Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Análise

16 de Fevereiro de 2021

Nome: ____

Assinatura: ____

Questão 1. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e considere as seguintes noções:*

(a) Se $x \in X$ e $U \in \mathcal{T}$ forem tais que $x \in U$, diremos que U é uma vizinhança de x.

(b) $(X, \mathcal{T})$ é chamado de espaço de Hausdorff se para quaisquer par de pontos distintos x_1, x_2 em X, existirem vizinhanças U_1 de x_1 e U_2 de x_2, tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(c) Dizemos que X é localmente compacto em $x \in X$, se existir algum subconjunto $C \subset X$ compacto que contenha alguma vizinhança de x.

Assuma que $(X, \mathcal{T})$ seja um espaço de Hausdorff. Demonstre as seguintes afirmações.

(i) Se $Y \subset X$ é um conjunto compacto e $x \in X \setminus Y$, então existem subconjuntos abertos disjuntos U e V de X tais que $x \in U$ e $Y \subset V$.

(ii) Mostre que X é um espaço topológico localmente compacto em $x \in X$ se, e somente se, para toda vizinhança U de $x \in X$, exitir uma vizinhança V de $x \in X$ tal que $\overline{V}$ é um compacto e $\overline{V} \subset U$.

Questão 2. Seja $C\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ o espaço de Banach das funções complexas contínuas em $[0,1]$ munido da norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \|f(x)\|_{\mathbb{C}}$. Fixe $g \in C\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ e defina o operador

$$T_g \colon \begin{cases} C\big([0,1], \mathbb{C}\big) & \to \quad C\big([0,1], \mathbb{C}\big), \\ \qquad f & \mapsto \qquad gf. \end{cases}$$

(i) Prove que T_g é um operador linear limitado.

(ii) Deduza o conjunto $\sigma(T_g)$ (i.e., o espectro do operador linear T_g) em termos da função g.

Questão 3. Sejam X um conjunto, $\mathcal{X}$ uma σ-álgebra em X, μ uma medida σ-finita definida em $\mathcal{X}$ e $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Mostre que $L^q(X, \mathcal{X}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ se, e somente se, $\mu(X) < \infty$. [Dica: Para a parte "somente se", assumindo $\mu(X) = \infty$, considere uma família de conjuntos disjuntos $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{X}$ satisfazendo $\mu(E_n) \geq 1$.)

(b) Se $\mu(X) = 1$ e $f \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{L^n(X,\mathcal{X},\mu)} = \|f\|_{L^\infty(X,\mathcal{X},\mu},$$

onde $\|f\|_n = \left(\int_X |f|^n d\mu\right)^{1/n}$ e $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in X\}$.