desses conjuntos mensuráveis. Defina função mensurável.

   b) Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Prove que f^2 é também mensurável.

   c) Prove que toda função monótona de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é mensurável.

   d) Existe conjunto $F \subset [0, 1]$ que seja fechado, mensurável, com medida positiva e que não contenha nenhum intervalo? Justifique. (Dica: Considere uma sequência (a_n) de números positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$.)

5. a) Defina espectro de um operador linear. Defina também espectro pontual, contínuo e residual.

b) Considere o operador $T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ definido por

$$Tx = (x_2, x_3, ...), \quad \text{para} \;\; x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_2.$$

Determine os espectros pontual, contínuo e residual de T. O operador T é compacto?

6. Escolha e **resolva somente um** dos dois itens abaixo:

a) Seja X um espaço vetorial normado e $F \subset X$ um conjunto convexo e fortemente fechado. Mostre que F é fracamente fechado.

b) Seja M espaço métrico compacto. Prove que M é sequencialmente compacto.

Questão Bônus: Classifique cada uma das afirmações a seguir como Verdadeira ou Falsa e apresente uma breve justificativa para a sua resposta (Dica: em alguns itens vale a pena analisar os espaços ℓ_p):

a) Se X é um espaço de Banach, então a bola unitária de seu dual topológico X' é fracamente compacta.

b) Em qualquer espaço de Banach, a bola unitária é fracamente compacta.

c) Se X é separável, então X' também é separável.

d) Todo espaço de Banach separável é reflexivo.