EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM GEOMETRIA - PARTE 2

DOUTORADO MTM/UFSC 2021/1

Convenções: Neste Exame, a menos de menção contrária, *variedade* é sempre sinônimo de variedade real de classe C^∞ e dimensão finita, e *suave* é sinônimo de C^∞.

Questão 1. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial suave de posto $k \in \mathbb{N}$ sobre a variedade M. Lembre-se que k seções $\sigma_1, \ldots, \sigma_k : U \subset M \to E$ de E definidas no aberto $U \subset M$ definem um *referencial local* de E se para cada $p \in U$, $\{\sigma_1(p), \ldots, \sigma_k(p)\}$ é base da fibra E_p sobre p.

a) Dado um referencial local suave $\sigma_1, \ldots, \sigma_k : U \subset M \to E$, ponha

$$\Phi^{-1} : (p, v^1, \ldots v^k) \in U \times \mathbb{R}^k \mapsto \sum_{i=1}^{k} v^i \sigma_i(p) \in \pi^{-1}(U).$$

Prove que a inversa Φ existe e é uma trivialização local de E.

b) Prove que uma seção $\sigma : M \to E$ é suave se e somente para qualquer $p \in M$ e qualquer referencial local suave $\sigma_1, \ldots, \sigma_k : U \subset M \to E$ com $U \ni p$, as componentes de σ nesse referencial pertencem a $C^\infty(U)$.

Questão 2. Seja M uma variedade suave. Mostre que o campo vetorial $X : M \to TM$ é suave se e somente se para todo aberto $U \subset M$ e toda função $f \in C^\infty(U)$, a função

$$Xf : p \in U \mapsto X_p(f)$$

é suave.

Questão 3. Considere a forma volume canônica $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ em $\mathbb{R}^3$.

(1) ω é exata? Justifique.

(2) Expresse ω em coordenadas esféricas (ρ, φ, θ), dadas por

$$(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi).$$

(3) Calcule

$$\int_{B_1(0)} \omega,$$

sendo $B_1(0)$ a bola aberta de centro $0 \in \mathbb{R}^3$ e raio 1.

Questão 4. Prove que todo grupo de Lie tem fibrado tangente trivial. Use isto para provar que todo grupo de Lie é orientável.